Approche Catégorique des notions de Hiérarchie. Complexité, Emergence via le modèle MES

Andrée C. Ehresmann

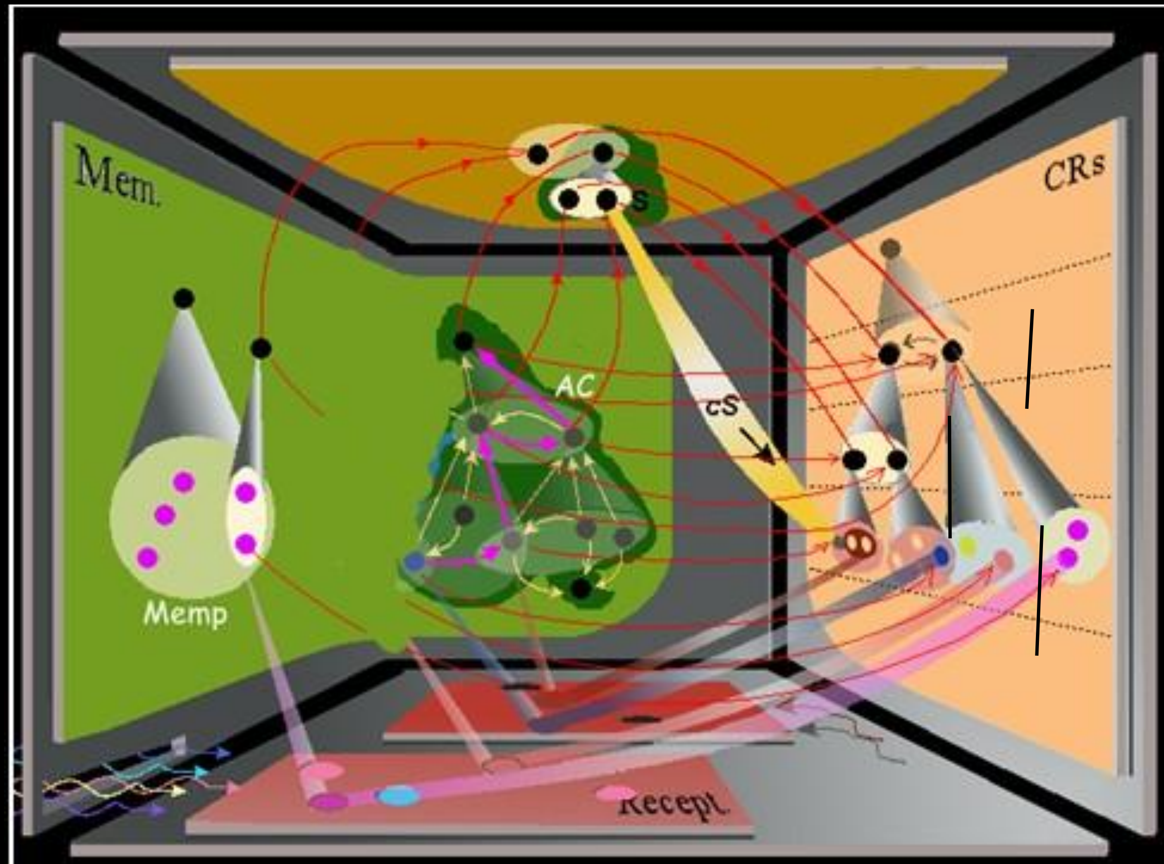
John Mandereau

http://pagesperso-orange.fr/ehres

http://pagesperso-orange.fr/vbm-ehr

Paris, Séminaire MaMuX, IRCAM Octobre 2011

SYSTEMES EVOLUTIFS A MEMOIRE

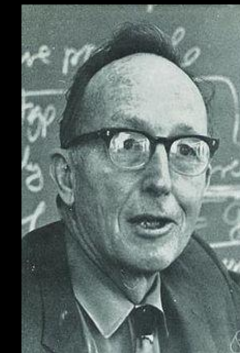


Systèmes avec une hiérarchie emmêlée de composants variant dans le temps.

Auto-organisés avec une multiplicité d'agents, ou 'co-régulateurs', chacun opérant à son propre rythme et avec sa fonction et logique.
Ils développent une 'mémoire' centrale robuste mais flexible, permettant une certaine adaptation aux changements

Eilenberg

THEORIE DES CATEGORIES
introduite par
in 1945



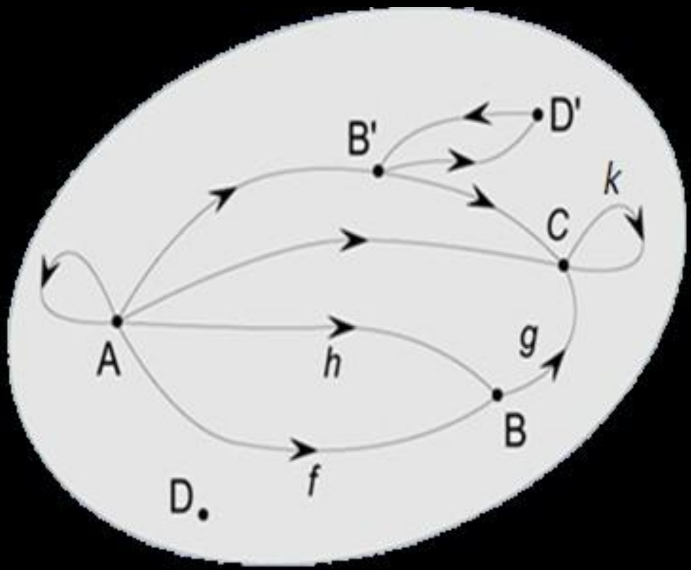
Mac Lane

C'est une mathématique 'relationnelle',
à la frontière entre mathématique, logique et métamathématiques
qui reflète les principales opérations du "working mathematician"

Applications en Informatique, fondements de la physique, biologie, sciences sociales

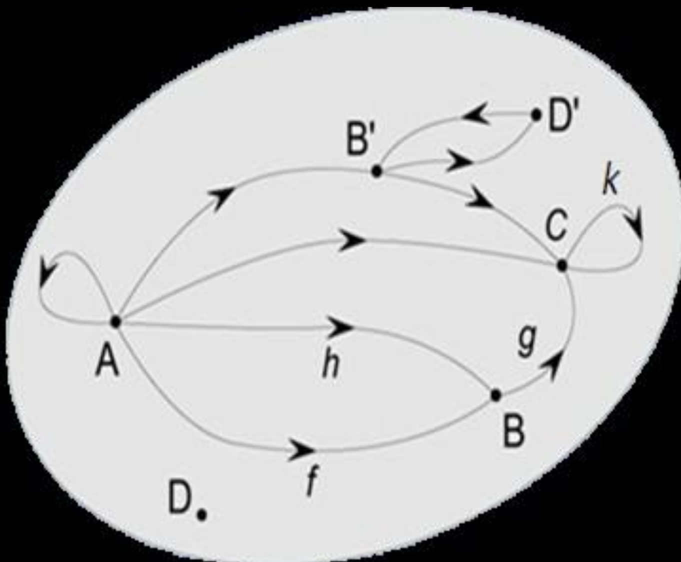
Les SEM utilisent une théorie des catégories 'dynamique', incorporant le Temps

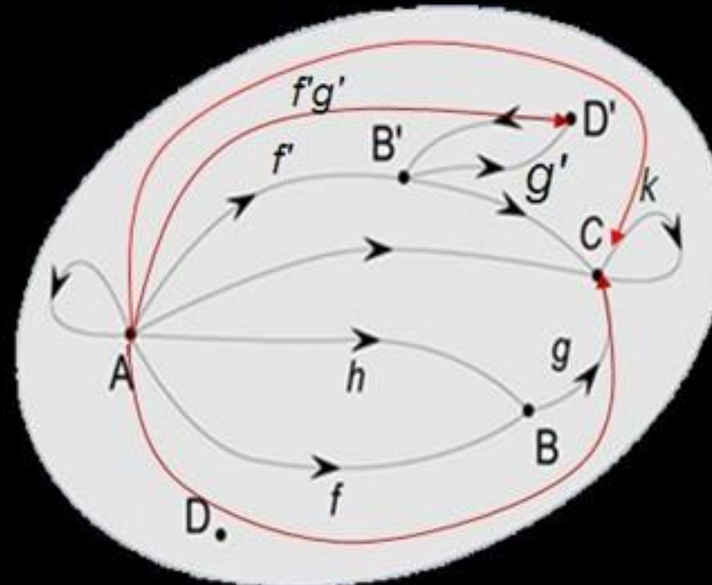
GRAPHES ET CATEGORIES



(Multi-)graphe G a des sommets A, B, … , et des flèches *f*: A → B. *Chemin* de G = suite de flèches consécutives.

GRAPHES ET CATEGORIES



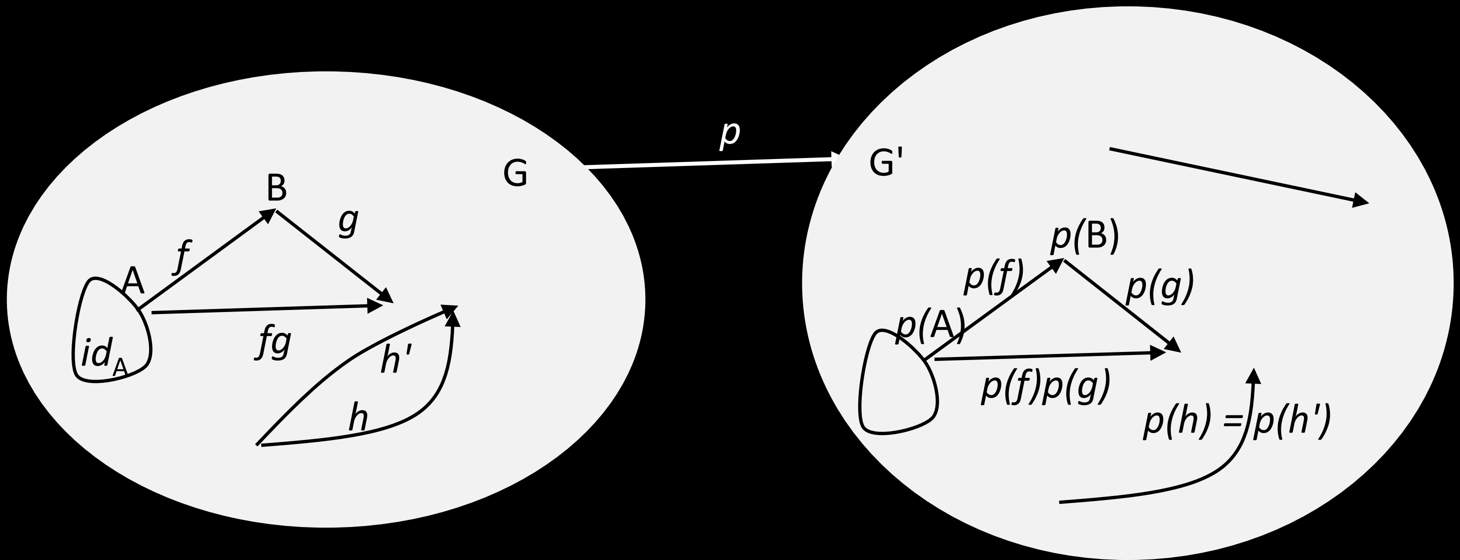


(Multi-)graphe G a des sommets A, B, … , et des flèches *f*: A → B.
Chemin de G = suite de flèches consécutives.

Catégorie = graphe où tout chemin (*f, g*) a un *composé fg*, la composition étant associative et avec unités.

Chemins fonctionellement équi-valents <---> même composé.

HOMOMORPHISMES DE GRAPHES. FONCTEURS



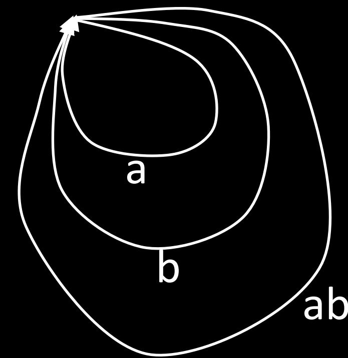
Un homomorphisme p du graphe G vers un graphe G' associe à chaque sommet A de G un sommet *p*(A) de G' et à une flèche *f* de A vers B dans G une flèche *p(f)*: *p*(A) → *p*(B) dans G'.

Un foncteur d'une catégorie G vers G' est un homomorphisme *p* de graphes respectant les identités et la composition:

$$p(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{p(A)} \quad et \quad p(fg) = p(f)p(g).$$

EXEMPLES DE CATÉGORIES

- Monoïdes (un seul objet)
  - monoïdes libres (chaînes de caractères sur un alphabet)
  - groupes (monoïdes dont tous les éléments sont inversibles)
  - ↳ GIS (Generalized Interval Systems) [Lewin]
- Ordres partiels (au plus une flèche entre deux objets)
  - ensemble des parties d'un ensemble
  - arbres
  - le temps (non cyclique) : parties de **R**
- Catégorie des chemins d'un graphe



GRAPHES ET CATEGORIES PONDEREES

Définition. Un graphe pondéré dans un ensemble X est un couple (G,p) où G est un graphe et p une application des flèches du graphe dans X.

