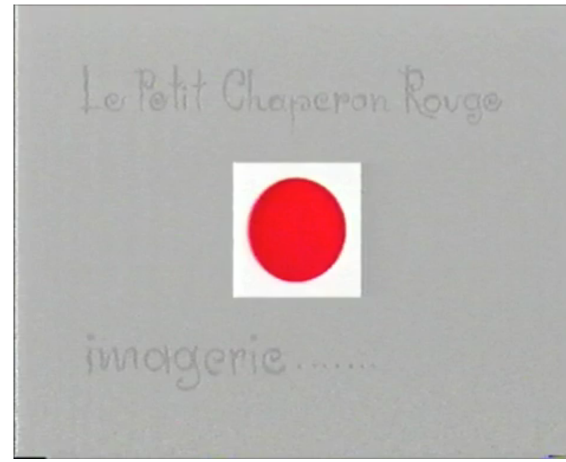
Analyse formelle des concepts, Q-analyse et programmation spatiale : quelques aspects philosophiques du nœud mathématique/musique/informatique



2ème partie

CNRS – IRCAM

Equipe représentations musicales

Si l'analyse des concepts formels se fonde sur la structure de treillis, celle-ci peut s'interpréter comme une structure topologique combinatoire. Les travaux dans ce domaine se rapprochent alors de la Q-analyse introduite par R. Atkin dans les années 70 dans une tentative d'analyse des relations binaires dans les sciences sociales. Nous introduirons les notions de base de la Q-analyse à travers quelques exemples puis nous montrerons comment ces idées peuvent se généraliser et être mise en œuvre de manière calculatoire grâce à la programmation spatiale. La programmation spatiale vise à expliciter les structures topologiques dans la programmation et nous présenterons deux exemples d'utilisations de ces outils pour modéliser les structures narratives et l'analogie aristotélicienne. Ces travaux se retrouvent dans les tentatives récentes d'associer de nouveaux objets topologiques à des processus musicaux.

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Plan

1. structure de connections des relations binaires : complexes simpliciaux abstraits, treillis, topologie en terme d'ensemble ouverts et fermés.
2. obstruction, excentricités, invariants
3. reconstruction de séquence temporelle : l'analyse des contes de fées
4. analogie aristotélicienne
5. la programmation spatiale (MGS)
6. applications musicales

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

MGS

Q-ANALYSE

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Les débuts

MGS

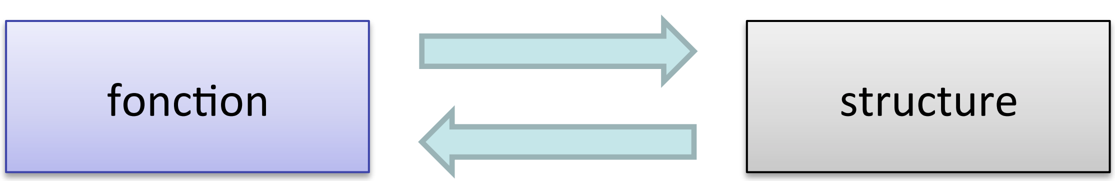
- Dans les années 70
- Analyser un « trafic » sur une « structure »
- Les articles séminaux :
  - Dowker, C. H. (1952). Homoly groups of relations. Annals of Mathematics, vol. 56, n°1, 84–95.
  - Atkin, R. (1972). From cohomology in physics to q- connectivity in social science. International Journal of Man- Machines Studies vol. 4, 341–362.
  - Atkin, R. (1974). Mathematical Structure in Human Affairs. London, Heinemann.
  - Atkin, R. (1976). An algebra for patterns on a complex II. International Journal of Man-Machines Studies vol. 8, 483–498.
  - Atkin, R. (1977). Combinatorial Connectivities in Social Systems. Basel, Birkhäuser Verlag.

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

L'idée de base

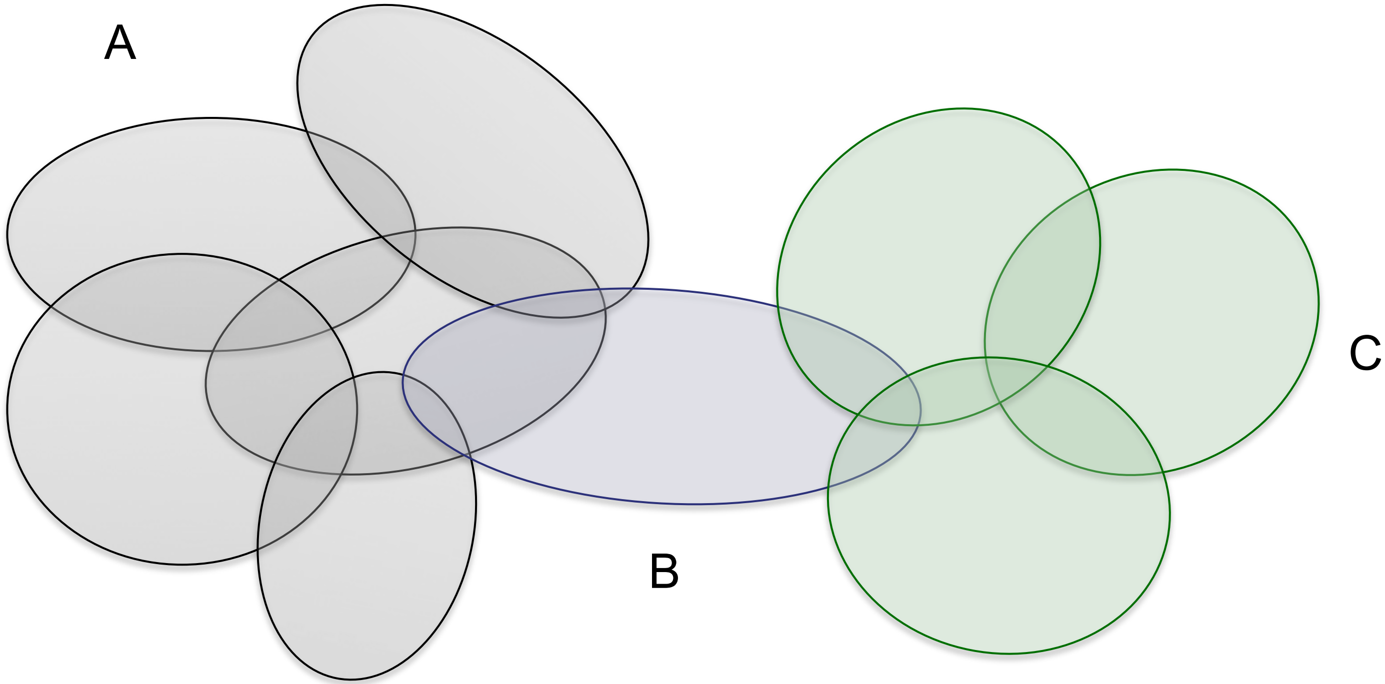
- Traffic (function) over a backcloth (structure)
- Exemple : catégorisation (intrinsèque, interne) des programme télé
  - structure =
    - plage horaire
    - descripteur des programmes
  - function =
    - partage (trafic) : quelle type de programme se retrouvent dans quel plage et quel plage correspond à quel type de programme

- un changement dans la structure induit un changement dans le trafic
- un changement dans le trafic induit une changement dans la structure



Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Une image



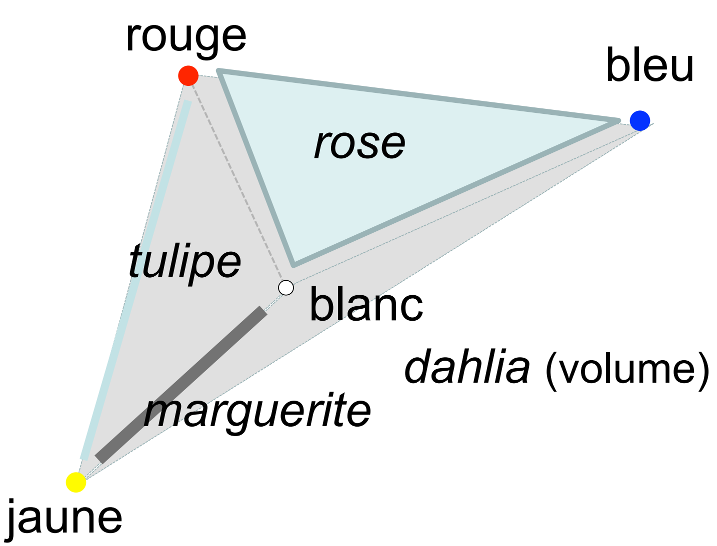
- les programmes qui partagent des slots ont à voir ensemble
- quels est le voisinage que cela crée entre les programmes ?
- on peut essayer de définir une distance, de faire de la clusterisation
- mais on peut essayer de le faire algébriquement

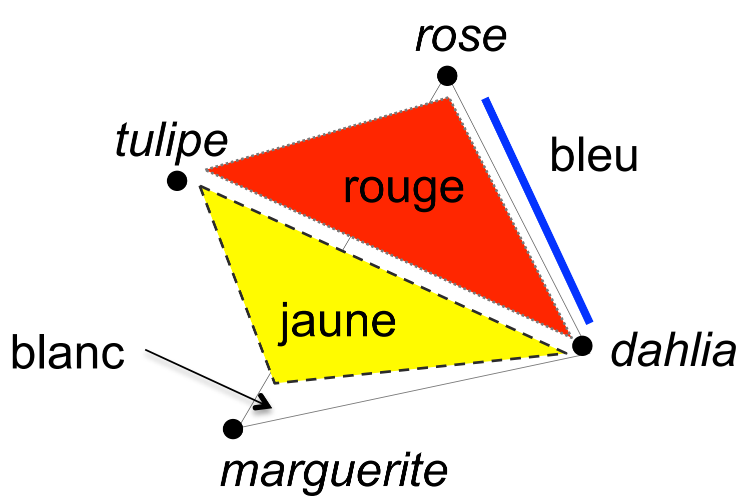
• Une représentation topologique des relations binaires

MGS

$\lambda \in$ {tulipe, rose, marguerite, dahlia} × {rouge, bleu, blanc, jaune}

λ	rouge	bleu	blanc	jaune
tulipe	1	0	0	1
rose	1	1	1	0
marguerite	0	0	1	1
dahlia	1	1	1	1





(le dual)

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

MGS

Quelle est la nature de l'objet ainsi construit ?

c'est un espace, mais pas vu comme un ensemble de point….

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Simplexe et Complexe

Un complexe simplicial abstrait : (V,C)

- **V** ensemble de sommets,
- **C** est un ensemble de parties de V fermé pour l'inclusion :

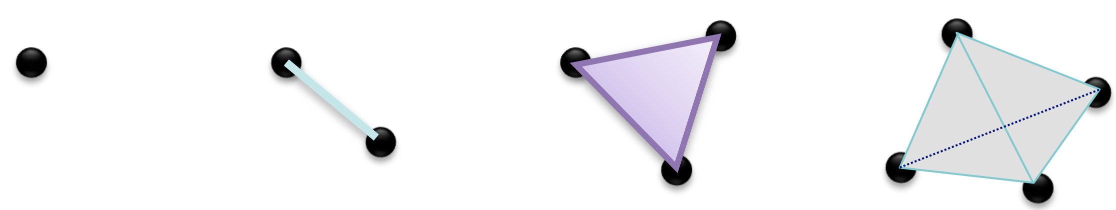
  si $s \in C$ et $s' \subset s$ alors $s' \in C$

- simplexe = élément de C
- dimension d'un simplexe $s = |s| - 1$
- dimension d'un complexe = dimension de son plus grand simplexe
- chemin P = suite de simplexes s_i tel que *si* $s_i \cap s_{i+1} \neq \varnothing$
- bord ∂s d'un simplexe s : $\{s',\ s' \subset s$ et $s' \neq s\}$

Représentation graphique (généralise les graphes)

simplexe abstrait	{a}	{a,b}	{a,b,c}	{a,b,c,d}	
	point	arête	face	volume	…

simplexe euclidien



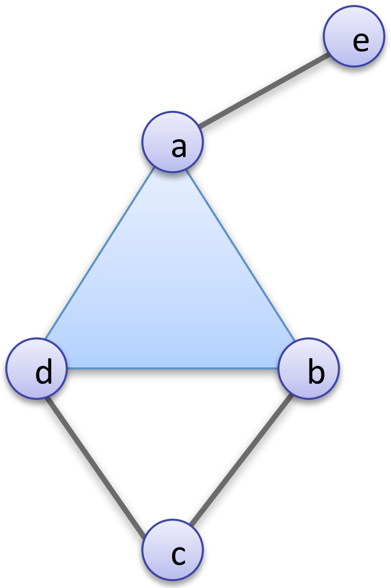
Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Complexe

MGS

un *complexe simplicial* **euclidien**

de dimension 2 plongé dans un
espace euclidien de dimension 2



un *complexe simplicial* **abstrait**

{

{a}, {b}, {c}, {d}, {e}, simplexe de dim 0

{a,b}, {b,c}, {b,d}, {a,d}, {a,e}, {c,d}, simplexe de dim 1

{a,b,d} simplexe de dim 2

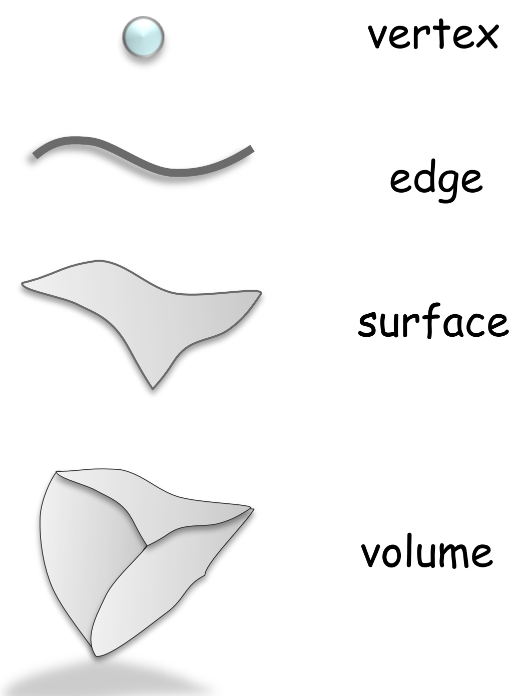
}

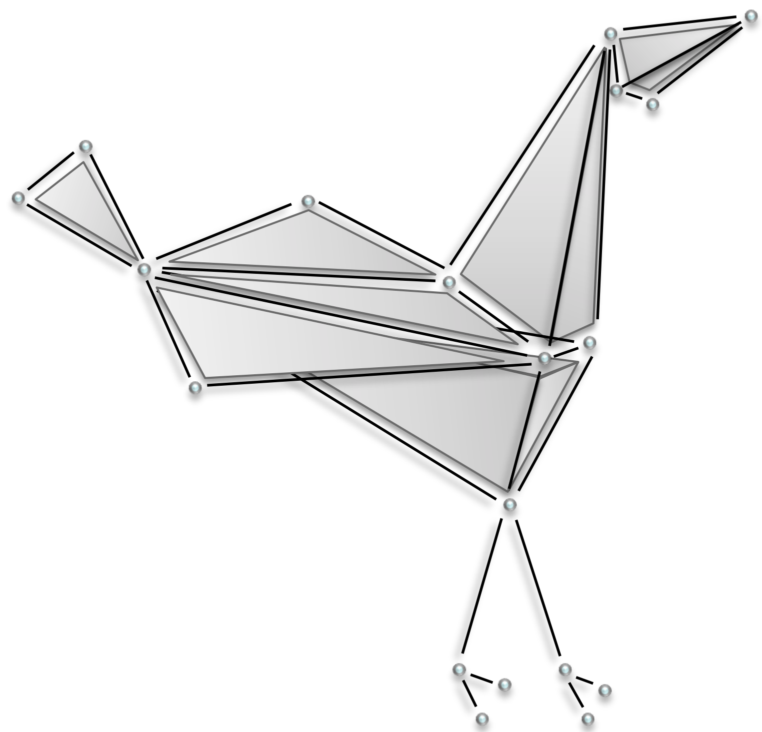
Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Construire des espaces en recollant des morceaux

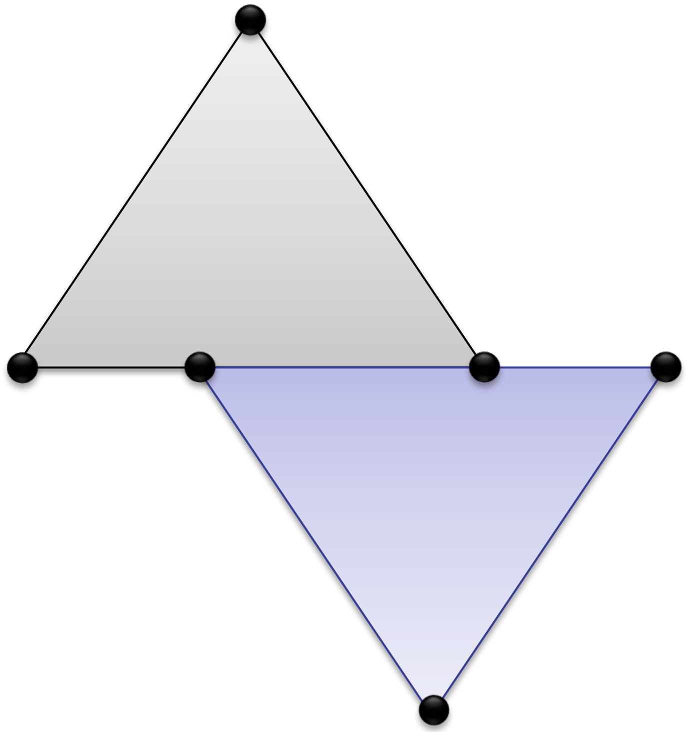
- Structure
  - une collection de cellule (= des espaces simples)
  - une ***relation d'incidence*** (= recollement)





Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Contraintes de recollement



NON

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Contraintes de recollement

OUI ?

