Xavier Hascher

Une analyse transformationnelle de l'op. 19 n° 4 de Schœnberg au moyen des *K*-réseaux

1 septembre 2005

À Allen Forte

Résumé : Cette étude constitue principalement une application des réseaux de Klumpenhouwer à l'analyse de la quatrième des *Petites Pièces pour piano* op. 19 de Schœnberg. Les notions fondamentales relatives aux *K*-réseaux y sont explicitées, de même que celles d'hyper-réseau et d'hyper-opérateur. Au-delà de ces aspects classiques en analyse transformationnelle, elle introduit également les notions, empruntées à la théorie des graphes, de mineur et de contraction. En outre, elle s'attache aux formes de symétries complexes, fréquentes dans la musique de Schœnberg à cette époque, et qui ne sont réductibles ni à la transposition ni à l'inversion seules. Enfin, divers autres aspects analytiques sont envisagés (fonction « en coin », conduite des voix dont les sommes de déplacements par mouvement contraire sont équivalentes).

Introduction

La théorie transformationnelle s'est imposée depuis quelques années dans le prolongement de la *Set Theory* (théorie musicale des ensembles) américaine classique, exemplifiée par les travaux d'Allen Forte [2]. Comme cette dernière, elle propose une approche formalisée et mathématisée de l'analyse musicale (qui peut également être utilisée pour la composition). Il n'y a aucune opposition entre ces deux démarches, et la théorie transformationnelle fait usage des propositions et des définitions de la *Set Theory* telles qu'elles ont été enrichies par le temps. La démarche transformationnelle consiste en une interrogation : Soit a et b deux objets musicaux, ou deux points dans un même « espace » musical conceptuel ; que doit-on faire subir à a pour obtenir b, c'est-à-dire quelle est la « transformation » particulière, généralement réversible, qui à partir de a, donne nécessairement (et uniquement) b ? C'est cette situation simple qui est représentée par la figure 0.1, empruntée à David Lewin [4].

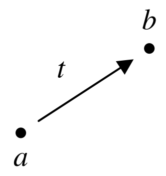


FIG. 0.1

Du point de vue mathématique, les notions utilisées sont principalement celles de la théorie des groupes, par rapport à la théorie des ensembles sur laquelle repose la *Set Theory*. Ceci est conséquent avec notre paragraphe précédent dans la mesure où un groupe est un ensemble muni d'une opération sur celui-ci (c.-à-d. une transformation bijective) possédant certaines propriétés. Néanmoins, la présente étude se réfère également à la théorie des graphes et des réseaux [1].

1. Rappels et définitions

1.1 Un graphe G est un couple (S, A) formé d'un ensemble S de points, appelés sommets, et d'un ensemble A de segments, appelés arêtes, reliant les sommets entre eux. A est une relation binaire sur S, de sorte que $A \subseteq S \times S$, et chaque élément k de A est une paire $\{x, y\}$ d'éléments de S.

Deux sommets x et y sont dits incidents à une arête k, et x et y sont dits adjacents, s'ils sont connectés par k. Une chaîne est une suite finie de sommets $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ où $\{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{n-1}, x_n\}$ sont des arêtes de G. Un graphe est dit connexe si pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets, il existe une chaîne reliant x et y. Si G est connexe, il n'existe pas de paire de sommets $\{x, y\}$ de G qui ne soient pas reliés par une arête.

Lorsque une arête doit être parcourue dans un certain sens (c.-à-d. la relation entre x et y n'est pas symétrique), cette arête est alors orientée et constitue un arc reliant le couple de sommets (x, y). Un graphe est dirigé s'il contient une ou plusieurs arêtes orientées.

Lorsqu'il existe une fonction associant à chaque arête une valeur réelle, le graphe est valué. On dit alors qu'il s'agit d'un réseau.

1.2 Un réseau de Klumpenhouwer, ou K-réseau, est un graphe connexe valué et dirigé, dont les sommets sont des classes de hauteurs, et les arêtes les opérations de transposition t_m et d'inversion i_n. Plus exactement, il s'agit d'un sextuplet (H, S, A, TI, v, w) où H est l'ensemble {C, C♯, D, …, B♭, B} des classes de hauteurs chromatiques tempérées par équivalence d'octave, TI le groupe des opérations de transposition et d'inversion sur H, $v : S(G) \to H$ la fonction associant chaque sommet de S à une classe de hauteurs de H, et $w : A(G) \to TI$ la fonction associant chaque arête de A à une opération t_m ou

i_n. Dans les calculs qui vont suivre, on associe à chaque classe de hauteurs une valeur entière mod 12 selon la convention C $\mapsto$ 0, C♯ $\mapsto$ 1, …, B $\mapsto$ 11. Les c.c.h. sont dénommées selon la nomenclature usuelle de Forte [2].

Un *K*-réseau doit comporter au moins trois sommets. Toute collection de classes de hauteurs (c.c.h.) de cardinal égal ou supérieur à 2 peut s'interpréter comme un *K*-réseau. (Lorsque le cardinal est de 2, la même valeur est assignée à deux sommets différents.) Une même c.c.h. peut être interprétée par plusieurs réseaux, constituant chacun un « mode » d'interprétation de celle-ci.

L'intérêt analytique des *K*-réseaux réside dans la comparaison qu'ils permettent entre les c.c.h. qu'ils interprètent. En effet, des c.c.h. appartenant à des classes canoniques (ou classes d'équivalence sous transposition ou inversion) différentes peuvent dans certains cas être interprétées par des *K*-réseaux similaires, ou isographes, démontrant par là un type de parenté non réductible à l'équivalence sous transposition ou inversion. Lorsque deux c.c.h. appartiennent à une même classe canonique, il est toujours possible de les interpréter par des *K*-réseaux isographes (les *K*-réseaux sont alors isomorphes).

1.3 Deux *K*-réseaux a et b, présentant la même configuration de sommets et d'arêtes, sont dits positivement isographes, si :

- la disposition des relations t et i est identique pour a et b ;
- les valeurs m des transpositions t_m sont les mêmes dans a et b ;
- les valeurs n des inversions i_n dans b sont supérieures de k ($k \geq 1$) aux valeurs p des inversions i_p correspondantes dans a.

Pour $k = 0$, l'isographie entre les réseaux a et b est dite forte.

Deux *K*-réseaux a et b, présentant la même configuration de sommets et d'arêtes, sont dits négativement isographes, si :

- la disposition des relations t et i est identique pour a et b ;
- les valeurs m des transpositions t_m sont inverses dans a et b ;
- les valeurs n des inversions i_n dans b sont supérieures de k à l'inverse des valeurs p des inversions i_p correspondantes dans a.

Les isographies peuvent être considérées comme des hyper-opérateurs sur les *K*-réseaux, de sorte que pour deux *K*-réseaux a et b :

- $\langle t_k \rangle(a) = b \Leftrightarrow a$ et b sont positivement isographes, avec $k = n - p$ mod 12 (l'isographie entre a et b est forte lorsque $k = 0$) ;
- $\langle i_k \rangle(a) = b \Leftrightarrow a$ et b sont négativement isographes, avec $k = n - i(p)$ mod 12.

On définit ainsi des hyper-réseaux, dont chaque sommet est un *K*-réseau, et chaque arête un hyper-opérateur $\langle t_k \rangle$ ou $\langle i_k \rangle$. Il existe un isomorphisme entre les hyper-opérateurs $\langle t_k \rangle$ et $\langle i_k \rangle$ sur les *K*-réseaux et les opérations du groupe *TI* sur les classes de hauteurs, de sorte que les hyper-réseaux et les *K*-réseaux peuvent eux-mêmes être comparés en termes d'isographies [5], [6].

L'utilisation analytique des *K*-réseaux et des isographies permettant de composer des hyper-réseaux va être illustrée dans la suite de ce chapitre, qui porte sur la quatrième des *Six Petites Pièces pour piano* de l'op. 19 de Schœnberg [8]. Notons qu'il existe encore peu d'exemples d'analyses de ce type en français, si ce n'est la tentative du présent auteur ayant pour objet *Ladislaus Teleky* de Franz Liszt [3].

2. Description formelle de l'op. 19 nº 4

2.1 Les treize mesures de l'op. 19 nº 4 de Schœnberg peuvent être divisées en trois phrases P_1, P_2, P_3 :

- P_1 (mes. 1–5) : exposition ;
- P_2 (mes. 6–9) : réexposition développante (mes. 7 ~ mes. 3, mes. 8 ~ mes. 2) ;
- P_3 (mes. 10–13) : réexposition du début de la pièce (mes. 10 ~ mes. 1) et « cadence » (utilisant le matériau de la mes. 2).

Le plan est donc celui d'une première phrase d'exposition (P_1), aboutissant à un point d'orgue précédé d'un ralentissement (mes. 4–5) ; ce qui suit consiste alors en une nouvelle phrase combinant les fonctions de développement et de réexposition (P_2), commençant dans l'ordre inverse par le matériau de la deuxième partie de la phrase initiale (transposé à la quinte inférieure, mes. 7–8) et revenant progressivement vers le début ; un nouveau ralentissement (mes. 7–9) conduit à une césure, mettant en valeur le retour varié du matériau introductif, qui s'enchaîne directement avec la conclusion (P_3).

Les principales correspondances motiviques entre phrase d'exposition (P_1) et de réexposition (P_2-P_3) sont les suivantes :

- motif μ_A et μ_J

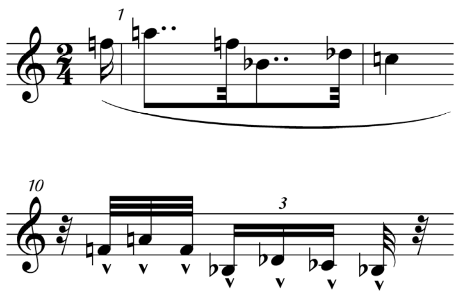


FIG. 2.1.1

- motif μ_B, μ_F et μ_H

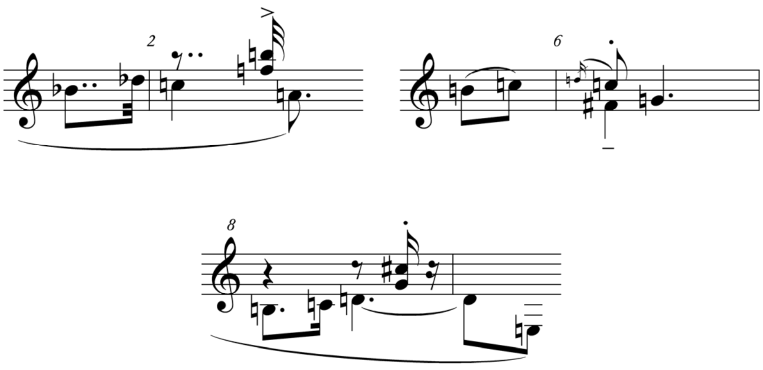


FIG. 2.1.2

- motif μ_C et μ_G

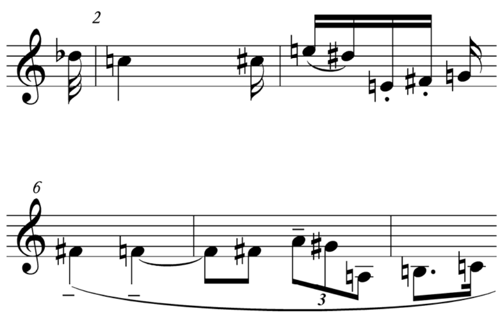


FIG. 2.1.3

Bien que d'autres correspondances, moins aisément identifiables, existent, ce sont celles-ci qui, avec le phrasé et les variations du tempo, permettent principalement de saisir le déroulement de la forme.