Exemples

- Réseaux de neurones : X = **R** ou [-1,1] ou [0,1] ou **R**+
  - objets : neurones
  - flèches : connections étiquetées par leur poids
- Réseaux de neurones avec délais de propagation : X' = X x **R**+
- Réseau de transport :

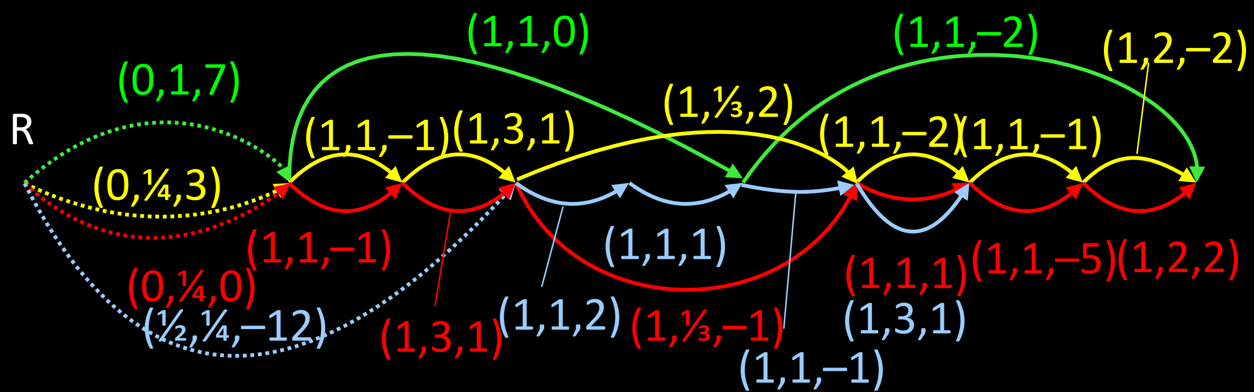
  X = {moyen de transport} x {distance} x {temps de parcours}

Définition. Une *catégorie pondérée* dans un monoïde M est un couple (**C**,f) où **C** est une catégorie et f: **C** → M est un foncteur.

Si (G,p) est un graphe pondéré dans X un monoïde, alors on construit une catégorie pondérée dans X en prolongeant p aux chemins de G, puis quotientant la catégorie des chemins de G pondérée dans X par la relation d’égalité de poids de chemins parallèles.

PARTITIONS MUSICALES COMME CATEGORIES ETIQUETEES

- Objets : événements musicaux
- Flèches
  - définies par la relation de succession temporelle des attaques
  - pondérées dans un groupe d'un GIS, par exemple un produit H x T x D pour représenter les hauteurs, instants d'attaque et durées



Représentation du début de *Jesu, meine Freude* (BWV610, J.S. Bach) sous forme de partition pondérée dans G = ($\mathbf{R} \rtimes \mathbf{R}^*_+$) × **Z** où **R** représente les écarts relatifs de temps entre attaques de notes, $\mathbf{R}^*_+$ les rapports de durée et **Z** les hauteurs au demi-ton près. R est le point de référence, indiquant l'instant zéro, la noire comme durée de référence, et le do central comme hauteur de référence.

POURQUOI UTILISER DES CATEGORIES ?

OPERATIONS MENTALES	NOTIONS CATEGORIQUES
Distinguer objets et relations Composer des relations	(Multi-)Graphe Catégorie
Mesurer le changement au cours du temps	Foncteur Système Evolutif
Synthèse d'objets complexes Classification	Colimite. Catégorie hiérarchique Limite projective
Former des hiérarchies Propriétés émergentes	Complexification Principe de Multiplicité

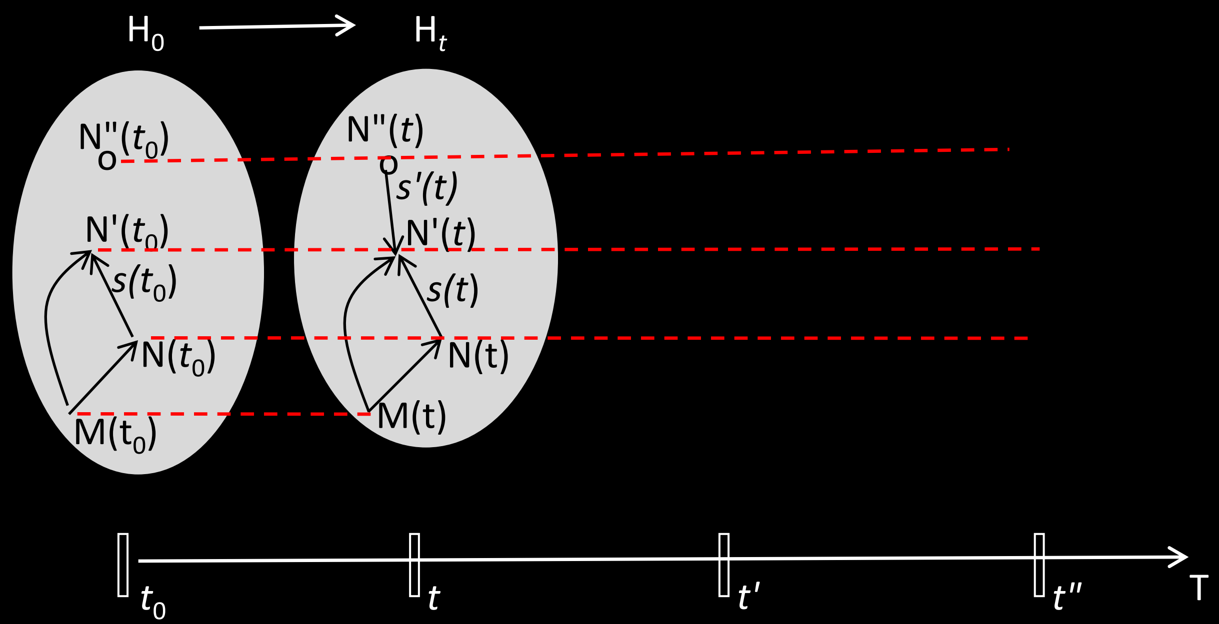
Analyser les opérations mentales et étudier :

Problème du Liage : comment lier de simples objets en "un tout qui est plus grand que la somme de ses parties"? Quelles interactions entre ces objets complexes ?

Problème de l'Emergence : comment mesurer la "réelle" complexité d'un objet et expliquer la formation d'objets de complexité croissante ?

Auto-organisation : comment la dynamique globale continue est-elle modulée par les interactions entre un réseau de dynamiques locales, chacune opérant séquentiellement à son propre rythme ?

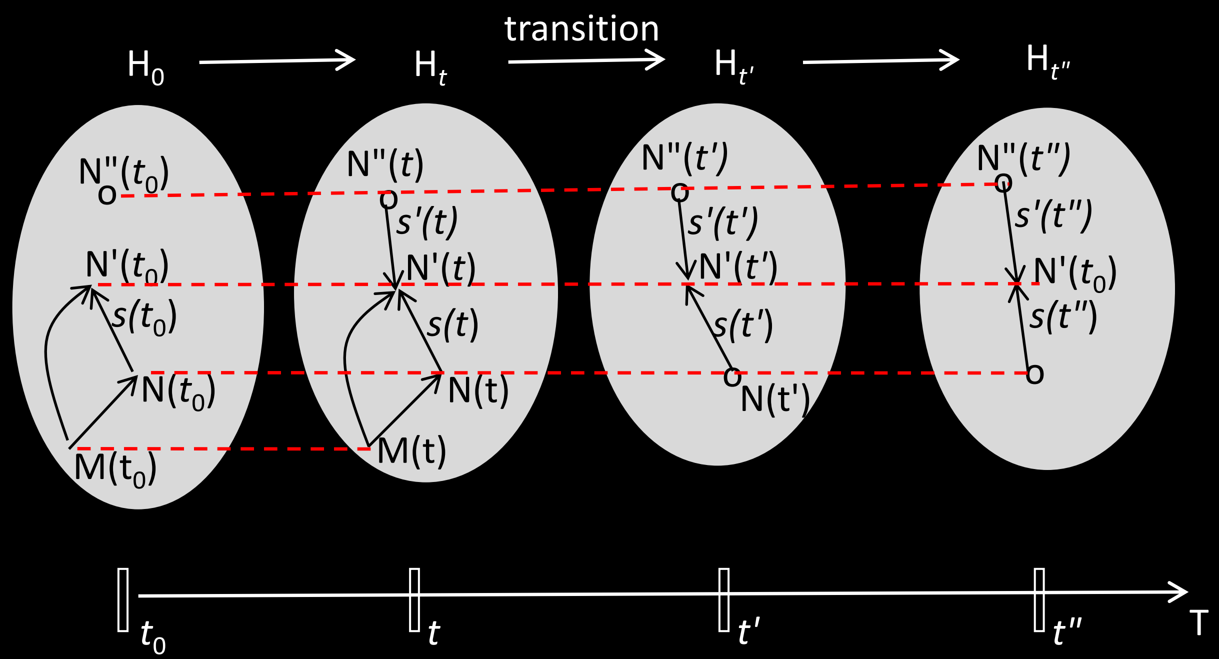
SYSTÈME ÉVOLUTIF



Un *système évolutif* **H** est formé de : 1. E*chelle de temps* T contenue dans **R** ;

2. pour chaque *t* de T une catégorie H_t *configuration* en *t.*

SYSTÈME ÉVOLUTIF

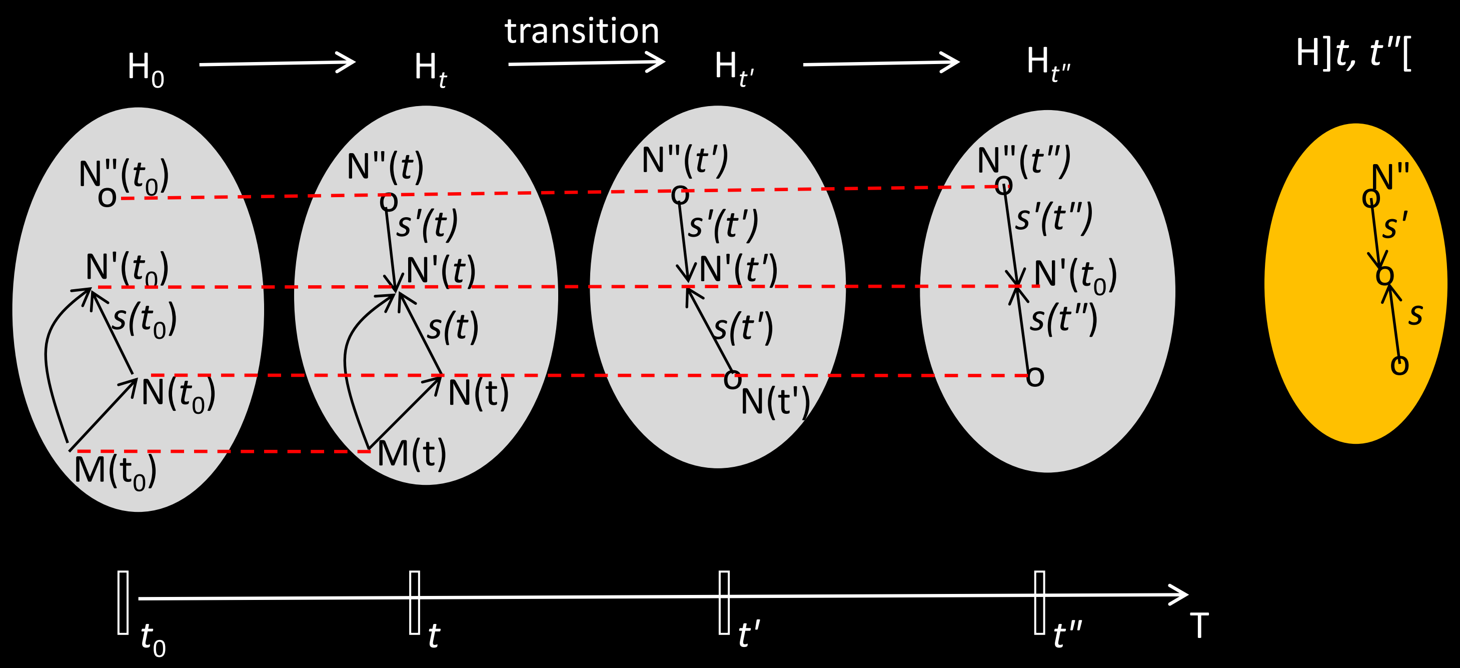


Un *système évolutif* **H** est formé de : 1. E*chelle de temps* T contenue dans **R** ;

2. pour chaque t de T une catégorie H_t *configuration* en t.

