



Processus de Poisson sur les groupes de Lie : diffusion multiple et phase géométrique des ondes polarisées

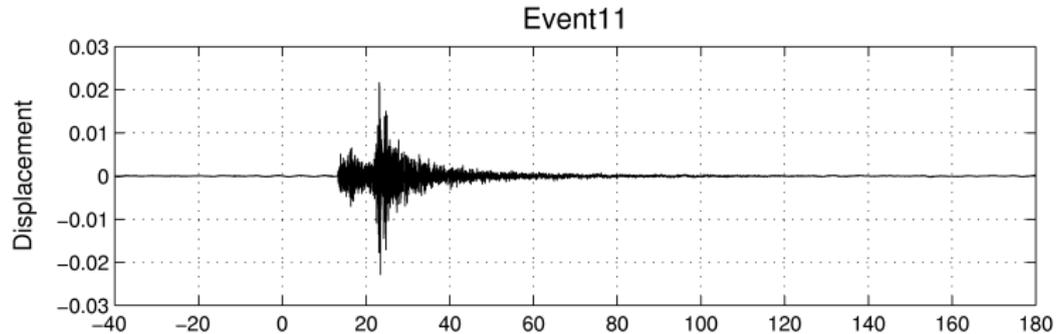
Nicolas Le Bihan

CNRS, Gipsa-Lab

`Nicolas.Le-Bihan@gipsa-lab.grenoble-inp.fr`

COLLABORATEURS : V. ROSSETTO, J. BOULANGER, J.H. MANTON ET S. SAID

Codas en sismologie

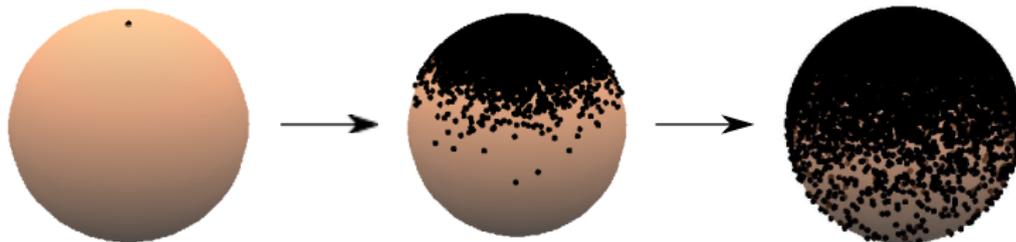


Modélisation :

- Description déterministe inadaptée
- Diffusion multiple, transfert radiatif
- **Processus stochastique ?**

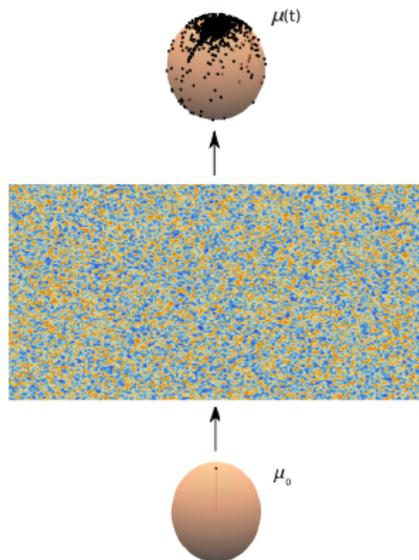
Dépolarisation

Évolution de l'état de polarisation sur la sphère de Poincaré

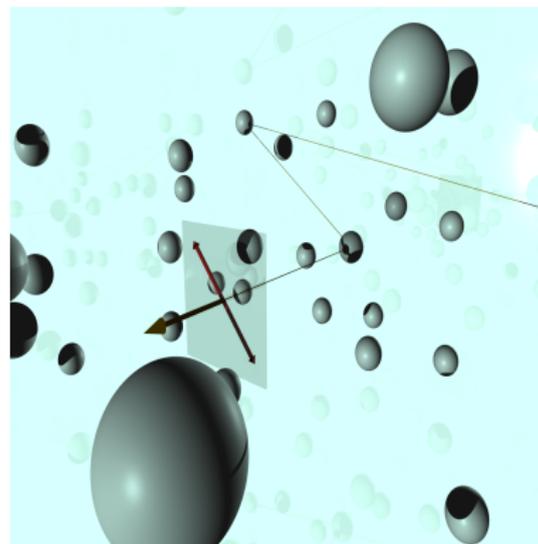


Propagation de la lumière polarisée à travers une fibre optique avec biréfringence.

Diffusion multiple et polarisation



Milieu
Aléatoire



Modélisation stochastique

- Diffusion multiple des ondes et processus sur $SO(3)$
- Estimation sur les groupes de Lie compacts
- Prise en compte de la polarisation
- Diffusion polarisée et transport parallèle
- Processus stochastiques avec phase géométrique

Plan

- 1 Problématique
- 2 Fonctions caractéristiques sur les groupes de Lie compacts
 - Cas général
 - Cas particulier : $SO(3)$
- 3 Processus de Lévy
 - Processus de Poisson composé de rotation
 - Mouvement Brownien de rotation
 - Entrelacement
- 4 Decompounding
 - Cas des groupes de Lie compacts
 - Cas $SO(3)$ et diffusion multiple
- 5 Phase géométrique
 - Le pendule de Foucault
 - Ondes polarisées et phase géométrique



Plan

- 1 Problématique
- 2 Fonctions caractéristiques sur les groupes de Lie compacts
 - Cas général
 - Cas particulier : $SO(3)$
- 3 Processus de Lévy
 - Processus de Poisson composé de rotation
 - Mouvement Brownien de rotation
 - Entrelacement
- 4 Decompounding
 - Cas des groupes de Lie compacts
 - Cas $SO(3)$ et diffusion multiple
- 5 Phase géométrique
 - Le pendule de Foucault
 - Ondes polarisées et phase géométrique

Plan

- 1 Problématique
- 2 Fonctions caractéristiques sur les groupes de Lie compacts
 - Cas général
 - Cas particulier : $SO(3)$
- 3 Processus de Lévy
 - Processus de Poisson composé de rotation
 - Mouvement Brownien de rotation
 - Entrelacement
- 4 Decompounding
 - Cas des groupes de Lie compacts
 - Cas $SO(3)$ et diffusion multiple
- 5 Phase géométrique
 - Le pendule de Foucault
 - Ondes polarisées et phase géométrique



Représentation

Notations

- G : groupe de Lie compact connexe.
- μ : mesure de Haar (normalisée) biinvariante sur G
- $L^2(G, \mathbb{R})$: Espace de Hilbert des fonctions L^2 sur G
- Représentation $\pi : G \rightarrow GL(V)$, avec V espace vectoriel
- $Irr(G)$: ensemble (dénombrable) des classes d'équivalence des représentations irréductibles de G .
- \exists représentation unitaire U^δ ($\delta \in Irr(G)$), telle que :

$$U^\delta : G \rightarrow SU(\mathbb{C}^{d_\delta})$$

avec d_δ la dimension de la rep. de la classe δ .



Théorème de Peter-Weyl

Base orthonormale

Les fonctions $d_\delta^{1/2} U_{ij}^\delta$ avec $\delta \in Irr(G)$ et $i, j = 1, \dots, d_\delta$ forment une base orthonormale de $L^2(G, \mathbb{C})$

Série de Fourier

Toute fonction $f \in L^2(G, \mathbb{C})$ admet la décomposition en série de Fourier suivante :

$$f(g) = \sum_{\delta \in Irr(G)} d_\delta Tr(A_\delta U^{\delta^\dagger}(g))$$

avec

$$A_\delta = \int f(g) U^\delta(g) d\mu(g)$$



Variable aléatoire sur G

Soit X une v.a. sur G , définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note sa densité $p_X \in L^2(G, \mathbb{R})$ (*w.r.t.* mesure μ).

Fonction caractéristique

Soit X une v.a. sur G . La fonction caractéristique ϕ_X de X est :

$$\phi_X(\delta) = \mathbb{E} \left[U^\delta(X) \right]$$

Coefficients de Fourier

Si la variable aléatoire X à valeurs dans G admet une densité p_X , sa fonction caractéristique donne les coeff. de Fourier de p_X :

$$\phi_X(\delta) = \int p_X(g) U^\delta(g) d\mu(g)$$

Propriétés de ϕ_X

Convergence

Une séquence $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires sur G converge en distribution vers X si $\forall \delta \in Irr(G)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{X_n}(\delta) = \phi_X(\delta)$$

Produit de variables

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs sur G et $Z = XY$. Alors, pour tout $\delta \in Irr(\delta)$:

$$\phi_Z(\delta) = \phi_X(\delta)\phi_Y(\delta)$$



Propriétés de ϕ_X : Symétries

Invariance par inversion

Une v.a. X sur G est *invariante par inversion* si $X \stackrel{d}{=} X^{-1}$

Produit de variables

Soit X une v.a. sur G *invariante par inversion*. Soit X_1, X_2, \dots, X_n des copies indépendantes de X . Alors le produit $X_1 X_2 \dots X_n$ est *invariant par inversion*.

Fonction caractéristique

X , une v.a. sur G , est *invariante par inversion* ssi :

$$\phi_X(\delta) \text{ est Hermitienne } \forall \delta \in \text{Irr}(G)$$

Propriétés de ϕ_X : Symétries

Invariance par conjugaison

Une v.a. X sur G est *invariante par conjugaison* si :

$$X \stackrel{d}{=} kXk^{-1} \quad \forall k \in G$$

Produit

Si X et Y sont indépendantes et *invariantes par conjugaison*, alors XY est *invariante par conjugaison*.