2.2 Le motif initial μ_A présente successivement une tierce majeure F-A, suivie d'une tierce mineure B♭-D♭. Cette opposition des deux types de tierces alimente la première phrase jusqu'à la mesure 5. Le tricorde 3–2 (fragment de la gamme octatonique), divisant la tierce mineure, est lui-même opposé au tricorde 3–6 (fragment de la gamme par tons), divisant la tierce majeure. De fait, la réunion des trois tricordes 3–2 et de la note A de la mesure 2 donne la gamme octatonique complète 8–28. À partir du B♭ de la mesure 2, les seuls intervalles utilisés sont la tierce mineure et la seconde mineure, jusqu'à ce qu'une permutation du tricorde 3–2 (E-F♯-G) introduise la seconde majeure. Celle-ci supplante alors la seconde mineure jusqu'à la fin de la phrase.

De surcroît, cette dernière est marquée au début et à la fin par la présence du tétracorde 4–19 combinant les deux genres de tierces, à la mesure 1 et à la mesure 4. Ce tétracorde est également énoncé mélodiquement juste avant la terminaison de la phrase, si l'on considère les notes accentuées à compter du F de la mesure 3 (fig. 2.2.1).

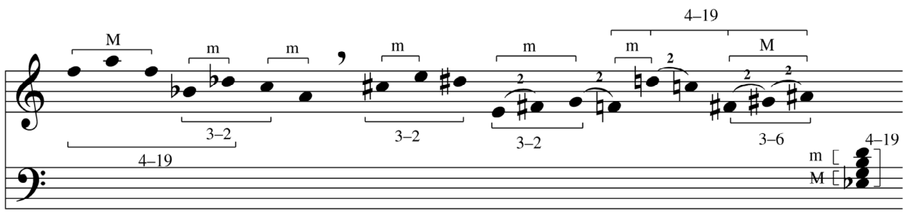


FIG. 2.2.1

On retrouve naturellement cette opposition entre tierce majeure et mineure dans la réexposition, au retour du matériau initial (mes. 10). Celui-ci est dédoublé, de manière à présenter d'abord la succession tierce majeure-tierce mineure, puis tierce mineure-tierce majeure. On retrouve également l'échange entre les tricordes 3–2 et 3–6, qui marque la deuxième partie de P_1 (fig. 2.2.2).

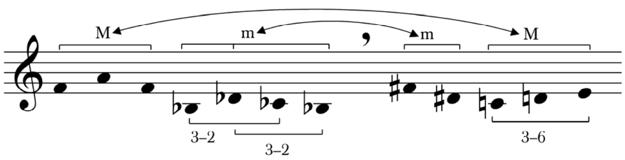


FIG. 2.2.2

2.3 La mesure 6, qui occupe le centre de la pièce, est située de manière cruciale entre l'exposition et le commencement de la réexposition. Cette mesure se distingue par le fait que les trois pentacordes qui la composent ont pour sous-ensemble commun le tétracorde 4–27. Ce tétracorde inclut lui-même le tricorde 3–10, qui détermine le matériau de la main gauche (fig. 2.3.1).

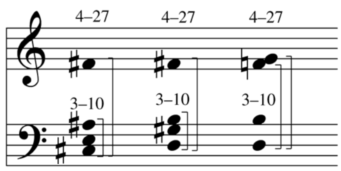


FIG. 2.3.1

Le premier pentacorde de la mesure, appartenant à la classe 5–28, contient également le tétracorde 4–*z*29, celui-là même qui compose le motif μ_B ; sa disposition met en évidence le tricorde 3–5 {C♯, F♯, C♮}, rappelant la sonorité de ce même tricorde au début de la mesure 2. Lorsque le motif est récapitulé à la mesure 8, Schœnberg renforce l'accord de double croche en le complétant à la main gauche, obtenant ainsi à nouveau le tétracorde 4–*z*29. Les trois fois, ce motif cordique est précédé d'un énoncé du tricorde 3–2 (fig. 2.3.2).

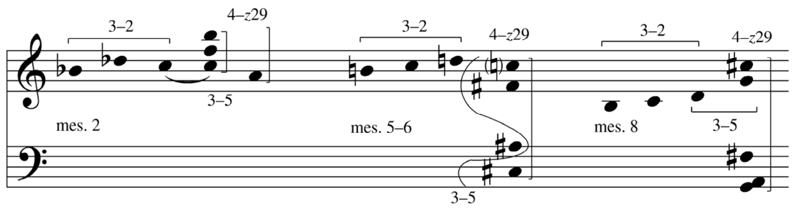


FIG. 2.3.2

Nous allons voir à présent comment ces observations peuvent être enrichies par l'utilisation analytique des *K*-réseaux.

3. Application analytique des *K*-réseaux

3.1 Le motif μ_J et son complément μ'_J (mes. 10), que nous avons analysés ci-dessus en termes d'échange entre tierces majeures et mineures, constituent un point de départ intéressant. Ils ont pour c.c.h. sous-jacentes {D♭, F, A, B♭, C♭} pour μ_J et {C, D, D♯, E, F♯} pour μ'_J, appartenant aux classes canoniques 5–13 et 5–8 ; les couples de tierces majeures et mineures mis en valeur par les motifs correspondent aux tétracordes 4–19 et 4–12 respectivement. Bien que ces c.c.h. appartiennent à des classes canoniques différentes, il est possible de les relier étroitement grâce à l'isographie forte existant entre les *K*-réseaux qui les décrivent.

Soit $J_{4,1}$ et $J_{4,2}$ les *K*-réseaux permettant de décrire les tétracordes 4–19 et 4–12, contenant chacun une tierce majeure et une tierce mineure (fig. 3.1.1) :

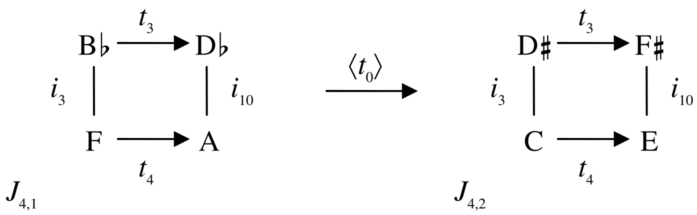


FIG. 3.1.1

Les valeurs m des transpositions t_m sont bien identiques pour chaque réseau, et les valeurs n des inversions i_n de $J_{4,1}$ sont bien supérieures de $k = 0$ aux valeurs p des inversions i_p de $J_{4,2}$. La définition de l'isographie forte est donc satisfaite, avec $J_{4,2} = \langle t_0 \rangle (J_{4,1})$.

Cette isographie forte se retrouve lorsqu'on considère les K-réseaux $J_{5,1}$ et $J_{5,2}$, décrivant les pentacordes 5–13 et 5–8 (qui incluent 4–19 et 4–12 respectivement) (fig. 3.1.2) :

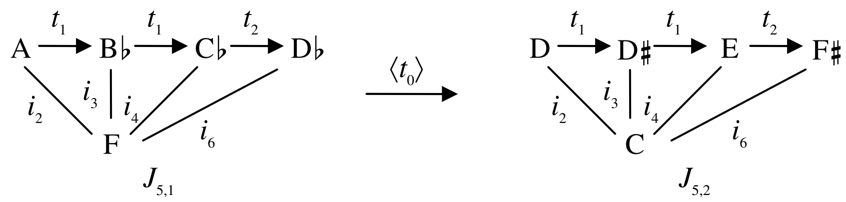


FIG. 3.1.2

La duplication du motif μ_J en μ_J et μ'_J recouvre donc une parenté structurale, non triviale, entre les principales c.c.h. concernées, dont ne permettait pas de rendre compte une interprétation uniquement fondée sur les rapports de transposition t_n.

3.2 L'interprétation proposée par les K-réseaux de la figure 3.1.2 n'est toutefois pas entièrement satisfaisante. En effet, bien que l'on vérifie 5–13 ⊂ 4–19 et 5–8 ⊂ 4–12, $J_{4,1}$ n'est pas un sous-graphe de $J_{5,1}$, et $J_{4,2}$ n'est pas un sous-graphe de $J_{5,2}$. Les deux K-réseaux d'ordre 5 ne contiennent d'autre part aucune arête de valeur t_3 ou t_4, malgré le fait que ce couple de relations soit analytiquement signifiant. En outre, ces K-réseaux ne peuvent être comparés en termes d'isographie à aucun des réseaux décrivant le pentacorde initial {C, D♭, F, A, B♭} (mes. 1–2) qui compose le motif μ_A, ne rendant donc pas compte du rôle récapitulatif de la mesure 10. Ils ne peuvent non plus être comparés aux réseaux décrivant les autres collections où le couple de relations t_3 et t_4 est mis en avant, comme le pentacorde concluant la première phrase P_1 {D, E♭, G, B♭, B} (mes. 4–5), ou les deux premiers pentacordes de P_2, {C, C♯, E, F♯, A♯} et {D, F♯, G, G♯, B} (mes. 6). Ces collections appartiennent respectivement aux classes canoniques 5–*z*17, 5–21, 5–28, et 5–*z*38.

Soit $A_{5,1}$ le K-réseau décrivant le pentacorde initial, et $J_{5,1\text{-}1}$ et $J_{5,2\text{-}1}$ les nouveaux réseaux décrivant les pentacordes de la mesure 10. Le mode d'interprétation choisi projette fortement les relations intervallaires constitutives des motifs μ_A, μ_J et μ'_J (fig. 3.2.1) :

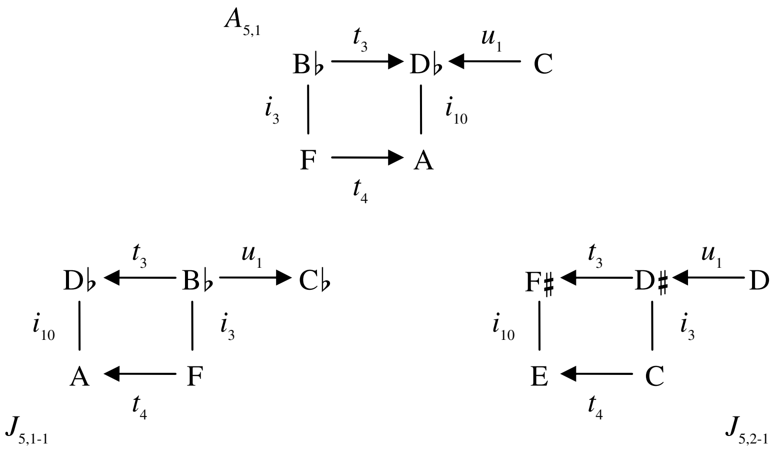


FIG. 3.2.1

L'analogie de ces réseaux est évidente à l'examen de la figure 3.2.1, où l'on remarque des arêtes u_p, correspondant à une transposition d'intervalle p, mais dont l'orientation n'est pas liée à celle des arêtes t_m. Il existe un isomorphisme entre les graphes valués sous-jacents aux trois *K*-réseaux, mais qui ne tient pas compte de la direction des arêtes. D'un point de vue intuitif, les trois c.c.h. peuvent se comprendre (intellectuellement, mais aussi auditivement) comme organisées par un rapport d'inversion entre une tierce majeure et une tierce mineure, avec un demi-ton ajouté, alternativement placé à l'intérieur ou à l'extérieur de cette dernière.