3. pour $t < t'$, un foncteur *transition* $k_{t,t'}$ d'une sous-catégorie de H_t vers $H_{t'}$ vérifiant : T*ransitivité* : si $N(t)$ a un état $N(t') = k_{t,t'}(N(t))$ en t', alors il a un état $N(t'')$ en t'' ssi $N(t')$ a $N(t'')$ pour état en t''.

SYSTÈME ÉVOLUTIF



Un *système évolutif* **H** est formé de : 1. E*chelle de temps* T contenue dans **R** ;

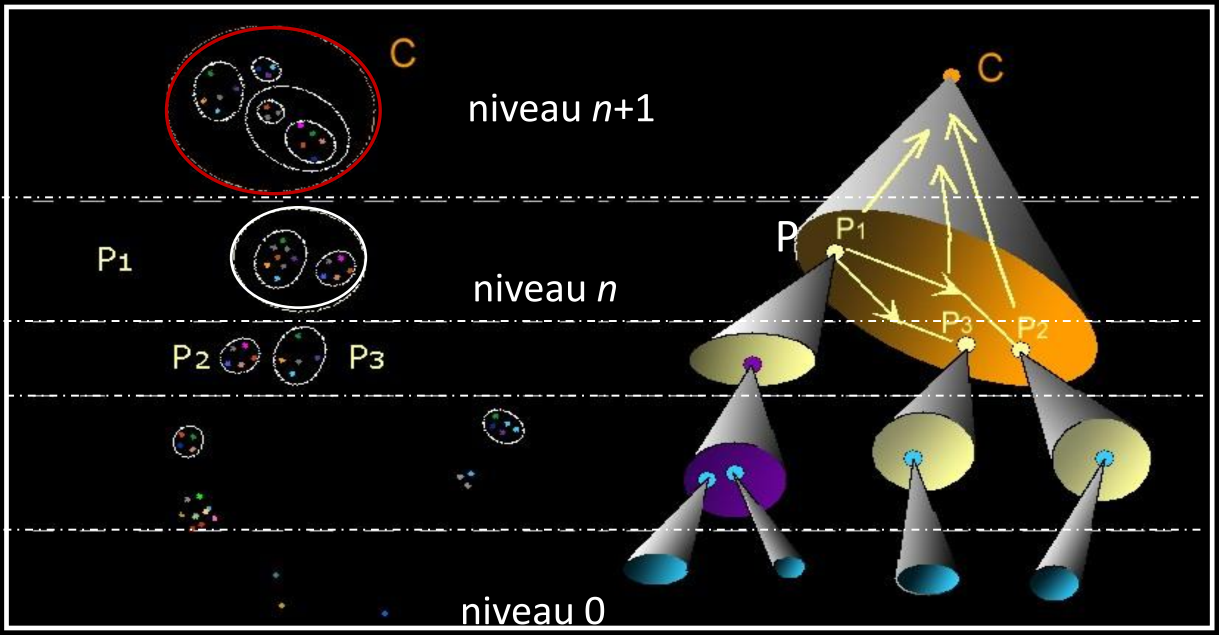
2. pour chaque t de T une catégorie H_t *configuration* en t.

3. pour $t < t'$, un foncteur *transition* $k_{t,t'}$ d'une sous-catégorie de H_t vers $H_{t'}$ vérifiant : T*ransitivité* : si N(t) a un état N(t') = $k_{t,t'}$ (N(t)) en t', alors il a un état N(t'') en t'' ssi N(t') a N(t'') pour état en t''.

C*omposant* N de **H** = ensemble maximal d'états successifs N(t) liés par transitions.

A un intervalle]t, t''[on associe la catégorie H]t, t''[des composants et liens existant sur tout l'intervalle. Ces catégories forment un faisceau de catégories sur Temps.

LA HIERARCHIE DES COMPOSANTS



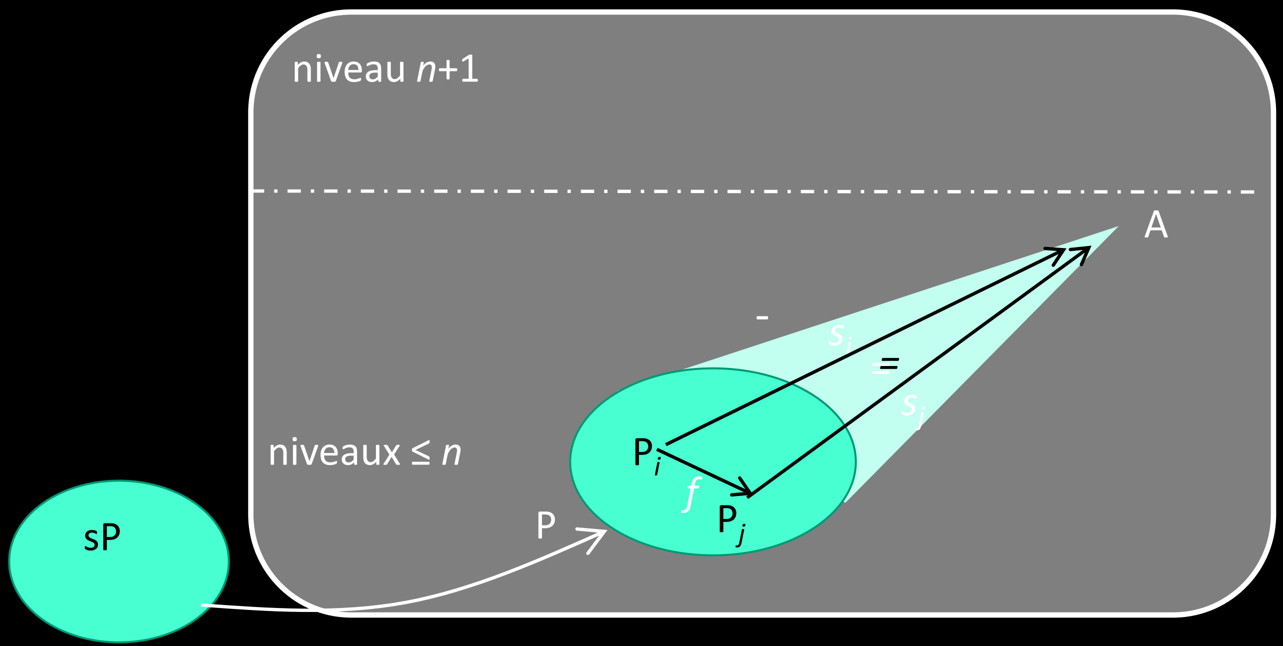
La configuration du système en t est representée par une catégorie H_t:

objets = composants en t, liens = canaux permettant leurs interacttions.

Un lien peut être *actif en t* ou passif. Il a un *délai de propagation d* (et une force *w*) définissant une *pondération*, c'est-à-dire un foncteur de H_t dans $\mathbf{R}^+$

Catégorie hiérarchique: ses objets sont répartis par niveaux de sorte que C de niveau n+1 assemble (ou *lie*) un pattern P de composants interactifs de niveaux < n+1, signifiant que C et P ont le même rôle fonctionnel.

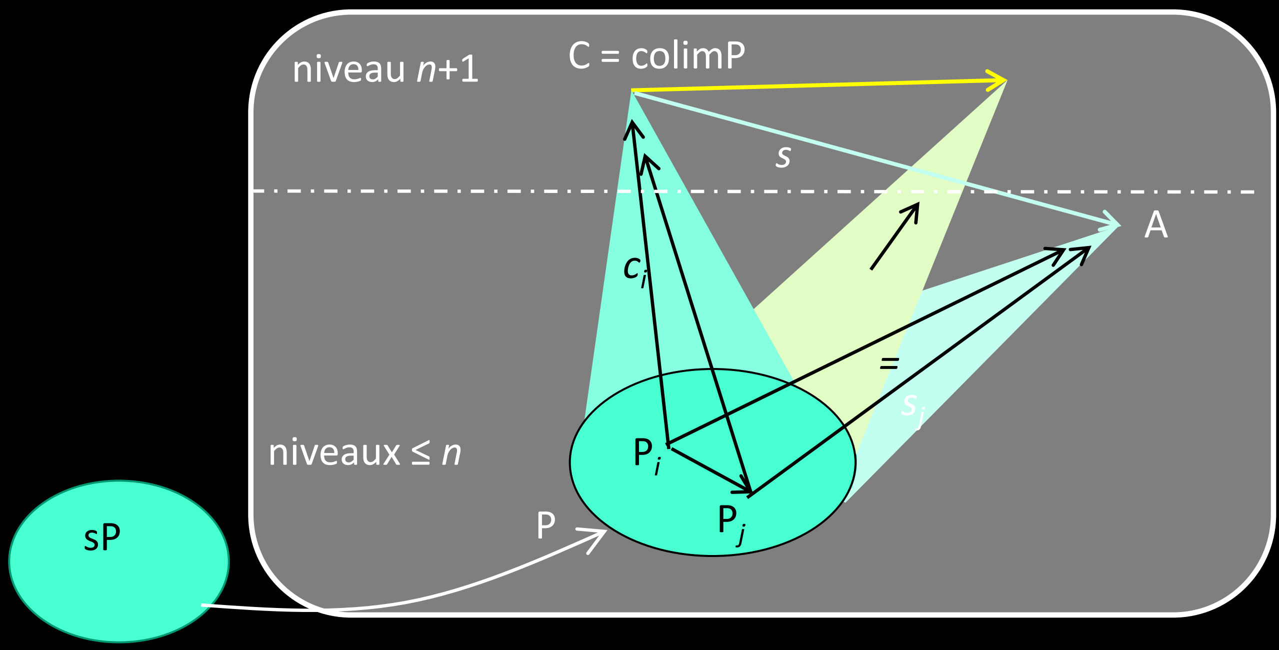
LIAGE PAR COLIMITE



Pattern P = homomorphisme d'un graphe sP vers H_t
= famille d'objets P_i avec des liens distingués entre eux.

Lien collectif de P vers A = famille de liens s_i: $P_i \to$ A corrélés par les liens distingués de P.

LIAGE PAR COLIMITE

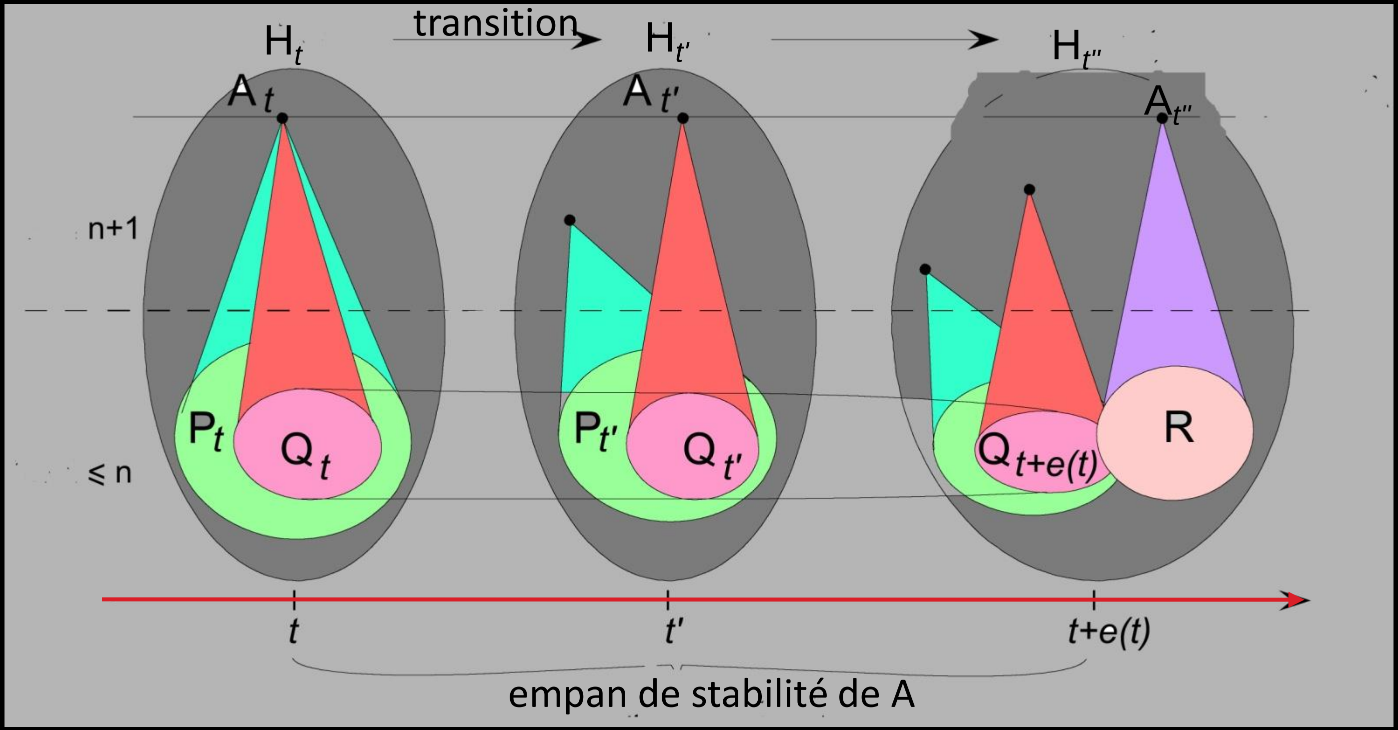


Pattern P = homomorphisme d'un graphe sP vers H_t
= famille d'objets P_i avec des liens distingués entre eux.