Fonction caractéristique

X , une v.a. sur G , est *invariante par conjugaison ssi* :

$$\phi_X(\delta) = a_\delta I_\delta \quad \forall \delta \in \text{Irr}(G)$$



Plan

- ① Problématique
- ② Fonctions caractéristiques sur les groupes de Lie compacts
 - Cas général
 - Cas particulier : $SO(3)$
- ③ Processus de Lévy
 - Processus de Poisson composé de rotation
 - Mouvement Brownien de rotation
 - Entrelacement
- ④ Decompounding
 - Cas des groupes de Lie compacts
 - Cas $SO(3)$ et diffusion multiple
- ⑤ Phase géométrique
 - Le pendule de Foucault
 - Ondes polarisées et phase géométrique

Cas particulier $G = SO(3)$ $SO(3)$: groupe des rotations

Pour une matrice $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$R \in SO(3) \Rightarrow \begin{cases} RR^T = I \\ \det(R) = 1 \end{cases}$$

Angles d'Euler

$$R(\psi, \theta, \varphi) = R_Z(\psi)R_Y(\theta)R_Z(\varphi)$$

avec $-\pi < \psi, \varphi \leq \pi$ et $0 \leq \theta \leq \pi$

Cas particulier $G = SO(3)$

Mesure de Haar

Pour une fonction $h : SO(3) \rightarrow \mathbb{C}$, paramétrée par les angles d'Euler, on a :

$$\int_{SO(3)} h d\mu = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\psi, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\psi d\varphi$$

Cas particulier $G = SO(3)$

Peter-Weyl

Une fonction $h \in L^2(SO(3), \mu)$ possède une *série de Fourier* telle que :

$$h = \sum_{\delta \geq 0} d_{\delta} \text{Tr}(\tilde{h}^{\delta} U^{\delta \dagger}) \quad \tilde{h}^{\delta} = \int_{SO(3)} h U^{\delta} d\mu$$

avec

$$U_{mn}^{\delta}(\psi, \theta, \varphi) = e^{-im\psi} P_{mn}^{\delta}(\cos \theta) e^{-in\varphi}$$

avec $\delta \geq 0$ et $-\delta \leq m, n \leq \delta$.

\Rightarrow les *coeff. de Fourier* \tilde{h}^{δ} sont de taille $(2\delta + 1) \times (2\delta + 1)$



Variables aléatoires sur $SO(3)$

Définition

Une v.a. de rotation est une matrice aléatoire 3×3 à valeurs sur $SO(3)$

Fonction caractéristique

La fonction caractéristique de X , donnée par :

$$\phi_X(\delta) = \mathbb{E} \left[U^\delta(X) \right]$$

est une séquence, pour $\delta \geq 0$, de matrices $(2\delta + 1) \times (2\delta + 1)$.

Propriétés

Égalité en distribution

$$X \stackrel{d}{=} Y \Leftrightarrow \phi_X(\delta) = \phi_Y(\delta) \quad \forall \delta \geq 0$$

Convergence en distribution

$$X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \phi_{X_n}(\delta) \xrightarrow{d} \phi_X(\delta) \quad \forall \delta \geq 0$$

Convolution

Si X et Y indépendantes et $Z = XY$:

$$\phi_Z(\delta) = \phi_X(\delta)\phi_Y(\delta) \quad \forall \delta \geq 0$$



Propriétés : Symétries

Invariance par inversion

Si $X \stackrel{d}{=} X^T$, alors $\phi_X(\delta) = [\phi_X(\delta)]^\dagger \forall \delta \geq 0$ (Matrices Hermitiennes)

Invariance par conjugaison

Si $X \stackrel{d}{=} RXR^T$, pour $R \in SO(3)$, alors $\phi_X(\delta) = a_\delta I_\delta \forall \delta \geq 0$ (Multiples de l'identité I_δ)

Invariance zonale

Autre type de symétrie sur $SO(3)$: $X \stackrel{d}{=} R_Z(\varphi)XR_Z(\psi)$

Coeff. de Fourier *scalaires* et $U^\delta = P_{00}^\delta(\cos \theta)$



Plan

- ① Problématique
- ② Fonctions caractéristiques sur les groupes de Lie compacts
 - Cas général
 - Cas particulier : $SO(3)$
- ③ Processus de Lévy
 - Processus de Poisson composé de rotation
 - Mouvement Brownien de rotation
 - Entrelacement
- ④ Decompounding
 - Cas des groupes de Lie compacts
 - Cas $SO(3)$ et diffusion multiple
- ⑤ Phase géométrique
 - Le pendule de Foucault
 - Ondes polarisées et phase géométrique



PPC de rotation

Soient $(X_n)_{n \geq 0}$ des variables *i.d.d.* de rotation, et $N(t)$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Le processus $Y(t)$, avec $t \geq 0$ et $X_0 = I$, tel que :

$$Y(t) = \prod_{n=0}^{N(t)} X_n$$

est un *Processus de Poisson composé* de rotation.

Asymptotique

Soit U une variable aléatoire de rotation *uniforme*. Si X_1 n'appartient pas à un sous-groupe propre de $SO(3)$, alors $Y(t) \xrightarrow{d} U$ quand $t \uparrow \infty$



Fonction caractéristique

Soit $Y(t)$ un PPC de rotation. Sa fonction caractéristique $\phi_{Y(t)} \equiv \phi_t$ est donnée pour $t \geq 0$ par :

$$\phi_t(\delta) = \exp[\lambda t (\phi_{X_1}(\delta) - I_\delta)]$$

avec $\delta \geq 0$ et ϕ_{X_1} la fonction caractéristique de X_1 .

Symétrie

Pour $t \geq 0$, si X_1 est invariant par inversion (*resp.* conjugaison) alors $Y(t)$ est invariant par inversion (*resp.* conjugaison).



Plan

- ① Problématique
- ② Fonctions caractéristiques sur les groupes de Lie compacts
 - Cas général
 - Cas particulier : $SO(3)$
- ③ Processus de Lévy
 - Processus de Poisson composé de rotation
 - Mouvement Brownien de rotation
 - Entrelacement
- ④ Decompounding
 - Cas des groupes de Lie compacts
 - Cas $SO(3)$ et diffusion multiple
- ⑤ Phase géométrique
 - Le pendule de Foucault
 - Ondes polarisées et phase géométrique



Equation d'Euler-Langevin

Eq. diff. Stochastique

Soit $B = [B^1, B^2, B^3]^T$ un mouvement Brownien sur \mathcal{R}^3 .
L'équation matricielle d'Euler-Langevin est donnée par :

$$dY(t) = Y(t)dJ(t)$$

avec $Y(t)$ le processus inconnu. J est un “plongement” de B dans l'espace des matrices 3×3 anti-symétriques :

$$J(t) = B^1(t)J_1 + B^2(t)J_2 + B^3(t)J_3$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mouvement Brownien de rotation

Système d'EDS

Euler-Langevin comme un système d'EDS :

$$dY^{ij}(t) = \sum_{l=1}^3 \left[\sum_{k=1}^3 Y^{ik} J_l^{kj} \right] dB^l(t)$$

C'est un mouvement Brownien de rotation *gauche*.

Symétrie

La solution de l'équation d'Euler-Langevin est *invariante par inversion*. De plus, si la matrice de covariance de B est de la forme $a^2 I$ ($a \in \mathbb{R}$), alors $Y(t)$ est *invariante par conjugaison*.



Fonction caractéristique

ϕ_t pour le mouvement Brownien de rotation

Soit Y la solution de l'équation d'Euler-Langevin et supposant que la matrice de covariance de B est de la forme $a^2 I$, alors :

$$\phi_t(\delta) = e^{-\frac{a^2}{2}\delta(\delta+1)t} I_\delta$$

pour $\delta \geq 0$ et $\phi_t \equiv \phi_{Y(t)}$

Asymptotique

Soit U une variable aléatoire de rotation *uniforme*. Soit $Y(t)$ la solution de l'équation d'Euler-Langevin avec matrice de covariance $a^2 I$ pour B . Alors on a $Y(t) \xrightarrow{d} U$ pour $t \uparrow \infty$.



Plan

- ① Problématique
- ② Fonctions caractéristiques sur les groupes de Lie compacts
 - Cas général
 - Cas particulier : $SO(3)$
- ③ Processus de Lévy
 - Processus de Poisson composé de rotation
 - Mouvement Brownien de rotation
 - Entrelacement
- ④ Decompounding
 - Cas des groupes de Lie compacts
 - Cas $SO(3)$ et diffusion multiple
- ⑤ Phase géométrique
 - Le pendule de Foucault
 - Ondes polarisées et phase géométrique



Processus de Lévy de rotation

Définition

$(Z_t)_{t \geq 0}$ (*càdlàg*) est un **processus de Lévy** sur $SO(3)$ si :



Processus de Lévy de rotation

Définition

$(Z_t)_{t \geq 0}$ (*càdlàg*) est un **processus de Lévy** sur $SO(3)$ si :

- $Z_0 = I$



Processus de Lévy de rotation

Définition

$(Z_t)_{t \geq 0}$ (càdlàg) est un **processus de Lévy** sur $SO(3)$ si :

- $Z_0 = I$
- Ses accroissements $Z_{t_1}^{-1}Z_{t_0}, Z_{t_2}^{-1}Z_{t_1}, \dots$ sont indépendants ($t_0 < t_1 < t_2 \dots$).