Pour formaliser ces isographies, nous devons modifier nos hyper-opérateurs $\langle t_k\rangle$ et $\langle i_k\rangle$ et définir de nouvelles opérations telles que, pour un *K*-réseau possédant des arêtes de valeur t_m, i_n et u_p (le nombre d'arêtes u_p ne pouvant être supérieur au nombre d'arêtes t_m) :

- $\langle t_k, 1\rangle(t_m) = t_m$; $\langle t_k, 1\rangle(i_n) = i_{n+k}$; $\langle t_k, 1\rangle(u_p) = u_p$;
- $\langle t_k, -1\rangle(t_m) = t_m$; $\langle t_k, -1\rangle(i_n) = i_{n+k}$; $\langle t_k, -1\rangle(u_p) = u_{-p}$;
- $\langle i_k, 1\rangle(t_m) = t_{-m}$; $\langle i_k, 1\rangle(i_n) = i_{-n+k}$; $\langle i_k, 1\rangle(u_p) = u_p$;
- $\langle i_k, -1\rangle(t_m) = t_{-m}$; $\langle i_k, -1\rangle(i_n) = i_{-n+k}$; $\langle i_k, -1\rangle(u_p) = u_{-p}$.

La deuxième partie de chaque hyper-opérateur contient un opérateur partiel noté −1 ou 1, selon que le sens de l'arc u_p doive être ou non renversé. Cet opérateur agit indépendamment du fait que la première partie soit t_m ou i_n. De même que $\langle t_k\rangle$ et $\langle i_k\rangle$, ces nouvelles opérations sont des automorphismes du groupe *TI*. C'est ce que vérifient les formules suivantes, où j et k étant des entiers mod 12, avec $a, b \in \{-1, 1\}$:

- $\langle t_j, a\rangle\langle t_k, b\rangle(t_m) = \langle t_{j+k}, ab\rangle(t_m) = t_m$;
- $\langle t_j, a\rangle\langle t_k, b\rangle(i_n) = \langle t_{j+k}, ab\rangle(i_n) = i_{n+j+k}$;
- $\langle t_j, a\rangle\langle t_k, b\rangle(u_p) = \langle t_{j+k}, ab\rangle(u_p) = u_{abp}$;

- $\langle t_j, a\rangle\langle i_k, b\rangle(t_m) = \langle i_{j+k}, ab\rangle(t_m) = t_{-m}$;
- $\langle t_j, a\rangle\langle i_k, b\rangle(i_n) = \langle i_{j+k}, ab\rangle(i_n) = i_{-n+j+k}$;
- $\langle t_j, a\rangle\langle i_k, b\rangle(u_p) = \langle i_{j+k}, ab\rangle(u_p) = u_{abp}$;
- $\langle i_j, a\rangle\langle t_k, b\rangle(t_m) = \langle i_{j-k}, ab\rangle(t_m) = t_{-m}$;
- $\langle i_j, a\rangle\langle t_k, b\rangle(i_n) = \langle i_{j-k}, ab\rangle(i_n) = i_{-n+(j-k)}$;
- $\langle i_j, a\rangle\langle t_k, b\rangle(u_p) = \langle i_{j-k}, ab\rangle(u_p) = u_{abp}$;
- $\langle i_j, a\rangle\langle i_k, b\rangle(t_m) = \langle t_{j-k}, ab\rangle(t_m) = t_m$;
- $\langle i_j, a\rangle\langle i_k, b\rangle(i_n) = \langle t_{j-k}, ab\rangle(i_n) = i_{n+(j-k)}$;
- $\langle i_j, a\rangle\langle i_k, b\rangle(u_p) = \langle t_{j-k}, ab\rangle(u_p) = u_{abp}$.

On obtient donc bien les égalités $\langle t_j, a\rangle\langle t_k, b\rangle = \langle t_{j+k}, ab\rangle$, $\langle t_j, a\rangle\langle i_k, b\rangle = \langle i_{j+k}, ab\rangle$, $\langle i_j, a\rangle\langle t_k, b\rangle = \langle i_{j-k}, ab\rangle$, et $\langle i_j, a\rangle\langle i_k, b\rangle = \langle t_{j-k}, ab\rangle$.

Nous pouvons grâce à ces opérations construire un hyper-réseau à partir des trois *K*-réseaux $A_{5,1}$, $J_{5,1\text{-}1}$ et $J_{5,2\text{-}1}$ (fig. 3.2.2) :

$$\begin{tikzcd}
 & A_{5,1} \arrow[dl, dash, "{\langle i_1, -1\rangle}"'] \arrow[dr, dash, "{\langle i_1, 1\rangle}"] & \\
J_{5,1\text{-}1} \arrow[rr, "{\langle t_0, -1\rangle}"'] & & J_{5,2\text{-}1}
\end{tikzcd}$$

FIG. 3.2.2

Cet hyper-réseau permet de relier entre eux les *K*-réseaux interprétant les collections complètes sous-jacentes aux motifs μ_A, μ_J et μ'_J. La parenté intuitive que nous reconnaissions entre ceux-ci se trouve ainsi formalisée par des descriptions identiques à un isomorphisme près.

Soit, à présent, $D_{5,2}$, $F_{5,1}$ et $F_{5,2}$ les *K*-réseaux interprétant les trois collections restantes (fig. 3.2.3) :

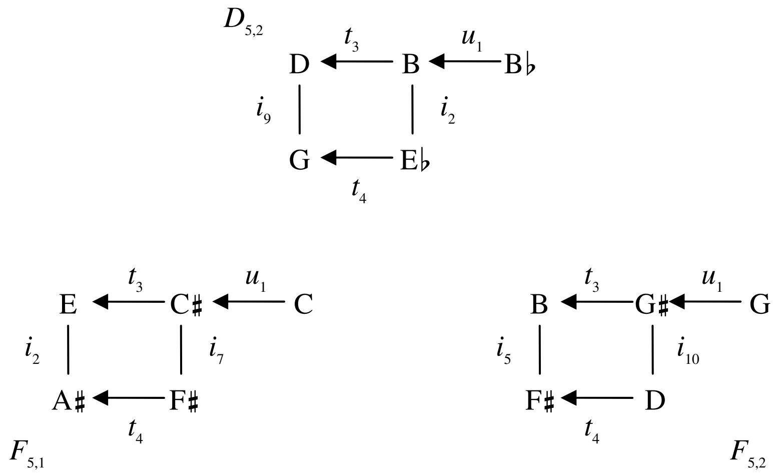


FIG. 3.2.3

Ces K-réseaux sont isographes les uns aux autres via $\langle t_k, 1\rangle$; ils sont de plus tous trois isographes à $A_{5,1}$ via $\langle i_k, 1\rangle$, et à $J_{5,1\text{-}1}$ via $\langle t_k, -1\rangle$. On peut représenter ainsi l'hyper-réseau constitué des six K-réseaux des figures 3.2.1 et 3.2.3 (fig. 3.2.4*a*) :

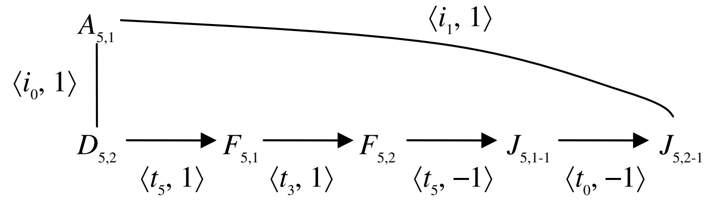


FIG. 3.2.4*a*

L'hyper-opérateur $\langle t_5, 1\rangle$ reliant les K-réseaux $D_{5,2}$ et $F_{5,1\text{-}1}$ coïncide avec la transposition t_5 du motif μ_C au début de la mesure 6 (fig. 2.1.3). En permutant les réseaux $J_{5,1\text{-}1}$ et $J_{5,2\text{-}1}$ de la mesure 10, on retrouve $\langle t_5, 1\rangle$ entre $F_{5,2}$ et $J_{5,2\text{-}1}$, tandis que la relation entre $J_{5,1\text{-}1}$ et $A_{5,1}$, définie par $\langle i_1, -1\rangle$, souligne l'inversion entre le motif initial et le début de la phrase P_3 qui, en conservant les quatre notes communes {D♭, F, A, B♭} $\in$ 4–19, et en déplaçant la cinquième classe de hauteurs d'un demi-ton, laisse croire à une quasi-reprise à t_0 du début (fig. 3.2.4*b*) :

$$\begin{tikzcd} F_{5,2} \arrow[r, "\langle t_5,\, 1\rangle"'] \arrow[rr, bend left, "\langle i_1,\, -1\rangle"] & J_{5,2\text{-}1} \arrow[r, "\langle t_0,\, -1\rangle"'] & J_{5,1\text{-}1} \end{tikzcd}$$

FIG. 3.2.4*b*

3.3 Une permutation des sommets de l’hyper-réseau permet de réordonner la suite des transpositions en une chaîne $J_{5,2\text{-}1}\langle t_4, 1\rangle F_{5,1}\langle t_3, 1\rangle F_{5,2}\langle t_4, 1\rangle D_{5,2}$. Comme $\langle t_1, 1\rangle(D_{5,2}) = J_{5,2\text{-}1}$, on retrouve dans ce mode l’ensemble des indices de *t* constituant les *K*-réseaux eux-mêmes (et uniquement ceux-ci).

Il est possible d’aller plus loin dans le réordonnancement de notre hyper-réseau, et de chercher à le rendre isographe à un certain mode d’interprétation de l’une des c.c.h. décrites par les *K*-réseaux des figures 3.2.1 et 3.2.3, différent de celui proposé par ceux-ci (faute d’une isographie entre l’hyper-réseau et ces *K*-réseaux). On tente par là de tirer profit des indices de transposition révélés par les permutations que nous avons effectuées, qui épuisent les entrées du vecteur intervallaire 101220, correspondant à la classe canonique 4–20. Or, cette c.c.h. forme une sous-collection de deux des pentacordes impliqués dans notre hyper-réseau, qui appartiennent aux classes 5–21 (mes. 4–5) et 5–*z*38 (mes. 6, deuxième croche) respectivement.