Lien collectif de P vers A = famille de liens s_i: $P_i \rightarrow$ A corrélés par les liens distingués de P.

P admet C comme *colimite* (ou *liage,* ou *recollement*) s'il existe un lien collectif (c_i) de P vers C au travers duquel tout autre lien collectif (s_i) de P vers A factorise uniquement.

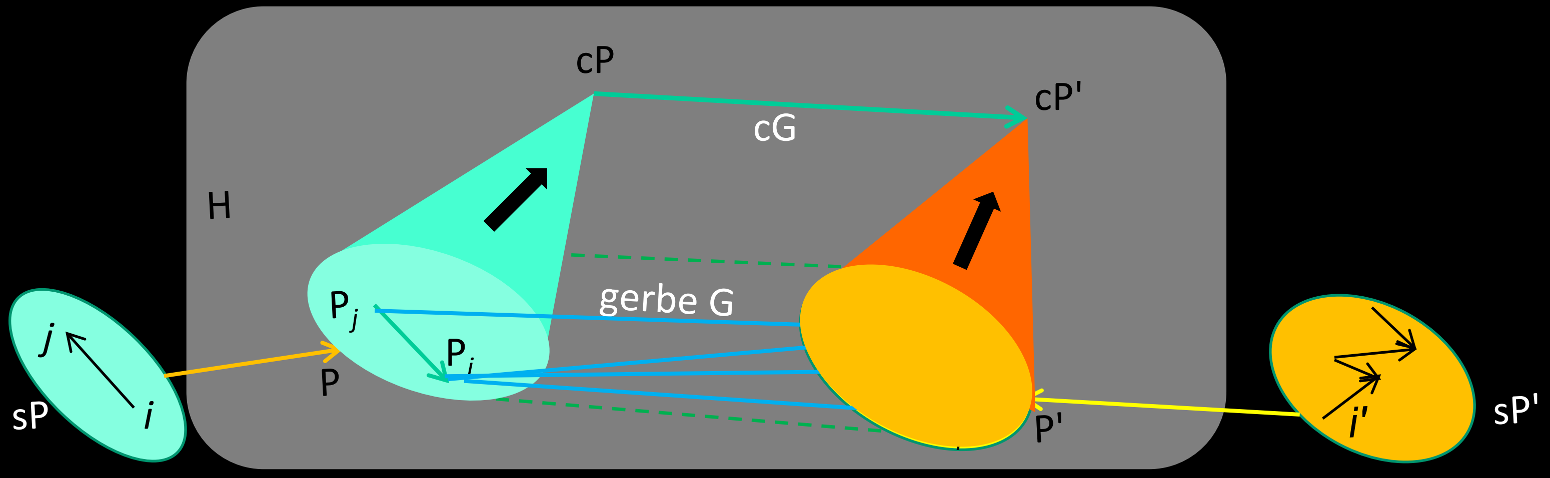
SHE. IDENTITE COMPLEXE D'UN COMPOSANT



Système Hiérarchique Evolutif = Système Evolutif **H tel que les** H_t sont hiérarchiques et les transitions respectent les niveaux.

Empan de stabilité d'un composant A en *t* = plus grande période pendant laquelle il existe une décomposition Q_t de N en *t* dont les états successifs restent une décomposition de A jusqu'à *t+dt* (non inclus).

GERBES. LIENS SIMPLES. IndH

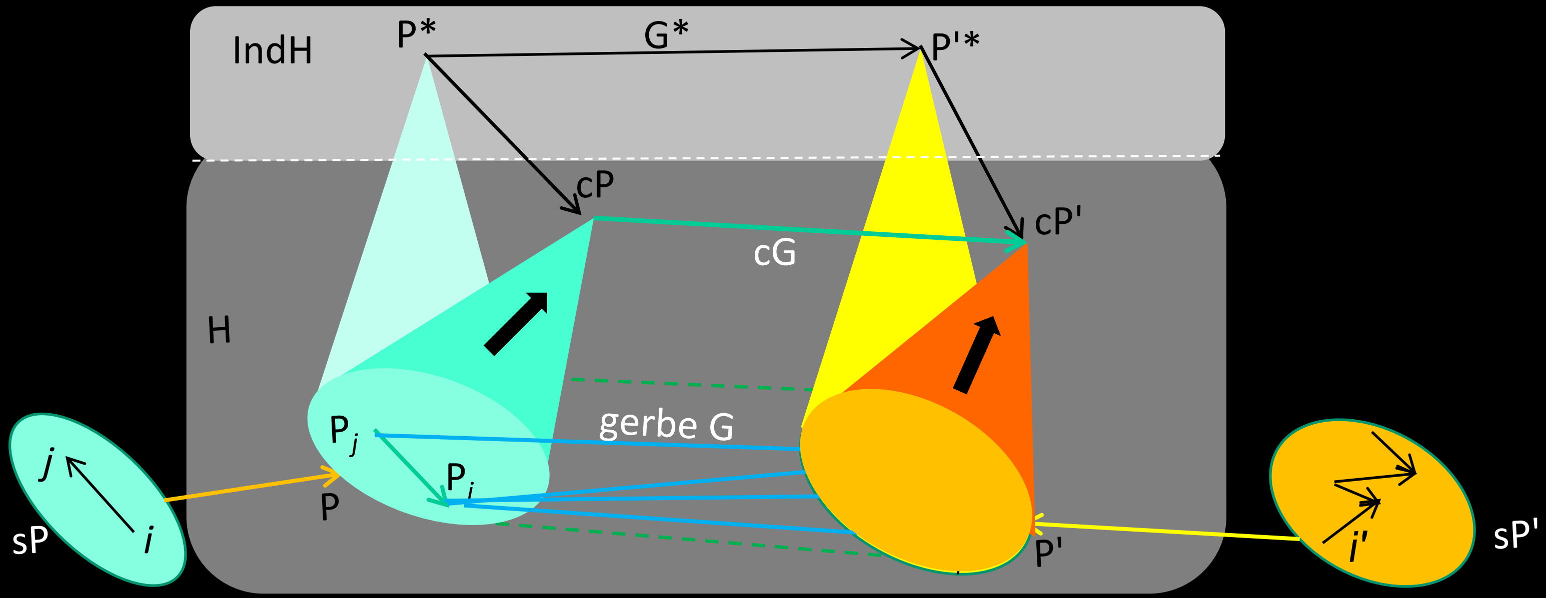


Gerbe G de P vers P' = ensemble maximal de liens entre composants de P et P' tel que:

1. Tout P_i est lié par G à au moins un $P'_{i'}$, et s'il l'est à plusieurs, ils sont liés par un zigzag de liens distingués de P'.
2. Le composé d'un élément de G avec un lien distingué de P ou de P' est dans G.

Si P et P' ont des colimites cP et cP' dans H, G se recolle en un morphisme cG : cP → cP', appelé *lien* (P, P')-*simple,* ou *n-simple* si P et Q sont de niveaux < n+1.

GERBES. LIENS SIMPLES. IndH



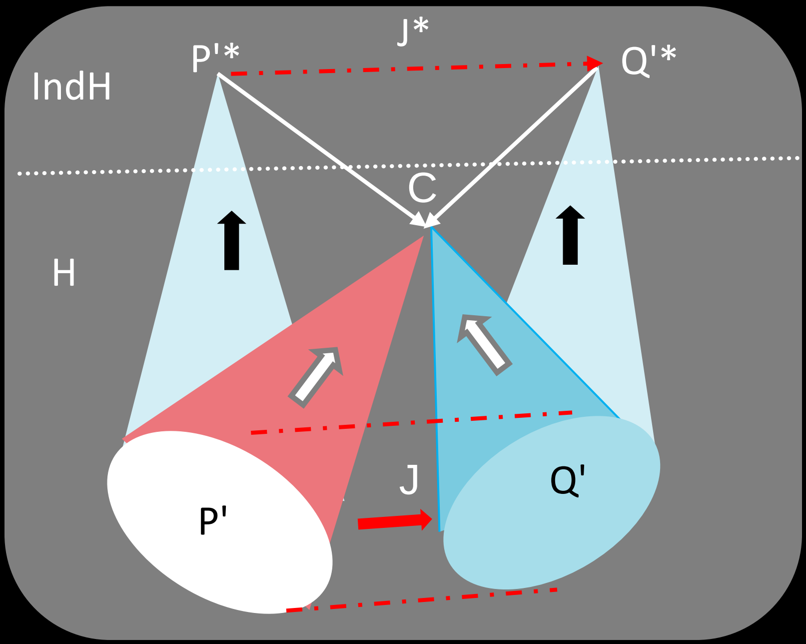
Gerbe G de P vers P' = ensemble maximal de liens entre composants de P et P' tel que:

1. Tout P_i est lié par G à au moins un $P'_{i'}$, et s'il l'est à plusieurs, ils sont liés par un zigzag de liens distingués de P'.
2. Le composé d'un élément de G avec un lien distingué de P ou de P' est dans G.

Si P et P' ont des colimites cP et cP' dans H, G se recolle en un morphisme cG : cP → cP', appelé *lien* (P, P')-*simple,* ou *n-simple* si P et Q sont de niveaux < *n*+1.

IndH est la catégorie ayant les patterns P dans H pour objets, et les gerbes pour liens. H s'identifie à une sous-catégorie de IndH en idntifiant C au pattern réduit à C.

PATTERNS HOMOLOGUES. DEGENERESCENCE



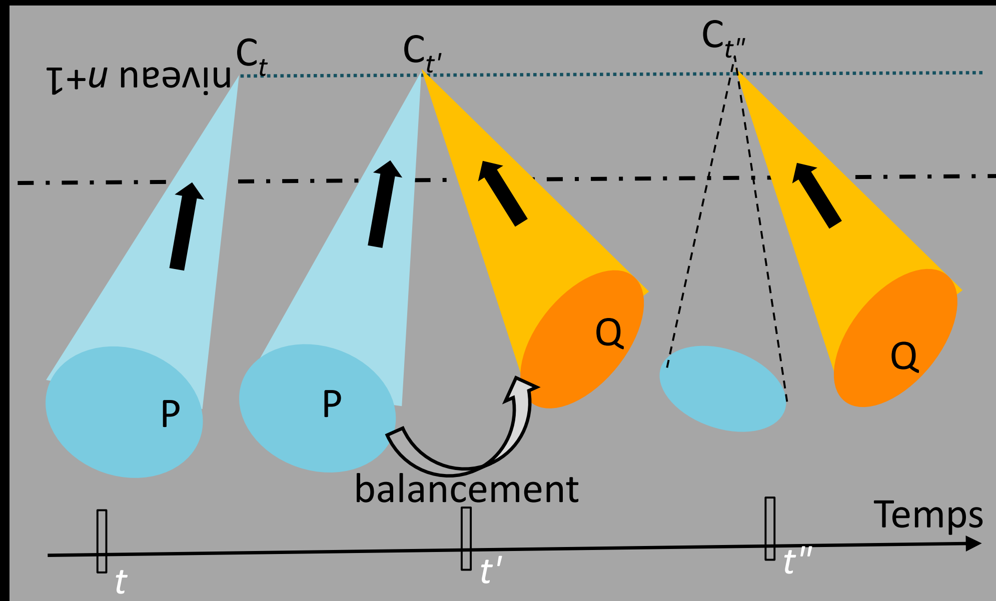
P' et Q' sont *homologues* s'ils ont le même fonctionnel rôle, i.e., il y a bijection entre leurs liens collectifs vers tout A au sens: les catégories Q'*↓K et P'*↓K sont isomorphes. Exemple: si P' et Q' ont la même colimite.

P' et Q' homologues sont *connectés* s'il existe une gerbe J de P' vers Q' telle que l'isomorphisme soit défini par composition avec J*. Sinon ils sont *non-connectés*.