NON ?

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Plus généralement (*espace cellulaire* à la Tucker)

MGS

- Un ensemble S de cellules
  et une relation d'ordre (partiel) **<** "*est au bord de*"
- Le dual S* : considérer **>**
- **Exemple :** un complexe simplicial (**<** est l'inclusion)
- X ⊂ S est *fermé* si: *ouvert*

  $x < y$ et $y \in X \Rightarrow x \in X$ $\qquad$ $x > y$ et $y \in X \Rightarrow x \in X$

- Les fermés [ouvert] de S possèdent les propriétés suivantes :
  1. l'union arbitraire de fermés [ouverts] est fermé [ouverte] ;
     $\varnothing$ est élément neutre et fermé [ouvert]
  2. l'intersection arbitraire de fermés [ouverts] est fermée [ouvertes] ;
     S est élément neutre et fermé [ouvert]
  3. étant donné deux éléments *x* et *y* distincts, il y a un fermé [ouvert] qui contient *x* ou *y* mais pas les deux.

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

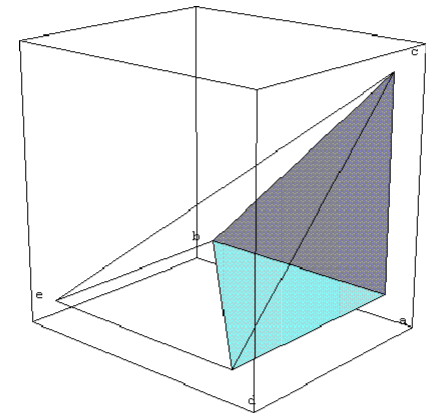
Espace cellulaire *vs.* Espace de points

- On peut prendre les propriétés (1) à (3) pour caractériser (S, <) :
  - fermé = cône inférieur d'un élément de S
  - ouvert = cône supérieur d'un élément de S
- (1)+(2) : une espèce d'anneau
  union et intersection sont des monoides abéliens (groupe commutatif sans inverse = associatif et élément neutre et commutatif)
- Pour retrouver les fermés [ouverts] d'une topologie T1:
  - il faut affaiblir (1) [(2)] par "en nombre fini"
  - il faut renforcer (3) par "qui contient *x* et pas les deux"
- L'affaiblissement de (1) et (2) empêche la symétrie qui assure l'existence de S*. Le renforcement de (3) fait de tous élément un fermé.

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Topologie ↔ complexe simpliciaux ↔ treillis

MGS

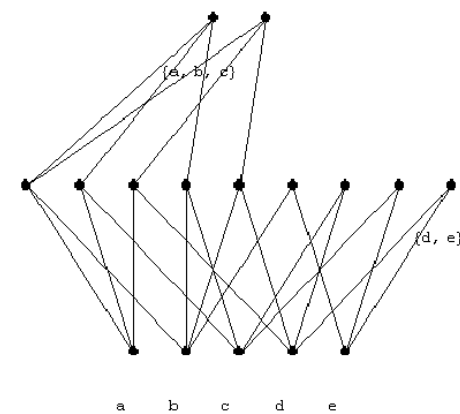


Topologie (ensemble des ouverts et des fermés)

↓ simplexes = fermés de la topologie ↑

Complexe simplicial (ensemble d'ensembles fermés par inclusion)

↓ simplexes = cônes du treillis ↑



Treillis (relation d'ordre: ∧ , ∨)

- Reformulation élégante d'approches « classiques »
- Extension des outils

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

William Shakespeare, *Sonnet 18*

1. *Shall I compare thee to a summer's day?*
2. *Thou art more lovely and more temperate.*
3. *Rough winds do shake the darling buds of May,*
4. *And summer's lease hath all too short a date.*
5. *Sometime too hot the eye of heaven shines,*
6. *And often is his gold complexion dimm'd;*
7. *And every fair from fair sometime declines,*
8. *By chance, or nature's changing course, untrimm'd;*
9. *But thy eternal summer shall not fade*
10. *Nor lose possession of that fair thou owest;*
11. *Nor shall Death brag thou wand'rest in his shade,*
12. *When in eternal lines to time thou grows't:*
13. *So long as men can breathe or eyes can see,*
14. *So long lives this, and this gives life to thee.*

1. Devrais-je te comparer à une journée d'été ?
2. Tu es plus tendre et bien plus tempérée.
3. Des vents violents secouent les chers boutons de mai,
4. Et le bail de l'été est trop proche du terme.
5. Parfois trop chaud l'œil du ciel brille,
6. Et souvent sa complexion dorée ternie,
7. Et toute beauté un jour décline,
8. Par hasard, ou abîmée au cours changeant de la nature;
9. Mais ton éternel été ne se flétrira pas,
10. Ni perdra cette beauté que tu possèdes,
11. Et la Mort ne se vantera pas que tu erres parmi son ombre,
12. Quand en rimes éternelles à travers temps tu grandiras;
13. Tant que les hommes respireront et tant que les yeux verront,
14. Aussi longtemps que vivra ceci, cela en vie te gardera.

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Analyse

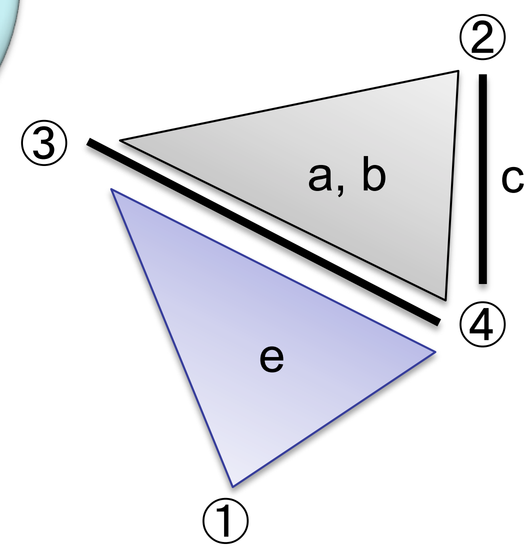
- L'ensemble des concepts référés par un nom :
  a. Thee (l'aimé)
  b. May/summer
  c. Sun
  d. Fair (la beauté)
  e. Thy summer (l'épanouissement de l'aimé)
- Propriétés des noms :
  ① être beau (l 2, 7)
  ② être modéré (l 2, 3, 5)
  ③ persister (l 4, 9, 12)
  ④ croître ou diminuer (l 6, 9, 11, 12, 14)

	①	②	③	④
a		1	1	1
b		1	1	1
c		1		1
d			1	1
e	1		1	1

propriétés

matrice

complexe simplicial



Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Treillis des concepts formels

MGS

Treillis des concepts formels (Wille 97) pour une relation $\lambda \subset O \times P$, on définit une opération § par :

$$E \subset O, \ \S E = \{ p \in P \mid \forall e \in E, (e,p) \in \lambda \}$$

$$I \subset P, \quad \S I = \{ o \in O \mid \forall p \in I, (o,p) \in \lambda \}$$

§ établit une connexion de Galois.

(E,I) concept formel ssi E=§I et I=§E : E extension et I intension du concept.

Sur l'exemple précédent :

- {a, b}, { ②, ③, ④ } : est un concept formel
- {a, b, c}, { ②, ④ } : est un concept formel (inclus dans le précédent)

En fait :

- chaque simplex est un concept formel
  (le simplex est l'extension et ses sommets sont l'intension)
- un concept formel est une intersection de simplex
  (les simplexes sont l'extension et les propriétés sont les sommets du simplex intersection)

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Chemin généralisé, q-composant et excentricité

MGS

- 2 simplex sont q-connecté s'ils partagent une q-cellule
- q-connexion (∃ q-chemin)
- c'est une relation d'équivalence
    - pour les fleurs : deux fleurs sont q-connectées si elles partagent q couleurs
    - dans un graphe, la 0-connection définit les composantes connexes (d'arcs 0-connectés)
- le vecteur de structure
  $$V = (v_0, v_1, .., v_n)$$
  où est v_i le nombre de classes pour la i-connexion
- si *s* et *t* sont q-connectés, ils sont p-connectés pour p ≤ q
- si V=[1, …, 1] le complexe est fortement couplé
- quand on « monte en dimension », le complexe se décompose en parties déconnectées.

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Chemin généralisé, q-composant et excentricité

- Vecteur d'obstruction : U = V – 1

  indique à quels dimensions on trouve un obstacle à passer d'un élément à un autre.

- idem sur le complexe dual
- excentricité :
  - un *n*-simplex *s*
  - *m* est le nombre de sommets qui apparaissent dans un autre simplex : $m \leq n+1$.
  - Plus *m* est grand, plus *s* est connecté à d'autres simplex. Mais *m* croit avec *n. D'où*
  - excentricité(*s*) : (n-m)/(m+1)
- d'autres mesures : *complexité*, *surprise*, etc.

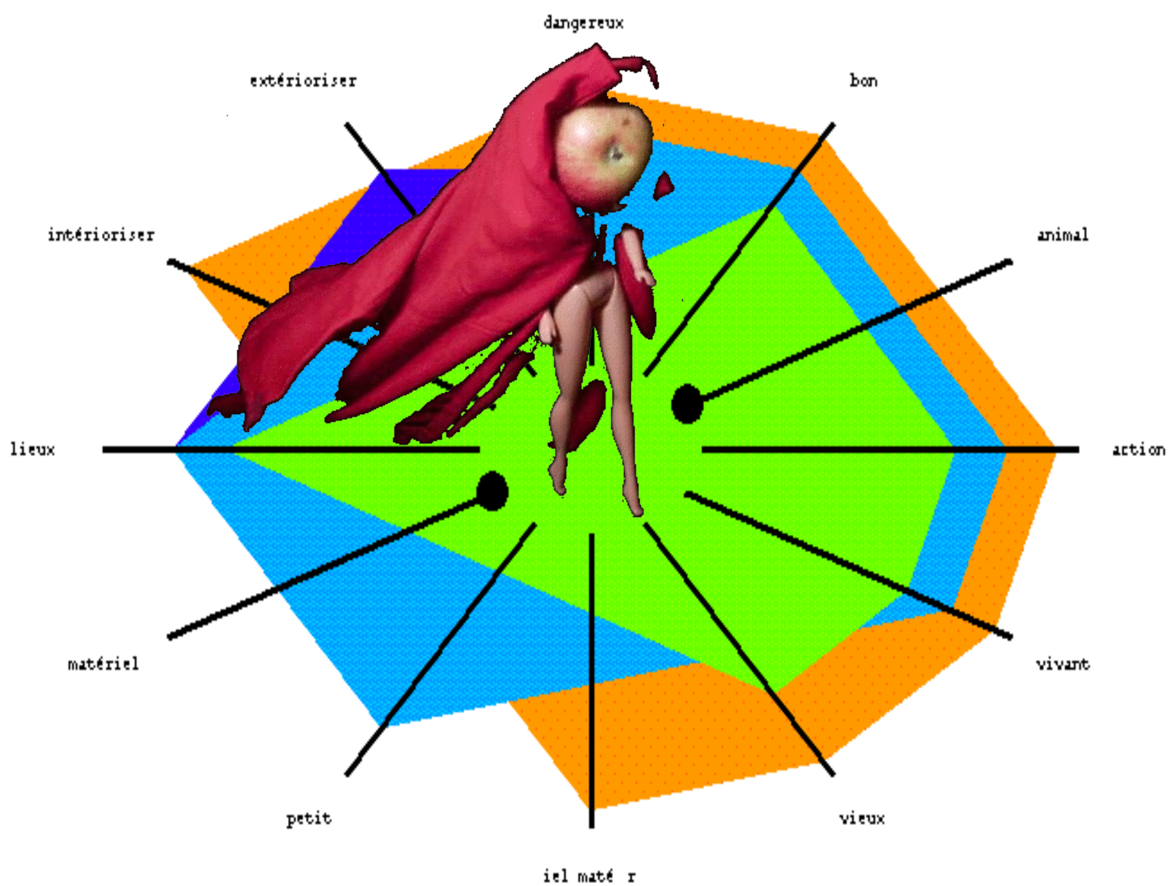
Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

MGS

L'analyse des contes de fée

(sans Bettelheim)



Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

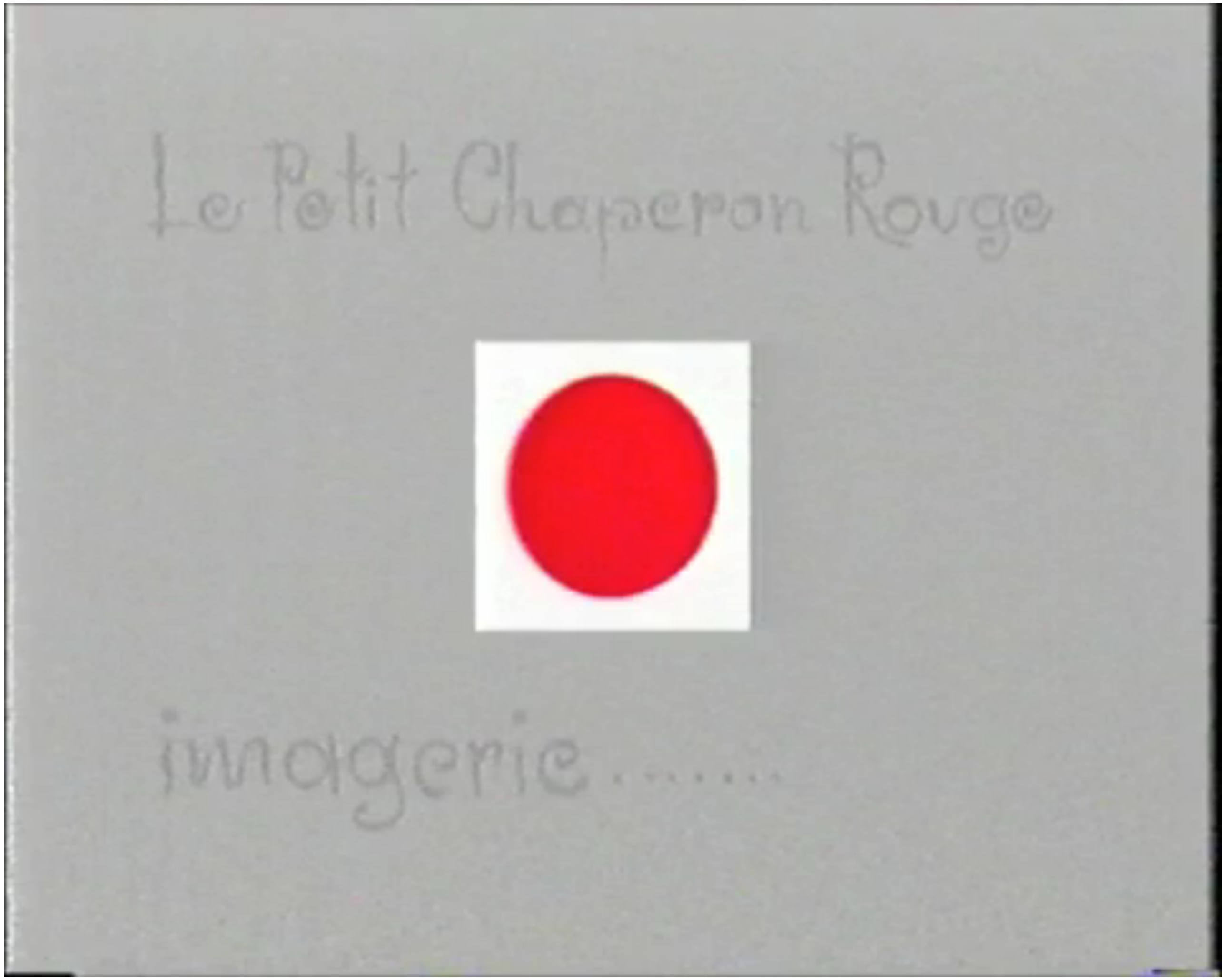
L' analyse des contes de fées

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

La grand-mère se fait manger vers 2’30

Le PCR se fait manger vers 3’