Processus de Lévy de rotation

Définition

$(Z_t)_{t \geq 0}$ (càdlàg) est un **processus de Lévy** sur $SO(3)$ si :

- $Z_0 = I$
- Ses accroissements $Z_{t_1}^{-1}Z_{t_0}, Z_{t_2}^{-1}Z_{t_1}, \dots$ sont indépendants ($t_0 < t_1 < t_2 \dots$).
- Ses accroissements sont stationnaires : $Z_{t+\tau}^{-1}Z_t \stackrel{d}{=} Z_\tau, \forall t$



Processus de Lévy de rotation

Définition

$(Z_t)_{t \geq 0}$ (càdlàg) est un **processus de Lévy** sur $SO(3)$ si :

- $Z_0 = I$
- Ses accroissements $Z_{t_1}^{-1}Z_{t_0}, Z_{t_2}^{-1}Z_{t_1}, \dots$ sont indépendants ($t_0 < t_1 < t_2 \dots$).
- Ses accroissements sont stationnaires : $Z_{t+\tau}^{-1}Z_t \stackrel{d}{=} Z_\tau, \forall t$
- Continuité stochastique : $Z_t \xrightarrow{d} I$ quand $t \downarrow 0$



Processus de Lévy de rotation

Définition

$(Z_t)_{t \geq 0}$ (càdlàg) est un **processus de Lévy** sur $SO(3)$ si :

- $Z_0 = I$
- Ses accroissements $Z_{t_1}^{-1} Z_{t_0}, Z_{t_2}^{-1} Z_{t_1}, \dots$ sont indépendants ($t_0 < t_1 < t_2 \dots$).
- Ses accroissements sont stationnaires : $Z_{t+\tau}^{-1} Z_t \stackrel{d}{=} Z_\tau, \forall t$
- Continuité stochastique : $Z_t \xrightarrow{d} I$ quand $t \downarrow 0$

Entrelacement

Un processus de Lévy $(Z_t)_{t \geq 0}$ sur $SO(3)$ est l'**entrelacement** d'un **mouvement Brownien** $(W_t)_{t \geq 0}$ et d'un **processus de Poisson composé (PPC)** $(Y_t)_{t \geq 0}$.



Lévy (*gauche*) sur $SO(3)$

Construction par entrelacement

Soit $(Y_t)_{t \geq 0}$ un PPC et $(W_t)_{t \geq 0}$ un Brownien. Soit $N(t)$ et $(W_n)_{n \geq 0}$ le processus de Poisson et les variables *i.i.d.* sur $SO(3)$ de Y . Soit $T_0 = 0$ et posons $(T_N)_{N \geq 1}$ les instants de saut de N . Le processus Z construit par **entrelacement** est donné par :

$$Z_t = Z_{T_{n-1}} W_{T_{n-1}}^{-1} W_t \text{ pour } T_{n-1} \leq t < T_n$$

avec, pour tout temps T_n :

$$Z_{T_n} = Z_{T_n^-} X_n$$

où $Z_{T_n^-}$ est la limite à gauche au temps T_n .



Lévy sur $SO(3)$

Fonction caractéristique

Soit λ le paramètre du processus de Poisson N et supposons que W est un Brownien invariant par conjugaison. Alors, la fonction caractéristique de Z est donnée par :

$$\phi_t(\delta) = \exp \left[\lambda t \phi(\delta) - t I_\delta \left(\lambda + \frac{\delta(\delta + 1)a^2}{2} \right) \right]$$

avec $\phi_t \equiv \phi_{Z_t}$ et $\phi \equiv \phi_{X_1}$

- ① Problématique
- ② Fonctions caractéristiques sur les groupes de Lie compacts
 - Cas général
 - Cas particulier : $SO(3)$
- ③ Processus de Lévy
 - Processus de Poisson composé de rotation
 - Mouvement Brownien de rotation
 - Entrelacement
- ④ Decompounding
 - Cas des groupes de Lie compacts
 - Cas $SO(3)$ et diffusion multiple
- ⑤ Phase géométrique
 - Le pendule de Foucault
 - Ondes polarisées et phase géométrique

- 1 Problématique
- 2 Fonctions caractéristiques sur les groupes de Lie compacts
 - Cas général
 - Cas particulier : $SO(3)$
- 3 Processus de Lévy
 - Processus de Poisson composé de rotation
 - Mouvement Brownien de rotation
 - Entrelacement
- 4 Decompounding
 - Cas des groupes de Lie compacts
 - Cas $SO(3)$ et diffusion multiple
- 5 Phase géométrique
 - Le pendule de Foucault
 - Ondes polarisées et phase géométrique

Modèle

Observations *i.i.d.* $(Z_n)_{n \geq 1}$, à un temps $T \geq 0$ connu, du processus $Y(T)$ corrompu par un bruit multiplicatif M :

$$Z = MY(T)$$

avec Y CPP et M Brownien sur G . Y et M sont indépendants.

Hypothèses sur le bruit

M est invariant par conjugaison et de fonction caractéristique :

$$\phi_M(\delta) = \exp\left(-\lambda_\delta \frac{\sigma^2}{2}\right) I_\delta$$

avec σ^2 la variance et λ_δ les valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur G ($\lambda_{\delta_0} = 0$ et $\lambda_\delta > 0$ pour $\delta \neq \delta_0$).

Decompounding

Principe

Estimer la densité p des variables *i.i.d.* X_n d'un CPP Y à partir d'observations (bruitées) de celui-ci, en connaissant λ (et σ^2).

Fonction caractéristique de l'observation

Supposant λ et σ^2 connus, on a :

$$\phi_Z(\delta) = \exp(T\lambda\phi_X(\delta) - T\bar{\lambda}I_{d_\delta})$$

avec $\bar{\lambda}$ fonction de λ et σ^2 .

Decompounding

Hypothèse

X_1 est invariant par inversion

$\Rightarrow \phi_Z(\delta)$ est Hermitienne définie positive

Formule de decompounding bruité

$$\phi_X(\delta) = \frac{1}{T\lambda} \text{Log} [\phi_Z(\delta)] + \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} I_{d_\delta}$$

Decompounding

Hypothèse

X_1 est invariant par inversion

$\Rightarrow \phi_Z(\delta)$ est Hermitienne définie positive

Formule de decompounding **Non bruité**

$$\phi_X(\delta) = \frac{1}{T\lambda} \text{Log} [\phi_Z(\delta)] + I_{d_\delta}$$

Estimation

Estimation de ϕ_Z (cas non bruité)

Étant donné un échantillon de taille n , (Z_n) , l'estimateur empirique :

$$\hat{\phi}_Z^n(\delta) = \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^n \left(U^\delta(Z_m) + U^\delta(Z_m)^\dagger \right)$$

garantit l'Hermitianité de $\hat{\phi}_Z^n(\delta)$.

Estimateur non-biaisé et consistant : $\hat{\phi}_Z^n(\delta) \xrightarrow{p.s.} \phi_Z(\delta)$

Estimation

Estimation de ϕ_X (cas non bruité)

$$\begin{cases} \hat{\phi}_X^n(\delta) = \frac{1}{T\lambda} \text{Log} \left[\hat{\phi}_Z^n(\delta) \right] + I_\delta & \text{sur } R_\delta^n \\ \hat{\phi}_X^n(\delta) = 0 & \text{sur } \Omega - R_\delta^n \end{cases}$$

avec :

- $\eta(C)$ le spectre de la matrice Hermitienne C
- $R_\delta^n = \left\{ \eta(\hat{\phi}_Z^n(\delta)) \subset]0, \infty[\right\}$

Estimateur consistant : $\hat{\phi}_X^n(\delta) \xrightarrow{p.s.} \phi_X(\delta)$



Estimation

Estimation de p_X

On a un estimateur “plug-in” dans la série de Fourier de p_X :

$$\hat{p}_X(g) = 1 + \sum_{\delta=1}^L f_{\delta} \operatorname{Tr} \left(\hat{\phi}_X^n(\delta) U^{\delta \dagger}(g) \right) \quad \text{pour } g \in G$$

avec

$$\begin{cases} L & : \text{cutoff} \\ f_{\delta} = d_{\delta} e^{-K\delta(\delta+1)} & : \text{lissage} \end{cases}$$

et si $K > 0$, les f_{δ} forment un masque de convolution et \hat{p}_X converge vers une densité “smooth”.