L'existence de patterns non-connectés traduit le *principe de dégénérescence:*

" a ubiquitous biological property [...] a feature of complexity [...], both necessary for, and an inevitable outcome of, natural selection." (Edelman & Gally, 2001)

OBJETS MULTIFORMES ---> FLEXIBILITE

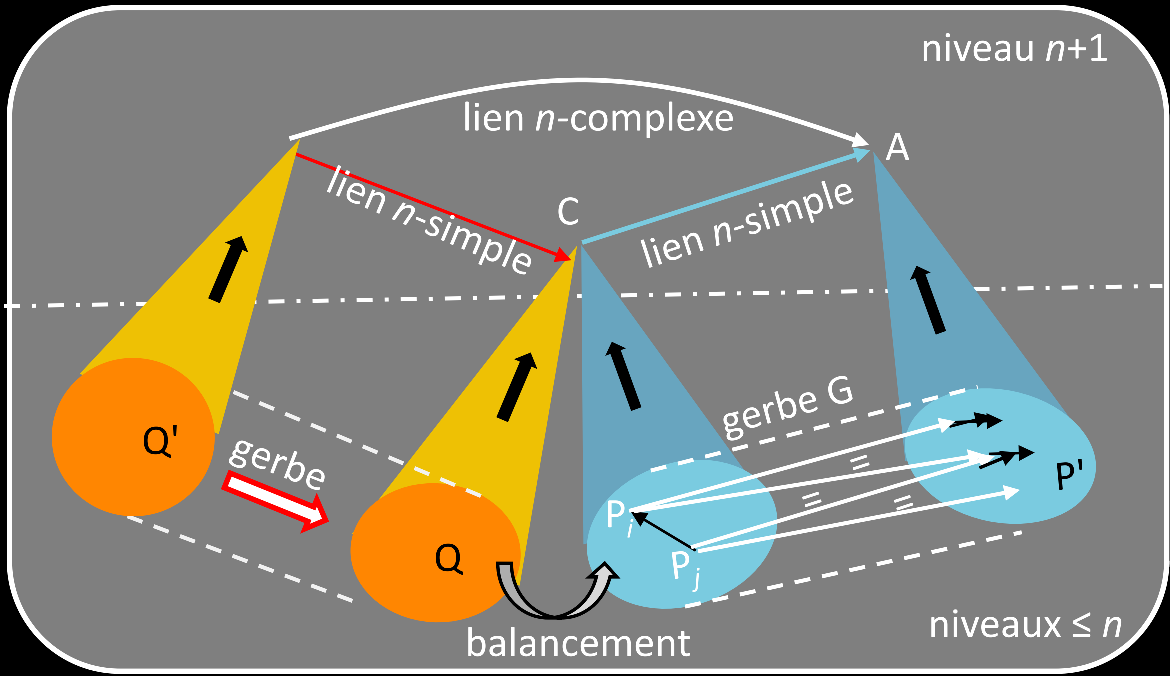


C est *n-multiforme* s'il est colimite de 2 patterns P et Q de niveaux inférieurs non-connectés par une gerbe.

---> P et Q ont le même rôle fonctionnel bien que non structurellement équivalents ni connectés par une gerbe. Le passage de P à Q est un *balancement.* Les balancements donnent de la flexibilité.

Principe de Multiplicité (MP): Il existe des objets *n-multiformes* C colimite de patterns P et Q de niveaux ≤ *n* non-connectés par une gerbe.

MP ---> EMERGENCE DE LIENS COMPLEXES



MP ---> Emergence de *liens n-complexes*

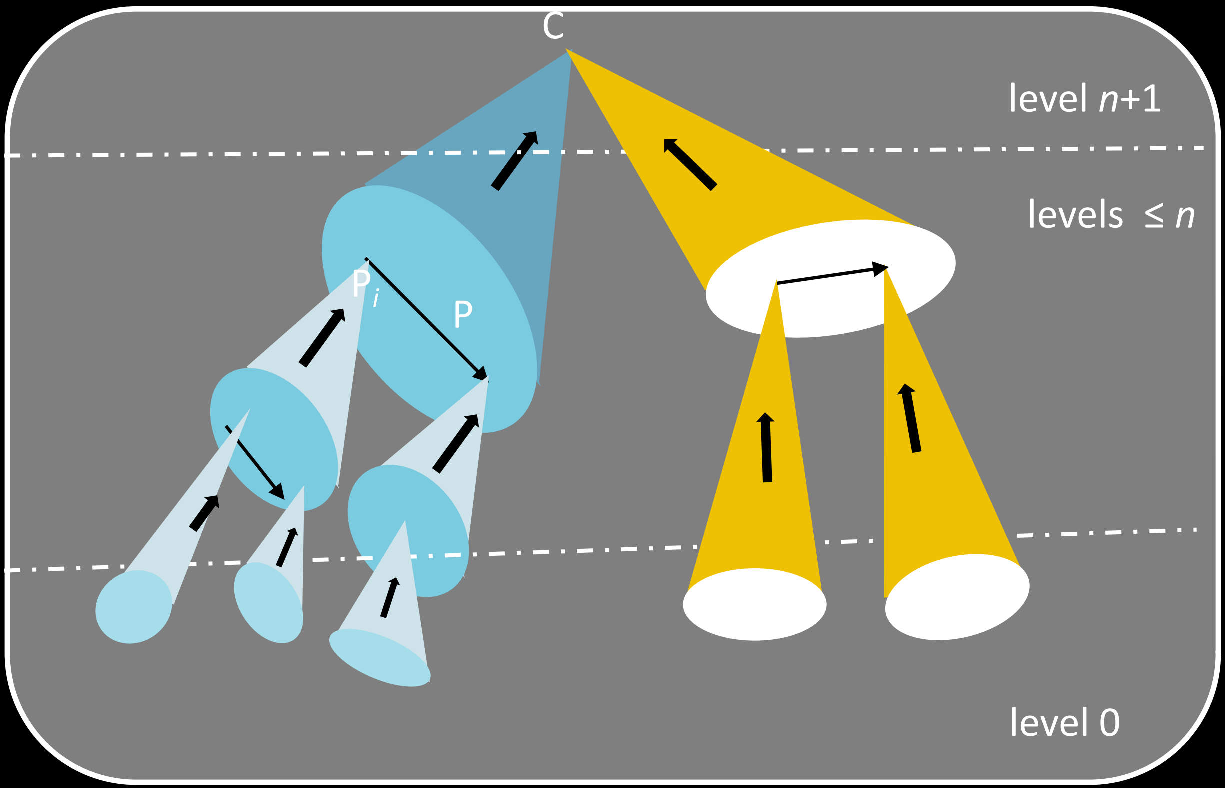
composés de liens n-simples liant des gerbes non adjacentes.

Ces liens traduisent des propriétés globales des niveaux ≤ n qui *émergent* au niveau n+1.

La hiérarchie de H est *basée* si tout morphisme est n-simple ou n-complexe.

---> H est basée ssi tout morphisme s'obtient à partir du niveau 0 par une suite d'opérations du type: liage de gerbes, composition de liens.

ORDRE DE COMPLEXITE

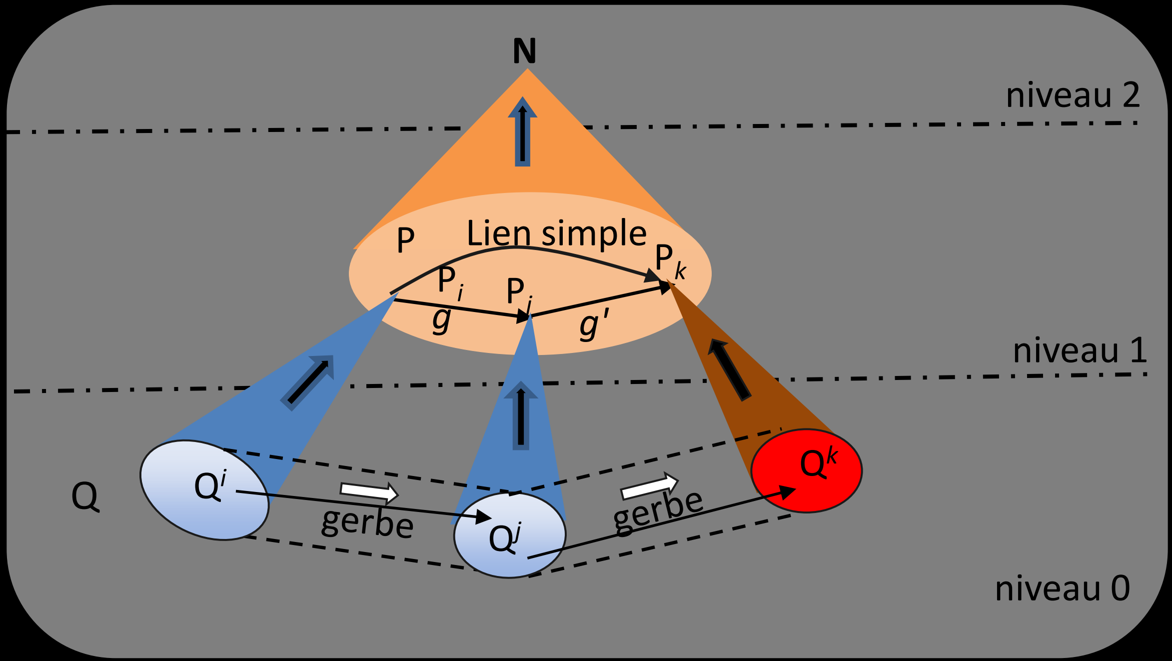


Ordre de complexité of C = plus petite longueur d'une *ramification* jusqu'au niveau 0.

THEOREME DE COMPLEXITE (EV 1996)**.** ***MP est nécessaire pour qu'il existe des composants d'ordre de complexité > 1.***

Sans MP ---> ***Pur réductionisme.***

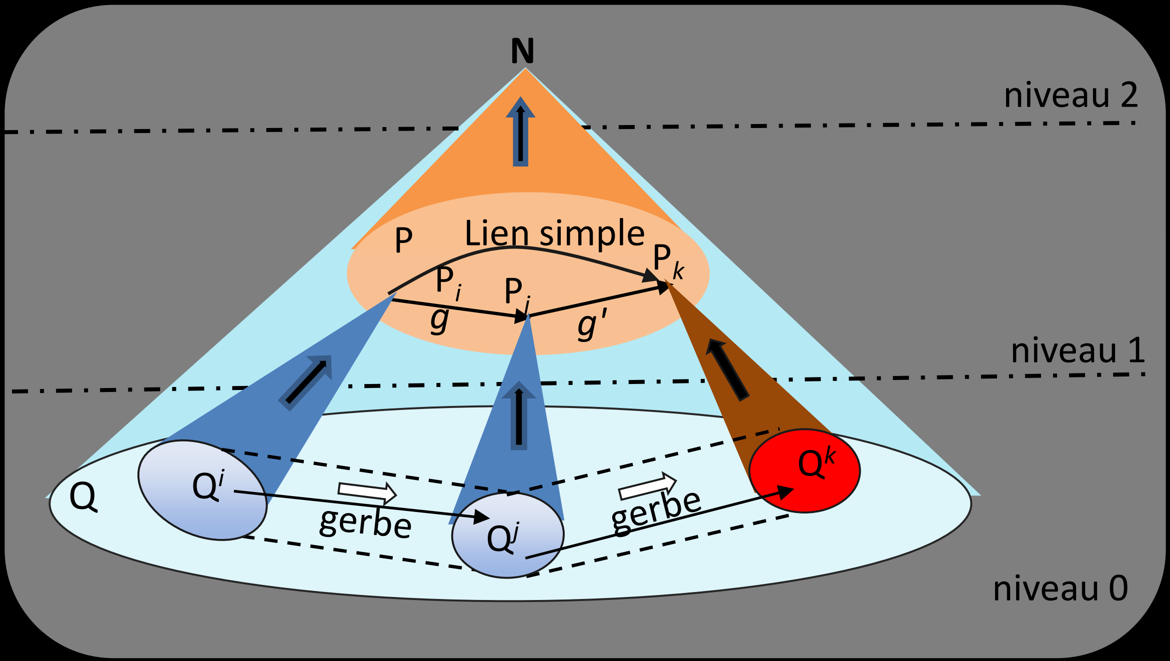
OBJETS REDUCTIBLES



N est *m-réductible* s'il est la colimite d'un pattern contenu dans les niveaux < *m*
---> L'ordre de complexité de N est le plus petit *m* tel que N soit *m*-réductible.

THEOREME. *Un objet* N *de niveau n*+1 *est n*-1*-réductible, donc d'ordre de complexité* ≤ *n*-1 *s'il a une ramification* (P, (Q^i)) *telle que les liens distingués de* P *soient* (Q^i, Q^j)*-simples*.