Le chasseur tue le Loup vers 3’40

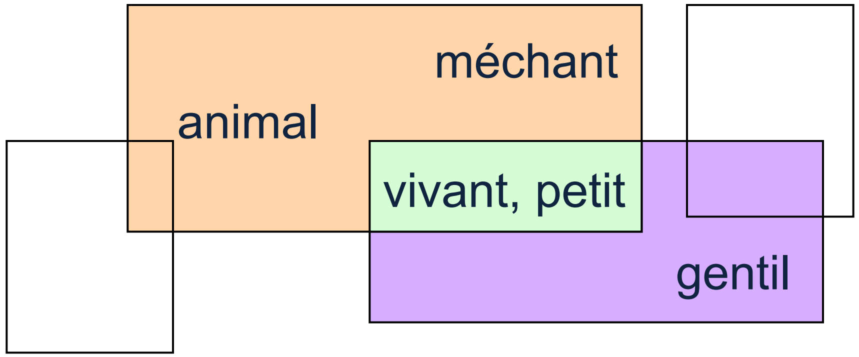


Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

L' analyse du petit chaperon rouge

Objectifs :

- extraire d'une séquence d'ensembles d'objets (scène, image, etc.), les sous-ensembles (constituants, catégories, configurations, etc.) permettant de la décrire (et structure en treillis de ces constituants)
- Caractéristique ∈ vivant, animal, méchant, petit, gentil, moteur, extérieur, place
- Objet = { caractéristiques }
  le petit chaperon rouge = vivant, petit, gentil
  le loup = vivant, animal, méchant, petit
- Scène = { Objets}
  le loup et le PCR parle dans la forêt → vivant, animal, méchant, petit, gentil, moteur, extérieur, place



Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Encodage

Objets	Encodage (caractéristiques)
le Petit Chaperon Rouge	vivant, petit, bon
la mère	vivant, bon
la grand-mère	vivant, bon, vieux
le Loup	vivant, animal, dangereux
la forêt	vivant, lieux, dangereux
la maison	lieux
le panier	lieux, petit
donner	action, extérioriser, matériel
dormir	action, bon
manger	action, intérioriser, matériel
marcher	action,
parler	action, extérioriser

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Encodage

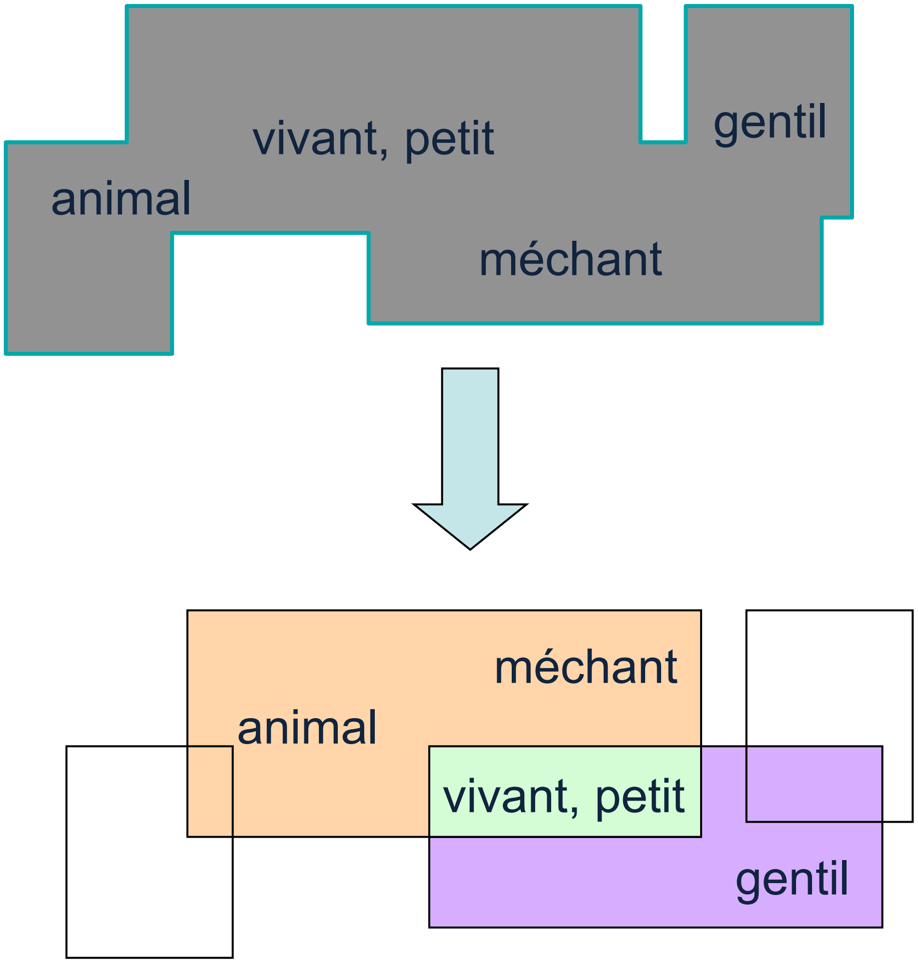
Description	***Scène* (informel)**
PCR, mère, parler, maison	La maman informe le PCR de sa GM malade
PCR, mère, donner, panier, maison	La maman donne le panier au PCR
PCR, marcher, forêt, panier	Le PCR marche dans la forêt
PCR, loup, parler, forêt, panier	Il rencontre le loup dans la forêt et lui raconte sa mission
loup, marcher, forêt	Le loup se dirige vers la maison de la GM
PCR, marcher, forêt, panier	Le PCR poursuit son chemin pour apporter le panier à la GM
GM, dormir, maison	La GM est à sa maison et dort
GM, loup, parler, maison	Le loup se présente à la maison de la GM et se fait passer pour PCR
loup, manger, GM	Le loup mange la GM
PCR, loup, parler, maison, panier	Le PCR arrive et parle au loup
loup, manger, PCR, panier	Le loup mange le PCR

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

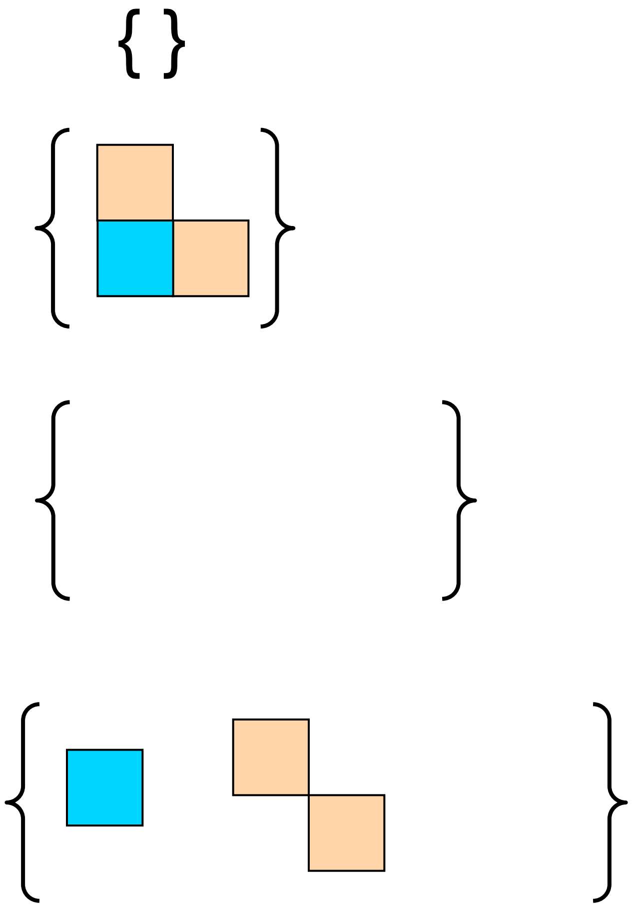
Tomographie

Question : si je connais seulement les caractéristiques des scènes, comment puis-je retrouver les objets (et en faire une hiérarchie) ?

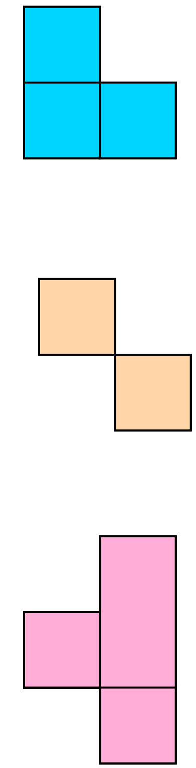


Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Base courante d’objets



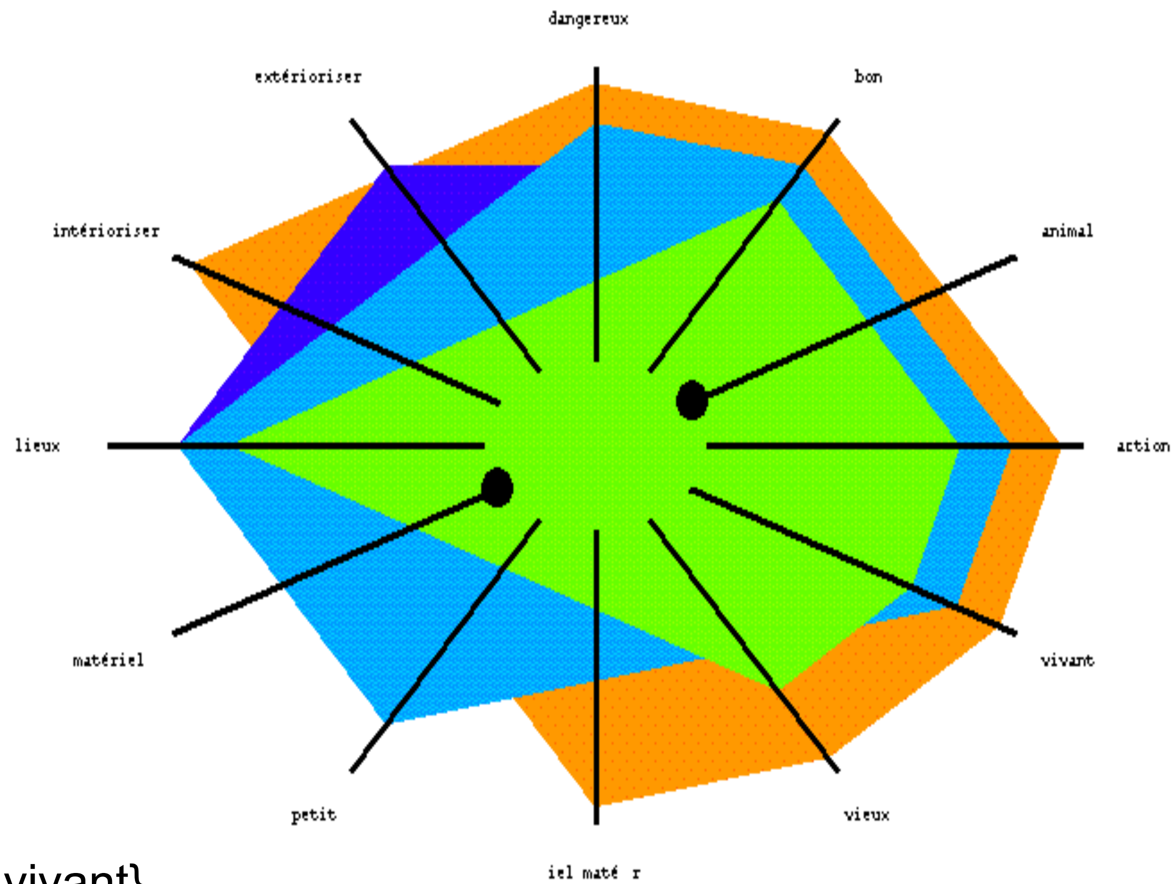
Scène courante



Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Un ensemble de caractéristiques = un complexe simplicial

MGS

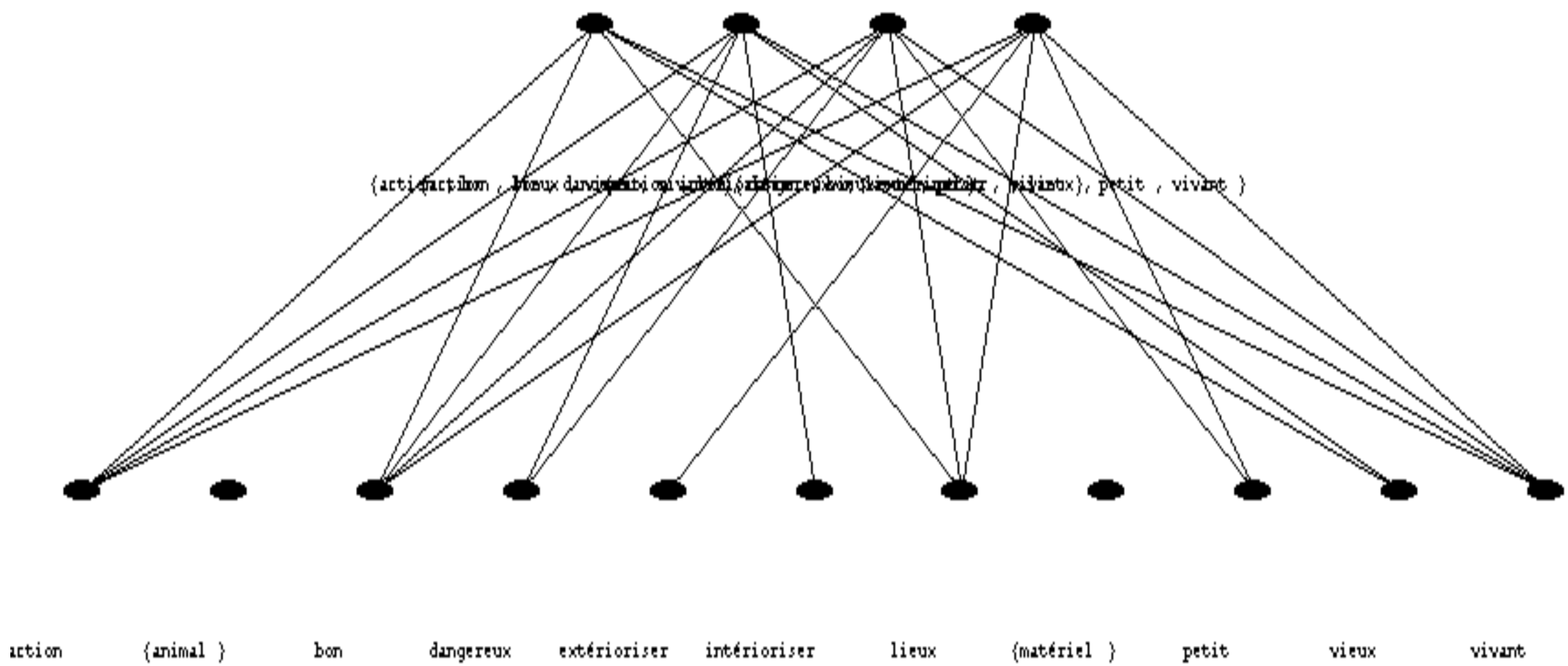


{
  {animal},
  {extérioriser},
  {intérioriser}, {matériel},
  {action, dangereux, lieux, vivant},
  {action, bon, lieux, vieux, vivant},
  {action, bon, dangereux, intérioriser, vieux, vivant},
  {action, bon, dangereux, lieux, petit, vivant},
  {action, bon, extérioriser, lieux, petit, vivant}
}