Nous devons, pour obtenir une telle isographie, éliminer les opérateurs $\langle t_m, -1\rangle$ et $\langle i_m, 1\rangle$, de manière à ne conserver que les opérateurs $\langle t_m, 1\rangle$ et $\langle i_n, -1\rangle$, que l’on simplifiera en $\langle t_m\rangle$ et $\langle i_n\rangle$ respectivement. On commence donc par établir une isographie entre $A_{5,1}$ et un réseau $A'_{5,1}$ via $\langle i_1, 1\rangle$, conservant les valeurs de i_n tout en inversant le sens des arêtes t_m, ainsi qu’entre $J_{5,1\text{-}1}$ et un réseau $J'_{5,1\text{-}1}$ via la même opération, produisant le même résultat. Les deux nouveaux réseaux, $A'_{5,1}$ et $J'_{5,1\text{-}1}$, sont imaginaires, mais ils n’en sont pas moins isographes à l’ensemble des *K*-réseaux qui nous concernent. En effet, si un réseau *a* est isographe à un réseau *b* via un automorphisme φ_1, et *b* est isographe à un troisième réseau *c* via un automorphisme φ_2, alors *a* est isographe à *c* via la composition $\varphi_2 \circ \varphi_1$ de ces deux automorphismes. $A'_{5,1}$ est de ce fait positivement isographe aux trois *K*-réseaux $F_{5,1}$, $F_{5,1}$ et $D_{5,2}$, et fortement isographe à $J_{5,2\text{-}1}$ puisque $A'_{5,1} = \langle i_1\rangle\langle i_1\rangle(J_{5,2\text{-}1}) = \langle t_0\rangle(J_{5,2\text{-}1})$. $J'_{5,1\text{-}1}$ est négativement isographe à tous ces réseaux. Plus particulièrement, $J'_{5,1\text{-}1}$ est égal à $\langle i_8\rangle(F_{5,2})$ et à $\langle i_5\rangle(F_{5,1})$.

L’hyper-réseau résultant est bien positivement isographe au nouveau *K*-réseau décrivant le pentacorde {D, F♯, G, G♯, B} (mes. 6) (fig. 3.3.1) :

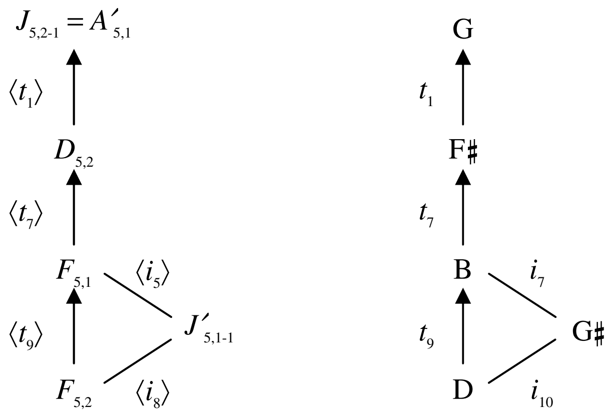


FIG. 3.3.1

On procède de façon similaire pour le pentacorde {D, E♭, G, B♭, B} (mes. 4–5). Nous laissons au lecteur intéressé le soin de construire un hyper-réseau isographe à l'un des *K*-réseaux interprétant cette c.c.h. (les deux réseaux seront ici négativement isographes).

Ce qui est montré par la figure 3.3.1 n'est pas qu'une reconstruction artificielle, destinée à faire croire que le déroulement de la pièce découlerait, par un processus complexe d'amplification, de la structure interne du deuxième accord de la mesure 6. Cette reconstruction (et l'hyper-réseau lui-même) n'a pour objet que de mettre en évidence le fait que les relations entre les réseaux sont réductibles aux mêmes intervalles de transposition que les relations internes aux pentacordes eux-mêmes. Bien loin de constituer un prélèvement arbitraire, les intervalles permettant de construire un hyper-réseau sont en nombre limité, leurs seules combinaisons étant celles données par *vi*(4–20).

4. Quelques cas d'isographies intéressantes

4.1 L'analyse qui précède ne clôt pas les possibilités d'interprétation offertes par les *K*-réseaux pour l'op. 19 n° 4. L'une des caractéristiques de cette pièce est l'importance de l'isographie négative via l'hyper-opérateur $\langle i_0 \rangle$ entre les réseaux interprétant des c.c.h. en relation directe soit de succession, soit de simultanéité. Ainsi, les deux pentacordes de la mesure 4, {C, D, F, G, B♭} ∈ 5–35 et {D, E♭, G, B♭, B} ∈ 5–21, bien qu'ils projettent des relations intervallaires assez dissimilaires, peuvent-ils être décrits par des *K*-réseaux vérifiant cette isographie (fig. 4.1.1) :

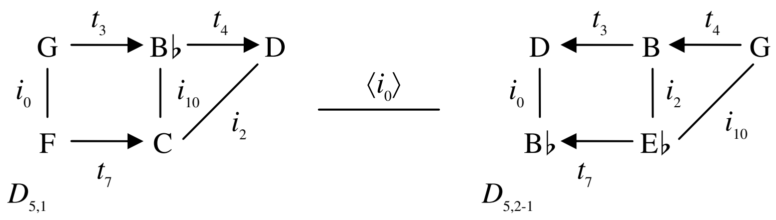


FIG. 4.1.1

En supprimant le sommet B♭ du réseau $D_{5,2\text{-}1}$ (fig. 4.1.1), on retrouve cette même isographie entre le *K*-réseau résultant et celui décrivant la c.c.h. {D♭, F, A, B♭} de la mesure 1 (rappelons que les deux c.c.h. appartiennent à la même classe canonique 4–19). Le couple de *K*-réseaux ainsi formé est identique à celui interprétant les deux premières c.c.h. de la classe 4–27 {C♯, E, F♯, A♯} et {D, F♯, G♯, B} de la mesure 6, également négativement isographes via $\langle i_0 \rangle$, les réseaux $A_{4,1}$ et $F_{4,1}$, $D_{4,2}$ et $F_{4,2}$ étant par conséquent fortement isographes (fig. 4.1.2) :

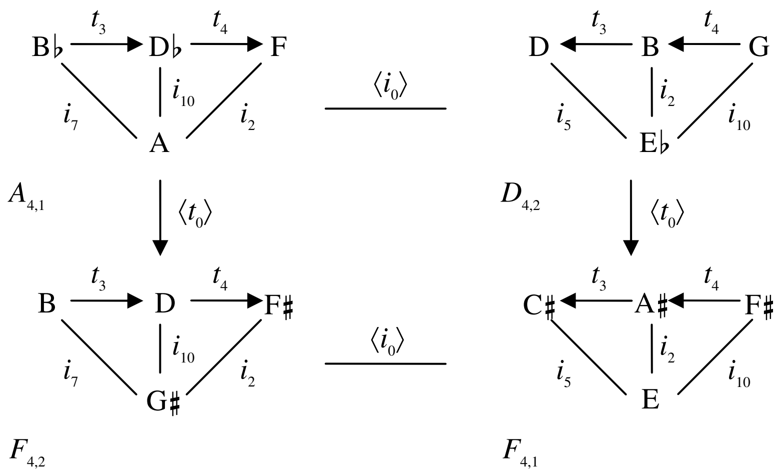


FIG. 4.1.2

Deux autres isographies négatives similaires méritent d'être signalées : elles concernent les réseaux d'ordre 3 $H_{3,1}$ et $H_{3,2}$, $K_{3,1}$ et $K_{3,2}$, interprétant respectivement les deux parties de l'hexacorde vertical de la mesure 8, avec les c.c.h. {F♯, G, A} ∈ 3–2 (à la main gauche) et {C♯, D, G} ∈ 3–5 (à la main droite), ainsi que de la mesure 11, avec les c.c.h. {C, D, G} (m.g.) et {E, F♯, B} (m.d.), appartenant toutes deux à la classe 3–9 (fig. 4.1.3*a* et 4.1.3*b*).

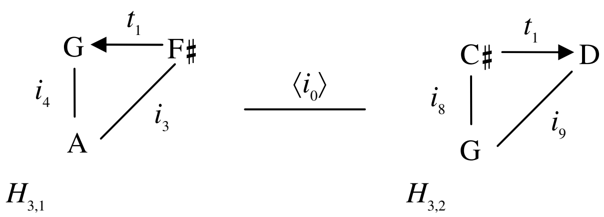


FIG. 4.1.3*a*

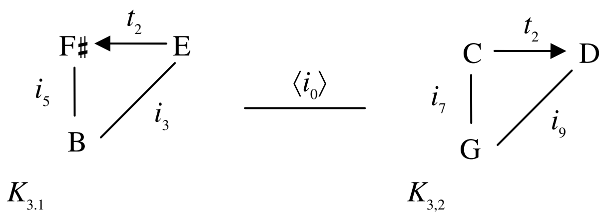


FIG. 4.1.3*b*

4.2 On tente à présent de constituer en réseaux isographes les trois c.c.h. successives de la mesure 6, dont on a constaté ci-dessus (sect. 2.3) qu'elles contenaient chacune un tétracorde de la classe 4–27. Il suffit donc de relier par des arêtes i_n aux éléments de ce tétracorde la classe de hauteurs obtenue par soustraction de celui-ci (fig. 4.2.1) :

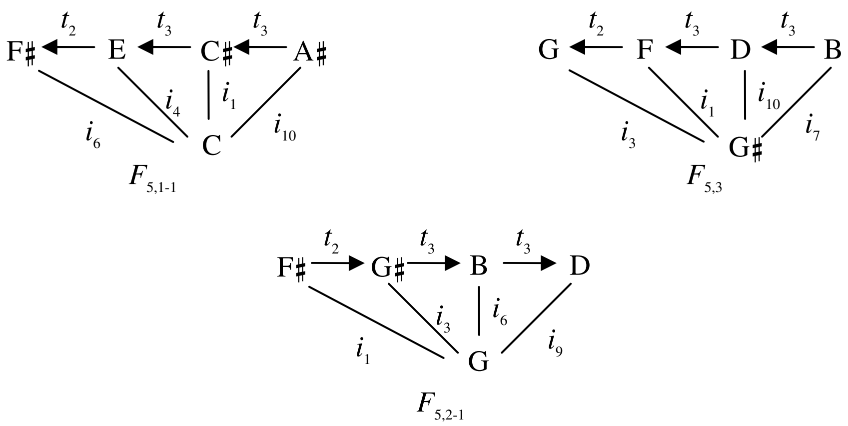


FIG. 4.2.1

L'ordre de chaque *K*-réseau est de 5, mais les *K*-réseaux sont au nombre de trois. On ne peut rechercher, avec les ressources disponibles, d'isographie entre l'hyper-réseau constitué par ces *K*-réseaux, et les réseaux eux-mêmes.

Ce problème peut être contourné à travers la notion de mineur d'un réseau, étendue à partir de celle de mineur d'un graphe [1]. On définit comme mineur d'un réseau, un réseau obtenu par une séquence (éventuellement vide) de suppression ou de contraction d'arêtes, ou de suppression de sommets selon un algorithme donné. Soit $F^d_{5,1\text{-}1}$ un tel mineur de $F_{5,1\text{-}1}$ après suppression des sommets latéraux et de leurs arêtes incidentes. Ce mineur forme lui-même un *K*-réseau d'ordre 3, positivement isographe à l'hyper-réseau de la figure 4.2.1 (fig. 4.2.2).