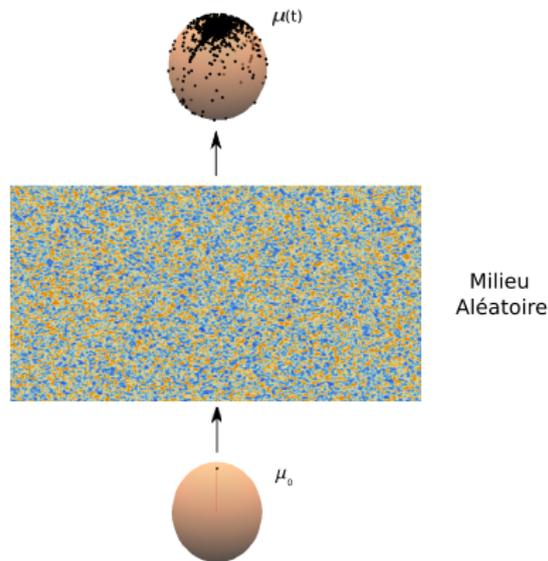
Plan

- ① Problématique
- ② Fonctions caractéristiques sur les groupes de Lie compacts
 - Cas général
 - Cas particulier : $SO(3)$
- ③ Processus de Lévy
 - Processus de Poisson composé de rotation
 - Mouvement Brownien de rotation
 - Entrelacement
- ④ Decompounding
 - Cas des groupes de Lie compacts
 - Cas $SO(3)$ et diffusion multiple
- ⑤ Phase géométrique
 - Le pendule de Foucault
 - Ondes polarisées et phase géométrique



PPC et diffusion multiple : modèle pour $\mu(t) \in \mathcal{S}^2$

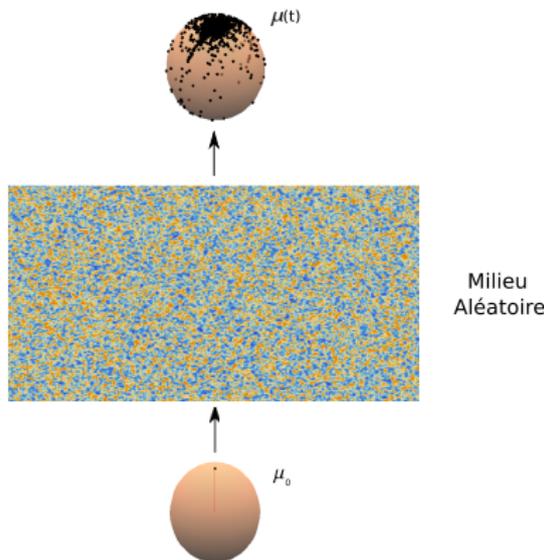
$$\mu(t) = \mathbf{R}(t)\mu_0$$





PPC et diffusion multiple : modèle pour $\mu(t) \in \mathcal{S}^2$

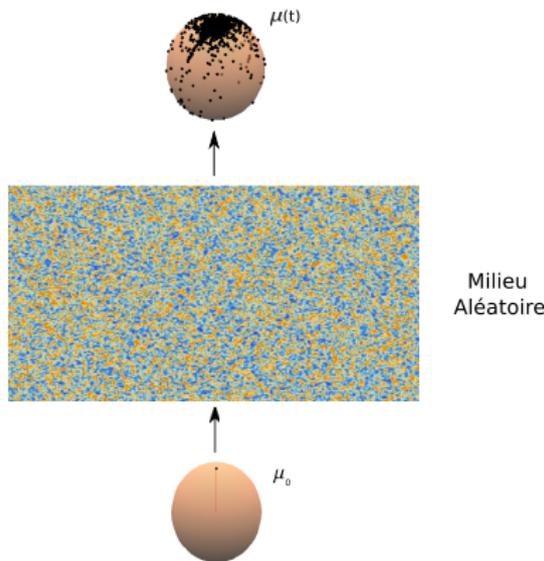
$$\begin{aligned} \mu(t) &= \mathbf{R}(t)\mu_0 \\ &= \prod_{n=0}^{N(t)} \mathbf{r}_n \mu_0 \end{aligned}$$





PPC et diffusion multiple : modèle pour $\mu(t) \in \mathcal{S}^2$

$$\begin{aligned}
 \mu(t) &= \mathbf{R}(t)\mu_0 \\
 &= \prod_{n=0}^{N(t)} \mathbf{r}_n \mu_0 \\
 &= \mathbf{r}_{N(t)} \dots \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_0 \mu_0
 \end{aligned}$$





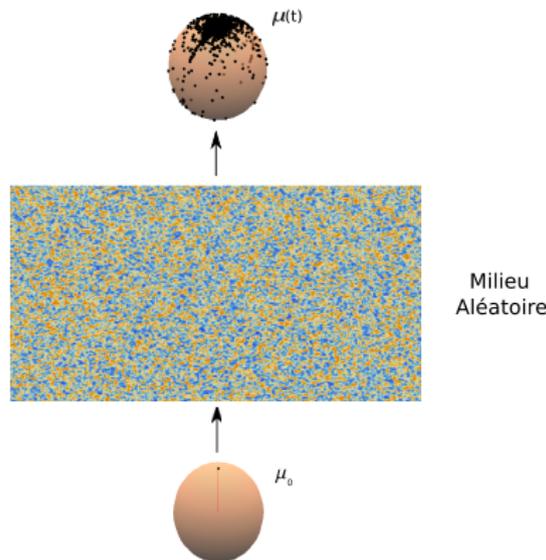
PPC et diffusion multiple : modèle pour $\mu(t) \in \mathcal{S}^2$

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \mathbf{R}(t)\mu_0 \\ &= \prod_{n=0}^{N(t)} \mathbf{r}_n \mu_0 \\ &= \mathbf{r}_{N(t)} \dots \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_0 \mu_0 \end{aligned}$$

Milieu aléatoire



PPC à gauche sur $SO(3)$





Decompounding sur $SO(3)$

À partir d'observations $[\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M]$ à un temps T et connaissant λ , obtenir la *d.d.p.* de r_n .

Estimation



Decompounding sur $SO(3)$

À partir d'observations $[\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M]$ à un temps T et connaissant λ , obtenir la *d.d.p.* de r_n .

Estimation

- **Hypothèse** : p_r fonction de phase H-G (zonale).

$$U_{mn}^\delta(\varphi, \theta, \psi) \longrightarrow P^\delta(\cos \theta)$$



Decompounding sur $SO(3)$

À partir d'observations $[\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M]$ à un temps T et connaissant λ , obtenir la *d.d.p.* de r_n .

Estimation

- **Hypothèse** : p_r fonction de phase H-G (zonale).

$$U_{mn}^\delta(\varphi, \theta, \psi) \longrightarrow P^\delta(\cos \theta)$$

Estimateur : $\hat{\Phi}_\mu(\delta) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M P^\delta(\mu_m)$



Decomponding sur $SO(3)$

À partir d'observations $[\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M]$ à un temps T et connaissant λ , obtenir la *d.d.p.* de r_n .

Estimation

- **Hypothèse** : p_r fonction de phase H-G (zonale).

$$U_{mn}^\delta(\varphi, \theta, \psi) \longrightarrow P^\delta(\cos \theta)$$

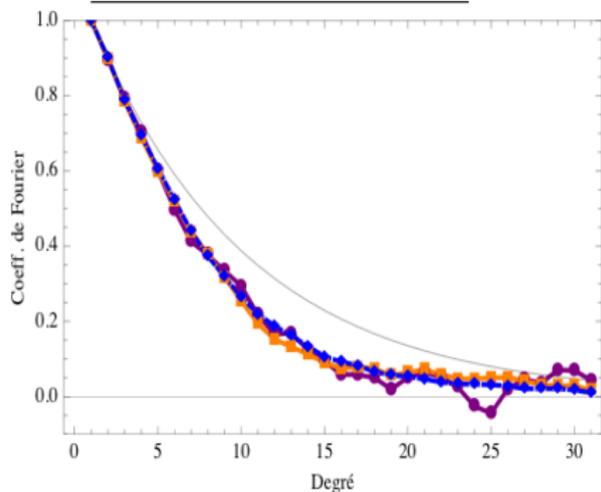
Estimateur : $\hat{\Phi}_\mu(\delta) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M P^\delta(\mu_m)$

Anisotropie H-G : $\hat{g} = \left(\frac{1}{\lambda T} \log \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M P^\delta(\mu_m) \right) \right)^{1/\delta}$

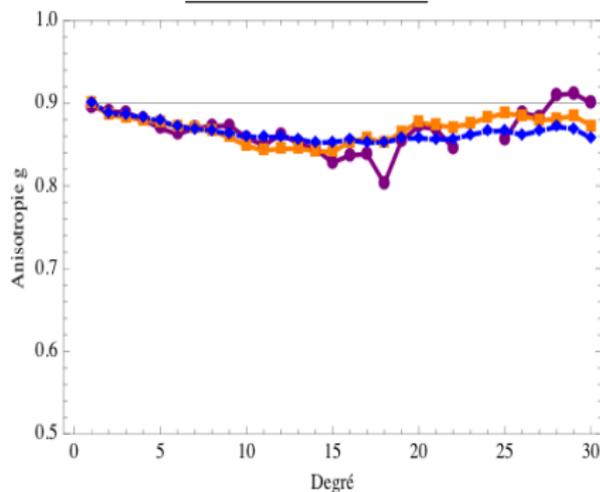


★ Estimation : exemples

Fonction de phase p_r



Anisotropie g



Taille de l'échantillon : $5 \cdot 10^2$ points, $5 \cdot 10^3$ points et $5 \cdot 10^4$ points



- ① Problématique
- ② Fonctions caractéristiques sur les groupes de Lie compacts
 - Cas général
 - Cas particulier : $SO(3)$
- ③ Processus de Lévy
 - Processus de Poisson composé de rotation
 - Mouvement Brownien de rotation
 - Entrelacement
- ④ Decompounding
 - Cas des groupes de Lie compacts
 - Cas $SO(3)$ et diffusion multiple
- ⑤ Phase géométrique
 - Le pendule de Foucault
 - Ondes polarisées et phase géométrique

Pendule de Foucault

Panthéon, Paris ($l = 48^{\circ}52'$).