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

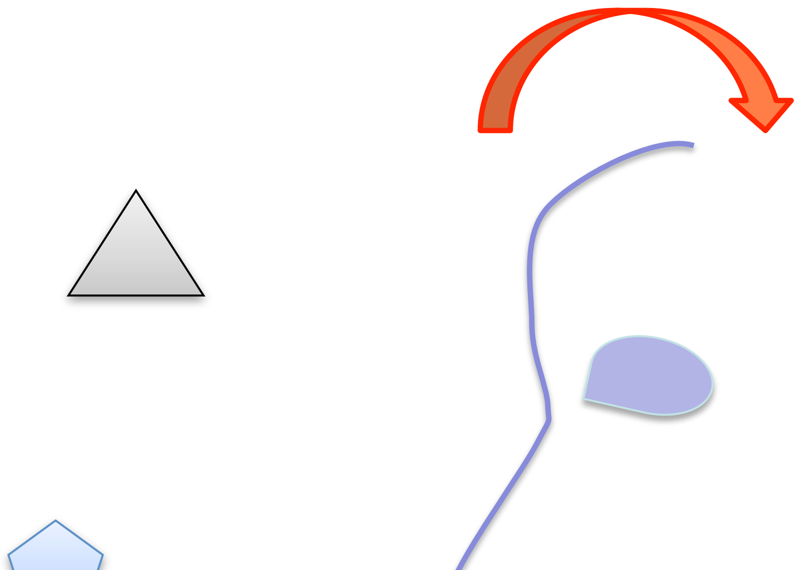
Treillis des concepts formels

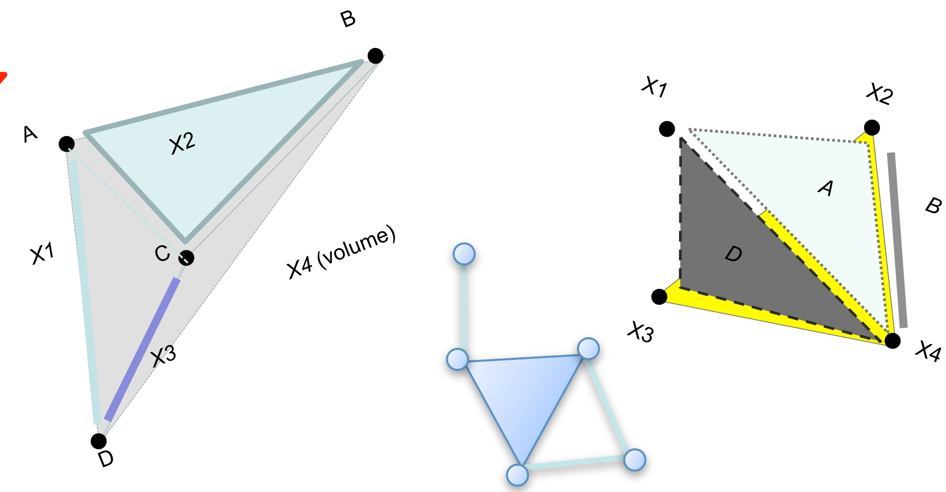


Du percept au concept (~Jean Nicod)

Percepts **Concepts**

la pompe à concept





une organisation spatiale :

- structure de la co-occurence des percepts
- logique des observations (= topologie des ouverts)

analyse moins naïve :

- les attributs se perçoivent simultanément (conjonction)
- les valeurs d'un attribut sont exclusives (disjonction)

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

L’analogie aristotélicienne

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Un problème d'analogie

Etant donné A, B et C,

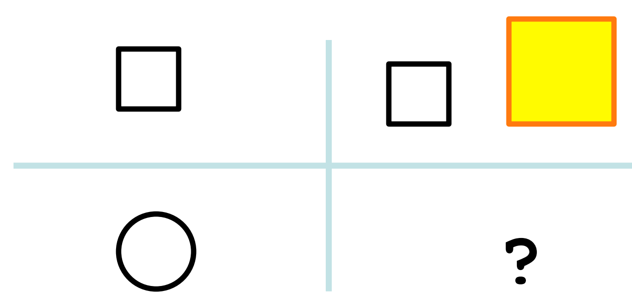
Trouver D qui est à C ce que B est à A

A	B
C	**?**

Exemple numérique

3	6
7	**?**

Exemple géométrique



Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

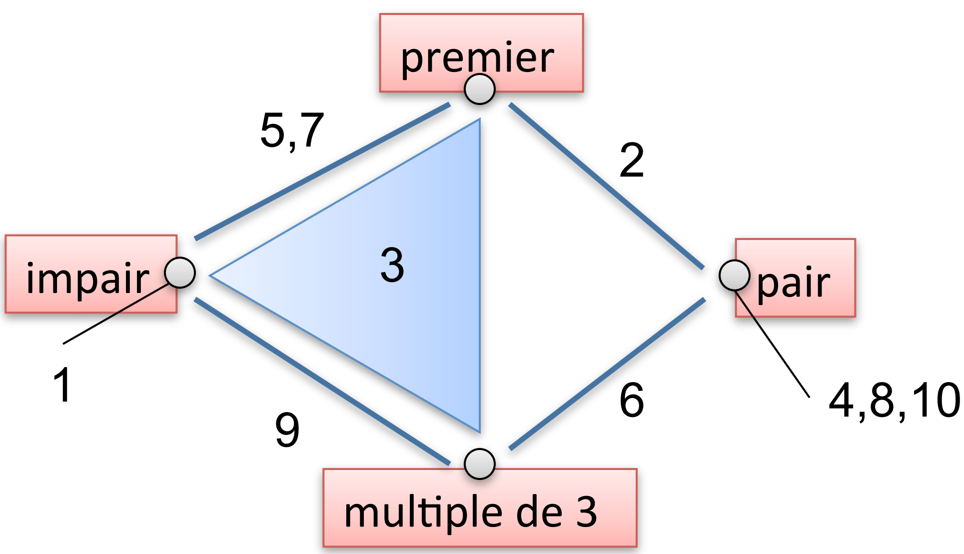
Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

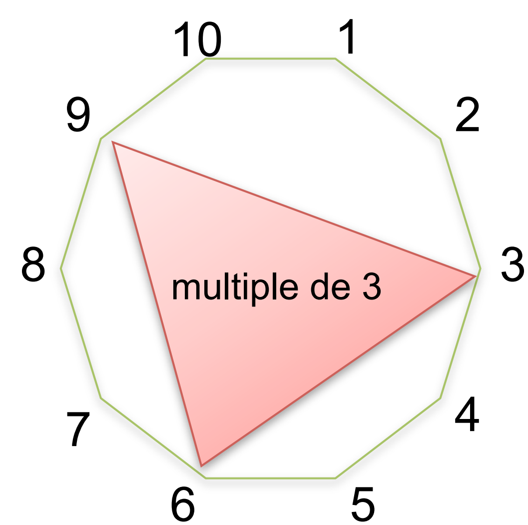
Représentation d'un ensemble de prédicats

$\lambda \subset$ Objets $\times$ Predicats : $(o,p) \in \lambda \Leftrightarrow p(o)$

Objets = {1, 2, 3, …, 10}

Predicats = {premier, pair, impair, multiple-de-3}





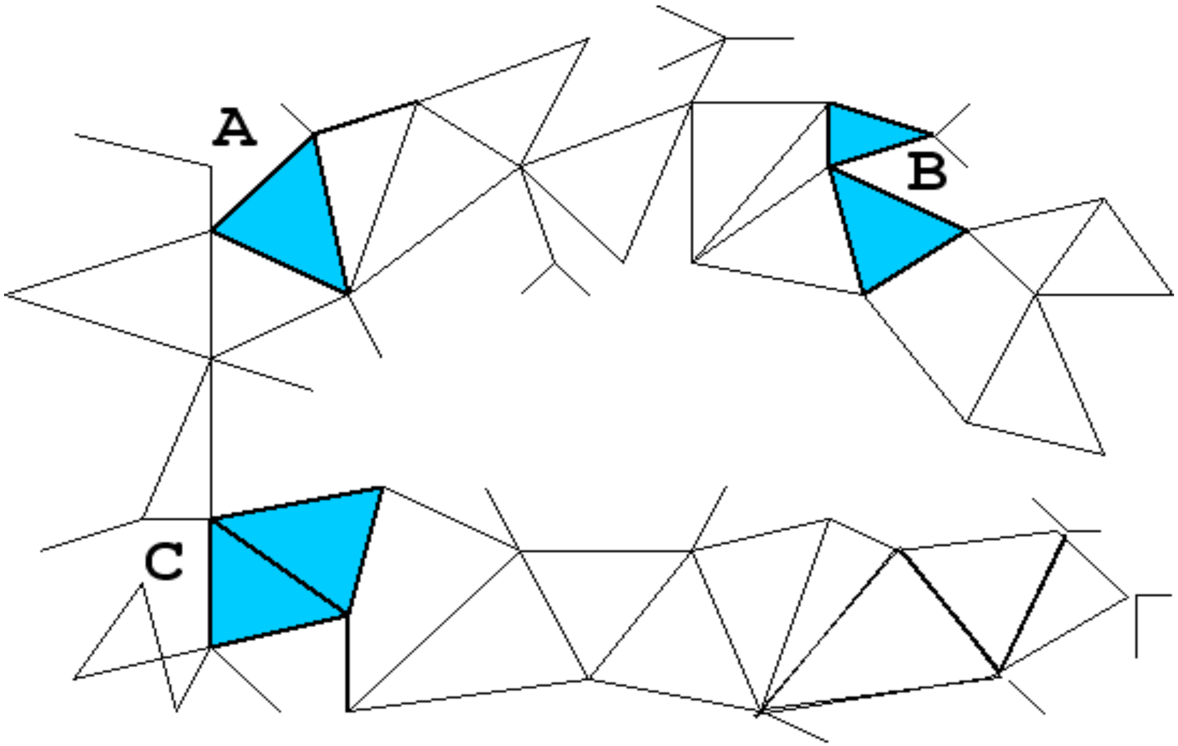
Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Une méthode de résolution d'analogie

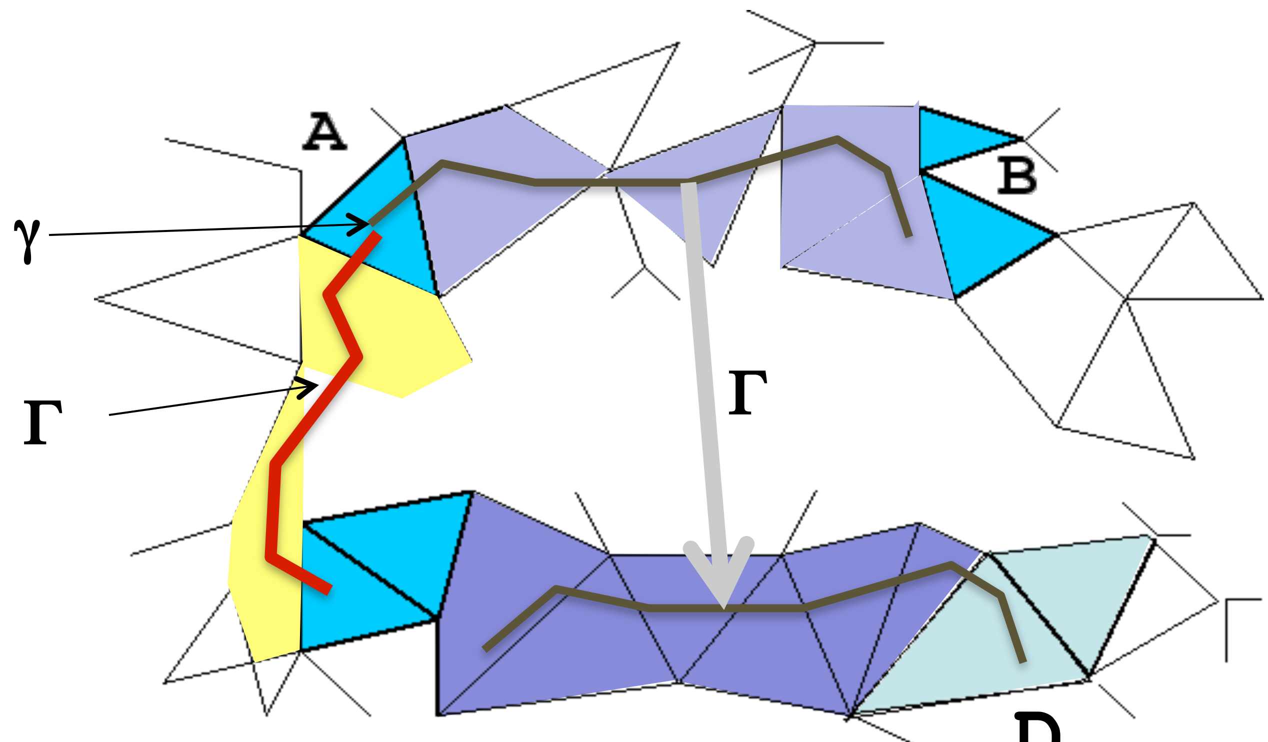
MGS

1. Représenter chaque figure comme une région de l'*espace des propriétés des figures*
2. Trouver un *chemin* γ entre la région A et la région B
3. Généraliser ce chemin en l'interprétant comme une *transformation* Γ *de l'espace (i.e. de propriétés)* via le chemin de A à C
4. Appliquer Γ à γ pour trouver D