OBJETS REDUCTIBLES



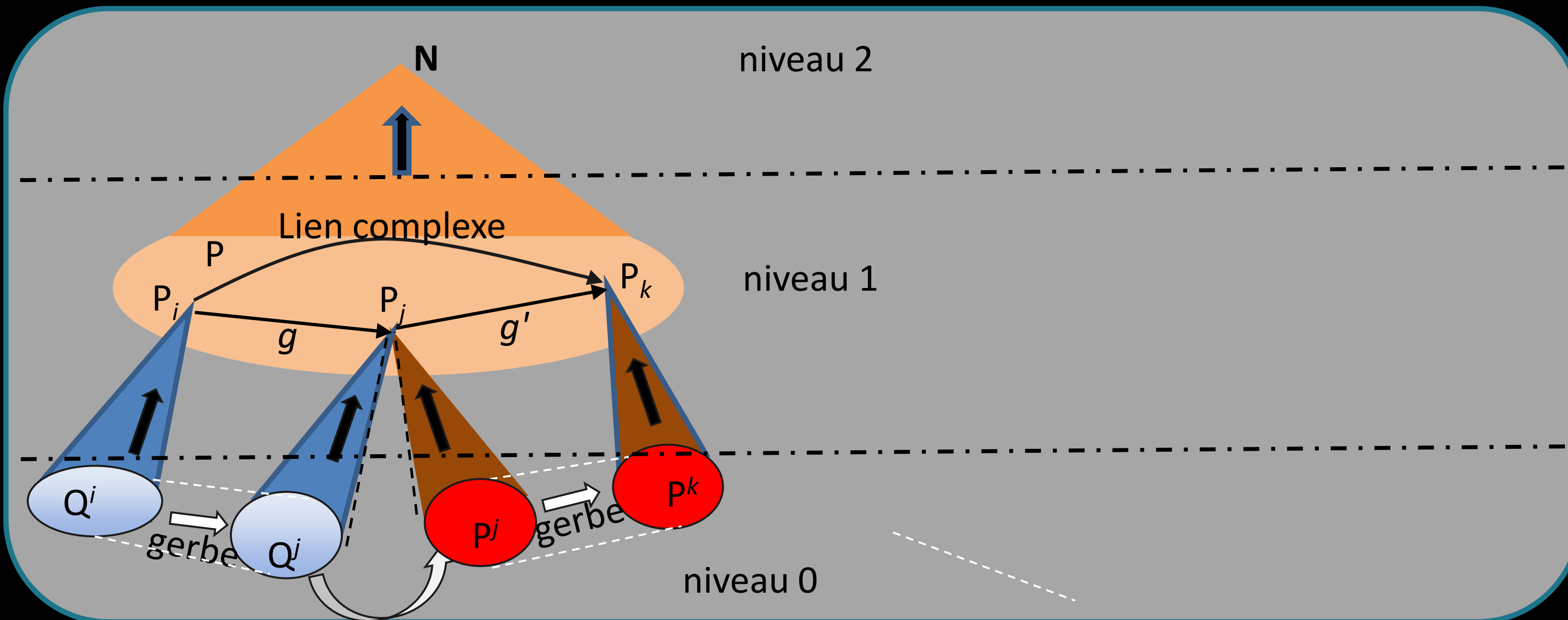
N est *m-réductible* s'il est la colimite d'un pattern contenu dans les niveaux < *m*

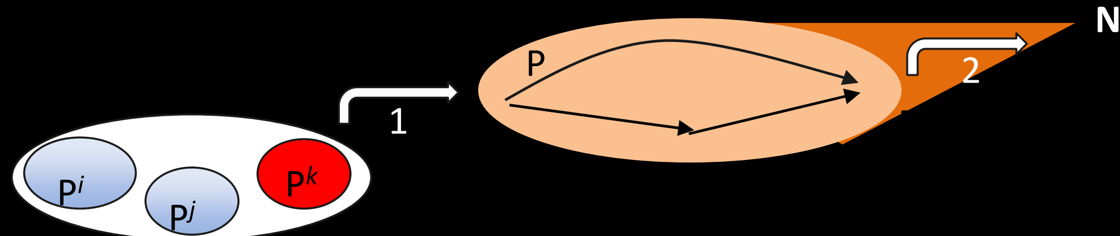
---> L'ordre de complexité de N est le plus petit *m* tel que N soit *m*-réductible.

THEOREME. *Un objet* N *de niveau n*+1 *est n*-1-*réductible, donc d'ordre de complexité* ≤ *n*-1 *s'il a une ramification* (P, (Q^i)) *telle que les liens distingués de* P *soient* (Q^i, Q^j)-*simples*.

N = colimite d'un pattern Q formé des Q^i et des gerbes entre eux.

OBJETS NON-REDUCTIBLES





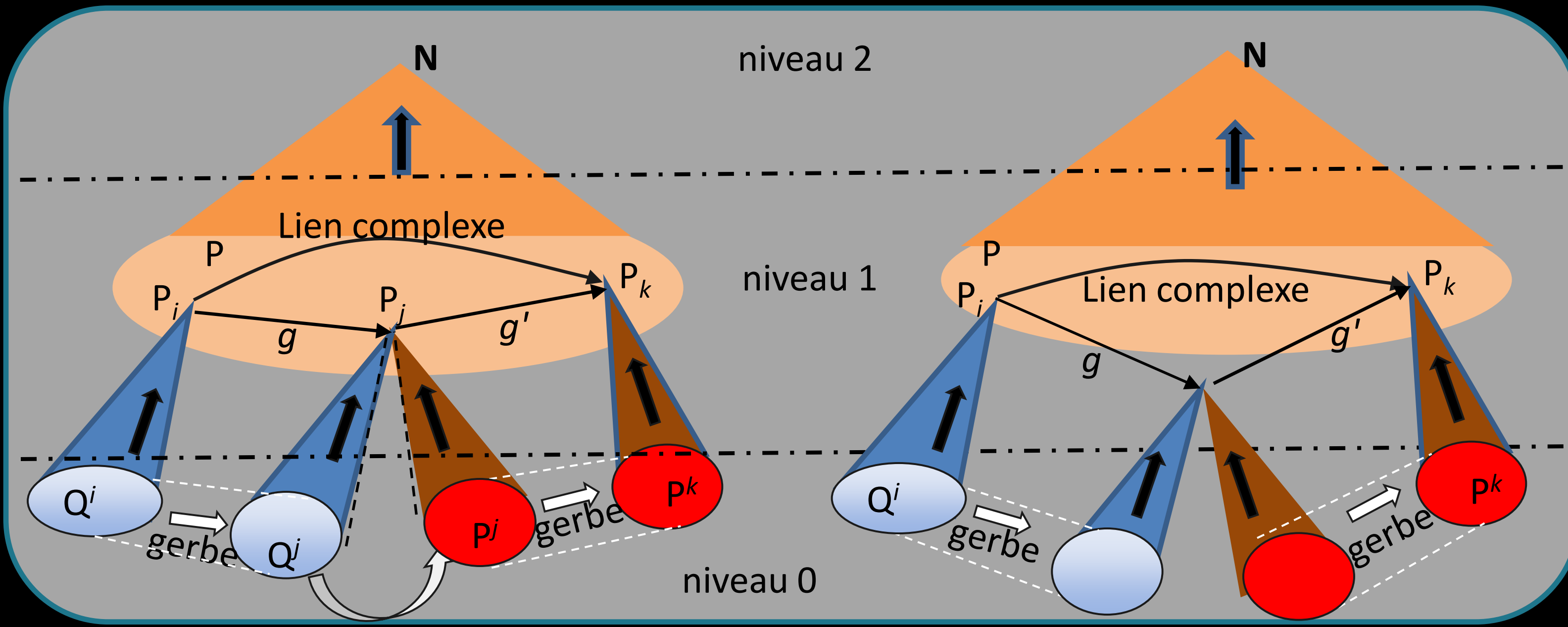
N d'ordre de complexité 2. N = colim P où P a un lien complexe

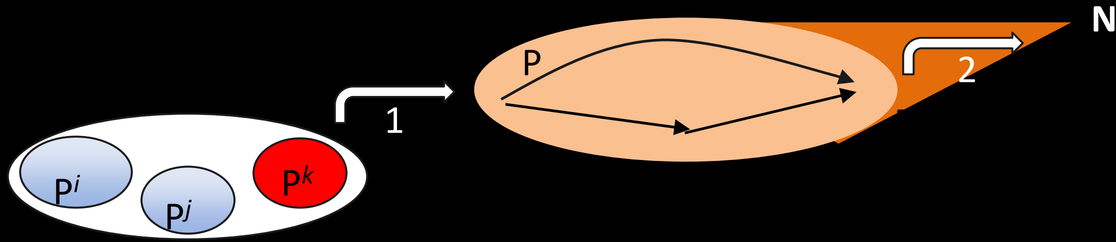
---> 2 ramifications non-équivalentes, l'une aboutissant à P^j *l'*autre à Q^j .

Il peut être re-construit via chacune, disons la première, en 2 étapes:

1. Formation des patterns Q^i et de leur colimite P_i
2. Formation de P et de sa colimite N.

OBJETS NON-REDUCTIBLES





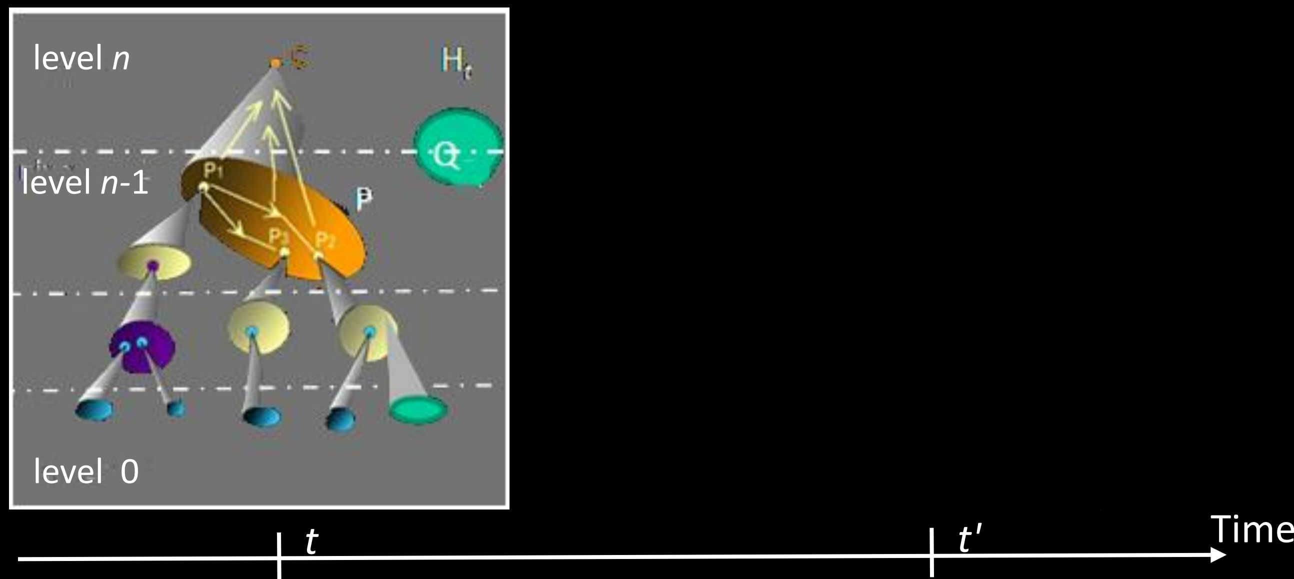
N d'ordre de complexité 2. N = colim P où P a un lien complexe

---> 2 ramifications non-équivalentes, l'une aboutissant à P^j *l'*autre à Q^j .

Il peut être re-construit via chacune, disons la première, en 2 étapes:

1. Formation des patterns Q^i et de leur colimite P_i
2. Formation de P et de sa colimite N.

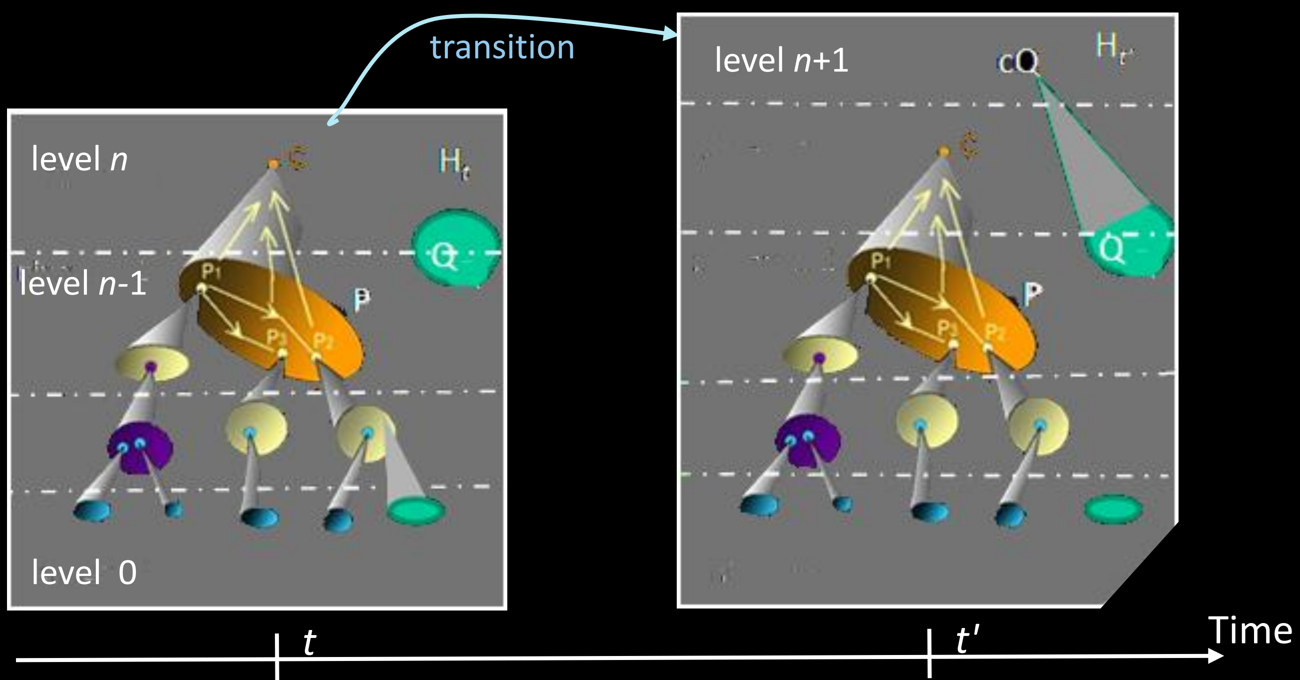
CHANGEMENTS VIA COMPLEXIFICATIONS



Changements: addition ou suppression de composants, liage de certains patterns de sorte que des patterns homologues aient la même colimite, préservation de colimites.
Eventuellement (cas 'mixte') : adjonction d'une limite projective à un pattern.