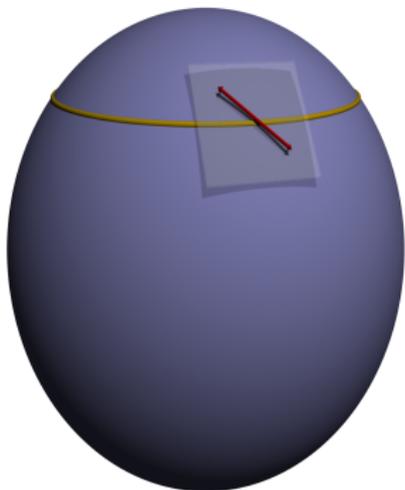


L. Foucault (1819-1868)

★ Après $23h56min$: $\varphi_{Foucault} = -2\pi \sin(l) = -271^{\circ}$

Modèle

★ \mathcal{S}^2 et $T_{\gamma(t)}\mathcal{S}^2$



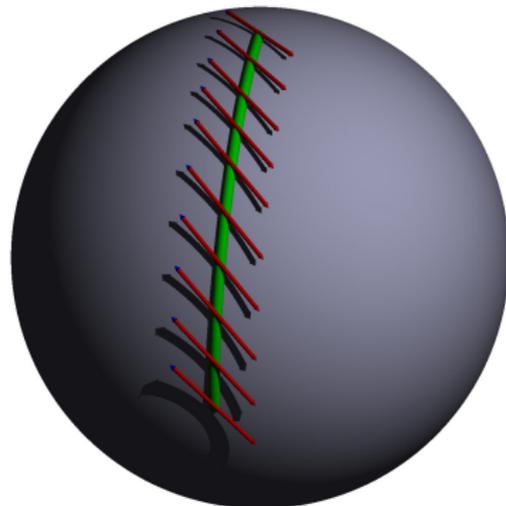
- \mathcal{S}^2 : **Sphère unité** dans \mathbb{R}^3
- $\gamma(t)$: **Chemin** sur \mathcal{S}^2
- $v(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{S}^2$: **Vecteur tangent**

Connexion de Levi-Civita

★ Transport parallèle

$$P_{\gamma(t)} \frac{dv(t)}{dt} = \frac{Dv(t)}{dt} = 0$$

- $\frac{D}{dt}$: *dérivée covariante*.
- $\gamma(t)$: chemin sur \mathcal{S}^2 .
- $P_x : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_x \mathcal{S}^2$: projecteur.
- $v(t)$ suit la **connexion de Levi-Civita**.





Holonomie

Chemin fermé $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}^2$; $v(0)$ transporté parallèlement le long de γ et $v(1)$ dans $T_{\gamma(0)}\mathcal{S}^2$. L'**holonomie** de γ est

$$h(\gamma) = \left(\widehat{v(0)}, \widehat{v(1)} \right)$$



Holonomie

Chemin fermé $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}^2$; $v(0)$ transporté parallèlement le long de γ et $v(1)$ dans $T_{\gamma(0)}\mathcal{S}^2$. L'**holonomie** de γ est

$$h(\gamma) = \left(\widehat{v(0)}, \widehat{v(1)} \right)$$

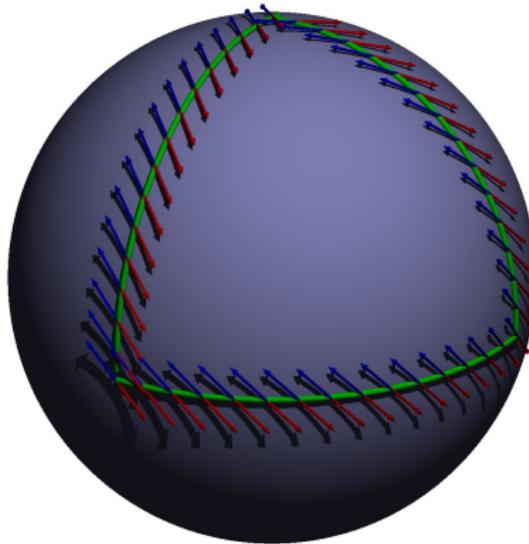
Théorème de Gauss-Bonnet local sur \mathcal{S}^2

γ un chemin fermé sur \mathcal{S}^2 , $h(\gamma)$ est l'intégrale de courbure :

$$h(\gamma) = \int \int_{\mathcal{C}} k ds^2 = 2\pi(1 - \sin(l))$$

avec \mathcal{C} la calotte de \mathcal{S}^2 délimitée par $\partial\mathcal{C} = \gamma$, et avec k la courbure de Gauss de la sphère.

Théorème de Gauss-Bonnet



Pendule de Foucault et holonomie





Le pendule de Foucault



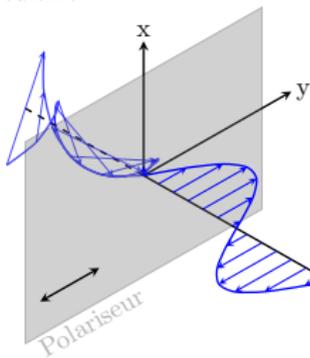
\mathcal{C} = Calotte

$$\varphi_{Foucault} = h(\gamma) - 2\pi = -2\pi \sin(l)$$

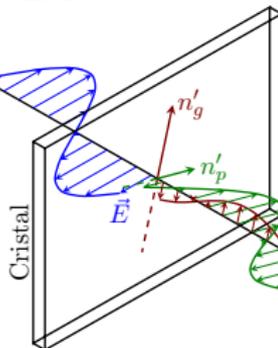


Ondes polarisées et phase géométrique

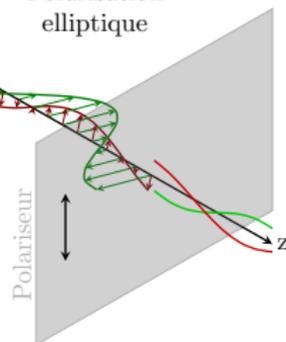
Polarisation circulaire



Polarisation linéaire

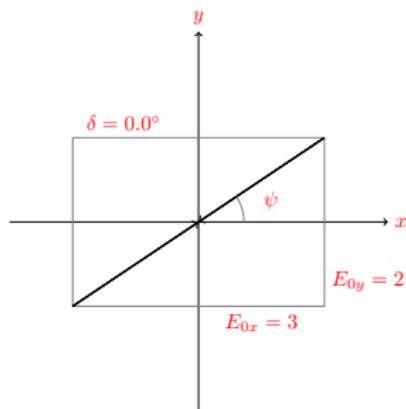


Polarisation elliptique

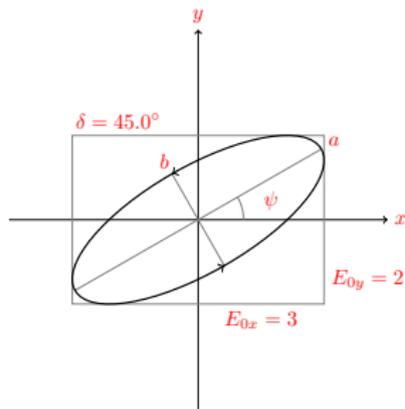




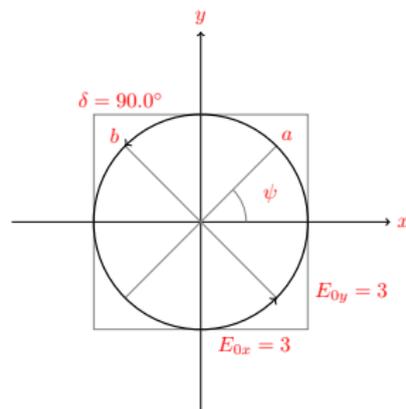
★ Dans le plan de polarisation :



Polarisation linéaire



Polarisation elliptique



Polarisation circulaire

avec :

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_{0x} \cos(\Omega t) \\ E_{0y} \cos(\Omega t + \psi) \end{bmatrix}$$



Phase géométrique des ondes polarisées

★ Phase géométrique pour la lumière :

- Fibre optique : *Tomita & Chiao, PRL 1986.*
- Milieux aléatoires : *Maggs & Rossetto, PRL, 2001.*

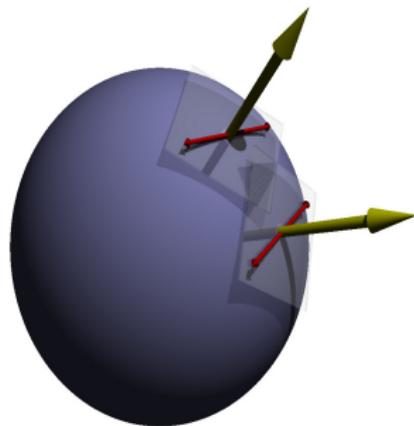
★ Phase géométrique pour les ondes élastiques :

- Guide d'onde : *Boulangier et al., Ann. of Phys., 2012.*



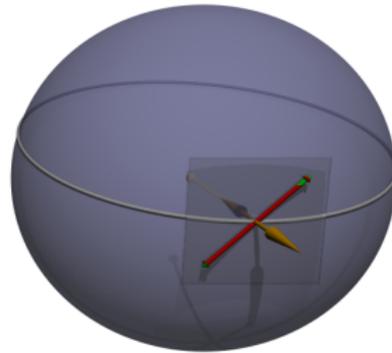
★ Modèle pour les ondes S :

- Dir. de propagation : $\mathbf{k} \in \mathcal{S}^2$
(Espace de base)
- Polarisation : $\mathbf{p} \in T\mathcal{S}^2$
(Fibré tangent)