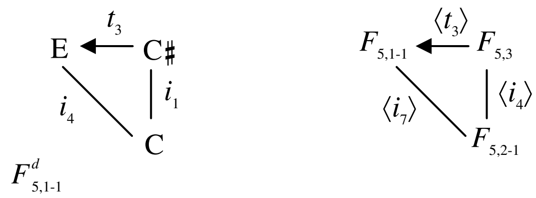


FIG. 4.2.2

On procède de façon comparable pour les *K*-réseaux interprétant les figures mélodiques des motifs μ_B, μ_F et μ_H (mes. 1–2, 5–6 et 8), composées chacune d'un tricorde de la classe 3–2 et d'un intervalle disjoint descendant de taille variable, prenant appui sur l'une des notes du tricorde. Ces trois *K*-réseaux $B_{4,1}$, $F_{4,1\text{-}1}$ et $H_{4,1}$ sont ici d'ordre 4 (fig. 4.2.3) :

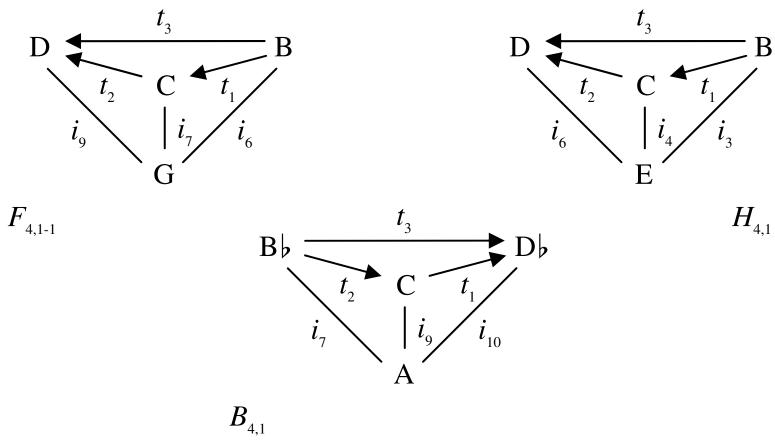


FIG. 4.2.3

Soit $F^d_{3,1}$ un mineur de $F_{3,1}$ après suppression du sommet intérieur C et de toutes ses arêtes incidentes. Le mineur ainsi obtenu est positivement isographe à l'hyper-réseau formé de $B_{4,1}$, $F_{4,1\text{-}1}$ et $H_{4,1}$ (fig. 4.2.4).

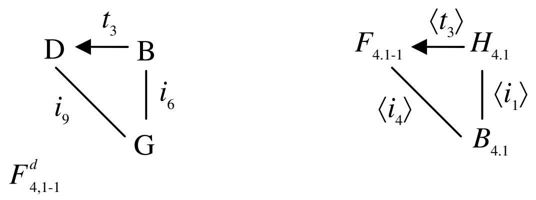


FIG. 4.2.4

5. Isographie, hiérarchie et récursivité

5.1 Une analyse d'un morceau de musique à l'aide de *K*-réseaux conduit généralement à rechercher une isographie positive, négative ou forte entre les éléments d'un ensemble de *K*-réseaux, et l'hyper-réseau qui les relie. (Ces K-réseaux sont donc nécessairement isographes l'un à l'autre.) Il s'agit d'une structure hiérarchique récursive à deux niveaux, où le niveau supérieur est constitué par l'hyper-réseau, et le niveau inférieur par les *K*-réseaux qui constituent ses sommets.

Soit $A_{4,1\text{-}1}$ un *K*-réseau interprétant le tétracorde {D♭, F, A, B♭} ∈ 4–19 de la mesure 1, et $B_{4,2}$ un *K*-réseau interprétant le tétracorde {C, F, A, B} ∈ 4–*z*29 de la mesure 2, tels que ces deux *K*-réseaux sont positivement isographes, avec des valeurs *m* de t_m communes égales à 1 et 4 pour les arêtes correspondantes. On met ainsi en relation les c.c.h. sous-jacentes aux motifs μ_A et μ_B. Soit à présent $D_{4,2\text{-}1}$ le *K*-réseau interprétant la c.c.h. {D, E♭, G, B} de la mesure 4 selon le même mode. Il manque, pour construire un hyper-réseau isographe à ces *K*-réseaux, un quatrième *K*-réseau, que l'on construira sur les éléments de la c.c.h. sous-jacente au motif μ_H à la mesure 8, répondant à μ_B. La figure 5.1.1*a* montre les trois premiers *K*-réseaux ainsi que le quatrième, $H_{4,1\text{-}1}$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A} \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, dash, "i_{10}"'] & \mathrm{B}\flat \arrow[d, dash, "i_3"] \\ \mathrm{D}\flat \arrow[r, "t_4"'] & \mathrm{F} \end{tikzcd}$$

$A_{4,1\text{-}1}$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B} \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, dash, "i_4"'] & \mathrm{C} \arrow[d, dash, "i_9"] \\ \mathrm{F} \arrow[r, "t_4"'] & \mathrm{A} \end{tikzcd}$$

$B_{4,2}$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{D} \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, dash, "i_9"'] & \mathrm{E}\flat \arrow[d, dash, "i_2"] \\ \mathrm{G} \arrow[r, "t_4"'] & \mathrm{B} \end{tikzcd}$$

$D_{4,2\text{-}1}$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}\sharp \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, dash, "i_8"'] & \mathrm{D} \arrow[d, dash, "i_1"] \\ \mathrm{G} \arrow[r, "t_4"'] & \mathrm{B} \end{tikzcd}$$

$H_{4,1\text{-}1}$

FIG. 5.1.1*a*

Tous ces *K*-réseaux sont positivement isographes. Selon la procédure classique, on modifie l'interprétation de deux des *K*-réseaux en rétrogradant leur sens de lecture pour introduire les isographies négatives nécessaires à la construction de l'hyper-réseau [6]. Soit ainsi $A'_{4,1\text{-}1}$ et $D'_{4,2\text{-}1}$ les réinterprétations négatives de $A_{4,1\text{-}1}$ et $D_{4,2\text{-}1}$ respectivement (fig. 5.1.1*b*) :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B}\flat \arrow[d, dash, "i_3"'] & \mathrm{A} \arrow[l, "t_1"'] \arrow[d, dash, "i_{10}"] \\ \mathrm{F} & \mathrm{D}\flat \arrow[l, "t_4"] \end{tikzcd}$$

$A'_{4,1\text{-}1}$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E}\flat \arrow[d, dash, "i_2"'] & \mathrm{D} \arrow[l, "t_1"'] \arrow[d, dash, "i_9"] \\ \mathrm{B} & \mathrm{G} \arrow[l, "t_4"] \end{tikzcd}$$

$D'_{4,2\text{-}1}$

FIG. 5.1.1*b*

La construction de l'hyper-réseau isographe à l'ensemble des *K*-réseaux de niveau inférieur ne pose dès lors plus difficultés (fig. 5.1.2) :

$$\begin{tikzcd} D'_{4,2\text{-}1} \arrow[r, "\langle t_1 \rangle"] \arrow[d, dash, "\langle i_6 \rangle"'] & A'_{4,1\text{-}1} \arrow[d, dash, "\langle i_{11} \rangle"] \\ B_{4,2} \arrow[r, "\langle t_4 \rangle"'] & H_{4,1\text{-}1} \end{tikzcd}$$

FIG. 5.1.2

5.2 Si l'on revient à présent au mode d'interprétation de la figure 3.1.1 et qu'on applique ce mode aux trois tétracordes de la classe 4–19 des mesures 1, 3 et 4 énumérés par la figure 2.2.1 pour former les *K*-réseaux $A_{4,1\text{-}2}$, $C_{4,1}$ et $D_{4,2\text{-}2}$ respectivement, on peut étendre cette interprétation aux trois tétracordes successifs de la classe 4–27 de la mesure 6 pour former les *K*-réseaux $F_{4,1\text{-}2}$, $F_{4,2\text{-}1}$ et $F_{4,3}$. On ajoute encore le *K*-réseau $E_{4,1}$ qui décrit la c.c.h. (appartenant également à la classe 4–19) parcourue mélodiquement par la main droite aux mesures 4–5, opposant une nouvelle fois les cellules intervallaires de tierce majeure et de tierce mineure (fig. 5.2.1) :

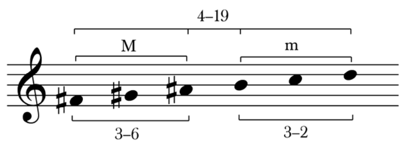


FIG. 5.2.1

Cet ensemble est complété par le *K*-réseau $J_{4,2}$ décrivant la c.c.h. sous-jacente au motif μ'_J de la mes. 10 (cf. fig. 3.1.1). (On omet ici le réseau $J_{4,1}$, identique à $A_{4,1\text{-}2}$.) La figure 5.2.2*a* montre les huit *K*-réseaux ainsi constitués :

$$\begin{tikzcd} B\flat \arrow[r, "t_3"] \arrow[d, dash, "i_3"'] & D\flat \arrow[d, dash, "i_{10}"] \\ F \arrow[r, "t_4"'] & A \end{tikzcd} \quad A_{4,1\text{-}2}$$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "t_3"] \arrow[d, dash, "i_8"'] & F \arrow[d, dash, "i_3"] \\ F\sharp \arrow[r, "t_4"'] & A\sharp \end{tikzcd} \quad C_{4,1}$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "t_3"] \arrow[d, dash, "i_2"'] & D \arrow[d, dash, "i_9"] \\ E\flat \arrow[r, "t_4"'] & G \end{tikzcd} \quad D_{4,2\text{-}2}$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "t_3"] \arrow[d, dash, "i_5"'] & D \arrow[d, dash, "i_0"] \\ F\sharp \arrow[r, "t_4"'] & A\sharp \end{tikzcd} \quad E_{4,1}$$

$$\begin{tikzcd} C\sharp \arrow[r, "t_3"] \arrow[d, dash, "i_7"'] & E \arrow[d, dash, "i_2"] \\ F\sharp \arrow[r, "t_4"'] & A\sharp \end{tikzcd} \quad F_{4,1\text{-}2}$$

$$\begin{tikzcd} G\sharp \arrow[r, "t_3"] \arrow[d, dash, "i_{10}"'] & B \arrow[d, dash, "i_5"] \\ D \arrow[r, "t_4"'] & F\sharp \end{tikzcd} \quad F_{4,2\text{-}1}$$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "t_3"] \arrow[d, dash, "i_9"'] & F \arrow[d, dash, "i_4"] \\ G \arrow[r, "t_4"'] & B \end{tikzcd} \quad F_{4,3}$$

$$\begin{tikzcd} D\sharp \arrow[r, "t_3"] \arrow[d, dash, "i_3"'] & F\sharp \arrow[d, dash, "i_{10}"] \\ C \arrow[r, "t_4"'] & E \end{tikzcd} \quad J_{4,2}$$