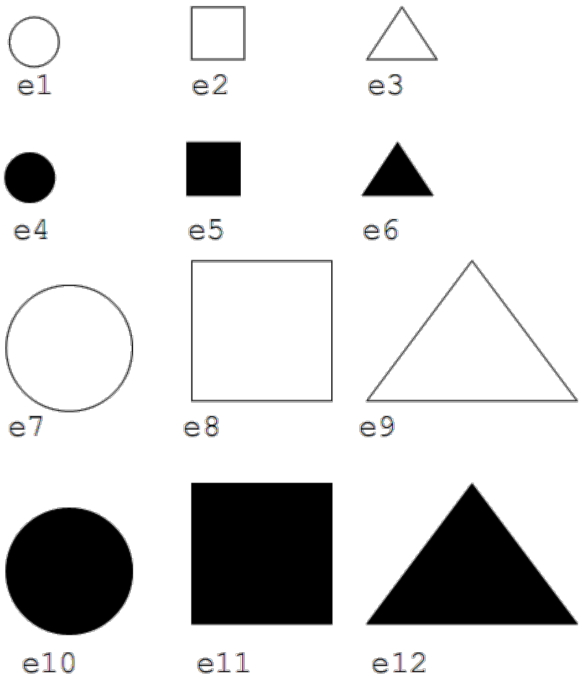
Une méthode de résolution d'analogie

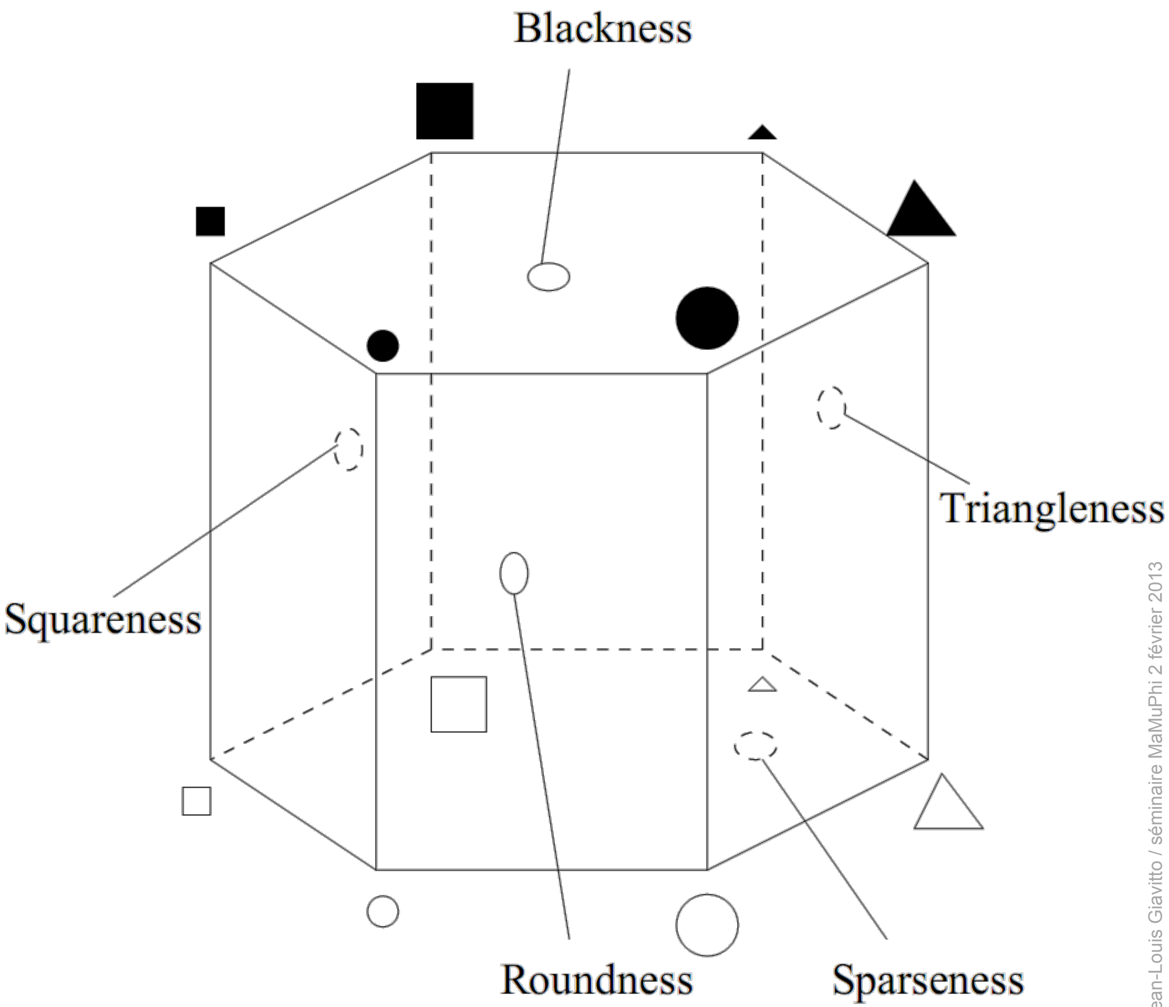
1. Représenter chaque figure comme une région de l'*espace des propriétés des figures*
2. Trouver un *chemin* γ entre la région A et la région B
3. Généraliser ce chemin en l'interprétant comme une *transformation* Γ *de l'espace (i.e. de propriétés)* via le chemin de A à C
4. Appliquer Γ à γ pour trouver D



Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

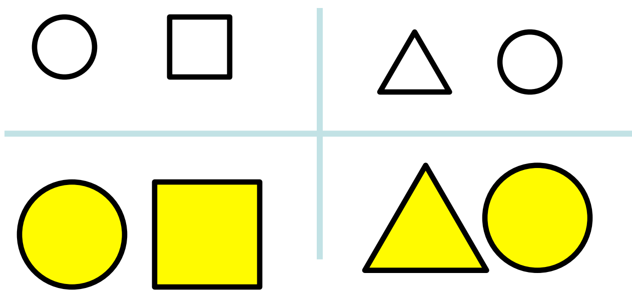
Notre petit monde…

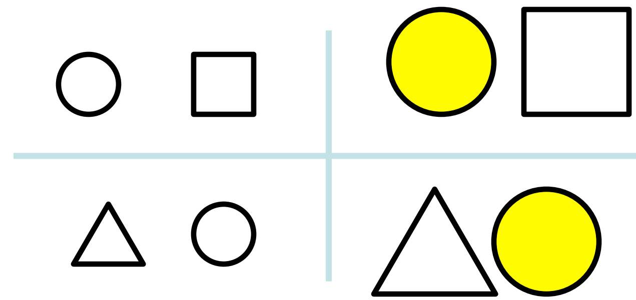


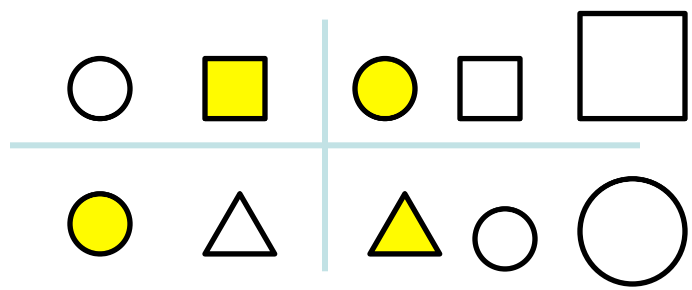


Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

- Exemple de résolution avec *Esqimo*







Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

MGS

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

LA PROGRAMATION SPATIALE

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

The MGS Spatial Approach

MGS

- Use spatial relationships (topology) to unify the various structures of an *abstract* collection of elements
  - space as as a resource (multiple CPU)
  - space as a constraint (data location)
  - space as an input/output (gradient field)

- Neighborhood relationships:
  - the structure of the collection
  - the structure of the subcollection
  - the computation dependencies

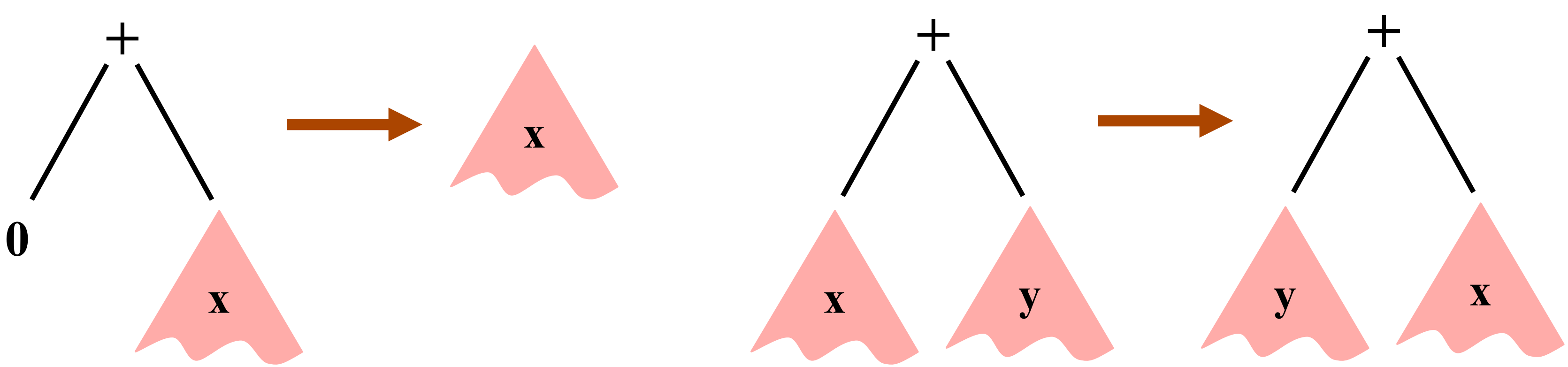
- Computation by rewriting
  - Pattern matching (selecting a subcollection)
  - Substitution (topological surgery)

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Rewriting systems (and abstract transition systems)

- Rewriting system
  - Used to formalize equationnal reasoning
  - A generative device (grammar)
  - Replace a sub-part of an entity by an other
  - Set of rewriting rules $\alpha \rightarrow \beta$
    - α: pattern specifying a sub-part
    - β: expression evaluating a new sub-part

- Example: arithmetic expressions simplification



Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

A general rewriting mechanism

MGS

1. In a *collection* of elements
2. *Replace* a *subcollection* X
3. With a collection Y computed from X and its *neighbors*

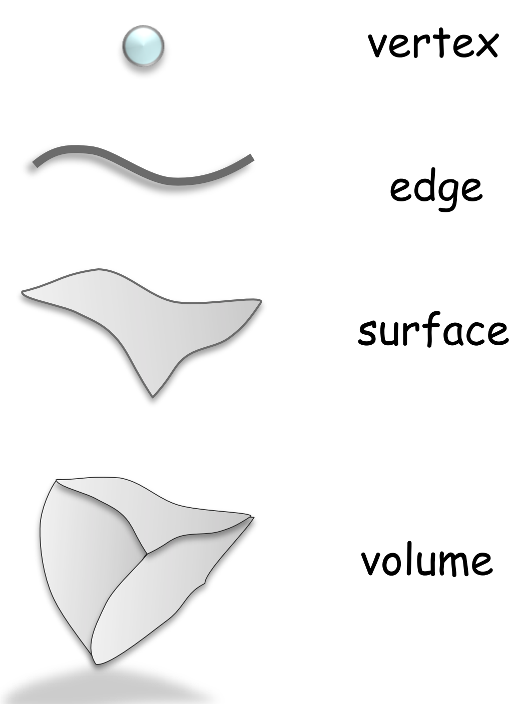
monoidal

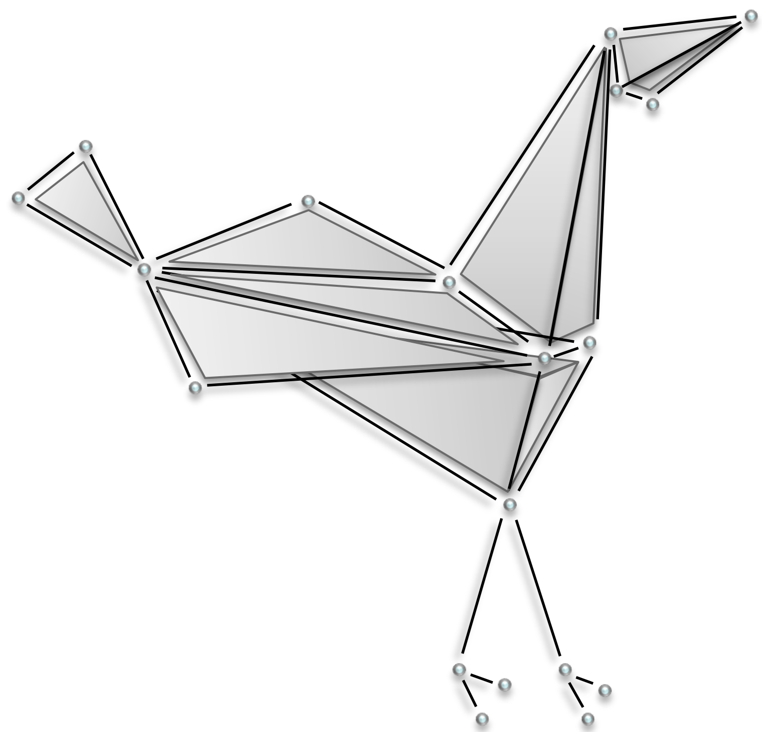
Collection	Neighborhood	Algebra
• Tree	• father/son	• free term
• Sequence (list)	• left, right	• associative term
• Multiset (bag)	• all	• associative + commutative
• Set	• all	• asso. + comm. + idempotent
• **Grid**	• NEWS	• a specific algebra (action of a group on itself)

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

MGS Proposition

- Topological collections
  - Structure
    - A collection of topological cells
    - An ***incidence relationship***





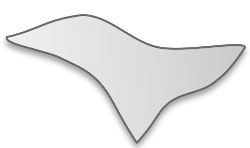
Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

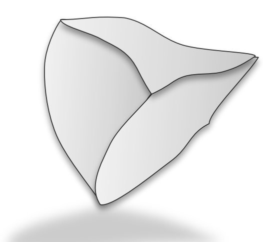
MGS Proposition

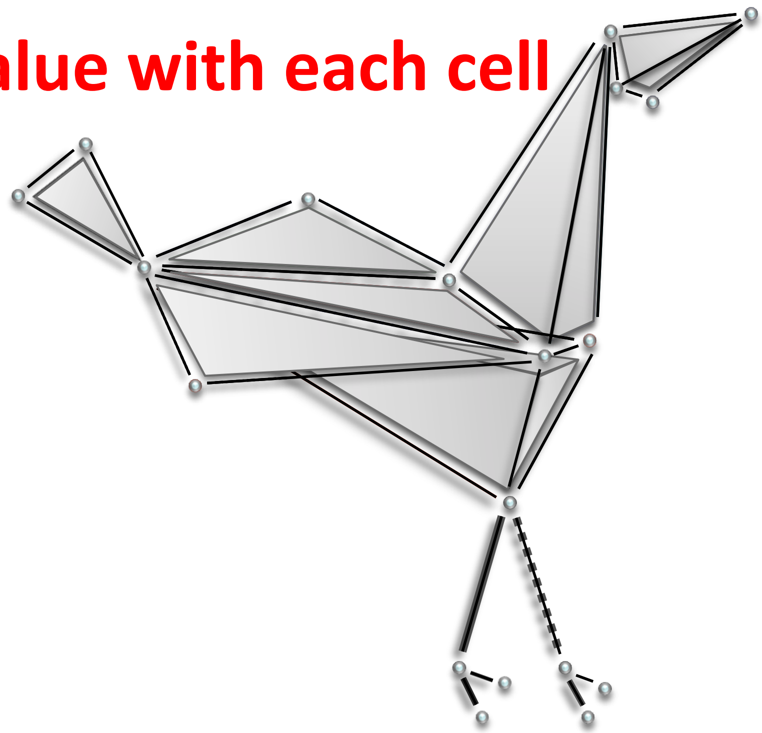
- Topological collections
  - Structure
    - A collection of topological cells
    - An incidence relationship
  - Data: **association of a value with each cell**


0-cell


1-cell


2-cell


3-cell

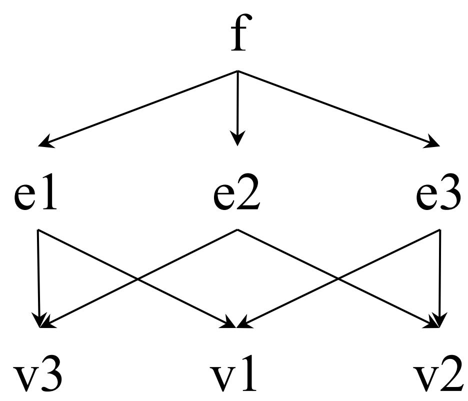


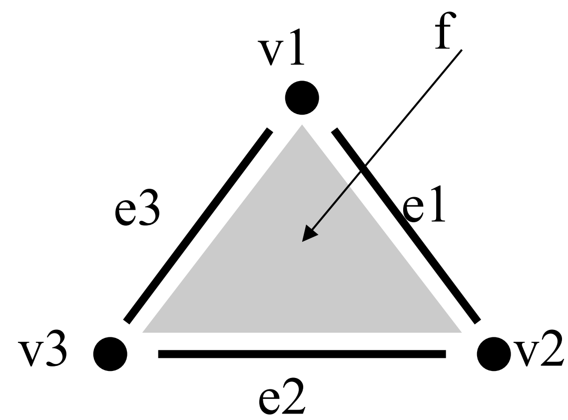
Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