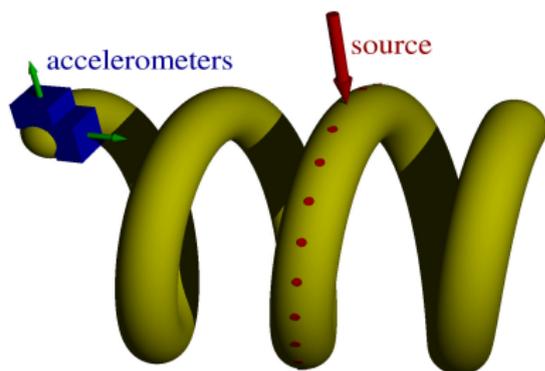


Les ondes polarisées peuvent acquérir une **phase géométrique** lors d'une propagation 3D

Ondes polarisées et phase géométrique : trajectoire 3D



Dispositif expérimental

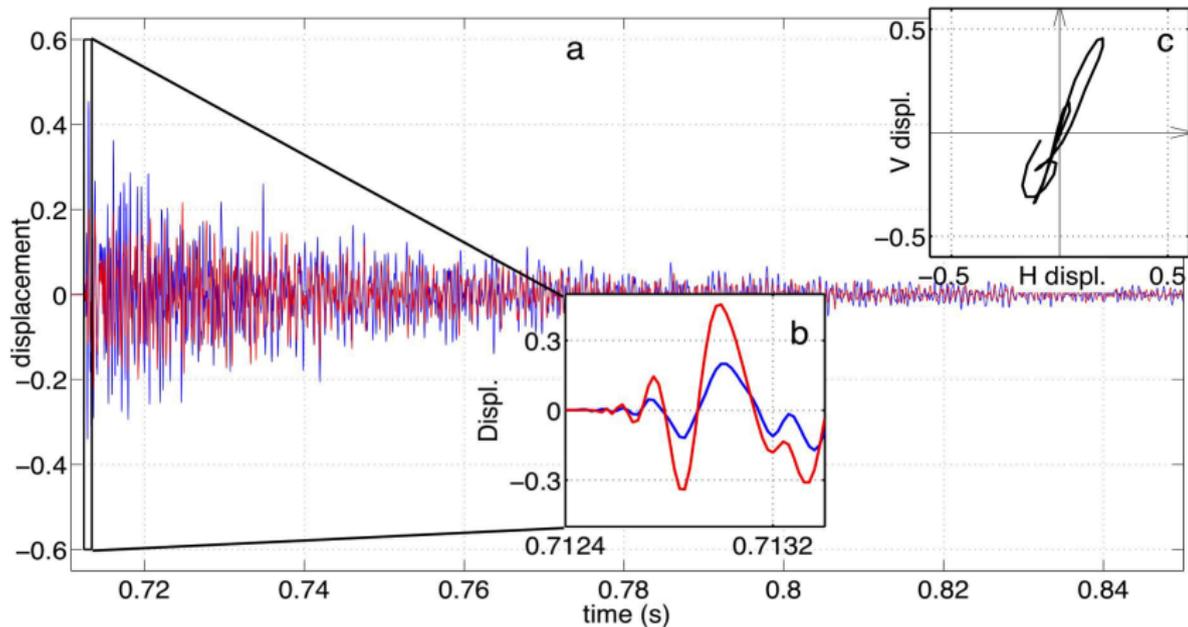


- Rayon : $R = 75 \pm 1\text{mm}$
- Élévation : $P = 91.5 \pm 1\text{mm}$
- Fréquence d'échantillonnage : 50kHz
- Réponse capteurs : $0.5\text{Hz} - 20\text{kHz}$
- Source : marteau

[Équivalent élastique de l'expérience de Tomita & Chiao, 1986]

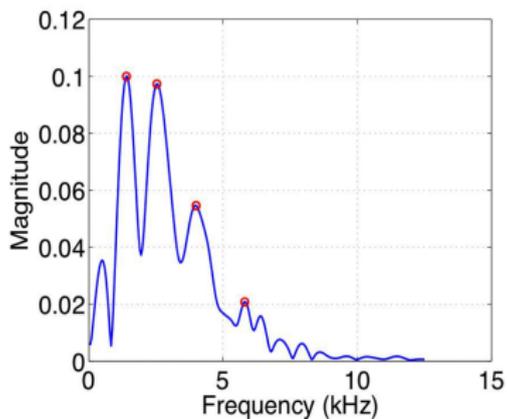


Signaux observés

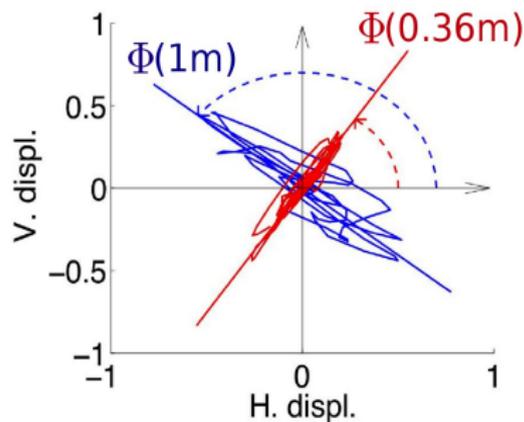




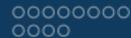
Modes et polarisation



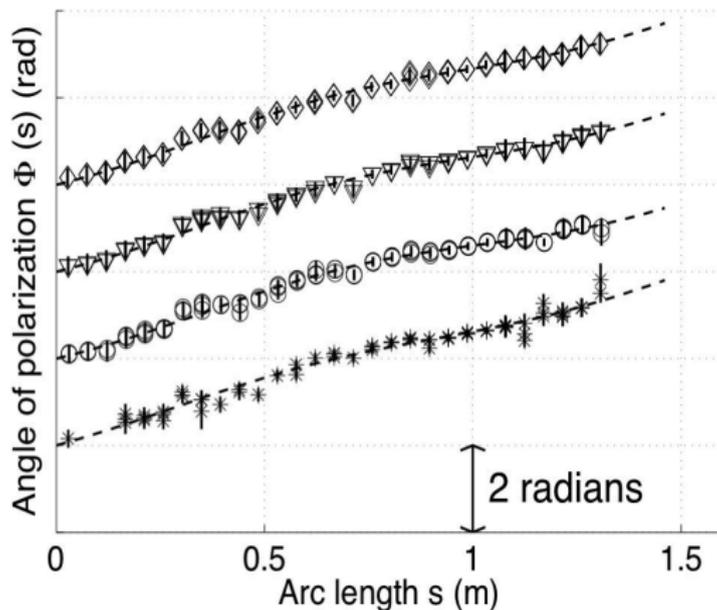
Spectre des ondes *S directes*.



Polarisations à 0.36m et 1m.



Phase géométrique mesurée





Phase géométrique $\Phi(s)$:

$$\Phi(s) = \Phi(0) + \tau s + \sin \Phi(s) (\eta \cos \Phi(s) - \epsilon \sin \Phi(s))$$

- s : abscisse curviligne
- η et ϵ : paramètres d'erreur

Mesures de $\Phi(s)$:

ν (kHz)	c (m.s ⁻¹)	wavelength (m)	τ (rad.m ⁻¹)	η	ϵ (rad)
1.4	$2 \cdot 10^3$	1.4	2.53	0.31	-0.03
2.5	$3 \cdot 10^3$	1.2	2.35	0.45	0.03
4.0	$4 \cdot 10^3$	1.0	2.45	0.39	0.05
5.8	$3.5 \cdot 10^3$	0.6	2.50	0.38	0.07

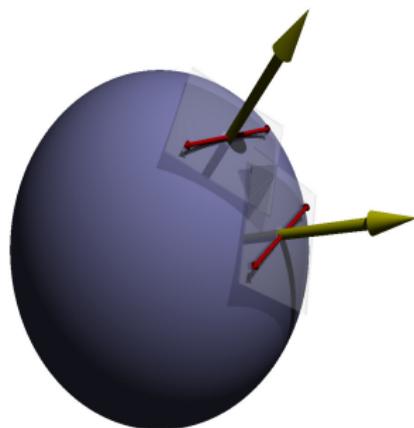


Conclusion :

- Valeur théorique de τ : $2.49 \pm 0.1 \text{ rad.m}^{-1}$
- Indépendance avec la fréquence
- Observation en régime non-adiabatique

★ Modèle pour les ondes S :

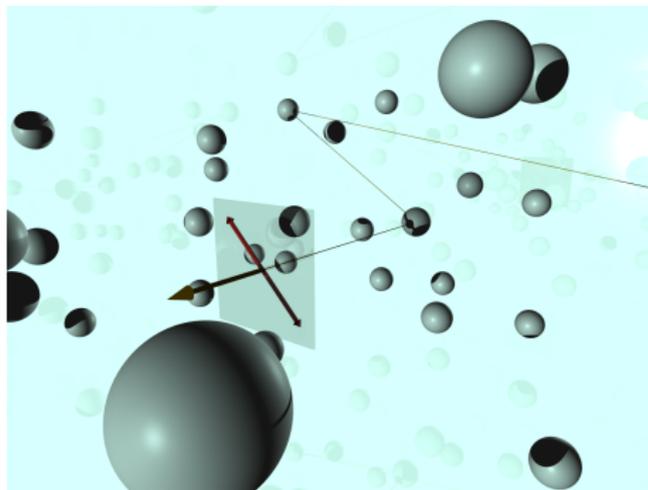
- Dir. de propagation : $\mathbf{k} \in \mathcal{S}^2$
(Espace de base)
- Polarisation : $\mathbf{p} \in T\mathcal{S}^2$
(Fibré tangent)
- Repère : $\mathcal{F} \in SO(3)$
 $\mathcal{F} = [\mathbf{p}, \mathbf{k} \times \mathbf{p}, \mathbf{k}]$
(Espace total)