Modélisé par le *processus de complexification* (explicitement construit) en relation avec la théorie des esquisses, et sans doute amenable à des "computations spatiales"

CHANGEMENTS VIA COMPLEXIFICATIONS

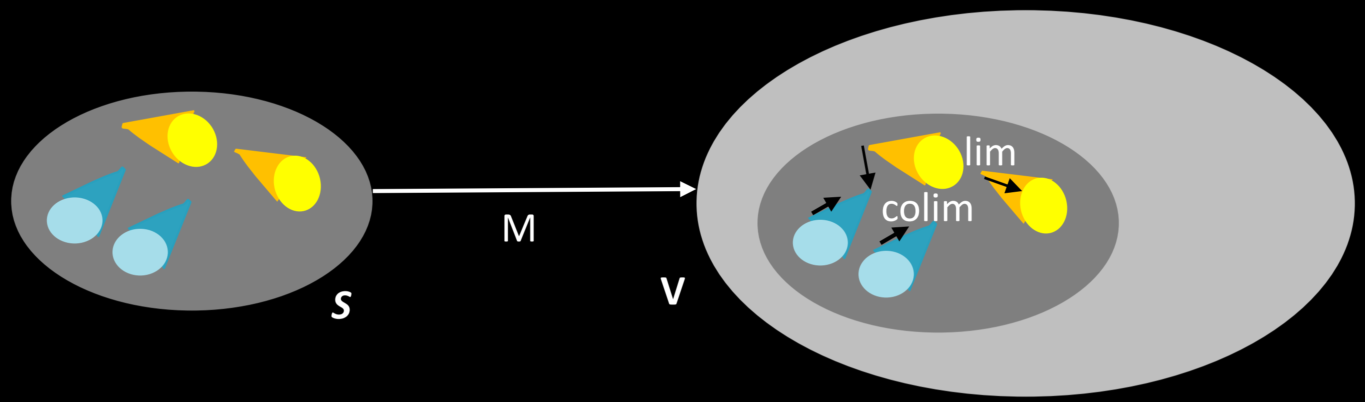


Changements: addition ou suppression de composants, liage de certains patterns de sorte que des patterns homologues aient la même colimite, préservation de colimites.

Eventuellement (cas 'mixte') : adjonction d'une limite projective à un pattern.

Modélisé par le *processus de complexification* (explicitement construit) en relation avec la théorie des esquisses, et sans doute amenable à des "computations spatiales"

ESQUISSES ET LEURS MODELES



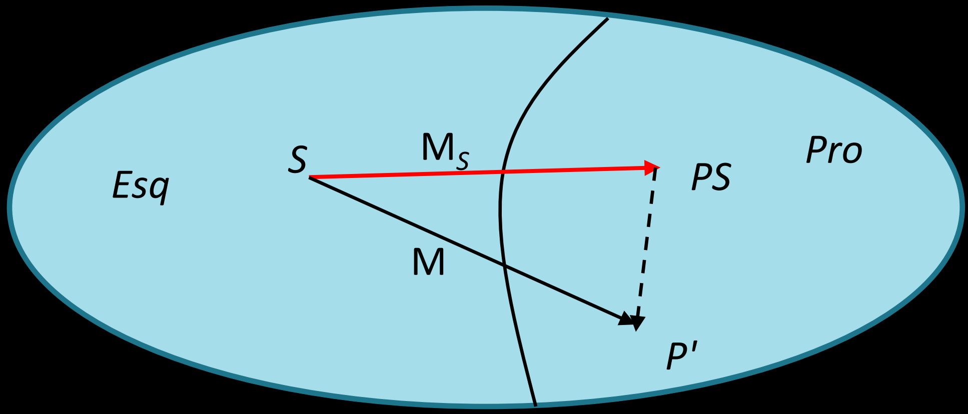
Une *esquisse inductive (*resp. *mixte) S* est la donnée d'une (néo)catègorie ∑*,* d'un ensemble de cônes inductifs (resp. et d'un ensemble de cônes projectifs).

Un *homomorphisme* de *S* vers une esquisse *S'* est un foncteur de ∑ vers ∑' transformant les cônes distingués en cônes distingués.
Les esquisses et leurs homomorphismes forment une catégorie *Esq*.

Un *modèle* M de ***S*** dans une catégorie **V** est un foncteur de ∑ vers **V** transformant les cônes inductifs (resp. projectifs) en cônes colimite (resp. limite).

La catégorie $\mathbf{V}^{S}$ des modèles de ***S*** dans **V** est une sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathbf{V}^{\Sigma}$ des foncteurs de ∑ dans **V.**

PROTOTYPE ASSOCIE. LOGIQUE DIAGRAMMATIQUE

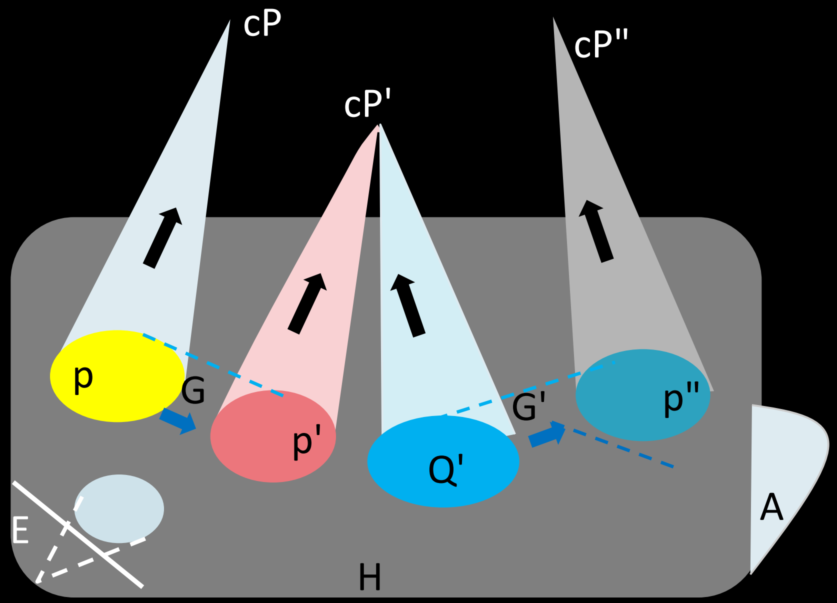


Un *prototype* est une esquisse dans laquelle les cônes inductifs (resp. projectifs) sont des cônes colimite (resp. limite).

THEOREME (A. & C. Ehresmann 1972)**.** *La catégorie Pro des prototypes est une sous-catégorie réflexive de la catégorie Esq des esquisses. Le prototype PS associé à* S *est son plus petit modèle.*

Une esquisse projective (resp. mixte) *S* peut être interprétée comme la *présentation diagrammatique d'une logique* du 1er ordre, cf. Guitart & Lair 1982 (resp. du 2^{e} ordre, Duval & Lair 2003) traduite en formules et contraintes par un modèle de *S* dans *Set.* Le foncteur de *S* dans son prototype correspond à la *spécification de cette logique,* le prototype étant un modèle de la théorie correspondante, de sorte qu'il est "computable" dans un certain sens.

PROCEDURE SUR UNE CATEGORIE



Une *procédure* Pr sur H est définie par un ensemble d'objectifs de la forme :

Ensemble E d'éléments 'à éliminer',

Graphe A 'à absorber'

Cônes-colimite dans H 'à préserver'

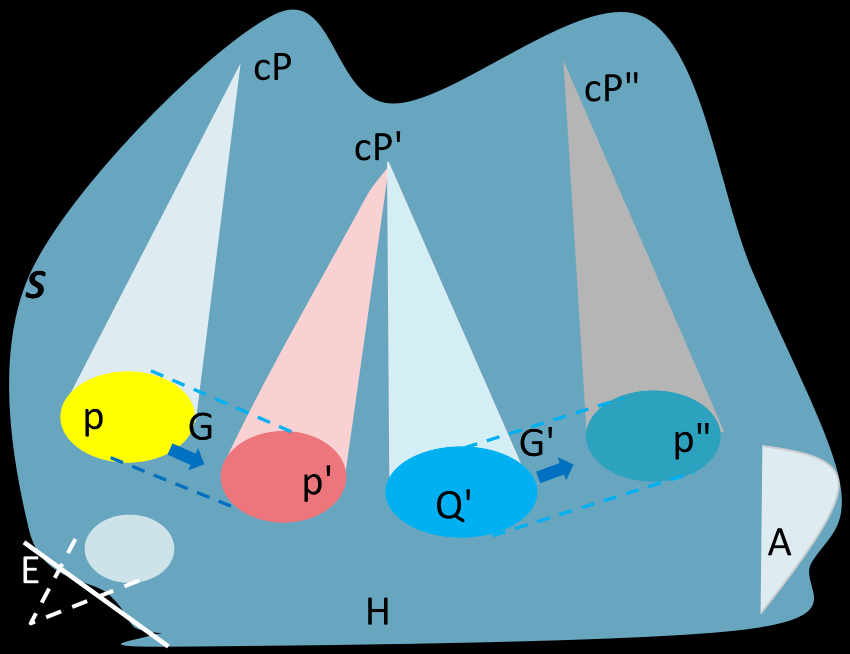
Patterns P sans colimite dans H 'à étendre en cônes colimite', le sommet cP étant choisi tel que cP' = cQ' si P' et Q' sont homologues.

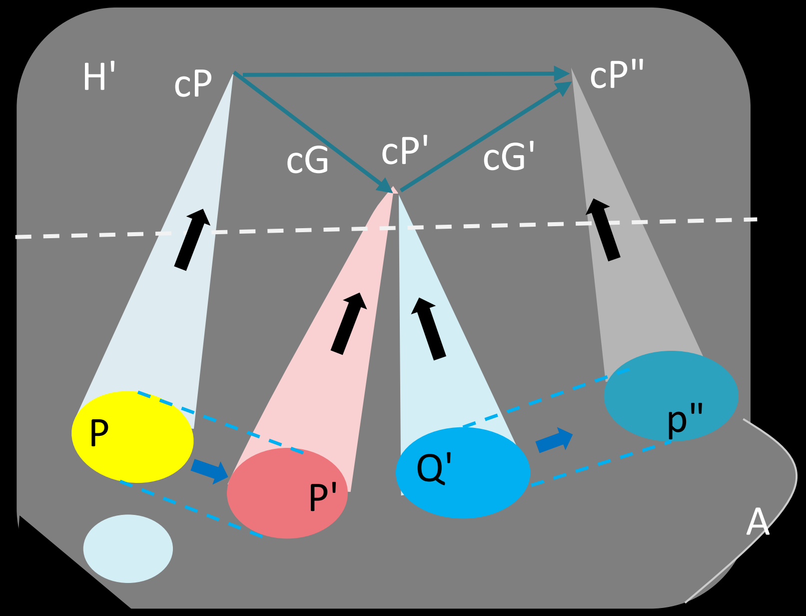
La procédure est *mixte* si l'on se donne aussi:

Patterns Q 'à transformer en cônes limite'.

Cette notion est à rapprocher des données de "topological cells" et de "rewriting" transformations" du langage MGS (e.g. Giavitto & Spicher, 2008).

COMPLEXIFICATION





A la procedure Pr on associe une esquisse ***S*** contenant A, H sauf E, les cônes comme cônes distingués.