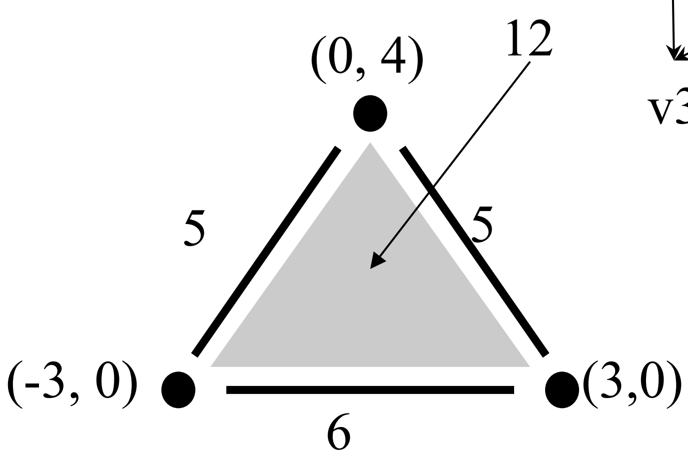
Abstract (Simplicial) Complex and (Simplicial) Chains

Incidence relationship and lattice of incidence:

- boundary(f) = {v1, v2, v3, e1, e2, e3}
- faces(f) = {e1, e2, e3}
- cofaces(v1) = {e1, e3}







Topological chain

- coordinates with vertices
- lengths with edges
- area with f

$$\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}.v_1+\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}.v_2+\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}.v_3+5.e_1+6.e_2+5.e_3+12.f$$

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

MGS Proposition

- Transformations
  - Functions defined by case on collections

    Each case (pattern) matches a sub-collection
  - Defining a rewriting relationship: ***topological rewriting***

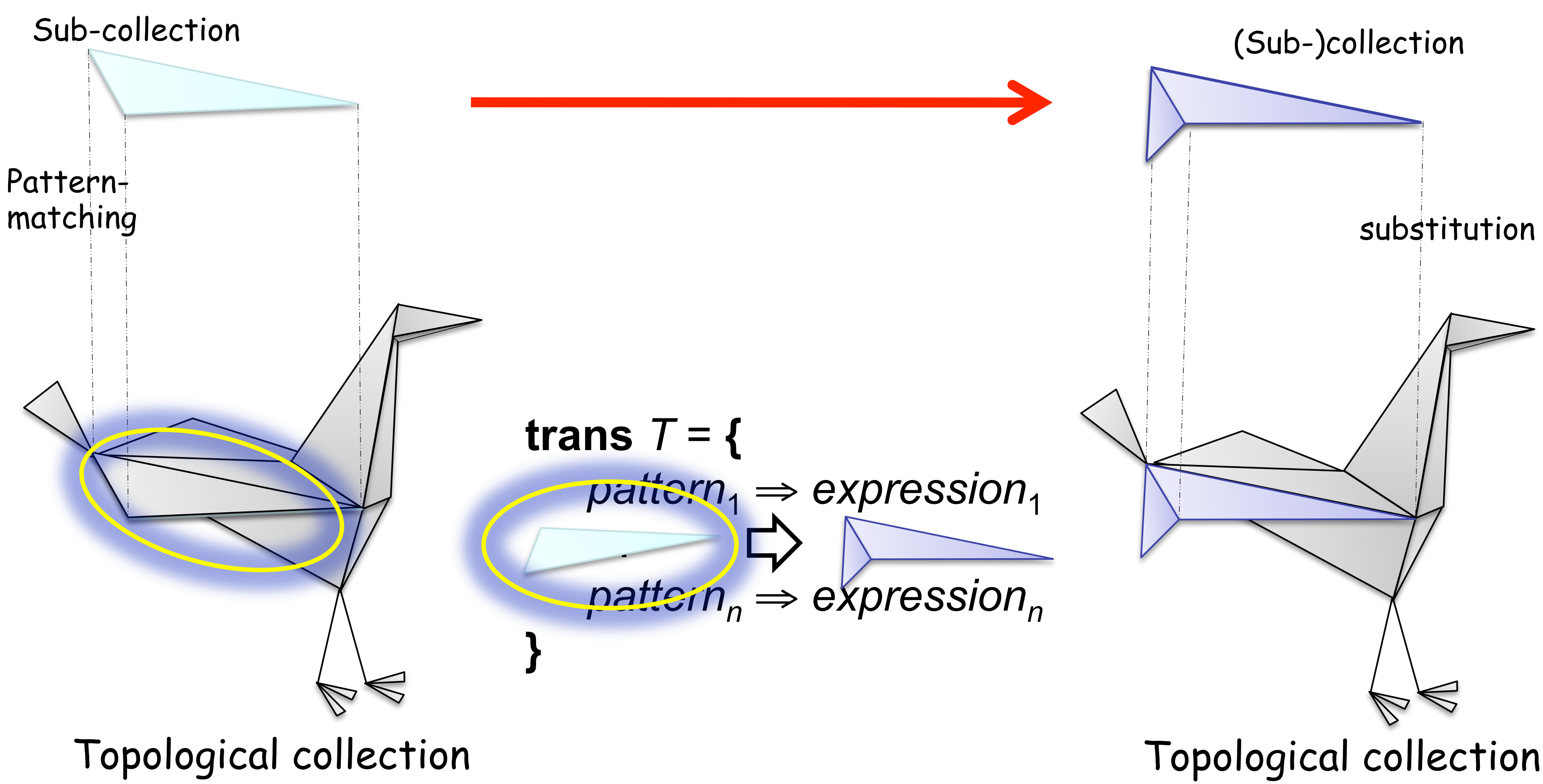
$$
\begin{array}{l}
\textbf{trans } T = \{ \\
\quad \mathit{pattern}_1 \Rightarrow \mathit{expression}_1 \\
\quad \ldots \\
\quad \mathit{pattern}_n \Rightarrow \mathit{expression}_n \\
\}
\end{array}
$$

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

MGS Proposition

- Transformations



trans T = **{**

$pattern_1 \Rightarrow expression_1$

$pattern_n \Rightarrow expression_n$

}

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Example: Diffusion Limited Aggregation (DLA)

- Diffusion: some particles are randomly diffusing; others are fixed
- Aggregation: if a mobile particle meets a fixed one, it stays fixed

```
trans dla = {
     `mobile , `fixed  => `fixed, `fixed ;
     `mobile , <undef> => <undef>, `mobile
}
```

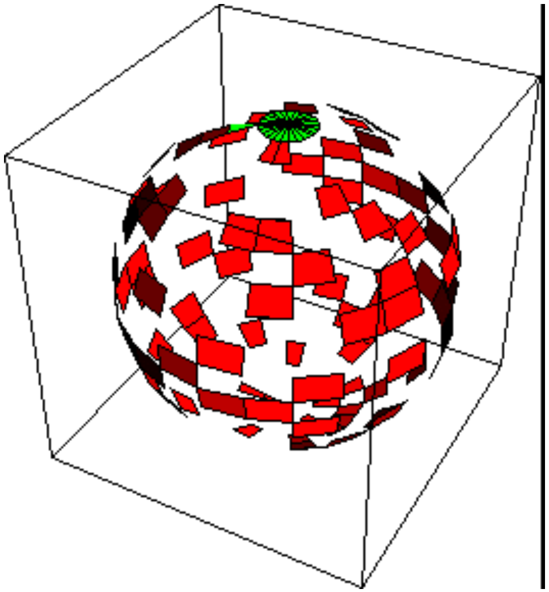
NEIGHBOR OF

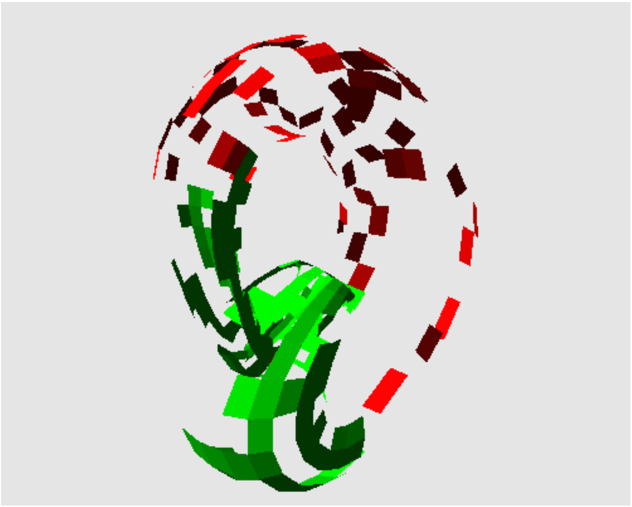
Example: Diffusion Limited Aggregation (DLA)

- Diffusion: some particles are randomly diffusing; others are fixed
- Aggregation: if a mobile particle meets a fixed one, it stays fixed

```
trans dla = {
    `mobile , `fixed  => `fixed, `fixed ;
    `mobile , <undef> => <undef>, `mobile
}
```

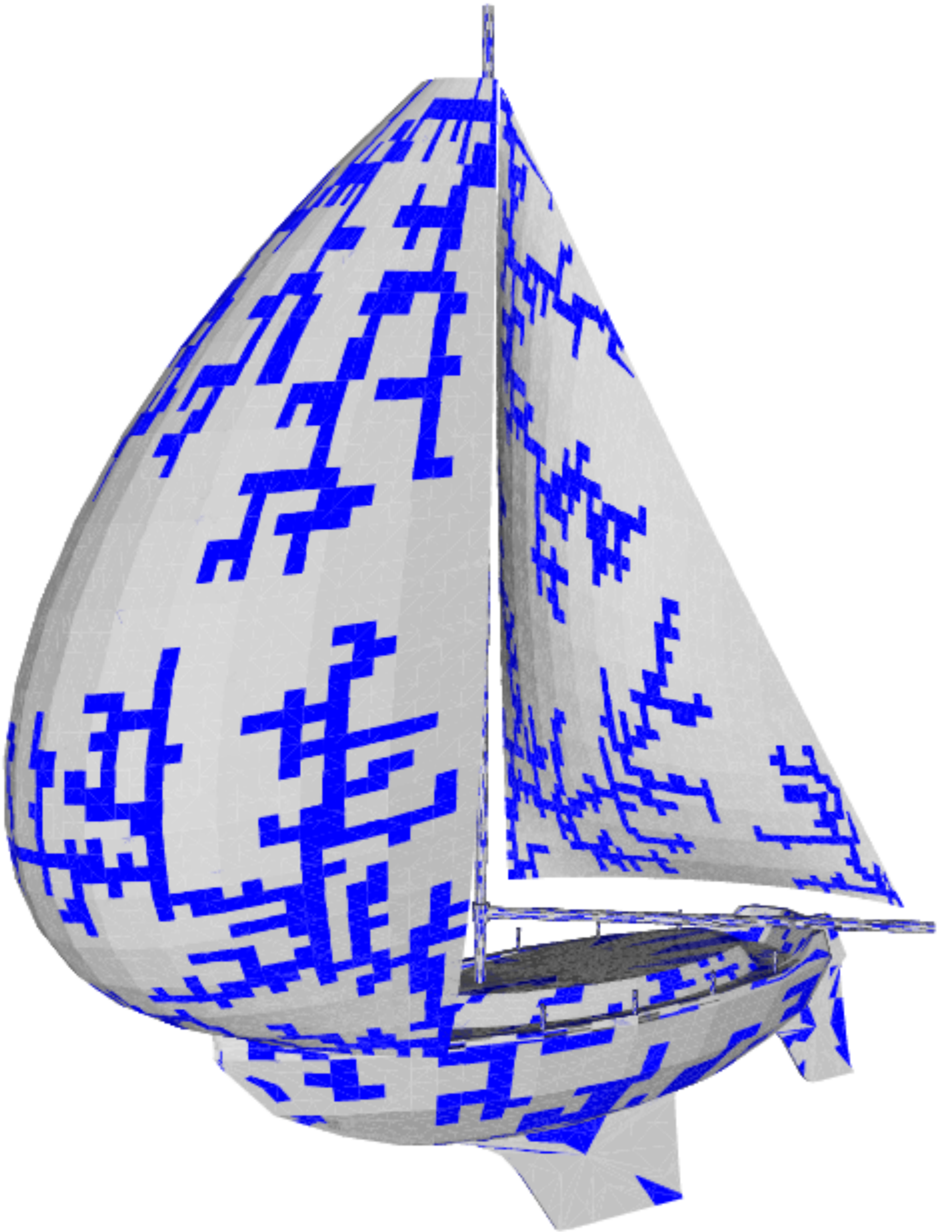
this transformation is an abstract process that can be applied to any kind of space





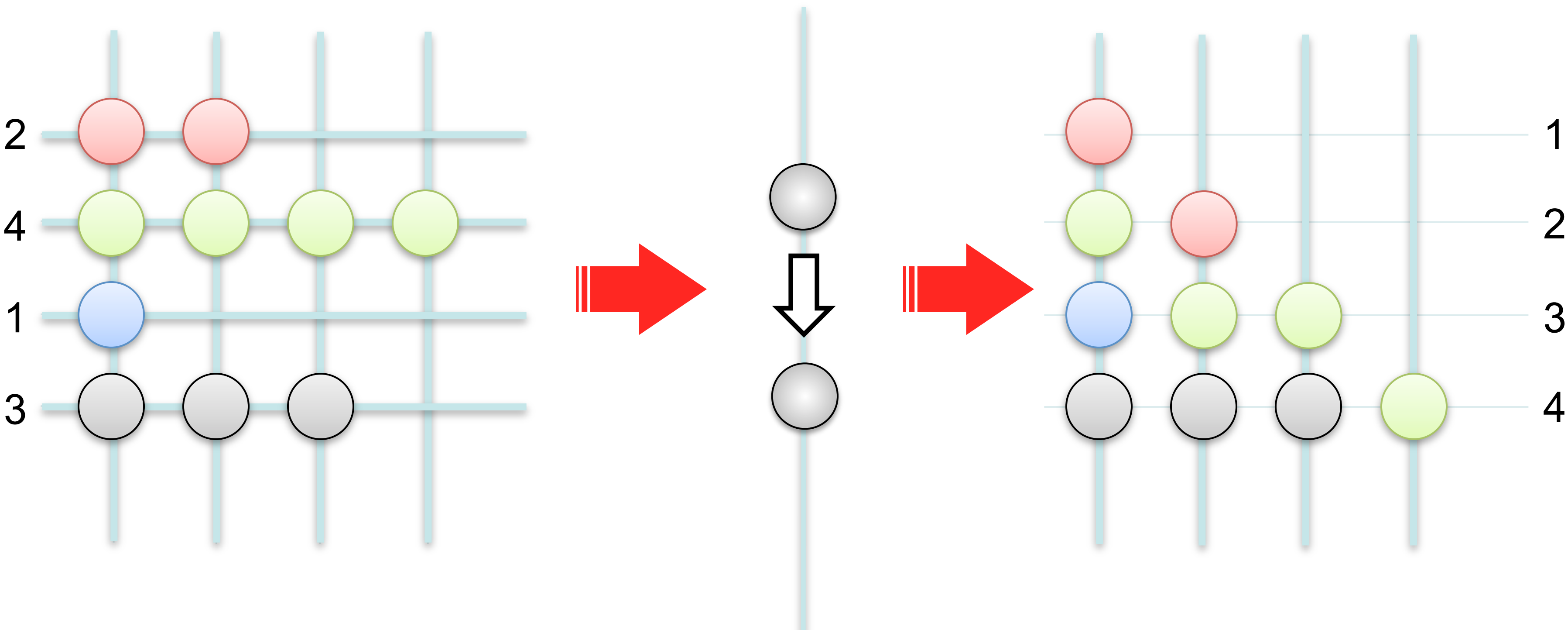
Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Polytypisme



Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Bead Sort



Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Bead Sort

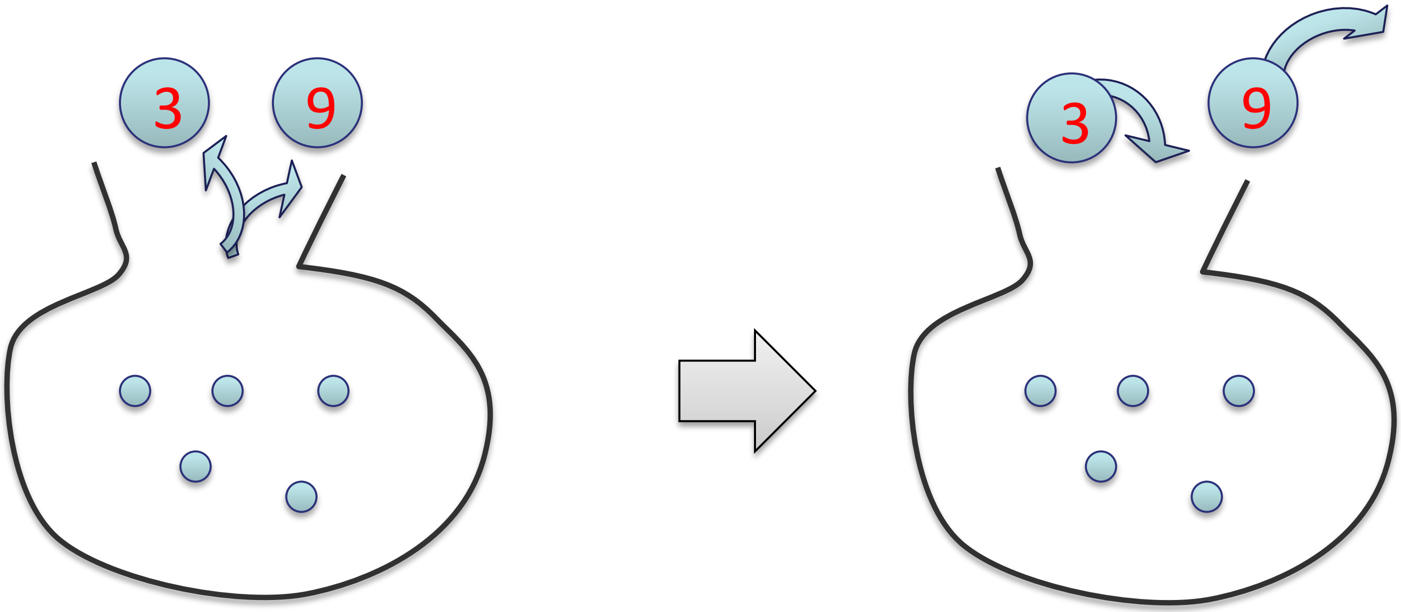
MGS

```
Gbf NEWS = < North, South, East, West;
             North+South=0, East+West=0>

trans dla = {
      `bead |south> `empty  => `empty, `bead ;
}
```


Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Eratosthene's Sieve

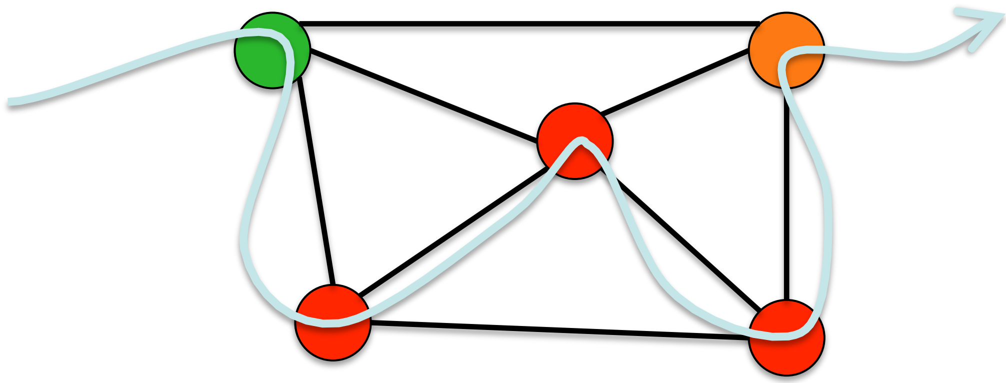


$$
\begin{aligned}
\texttt{trans}\ \mathit{Generate} &= \{x, \mathit{true}\} \ \texttt{=>}\ x, \{x+1, \mathit{true}\};\\
\texttt{trans}\ \mathit{Succed} &= \{x, \mathit{true}\} \ \texttt{=>}\ x;\\
\texttt{trans}\ \mathit{Eliminate} &= (x, y \,/\, y \bmod x = 0) \ \texttt{=>}\ x;
\end{aligned}
$$

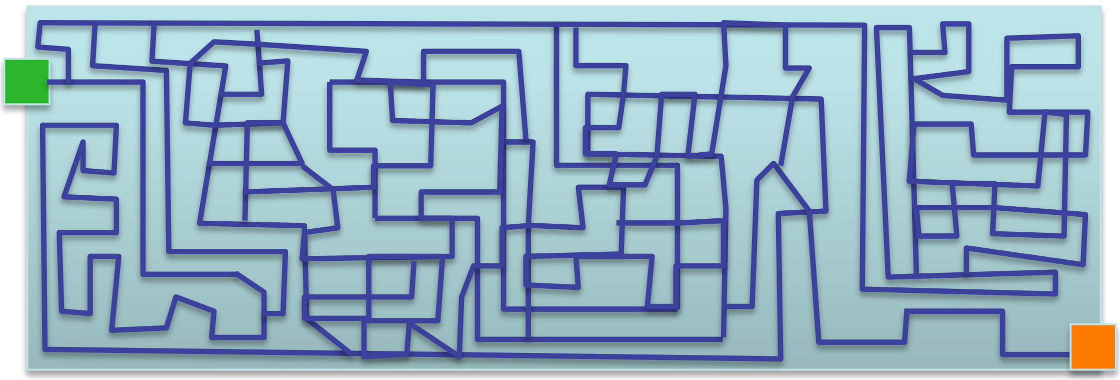
$$\mathit{Eliminate}[\texttt{fixrule}]\Big(\mathit{Succed}\big(\mathit{Generate}[N](\{2, \mathit{true}\}, \texttt{set}:())\big)\Big)$$

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Hamiltonian path



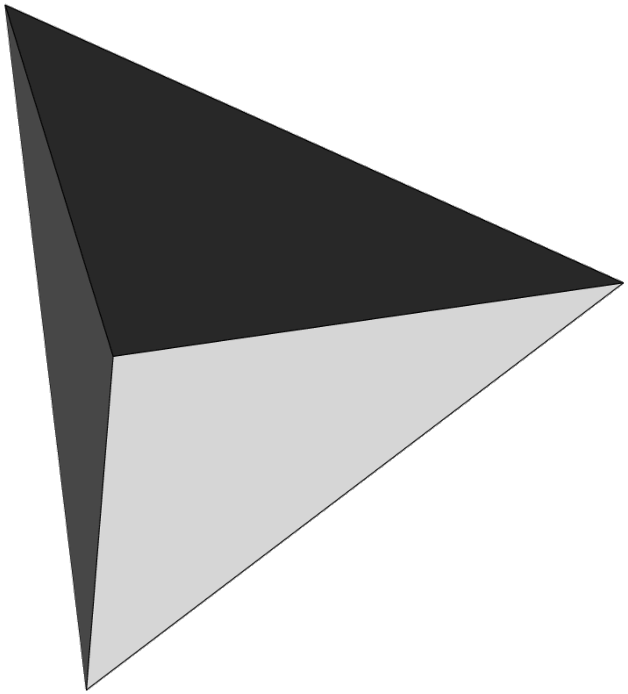
```
trans h_path = { `start , x* as p,`stop
                 / size(p) = n-2 => return p }
```



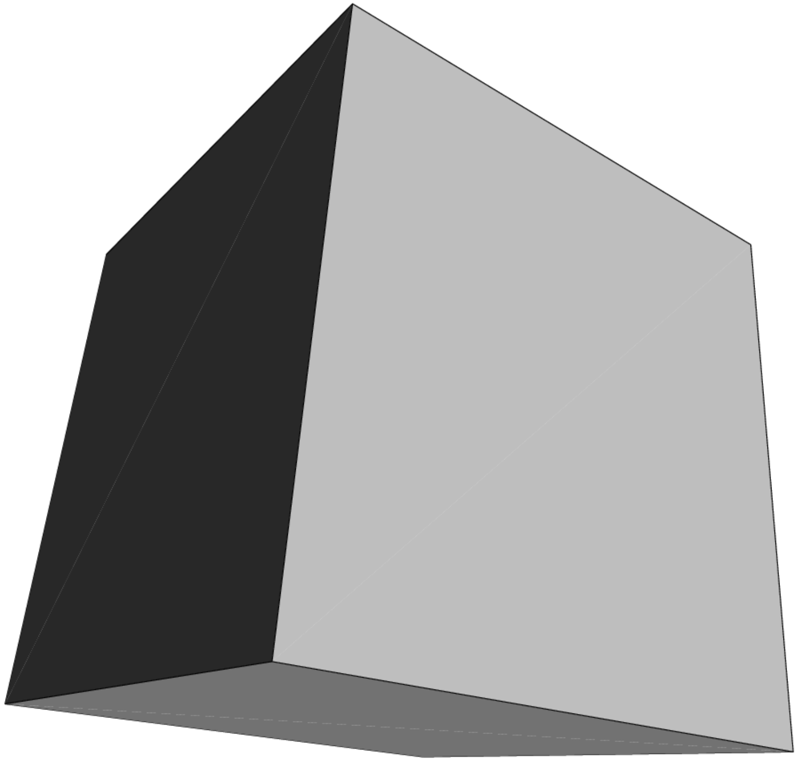
```
trans maze = { `input, c* as p,`output => return p }
```


Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

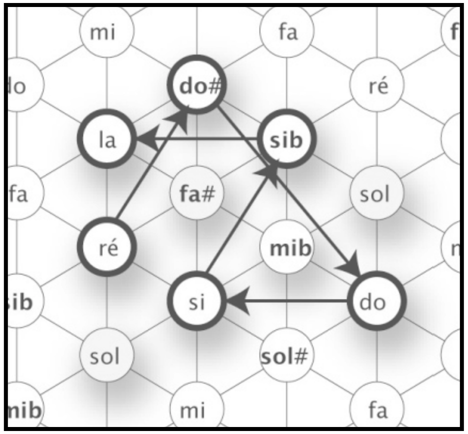
Fractal construction by carving



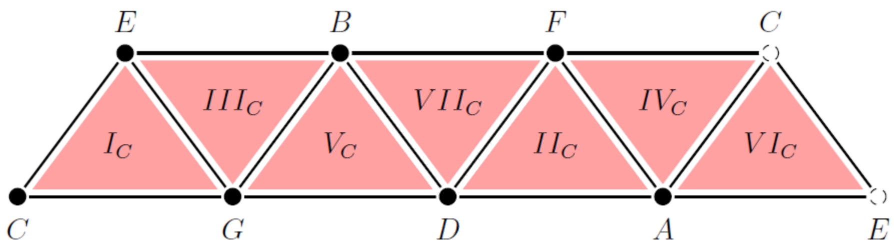
Sierpinsky sponge (4 steps)



Menger sponge (2 steps)



Music in a space

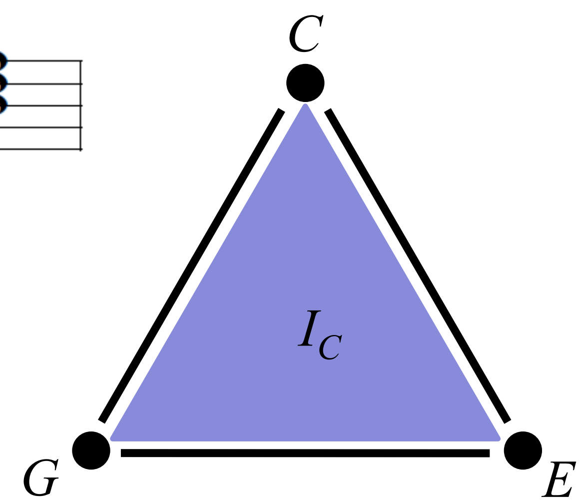


Computing the space of music

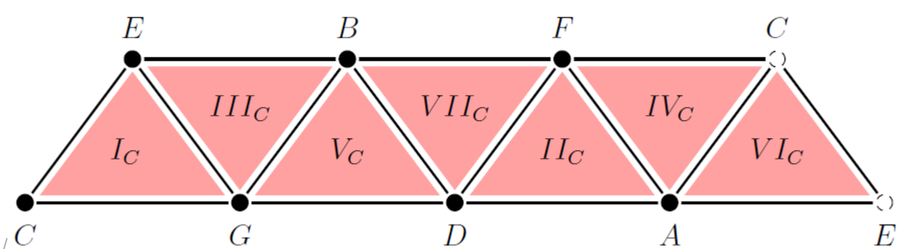
Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Tonality and Möbius Strip

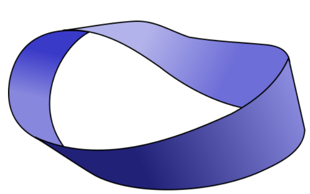
- Motivation: spatial visualization of tonality
- Association of a chord set with the tonality: the *degrees*
  - Example: 



- Spatial representations
  - Note = vertex
  - Chord = surface
- Fusion of the common notes for the 7 degrees



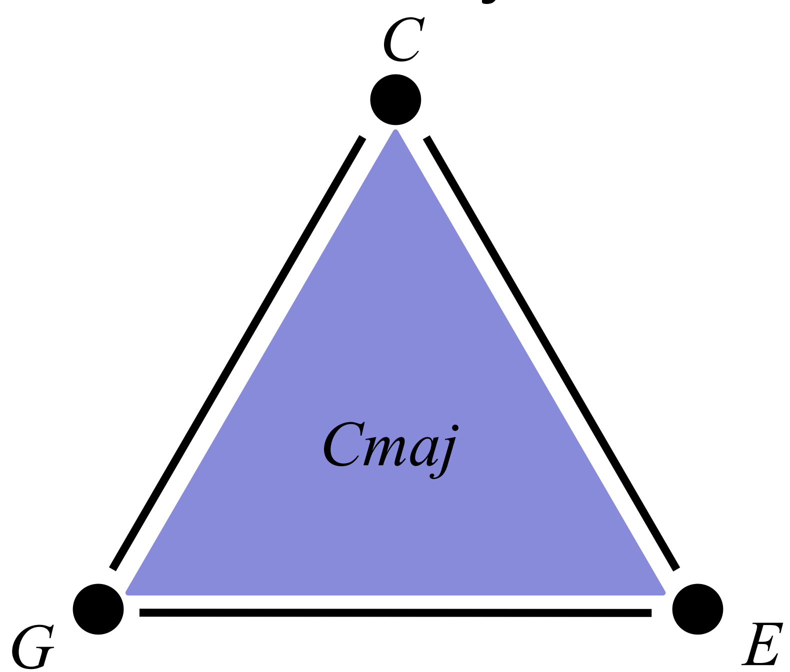
[Mazzola02]



Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Self-Assembly of Chords

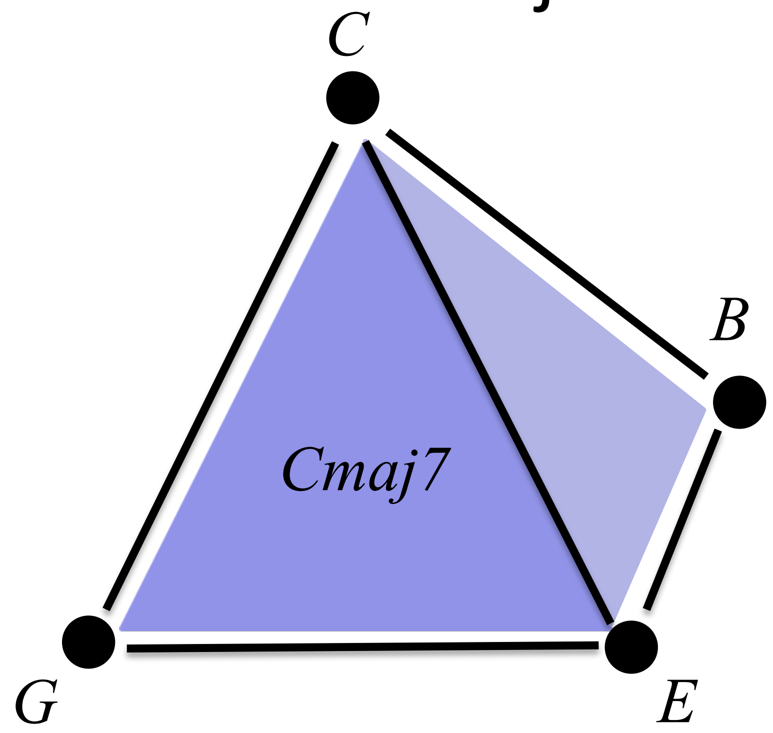
- Automation of the process for the analysis of other chords sequences
- *Reaction* of the chords between themselves
- Simplicial representation of musical objects
  - Note: 0-simplex
  - 2-note chord: 1-simplex
  - 3-note chord: 2-simplex



Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Self-Assembly of Chords

- Automation of the process for the analysis of other chords sequences
- *Reaction* of the chords between themselves
- Simplicial representation of musical objects
  - Note: 0-simplex
  - 2-note chord: 1-simplex
  - 3-note chord: 2-simplex
  - 4-note chord: 3-simplex

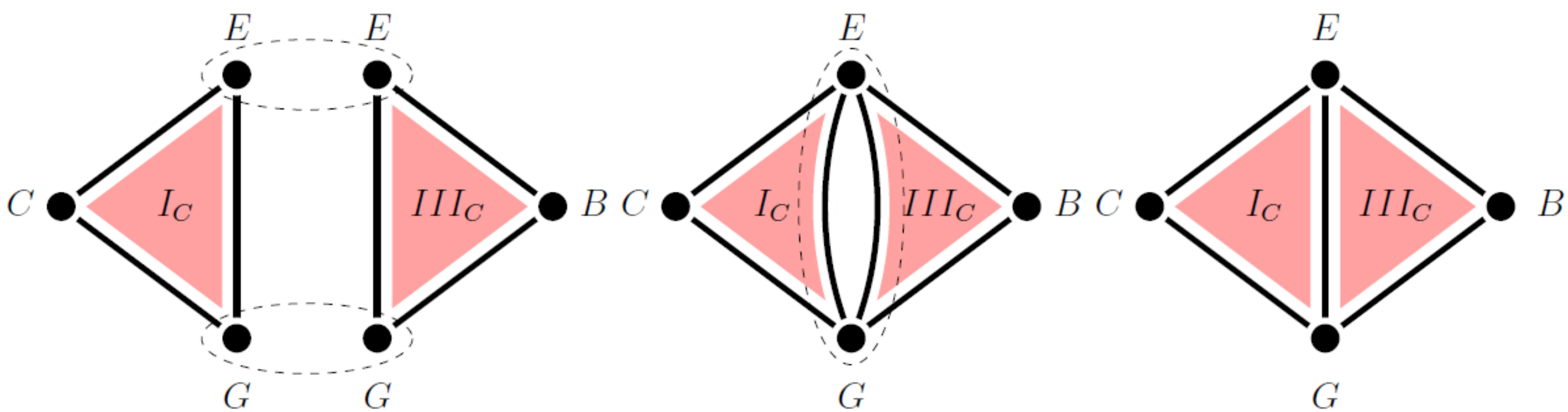


Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Self-Assembly of Chords

MGS

- MGS transformation for self-assembly process



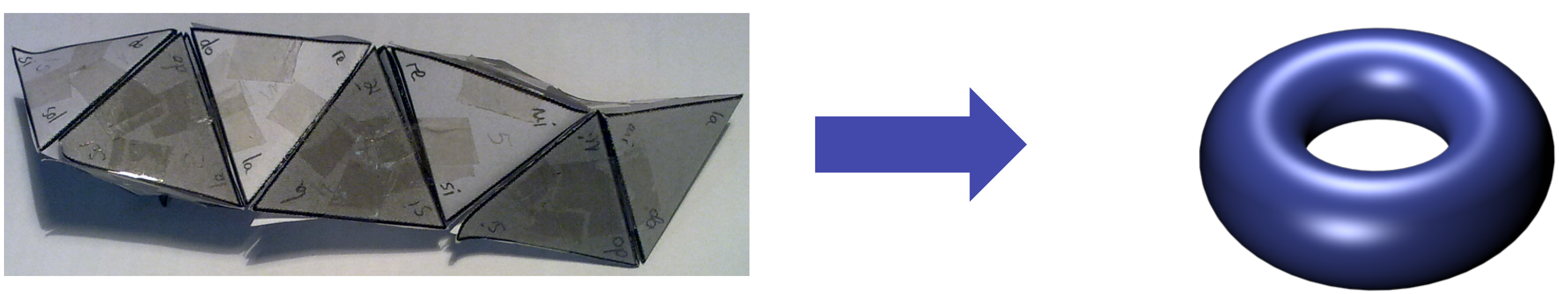

```
Trans identification = {
  s1 s2 / (s1 == s2 & (faces s1) == (faces s2))
    =>
      let c = new_cell (dim s1)
                       (faces s1)
                       (union (cofaces s1)
                              (cofaces s2))
      in s1 * c
}
```

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Applications

- Four-note degrees of C-major tonality

- Chord = 3-simplex (tetrahedrons)
- Self-assembly



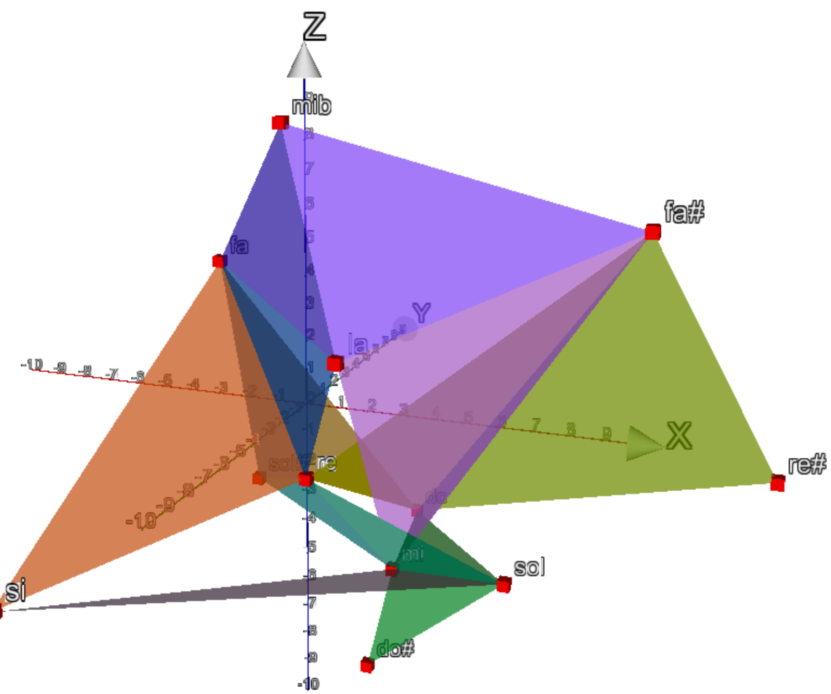
Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Applications

- Extract of the Prelude No. 4 Op. 28 of F. Chopin

- Simplicial complex



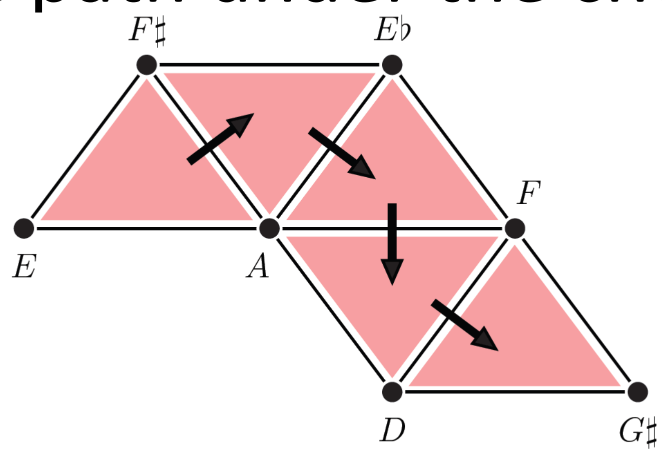
Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Applications

MGS

- Extract of the Prelude No. 4 Op. 28 of F. Chopin

- Analysis of the path under the chords



- The path chosen by F. Chopin is associated with the smallest movements on the chords

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

MGS

DISCUSSIONS

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Un « manifeste » topologique

MGS

- L'approche logique en informatique
  calculer = déduire
  (isomorphisme de Curry-Howard)

- D'autres paradigmes peuvent être fertiles
  calculer = se déplacer dans un espace

- Essayer de voir l'espace (et le temps) dans un programme (plutôt que des opérations logiques)

  visées : *heuristiques, techniques, pédagogiques*

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Une logique des observations finies

- Les propriétés semi-décidables ont une structure d'ouverts
  - semi-décidable = on peut décider en temps fini (= par une série d'observations finie)
  - la conjonction finie de prop. semi-décidable est semi-décidable
  - la disjonction quelconque de propriétés semi-décidables est semi-décidables
- *logique propositionnelle géométrique* (propositionnelle = pas de variable ou de quantifier, que $\wedge$ et $\vee$)

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Observations finies sur une séquence de bits

- séquence : accès aux bits l'un après l'autre
- observation élémentaire '$s_n = 0$'
- observation élémentaire '$s_n = 1$'
- on ne peut lire le même bit à la fois à vrai et à faux :

  $$\text{'}s_n = 0\text{'} \wedge \text{'}s_n = 1\text{'} \;=\; \mathit{false}$$

- si on lit le bit n+1 alors on a pu lire le bit n :

  $$\text{'}s_{n+1} = 0\text{'} \vee \text{'}s_{n+1} = 1\text{'} \;\Rightarrow\; \text{'}s_n = 0\text{'} \vee \text{'}s_n = 1\text{'}$$

- Exemple :

  $$\begin{aligned}\text{'}s_2{=}0\text{'} &= \text{'}s_2{=}0\text{'} \wedge (\text{'}s_1 = 0\text{'} \vee \text{'}s_1 = 1\text{'}) \\ &= (\text{'}s_1 = 0\text{'} \wedge \text{'}s_2{=}0\text{'}) \vee (\text{'}s_1 = 1\text{'} \vee \text{'}s_1 = 0\text{'})\end{aligned}$$

  $$\text{'}s_1{=}0\text{'} \wedge \text{'}s_2{=}1\text{'} \wedge \text{'}s_5{=}1\text{'}$$

  $= $ prefix 01001 ∨ prefix 01011 ∨ prefix 01101 ∨ prefix 01111

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Topologie et logique et relation d'ordre

- Vickers: *topology via logic*
- J. & E. Goubault: *On the geometry of intuitionistic S4 proofs*

Logic		Programming		Geometry
Formulae	=	Types	=	Augmented Simplical Sets
Proofs	=	Programs	=	Augmented Simplicial Maps
Equality of Proofs	=	Convertibility	=	Equality of Maps

- logique et relation d'ordre

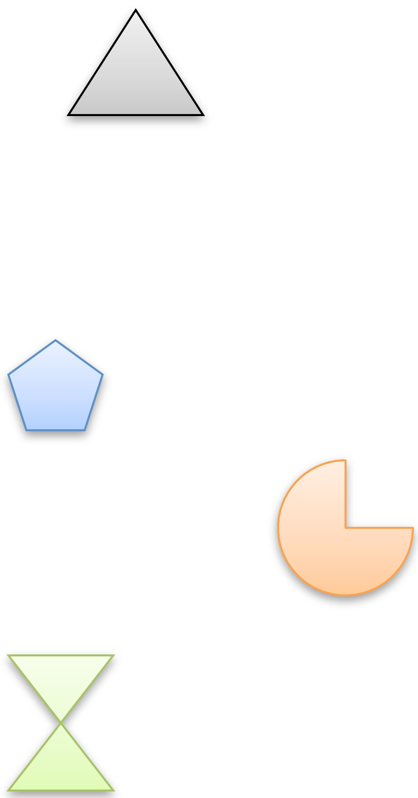
Ordre	logique	Ensemble
$\leq$	$\Rightarrow$	$\subseteq$
=	$\Leftrightarrow$	=
top $\top$	*true*	univers
$\perp$	*false*	$\varnothing$
meet, inf, $\wedge$	conjonction, $\wedge$	intersection, $\cap$
join, sup, $\vee$	disjonction, $\vee$	union, $\cup$

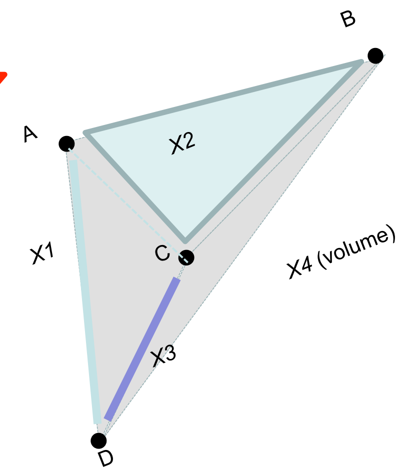
Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

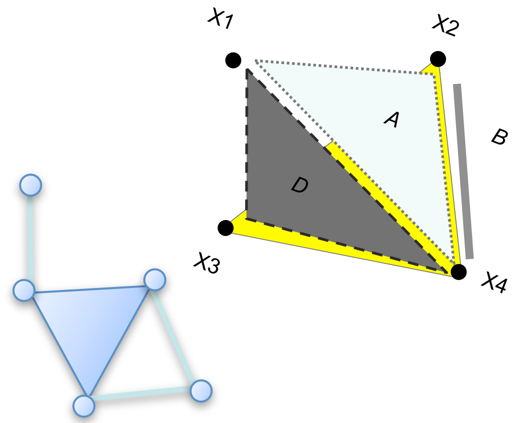
Du percept au concept (~Jean Nicod)

Percepts **Concepts**

la pompe à concept







une organisation spatiale :
- structure de la co-occurence des percepts
- logique des observations (= topologie des ouverts)

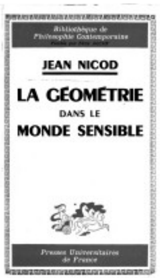
analyse moins naïve :
- les attributs se perçoivent simultanément (conjonction)
- les valeurs d'un attribut sont exclusives (disjonction)

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Jean Nicod: La géométrie dans le monde sensible

- **La Géométrie des sensations de mouvement (1921)**
  Imaginons un être pouvant se mouvoir librement dans un milieu homogène et immobile, par exemple un poisson au sein d'un océan tranquille. Faisons correspondre à chacun de ses mouvements, compliqué ou simple, prolongé ou bref, rapide ou lent, une sensation totale distinctive. Douons-le de mémoire et de raison, et demandons-nous s'il pourrait appliquer une géométrie à son expérience.

- ***La Géométrie dans le monde sensible* (1923)**
  Imaginons un auditeur transporté sans nulle autre sensation le long d'une ligne divisées en petite sections telles que à chaque passage sur une section quelconque (soit A), un sont d'une qualité particulière *a* se fasse entendre. […] Au sujet des sons produits, qui composent toute sa perception […], il ne conçoit, supposons nous, que deux questions : *le son* y *fut-il après le son* x *? Le son* y *fut-il semblable au son* x *?* Cherchons si le monde sensible ainsi défini a des lois ; s'il y a pour ce sujet, une physique.



Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013

Creuser la question, inverser la question ?

MGS

- Quelle est la géométrie
  dans les espaces de hauteurs, de rythme… ?
- Quelle est la logique de nos sensations ?
- Quelle est la sensation
  dans les espaces de hauteurs, de rythme… ?

Jean-Louis Giavitto / séminaire MaMuPhi 2 février 2013