 \Leftrightarrow


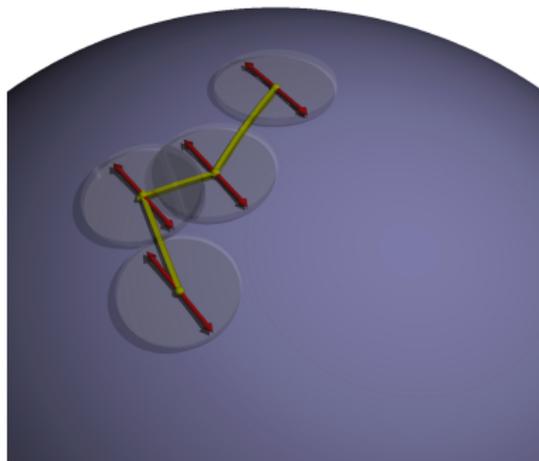
Onde polarisée \Leftrightarrow Repère \mathcal{F}



Diffusion multiple des ondes polarisées



Propagation 3D

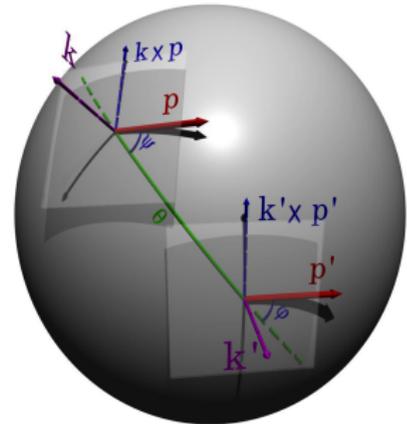


Transport parallèle dans TS^2



Diffusion multiple des ondes polarisées

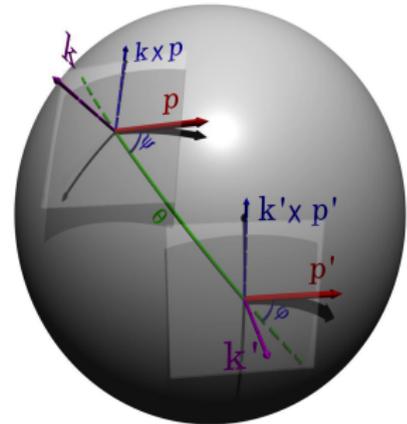
- Modèle : Repère $\mathcal{F} \in SO(3)$





Diffusion multiple des ondes polarisées

- Modèle : Repère $\mathcal{F} \in SO(3)$
- Diffusion \Leftrightarrow rotation aléatoire \mathbf{r}
 - Convention ZYZ : $\mathbf{r}(\psi, \theta, \varphi)$

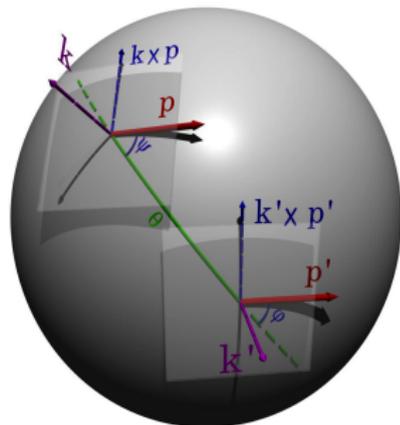




Diffusion multiple des ondes polarisées

- Modèle : Repère $\mathcal{F} \in SO(3)$
- Diffusion \Leftrightarrow rotation aléatoire \mathbf{r}
 - Convention ZYZ : $\mathbf{r}(\psi, \theta, \varphi)$
- Transport parallèle : $\psi = -\varphi$

Rotation avec TP $\Rightarrow \mathbf{r}(\theta, \psi)$

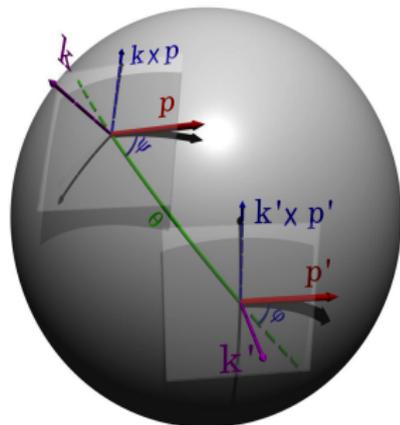




Diffusion multiple des ondes polarisées

- Modèle : Repère $\mathcal{F} \in SO(3)$
- Diffusion \Leftrightarrow rotation aléatoire \mathbf{r}
 - Convention ZYZ : $\mathbf{r}(\psi, \theta, \varphi)$
- Transport parallèle : $\boxed{\psi = -\varphi}$

Rotation avec TP $\Rightarrow \mathbf{r}(\theta, \psi)$



Diffusion multiple + Transport parallèle



Processus de Poisson à droite sur $SO(3)$



PPC à droite sur $SO(3)$

★ Après un temps de propagation t , le repère \mathcal{F}_t est donné par :

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_0 \prod_{i=1}^{N(t)} \mathbf{r}(\psi_i, \theta_i)$$

avec $N(t) \sim Poi(\lambda t)$ et $\mathbf{r}_{\psi_i, \theta_i}$ l'action **aléatoire** des diffuseurs

⇒ **PPC à droite** sur $SO(3)$



PPC à droite sur $SO(3)$

★ Après un temps de propagation t , le repère \mathcal{F}_t est donné par :

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_0 \prod_{i=1}^{N(t)} \mathbf{r}(\psi_i, \theta_i)$$

avec $N(t) \sim Poi(\lambda t)$ et $\mathbf{r}_{\psi_i, \theta_i}$ l'action **aléatoire** des diffuseurs

⇒ **PPC à droite** sur $SO(3)$

★ Distribution pour $N(t) = n$ et diffuseurs i.i.d. :

$$p_{\mathcal{F}_n} = p_{\mathcal{F}_0} * p_{\mathbf{r}_1} * \dots * p_{\mathbf{r}_n} = p_{\mathbf{r}}^{*[n]}$$

avec $p_{\mathcal{F}_0} = \delta(I - \mathcal{F}_0)$ et $p_{\mathbf{r}}$ la densité commune des r_n



AHNC

★ Au temps t, la densité de \mathcal{F}_t est : $p_{\mathcal{F}_t} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} p_{\mathcal{F}_n}$



AHNC

★ Au temps t, la densité de \mathcal{F}_t est : $p_{\mathcal{F}_t} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} p_{\mathcal{F}_n}$

★ Décomposition de Fourier de $p_{\mathbf{r}}$:

$$\Phi_{\mathbf{r}}^{\delta} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} p_{\mathbf{r}}(\psi, \theta, \varphi) U^{\delta}(\psi, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\psi d\varphi$$

avec les *coeff. de Fourier* $\Phi_{\mathbf{r}}^{\delta}$ de dimension $(2\delta + 1) \times (2\delta + 1)$.



AHNC

★ Au temps t, la densité de \mathcal{F}_t est : $p_{\mathcal{F}_t} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} p_{\mathcal{F}_n}$

★ Décomposition de Fourier de $p_{\mathbf{r}}$:

$$\Phi_{\mathbf{r}}^{\delta} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} p_{\mathbf{r}}(\psi, \theta, \varphi) U^{\delta}(\psi, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\psi d\varphi$$

avec les *coeff. de Fourier* $\Phi_{\mathbf{r}}^{\delta}$ de dimension $(2\delta + 1) \times (2\delta + 1)$.

★ Les coeff. de Fourier de $p_{\mathcal{F}_t}$ deviennent :

$$\Phi_{\mathcal{F}_t}^{\delta} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \left(\Phi_{\mathbf{r}}^{\delta} \right)^n$$



Distribution de la phase géométrique

★ Sachant que :

- Transport parallèle $\Rightarrow \Phi_{\mathbf{r}}^{\delta}$ diagonales
- Phase géométrique : $\beta = \psi + \varphi$



Distribution de la phase géométrique

★ Sachant que :

- Transport parallèle $\Rightarrow \Phi_{\mathbf{r}}^{\delta}$ diagonales
- Phase géométrique : $\beta = \psi + \varphi$

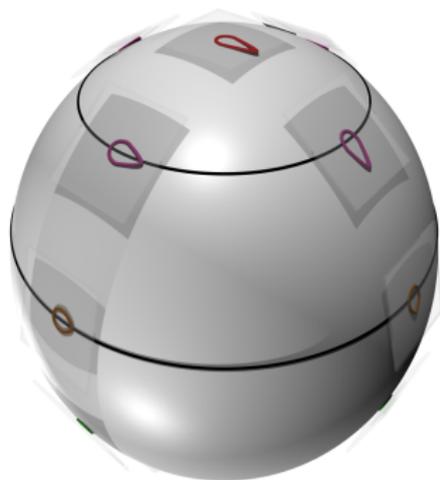
★ Distribution de la phase géométrique β :

$$p_t(\theta, \beta) = W_0(\lambda t, \theta) + 2 \sum_{m \geq 1} \cos(m\beta) W_m(\lambda t, \theta)$$

avec

$$W_m(\lambda t, \theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\delta \geq m} (2\delta + 1) e^{\lambda(\Phi_{\mathbf{r}}^{\delta} - 1)t} d_{m,m}^{\delta}(\theta)$$