La *complexification* H' *de* H *relativement à* Pr est le prototype associé à cette esquisse.

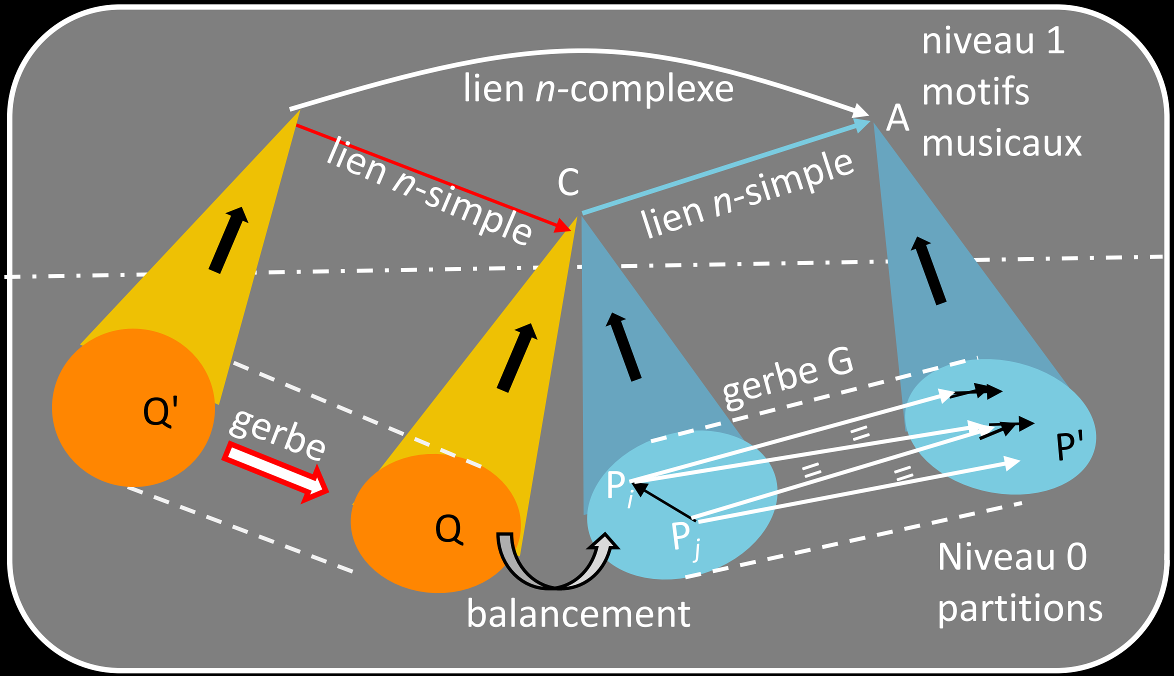
Une complexification mixte se construit par récurrence, en ajoutant successivement à chaque étape les colimites voulues, puis les limites sous la forme de colimites sur l'opposée.

ANALYSE DE MOTIFS MUSICAUX PAR COMPLEXIFICATION

L'analyse de la répétition de motifs musicaux peut être décrite par des complexifications successives de la catégorie pondérée de la partition musicale.

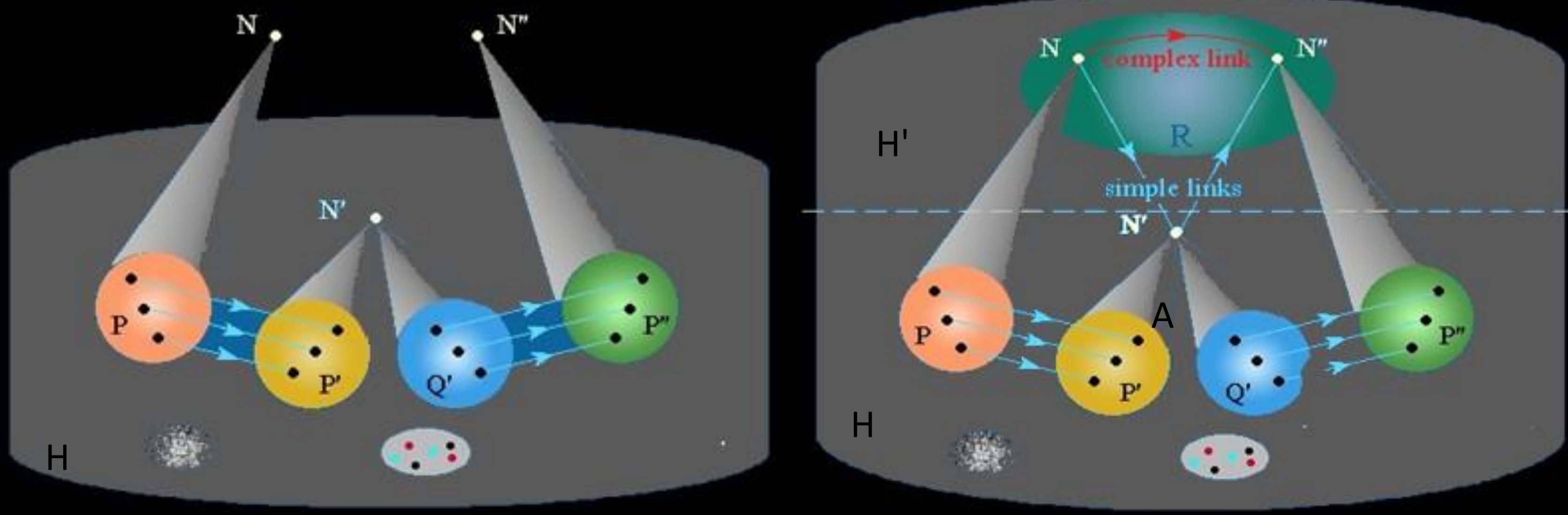
Les *patterns* à lier sont des sous-chemins des chemins qui représentent les voix musicales. On appelle *structure intervallique* d'un pattern la suite des intervalles (pondérations) des composants de ce pattern. On force à avoir la même colimite les patterns de même structure intervallique, et on sélectionne dans les procédures les répétitions maximales de patterns.

LIENS COMPLEXES PAR RECOMPOSITION D'ENCHAÎNEMENTS DE MOTIFS MUSICAUX



En construisant à partir de partitions musicales disjointes un niveau supérieur constitué de motifs musicaux et de relation de succession temporelles de leurs ocurrences, en forçant les premières (respectivement secondes, ... n-èmes...) occurences dans chaque partition à avoir la même colimite dans la complexification, on obtient des successions de motifs musicaux comme liens complexes, qui ne sont présentes dans aucune des partitions prises séparément.

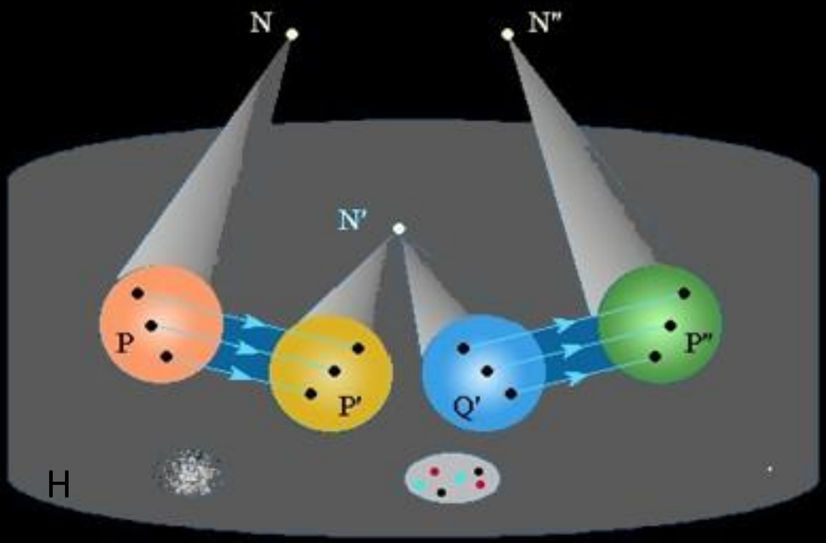
COMPLEXIFICATION ITEREE. THEOREME D'EMERGENCE

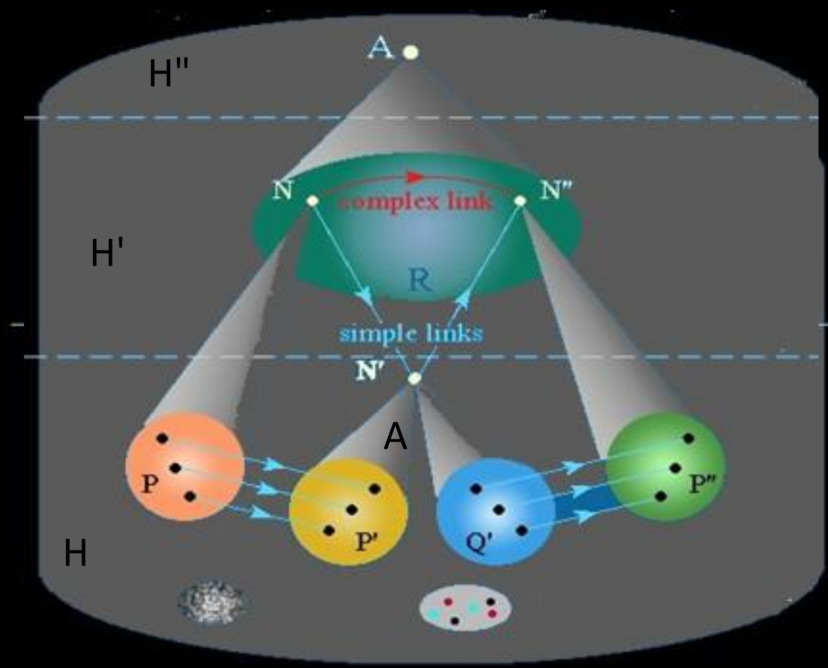


THEOREME D'EMERGENCE. ***MP est preservé par complexification et rend possible l'émergence au cours du temps de composants d'ordre croissant. Une double complexification ne se réduit pas à une seule complexification relative à une procédure 'cumulative'.***

----> Mélange des causalités matérielle (système en *t*), formelle (procédure), efficiente (réalisation des procédures), ce qui, d'après Rosen, distingue les "organismes" des "mécanismes". Ainsi MES = organisme (grâce à MP).

COMPLEXIFICATION ITEREE. THEOREME D'EMERGENCE



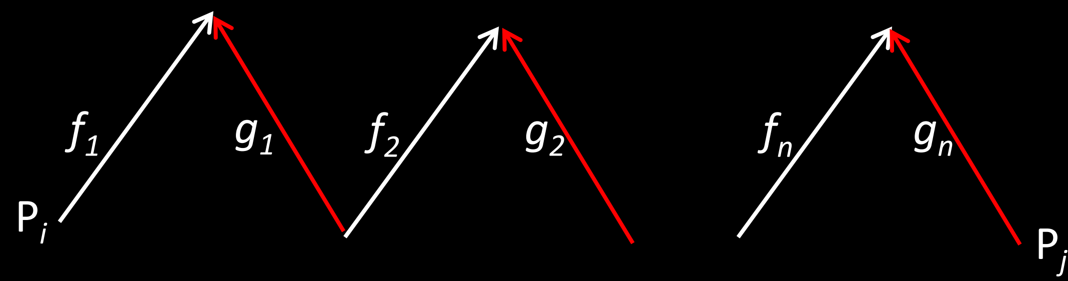


THEOREME D'EMERGENCE. ***MP est preservé par complexification et rend possible l'émergence au cours du temps de composants d'ordre croissant. Une double complexification ne se réduit pas à une seule complexification relative à une procédure 'cumulative'.***

----> Mélange des causalités matérielle (système en *t*), formelle (procédure), efficiente (réalisation des procédures), ce qui, d'après Rosen, distingue les "organismes" des "mécanismes". Ainsi MES = organisme (grâce à MP).

PATTERNS *d*-CONNEXES

Soit H une catégorie pondérée dans $\mathbf{R}^+$. Nous appelons *d-poids* du zigzag *z* de H:



la somme (dans **R**) :

$$d(z) = d(f_1) - d(g_1) + d(f_2) - d(g_2) \ldots + d(f_n) - d(g_n)$$

Un pattern P dans H est *d-connexe* si tous les zigzags de liens distingués de P entre P_i et P_j ont le même poids.

Exemple musical.

THEOREME. *La complexification d'une catégorie pondérée* (H, *d*) *dans laquelle tous les patterns à recoller sont d-connexes a une pondération étendant d*.

---> Par complexification, le délai de propagation des liens s'étend à condition de ne lier que des patterns *d*-connexes.

POUR PLUS D'INFORMATIONS

Memory Evolutive Systems: Hierarchy, Emergence, Cognition (Elsevier, 2007)

Sites internet:

http://ehres.pagesperso-orange.fr/

http://vbm-ehr.pagesperso-orange.fr/

MERCI