FIG. 5.2.2*a*

Suivant la procédure dorénavant familière au lecteur, on réinterprète un certain nombre de ces *K*-réseaux de manière à introduire les isographies négatives nécessaires à l'établissement d'un hyper-réseau. On obtient ainsi les versions rétrogrades $A'_{4,1\text{-}2}$, $D'_{4,2\text{-}2}$, $E'_{4,1}$, $F'_{4,1\text{-}2}$, $F'_{4,2\text{-}1}$, $F'_{4,3}$ et $J'_{4,2}$ (fig. 5.2.2*b*) :

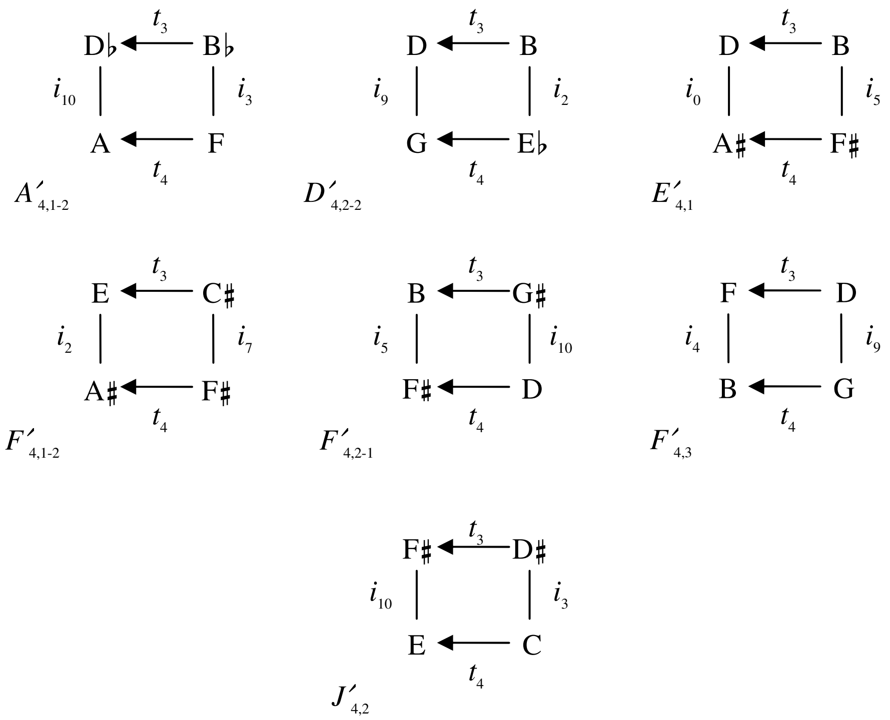


FIG. 5.2.2*b*

Il ne reste plus qu'à analyser les relations entre ces divers *K*-réseaux pour constituer le niveau supérieur, laissant apparaître, non pas un, mais six hyper-réseaux, que l'on numérote de Y_1 à Y_6. Ces hypers-réseaux sont tous isographes aux *K*-réseaux du niveau inférieur. Quelques uns sont fortement isographes à l'un des *K*-réseaux (fig. 5.2.3*a*) :

$$\begin{tikzcd} D_{4,2\text{-}2} \arrow[r, "\langle t_3\rangle"] \arrow[d, dash, "\langle i_0\rangle"'] & E_{4,1} \arrow[d, dash, "\langle i_7\rangle"] \\ A'_{4,1\text{-}2} = J'_{4,2} \arrow[r, "\langle t_4\rangle"'] & F'_{4,1\text{-}2} \end{tikzcd}$$
Y_1

$$\begin{tikzcd} E_{4,1} \arrow[r, "\langle t_3\rangle"] \arrow[d, dash, "\langle i_{10}\rangle"'] & C_{4,1} \arrow[d, dash, "\langle i_5\rangle"] \\ F'_{4,2\text{-}1} \arrow[r, "\langle t_4\rangle"'] & D'_{4,2\text{-}2} \end{tikzcd}$$
Y_2

$$\begin{tikzcd} F_{4,1\text{-}2} \arrow[r, "\langle t_3\rangle"] \arrow[d, dash, "\langle i_7\rangle"'] & F_{4,2\text{-}1} \arrow[d, dash, "\langle i_2\rangle"] \\ E'_{4,1} \arrow[r, "\langle t_4\rangle"'] & F'_{4,3} \end{tikzcd}$$
Y_3

$$\begin{tikzcd} D_{4,2\text{-}2} \arrow[r, "\langle t_3\rangle"] \arrow[d, dash, "\langle i_2\rangle"'] & E_{4,1} \arrow[d, dash, "\langle i_9\rangle"] \\ E'_{4,1} \arrow[r, "\langle t_4\rangle"'] & F'_{4,3} \end{tikzcd}$$
Y_4

$$\begin{tikzcd} E_{4,1} \arrow[r, "\langle t_3\rangle"] \arrow[d, dash, "\langle i_3\rangle"'] & C_{4,1} \arrow[d, dash, "\langle i_{10}\rangle"] \\ A'_{4,1\text{-}2} = J'_{4,2} \arrow[r, "\langle t_4\rangle"'] & F'_{4,1\text{-}2} \end{tikzcd}$$
Y_5

$$\begin{tikzcd} E_{4,1} \arrow[r, "\langle t_3\rangle"] \arrow[d, dash, "\langle i_5\rangle"'] & C_{4,1} \arrow[d, dash, "\langle i_0\rangle"] \\ E'_{4,1} \arrow[r, "\langle t_4\rangle"'] & F'_{4,3} \end{tikzcd}$$
Y_6

FIG. 5.2.3*a*

Comme précédemment, on réinterprète alors négativement certains de ces hyper-réseaux pour obtenir Y'_2, Y'_3, Y'_4 et Y'_5 (fig. 5.2.3*b*) :

$$\begin{tikzcd} C_{4,1} \arrow[d, dash, "\langle i_5\rangle"'] & E_{4,1} \arrow[l, "\langle t_3\rangle"'] \arrow[d, dash, "\langle i_{10}\rangle"] \\ D'_{4,2\text{-}2} & F'_{4,2\text{-}1} \arrow[l, "\langle t_4\rangle"] \end{tikzcd}$$
Y'_2

$$\begin{tikzcd} F_{4,2\text{-}1} \arrow[d, dash, "\langle i_2\rangle"'] & F_{4,1\text{-}2} \arrow[l, "\langle t_3\rangle"'] \arrow[d, dash, "\langle i_7\rangle"] \\ F'_{4,3} & E'_{4,1} \arrow[l, "\langle t_4\rangle"] \end{tikzcd}$$
Y'_3

$$\begin{tikzcd} E_{4,1} \arrow[d, dash, "\langle i_9\rangle"'] & D_{4,2\text{-}2} \arrow[l, "\langle t_3\rangle"'] \arrow[d, dash, "\langle i_2\rangle"] \\ F'_{4,3} & E'_{4,1} \arrow[l, "\langle t_4\rangle"] \end{tikzcd}$$
Y'_4

$$\begin{tikzcd} C_{4,1} \arrow[d, dash, "\langle i_{10}\rangle"'] & E_{4,1} \arrow[l, "\langle t_3\rangle"'] \arrow[d, dash, "\langle i_3\rangle"] \\ F'_{4,1\text{-}2} & A'_{4,1\text{-}2} = J'_{4,2} \arrow[l, "\langle t_4\rangle"] \end{tikzcd}$$
Y'_5

FIG. 5.2.3*b*

Ceci permet alors de constituer, à un second niveau supérieur, deux « super-hyper-réseaux » X_1 et X_2, isographes tant aux hyper-réseaux du premier niveau supérieur, qu'aux *K*-réseaux du niveau inférieur. (Sur la fig. 5.2.4, qui représente X_1 et X_2, les doubles chevrons entourant les hyper-opérateurs n'ont pour objet que de déceler le niveau plus élevé auquel appartiennent ces réseaux ; il n'y a pas de différence de définition entre ces hyper-opérateurs et ceux rencontrés précédemment.)

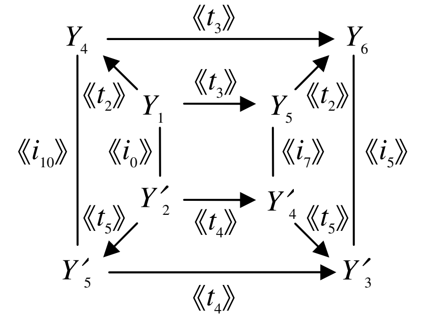
$$
\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[r, "\langle\langle t_3 \rangle\rangle"] \arrow[d, dash, "\langle\langle i_0 \rangle\rangle"'] & Y_5 \arrow[d, dash, "\langle\langle i_7 \rangle\rangle"] \\
Y'_2 \arrow[r, "\langle\langle t_4 \rangle\rangle"'] & Y'_4
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y_4 \arrow[r, "\langle\langle t_3 \rangle\rangle"] \arrow[d, dash, "\langle\langle i_{10} \rangle\rangle"'] & Y_6 \arrow[d, dash, "\langle\langle i_5 \rangle\rangle"] \\
Y'_5 \arrow[r, "\langle\langle t_4 \rangle\rangle"'] & Y'_3
\end{tikzcd}
$$

X_1 $\qquad\qquad$ X_2

FIG. 5.2.4

On introduit de ce fait une structure hiérarchique récursive à trois niveaux, chaque réseau d'un niveau donné étant à son tour plongé dans un réseau du niveau supérieur. Il n'y a pas de limite théorique au nombre des niveaux. Du point de vue analytique, chacun de ces plongements traduit une abstraction croissante. Néanmoins, la démarche est analogue à celle de la théorie analytique schenkérienne dans la hiérarchie des niveaux, les *K*-réseaux s'assimilant à l'avant-plan, et les niveaux supérieurs aux plans moyens jusqu'à l'arrière-plan de la structure fondamentale. Alors que les *K*-réseaux interprètent les c.c.h. (les « accords »), les hyper-réseaux interprètent les progressions entre un ensemble de c.c.h. pertinentes analytiquement (une « progression d'accords »), les éventuels niveaux ultérieurs proposant alors une interprétation globale de plusieurs progressions pour remonter progressivement (dans l'idéal) à une interprétation de l'arrière-plan de la forme elle-même.

5.3 On construit à présent un nouveau réseau à partir du joint des réseaux X_1 et X_2 de la figure 5.2.4, en plaçant X_1 à l'intérieur de X_2 et en le connectant à ce dernier par des hyper-opérateurs (fig. 5.3.1).