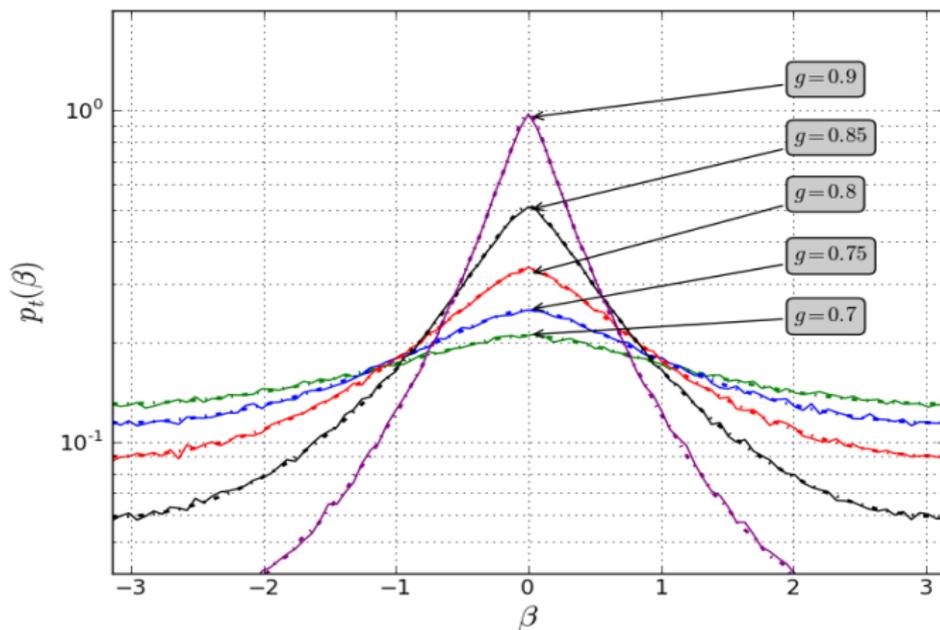
Distribution de phase géométrique $p(\theta, \beta)$



Évolution de la densité de phase géométrique $p_t(\theta, \beta)$ au cours du temps



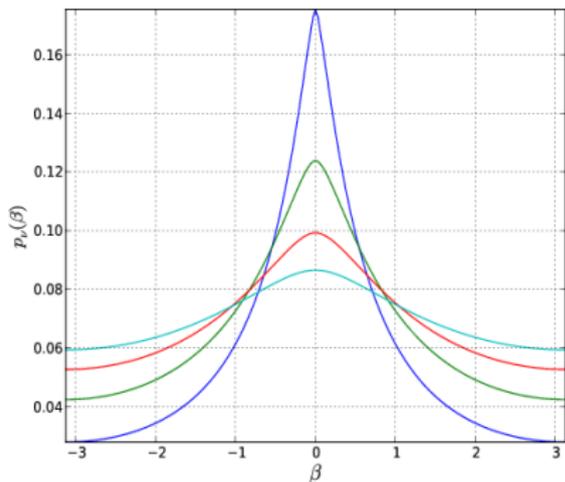
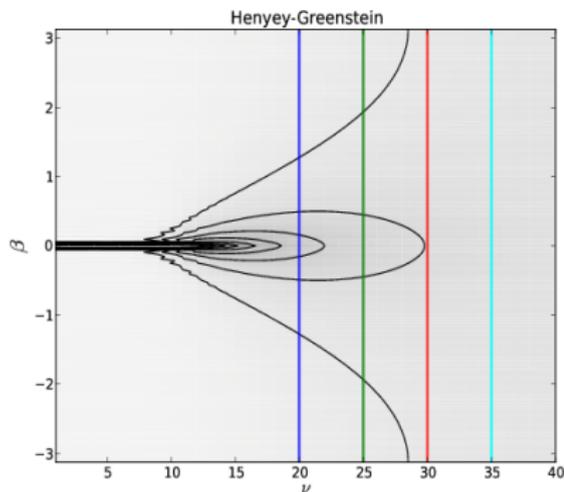
★ Distribution $p(\beta)$, avec $\theta < \pi/12$ et $p_{\mathbf{r}} \sim HG(g)$





Distribution de phase géométrique $p_t(\beta)$

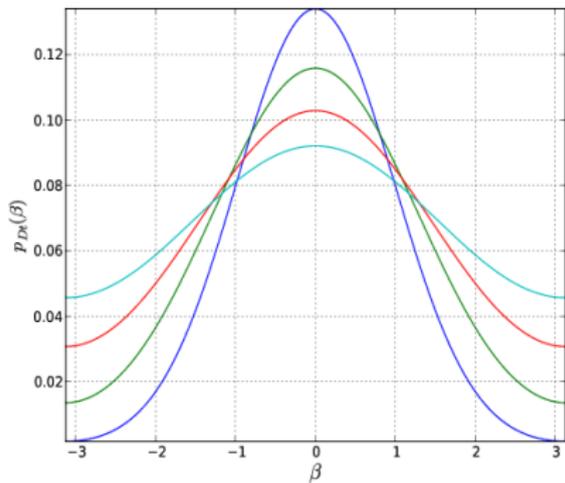
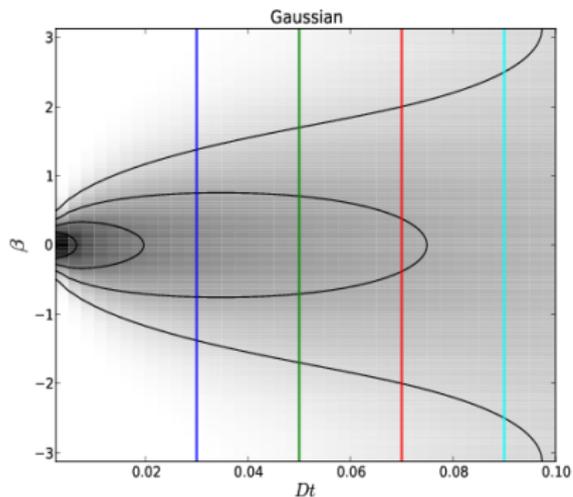
Henyey-Greenstein : Évolution de $p_t(\beta)$ au cours du temps pour $\theta = 0$, $g = 0.8$ et $\lambda t \in [0, 40]$.





Distribution de phase géométrique $p_{Dt}(\beta)$

Gaussien : Évolution de $p_{Dt}(\beta)$ au cours du temps pour $\theta = 0$, $D = 1 \text{ rad}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $\nu = 20$.



Estimation : principe

À partir d'observations $[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_M]$ à un temps T et connaissant les paramètres de la distribution des \mathbf{r}_n , obtenir une estimation de λ .

Estimation

Estimateur du ML :

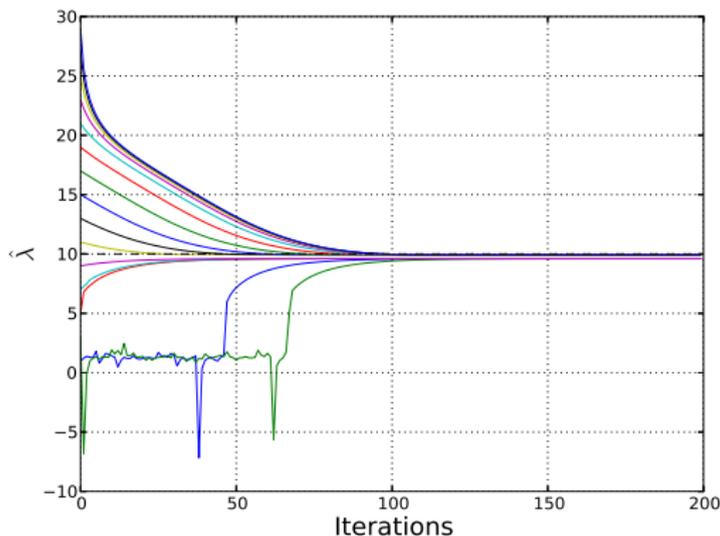
$$\hat{\lambda} = \frac{1}{T} \arg \max_{\lambda} \left(\sum_{m=1}^M \log p_{\lambda}(\mathcal{F}_m) \right)$$

L'estimée à l'itération i est :

$$\hat{\lambda}_{i+1} = \frac{1}{T} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{p_{\hat{\lambda}_i T}(\mathcal{F}_m)} \sum_{n=0}^{\infty} n p_{\mathbf{r}}(\mathcal{F}_m) e^{-\hat{\lambda}_i T} \frac{(\hat{\lambda}_i T)^n}{n!}$$

Estimation et distribution de phase géométrique

★ Convergence de l'EM pour l'estimation de $\hat{\lambda}$



Conclusions & Perspectives

- Estimation sur les groupes de Lie compacts
- Processus stochastiques sur $SO(3)$
- Problème inverse en diffusion multiple
- Phase géométrique des ondes polarisées en milieu aléatoire

- Processus à mémoire : modélisation et estimation
- Estimation paramétrique
- Mise en évidence expérimentale

Problématique

AHNC

○○○○○○○
○○○○○○○

Lévy

○○○
○○○
○○○
○○○

Decompounding

○○○○○○○
○○○

Phase géométrique

○○○○○○○
○○○○○○○○○○○○○○○○○○

Ondes polarisées et phase géométrique

...



Henyeey-Greenstein

La fonction de phase H-G, p_{HG} est donnée par :

$$p_{HG}(\theta, g) = \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \theta)^{3/2}}$$

avec $g \in [0, 1]$ le paramètre d'anisotropie.

En série de Fourier, la multi-convolution de p_{HG} est :

$$p_{HG}^{*[n]}(\theta, g) = \sum_{\delta \geq 0} (2\delta + 1) g^n P_{00}^{\delta}(\cos \theta)$$