$X_1 + X_2$

FIG. 5.3.1

Dans un deuxième temps, on va contracter ce réseau en identifiant deux à deux ses sommets à un nouveau sommet, de façon à ne conserver que quatre sommets Y_1Y_4, Y_5Y_6, $Y'_2Y'_5$ et $Y'_4Y'_3$. On contracte également les couples d'arêtes parallèles, chaque nouveau sommet conservant ainsi un degré (nombre d'arêtes incidentes) de 2. Le réseau résultant, X_3, est un mineur du réseau de la figure 5.3.1 par contraction. Son graphe sous-jacent est un sous-graphe du graphe sous-jacent de ce réseau. Mais il n'en constitue pas lui-même un sous-réseau (les valuations des arêtes diffèrent de celles de $X_1 + X_2$). En effet, lorsqu'on identifie les sommets à un nouveau sommet, on additionne les valeurs de ceux-ci, de sorte que les valeurs n de $\langle i_n\rangle$ pour Y_1Y_4 sont égales aux sommes des valeurs correspondantes pour Y_1 et Y_4, soit $\langle i_{0+2}\rangle = \langle i_2\rangle$ et $\langle i_{7+9}\rangle = \langle i_4\rangle$; Y_1Y_4 a donc pour hyper-opérateurs $\langle i_n\rangle$ le couple $(\langle i_2\rangle, \langle i_4\rangle)$, que l'on simplifie en $\langle i_2, i_4\rangle$. En recommençant l'opération pour les autres sommets de X_3, on obtient pour Y_5Y_6 le couple $\langle i_8, i_{10}\rangle$, pour $Y'_2Y'_5$ le couple $\langle i_3, i_1\rangle$, et pour $Y'_4Y'_3$ le couple $\langle i_{11}, i_9\rangle$. Les valeurs m de $\langle t_m\rangle$ sont également égales aux sommes des valeurs des hyper-réseaux, et donnent pour chaque nouveau sommet de X_3 le couple $\langle t_6, t_8\rangle$, l'orientation des arêtes étant inversée lorsque la paire d'hyper-réseaux concernée est rétrograde.

Chaque sommet de X_3 représente donc un sous-réseau dont les sommets résultent de l'identification deux à deux des sommets des hyper-réseaux. Le sommet Y_1Y_4 a ainsi pour hyper-opérateurs de son sous-réseau le quadruplet $\langle i_2, t_6, i_4, t_8\rangle$, vérifiant l'égalité

$$\begin{aligned}\langle t_6\rangle\langle i_2\rangle\langle t_8^{-1}\rangle\langle i_4\rangle &= \langle i_{2+6}\rangle\langle i_{4+4}\rangle\\ &= \langle i_8\rangle\langle i_8\rangle\\ &= \langle t_{8-8}\rangle\\ &= \langle t_0\rangle.\end{aligned}$$

Le calcul équivalent peut être répété pour les autres sous-réseaux. Tout parcours complet d'un sous-réseau, partant d'un de ses sommets et aboutissant à lui-même, correspond à un cycle dont la valuation totale, égale à la combinaison des valeurs des transpositions et des inversions associées à chaque arête successive, donne l'élément idempotent t_0 du groupe *TI*. Chaque sous-réseau est donc « bien formé » selon les critères de Lewin [4]. La figure 5.3.2 montre les quatre sous-réseaux dont le plongement dans X_3 constitue les sommets de ce dernier :

$$\begin{tikzcd}
\substack{D_{4,2\text{-}2}\\ D_{4,2\text{-}2}} \arrow[r, "\langle t_6\rangle"] \arrow[d, dash, "\langle i_2\rangle"'] & \substack{E_{4,1}\\ E_{4,1}} \arrow[d, dash, "\langle i_4\rangle"] \\
\substack{A'_{4,1\text{-}2}\\ E'_{4,1}} \arrow[r, "\langle t_8\rangle"'] & \substack{F'_{4,1\text{-}2}\\ F'_{4,3}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\substack{E_{4,1}\\ E_{4,1}} \arrow[r, "\langle t_6\rangle"] \arrow[d, dash, "\langle i_8\rangle"'] & \substack{C_{4,1}\\ C_{4,1}} \arrow[d, dash, "\langle i_{10}\rangle"] \\
\substack{A'_{4,1\text{-}2}\\ E'_{4,1}} \arrow[r, "\langle t_8\rangle"'] & \substack{F'_{4,1\text{-}2}\\ F'_{4,3}}
\end{tikzcd}$$

Y_1Y_4 $\qquad$ Y_5Y_6

$$\begin{tikzcd}
\substack{C_{4,1}\\ C_{4,1}} \arrow[d, dash, "\langle i_3\rangle"'] & \substack{E_{4,1}\\ E_{4,1}} \arrow[l, "\langle t_6\rangle"'] \arrow[d, dash, "\langle i_1\rangle"] \\
\substack{D'_{4,2\text{-}2}\\ F'_{4,1\text{-}2}} & \substack{F'_{4,2\text{-}1}\\ A'_{4,1\text{-}2}} \arrow[l, "\langle t_8\rangle"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\substack{E_{4,1}\\ F_{4,2\text{-}1}} \arrow[d, dash, "\langle i_{11}\rangle"'] & \substack{D_{4,2\text{-}2}\\ F_{4,1\text{-}2}} \arrow[l, "\langle t_6\rangle"'] \arrow[d, dash, "\langle i_9\rangle"] \\
\substack{F'_{4,3}\\ F'_{4,3}} & \substack{E'_{4,1}\\ E'_{4,1}} \arrow[l, "\langle t_8\rangle"]
\end{tikzcd}$$

$Y'_2Y'_5$ $\qquad$ $Y'_4Y'_3$

FIG. 5.3.2

Enfin, le réseau X_3, montré par la figure 5.3.3, est isographe à chacun de ses sous-réseaux.

$$\begin{tikzcd}
Y_1Y_4 \arrow[r, "\langle\!\langle t_6\rangle\!\rangle"] \arrow[d, dash, "\langle\!\langle i_{10}\rangle\!\rangle"'] & Y_5Y_6 \arrow[d, dash, "\langle\!\langle i_0\rangle\!\rangle"] \\
Y'_2Y'_5 \arrow[r, "\langle\!\langle t_8\rangle\!\rangle"'] & Y'_4Y'_3
\end{tikzcd}$$

X_3

FIG. 5.3.3

Mais il existe également un homomorphisme (non bijectif) entre X_3 et les « super-hyper-réseaux » X_1 et X_2, qui associe à chaque valeur m des hyper-opérateurs $\langle\!\langle t_m\rangle\!\rangle$ de X_1 et X_2, la valeur $2m$ dans X_3. Cet homorphisme fait ainsi correspondre $\langle\!\langle t_3\rangle\!\rangle$ à $2\langle\!\langle t_3\rangle\!\rangle = \langle\!\langle t_6\rangle\!\rangle$ d'une part, et $\langle\!\langle t_4\rangle\!\rangle$ à $2\langle\!\langle t_4\rangle\!\rangle = \langle\!\langle t_8\rangle\!\rangle$ de l'autre. À l'inverse, les particularités de la table de multiplication modulo 12 font que, à chaque valeur m paire dans X_3, la division $\frac{m}{2}$ donne pour X_1 et X_2 deux résultats distincts, l'un dans {0, 1, 2, 3, 4, 5}, l'autre dans le complémentaire {6, 7, 8, 9, 10, 11}, avec une différence de 6 entre les deux valeurs. Par conséquent, si la contraction du réseau $X_1 + X_2$ de la figure 5.3.1 donne X_3, ce dernier peut lui-même être la contraction de plusieurs paires de réseaux isographes différents, nommément ceux ayant pour hyper-opérateurs $\langle\!\langle t_n\rangle\!\rangle$ les couples $\langle\!\langle t_3, t_4\rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle t_3, t_{10}\rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle t_9, t_4\rangle\!\rangle$ et $\langle\!\langle t_9, t_{10}\rangle\!\rangle$.

5.4 Il est évident que le réseau X_3 n'a aucun caractère directement perceptible du point de vue auditif. Il s'agit d'un schéma abstrait, destiné à l'appréhension conceptuelle de certains rapports actifs dans l'op. 19 n° 4. Comme tel, il ne propose pas une « analyse » de cette pièce au sens d'un découpage descriptif. Il ne rend d'ailleurs pas même compte de la pièce dans son entier, mais de quelques uns de ses aspects distinctifs sur le plan intervallaire. Il suggère un arrière-plan réduisant à un schéma élémentaire unitaire une diversité d'éléments analogues tantôt placés en exergue du point de vue perceptif, tantôt secondaires, mais que l'oreille peut apprendre à reconnaître et à suivre dans leurs transformations successives.

Un tel schéma répond à une tendance fondamentale de l'art, qui recherche la cohérence entre le détail et la structure d'ensemble, mais aussi de la pensée en général, qui recherche des formes de régularité et des classes d'équivalence pour toutes sortes d'objets. Il s'agit bien sûr de la poursuite d'une satisfaction intellectuelle, mais aussi d'un pari que la musique, artéfact et non produit de la nature, est susceptible — au-delà de l'arbitraire apparent du compositeur — d'une telle cohérence logique. Ce plaisir intellectuel n'ôte rien au plaisir de l'écoute physique. Néanmoins, les *K*-réseaux n'en montrent pas moins des relations intervallaires audibles, invitant à orienter son audition dans un sens particulier ou traduisant au contraire une façon particulière d'écouter. Au niveau supérieur, ils proposent à l'oreille un parcours de la pièce, qui, s'il ne représente évidemment qu'une manière de l'entendre parmi d'autres, permet également de focaliser l'attention dans un sens déterminé. Le reste est une affaire de relations au sein du matériau, dévoilant par là même les propriétés de ce matériau.

Notons que la musique, et une œuvre comme celle-ci en particulier, n'est pas forcément destinée qu'à une écoute passive, dans le temps de sa découverte selon un dévoilement linéaire unidirectionnel. D'une part, nous doutons de la réalité psychologique d'une telle écoute linéaire. D'autre part, si la musique s'écoute, elle se réécoute également, et cela aussi bien avec les oreilles de l'esprit qu'avec celles du corps. Nous voulons dire par là que la musique peut également être faite pour être lue, au clavier, ou même à la table, à la façon du théâtre d'*Un spectacle dans un fauteuil* de Musset. Il n'y a pas de modalités ou de conditions normales de l' « écoute » qui priment sur les autres en toutes circonstances. On peut dire ainsi que des pièces de piano sont plus appropriées au piano qu'au disque. Ce qu'on perçoit de relations musicales après une lecture à l'instrument est certainement plus riche que ce qu'on peut en percevoir après la simple audition d'un enregistrement, et aussi d'une nature différente. Il ne s'agit pas là d'une inférence quant à une possible infériorité de l'ouïe : mais de l'idée que l'analyse ne peut se faire que dans une réflexion, qui passe par un retour sur l'objet et le plus souvent sa fixation dans l'écriture, donc qui ne peut avoir lieu dans la fuite temporelle de celui-ci, ni (et c'est un point essentiel) sans le support d'une théorie.

6. Autres aspects analytiques

6.1 Quoique cette étude ait principalement pour objet l'utilisation des *K*-réseaux, il paraît utile de mentionner ici d'autres observations d'ordre analytique.

Soit h et g deux classes de hauteurs avec $g = t_6(h)$. D'après [4], on définit sur l'ensemble des classes de hauteurs une transformation w^h (« en coin s'enfonçant vers h », ou « *wedging-to-h* ») telle que, a appartenant à cet ensemble :

$$w^h(a) = \begin{cases} h & : \quad a = h \\ g & : \quad a = g \\ t_1(a) & : \quad g < a < h \\ t_{11}(a) & : \quad h < a < g \end{cases}$$

La transformation w^h associe h et g à eux-mêmes. Lorsque a étant différent de g et de h, il se trouve compris entre g et h, il se rapproche de h en montant d'un demi-ton ; lorsqu'il est compris entre h et g, il se rapproche de h en descendant d'un demi-ton.

Considérons, à une permutation $\begin{bmatrix} \text{C}\sharp & \text{E} \\ \text{E} & \text{C}\sharp \end{bmatrix}$ près, le contenu de la main droite aux mesures 3–4, ainsi que la levée du dernier C♯ de la mesure 2. À chaque hauteur est attribuée un numéro de position de 1 à 12, représentant son ordre d'apparition dans la séquence. On obtient ainsi des couples (a, n), où a est une hauteur et $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ un ordinal (fig. 6.1.1*a*) :

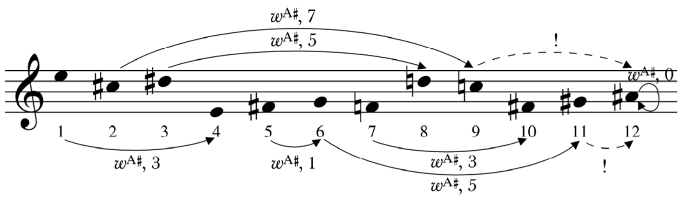


FIG. 6.1.1*a*

On définit sur l'ensemble de ces couples une transformation $w^{\mathrm{A}\sharp}, p$ qui à tout (a, n) associe le couple $(w^{\mathrm{A}\sharp}(a),\ n+p)$, dont la première composante est l'image de a par la transformation $w^{\mathrm{A}\sharp}$ et la deuxième composante sa position d'ordre, p étant le nombre de successeurs qu'il faut compter pour atteindre $w^{\mathrm{A}\sharp}(a)$.

La première et la dernière hauteurs de la séquence, E_5 et $\mathrm{A}\sharp_4$, appartiennent respectivement aux deux seules classes que $w^{\mathrm{A}\sharp}$ associe à elles-mêmes. Aucune autre note n'est supérieure à E_5 dans ce passage, et aucune note n'est non plus inférieure à E_4, son image ici par $w^{\mathrm{A}\sharp}$, 3. Il est significatif du point de vue de la transformation $w^{\mathrm{A}\sharp}$ que ces trois hauteurs encadrent la séquence tant du point de vue de son déroulement que de son ambitus. Une version simplifiée de la figure 6.1.1*a* est donnée par la figure 6.1.1*b*. On remarque sa forme de coin (« *wedge* ») caractéristique, qui donne son nom à la transformation. Toutes les notes comprises dans l'intervalle entre E_4 et $\mathrm{A}\sharp_4$ d'une part, et $\mathrm{A}\sharp_4$ et E_5 d'autre part, autres que les bornes de ces intervalles, sont disposées sur les pentes des côtés longs du coin. La valeur n de l'inversion associant deux hauteurs dans la moitié supérieure et inférieure du coin et ayant la même position d'ordre dans l'enfoncement est constante avec $n = 8$.

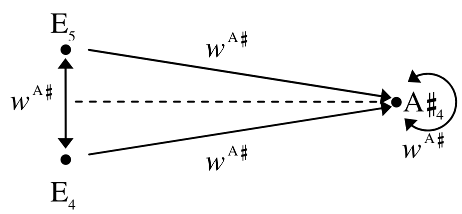


FIG. 6.1.1*b*

On divise la séquence musicale en trois sous-ensembles ordonnés X_1^6, X_6^{11} et X_{12}^{12} (où X_a^b désigne un sous-ensemble dont le plus petit élément a la position d'ordre a et le plus grand élément la position d'ordre b). Soit, toujours d'après [4], $\mathrm{inj}(X_a^b,\ X_{a'}^{b'})(w^h, p)$ la fonction retournant le nombre d'éléments de X_a^b ayant une image dans $X_{a'}^{b'}$ par la transformation w^h, p. Le découpage intuitivement proposé de la séquence est confirmé par l'identité des trois valeurs inj(X^6_1, X^6_1)($w^{A\sharp}$, p) = 2, inj(X^{11}_6, X^{11}_6)($w^{A\sharp}$, p) = 2 et inj(X^6_1, X^{11}_6)($w^{A\sharp}$, p) = 2. En outre, la somme des p pour les éléments de la moitié inférieure du coin qui sont l'image par $w^{A\sharp}$ d'une hauteur quelconque de la séquence est égale à la somme des p pour les éléments de la moitié supérieure, ces deux sommes étant égales à 12. Ce ne serait pas le cas si l'on permutait l'ordre d'apparition de certaines notes, en attribuant par exemple à F la position d'ordre 5, à F♯ et à G les positions d'ordre 6 et 7, puis en continuant la séquence telle quelle. La somme des p pour la moitié inférieure du coin ne donnerait alors que 9. Le plus grand espacement des hauteurs reliées par $w^{A\sharp}$ de cette façon dans la moitié supérieure compense dans le déroulement leur nombre plus petit que dans la partie inférieure.

En considérant inj(X^6_1, X^{12}_{12})($w^{A\sharp}$, p) et inj(X^{11}_6, X^{12}_{12})($w^{A\sharp}$, p), on observe que leur valeur est égale dans les deux cas à 0. Aucun élément des deux premiers sous-ensembles n'est relié à l'unique élément du troisième par $w^{A\sharp}$. En effet, la séquence ne contient pas les hauteurs A_4 et B_4, dont l'image par $w^{A\sharp}$ donne $A\sharp_4$. C_4 est donc relié à $A\sharp_4$ par un ton entier descendant, et $B\flat_4$ par un ton entier ascendant, rompant la continuité semitonale de l'enfoncement du coin. (Ces mouvements sont représentés par des flèches en pointillé sur la fig. 6.1.1*a*.) Cette singularité à une signification compositionnelle puisqu'elle correspond à la disparition (temporaire) des cellules intervallaires de seconde et de tierce mineures (sect. 2.2 et fig. 2.2.1), qui confère à $A\sharp_4$ une qualité suspensive et inattendue comme terminaison de la séquence, alors que l'enfoncement complet du coin, passant par A_4 et B_4, lui aurait prêté une qualité conclusive.

6.2 Le réseau de la figure 6.2.1 est constitué de sous-réseaux adjacents interprétant chacun un tricorde de la classe 3–2, tel que chaque sous-réseau a une arête commune avec le sous-réseau qui lui est contigu. On utilise le graphe sous-jacent à ce réseau comme un tablier de jeu sur lequel on enregistre la succession des mouvements d'une case à l'autre, en suivant l'enchaînement des classes de hauteurs aux mêmes mesures 3–4 de la pièce de Schœnberg. Chaque case correspond donc à un sommet, et les mouvements forment des arêtes définissant un graphe orienté dont le graphe (non-orienté) sous-jacent est un sous-graphe du graphe sous-jacent au réseau.

Tous les mouvements se font entre cases voisines en partant de E, maintenant la permutation initiale de la figure 6.1.1*a*. Chaque « coup » fait alterner un mouvement le long d'une arête t_m (avec $m = 2$) ou i_n respectivement, les arêtes pouvant être parcourues en sens inverse de leur orientation. On remarque que toutes les valeurs de n sont ici impaires. Seul le neuvième coup saute directement de C à F♯, sans passer par D♯. Le dernier coup aurait normalement dû amener A, mais la séquence est définitivement rompue par la substitution de t_2 à i_5, conduisant à A♯.

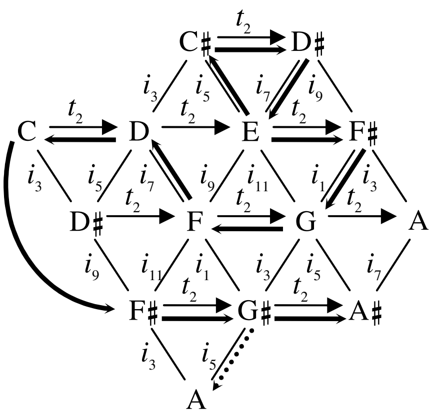


FIG. 6.2.1

Il est intéressant de constater que tout le passage s'interprète par une série de mouvements impliquant chacun un tricorde de la classe 3–2, alors même que seule la première moitié du passage est composée de tricordes de cette classe (voir fig. 2.2.1). Le saut de C à F♯ se décompose en un enchaînement de deux mouvements, combinant deux tricordes au lieu d'un seul.

En observant la figure 6.2.1, on remarque que la succession horizontale des arêtes i_n produit une augmentation régulière des valeurs de n par pas de 2. Cette observation est triviale dans la mesure où tous les sous-réseaux sont isographes avec $m = 2$ pour chaque arête t_m. Mais elle signifie que chaque sous-réseau peut être plongé dans un cycle de Perle-Lansky pertinent selon l'alignement auquel il appartient. (Nous renvoyons le lecteur intéressé à [7] pour une définition de ces cycles et l'étude détaillée de leurs rapports avec les K-réseaux.) Il suffit de deux cycles, dont le deuxième est obtenu en faisant coulisser la rangée supérieure de deux crans vers la gauche alors que la rangée inférieure reste fixe, pour rendre compte de ce passage, comme le montre la figure 6.2.2*a*.

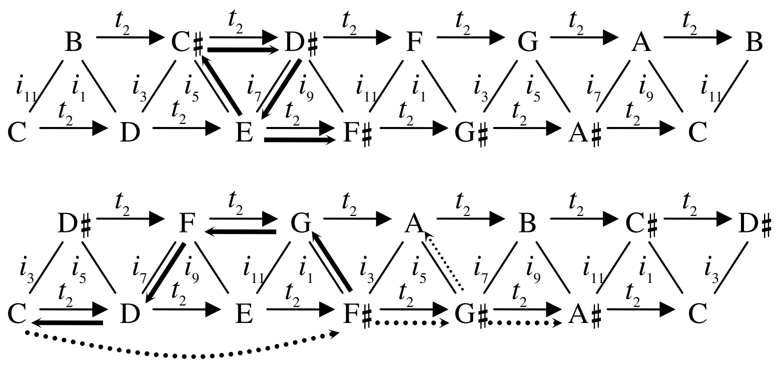


FIG. 6.2.2*a*

Si ce schéma est satisfaisant dans l'hypothèse où le dernier coup mène de G♯ à A, il l'est moins lorsqu'il mène à A♯, les mouvements sur la seule rangée inférieure d'un cycle, qui n'impliquent pas d'échange avec la rangée supérieure, n'étant guère caractéristiques. Ceci, bien évidemment, marque la rupture qui s'opère à ce point du déroulement. Il y a donc avantage à reconsidérer la situation en imaginant un troisième cycle, montré par la figure 6.2.2*b*, dans lequel sont plongés des sous-réseaux isographes à ceux de la figure 6.2.1, mais décrivant une variété de c.c.h. de cardinal 2 ou 3 qui ne comprend toutefois pas le tricorde 3–2. Tous ces sous-réseaux sont isographes les uns aux autres via les seuls automorphismes $\langle i_0 \rangle$ et $\langle t_0 \rangle$. Le cycle lui-même déroule une nouvelle rangée supérieure, obtenue par rétrogradation et décalage de 3 crans (à gauche ou à droite) de la rangée inférieure, laquelle reste identique à celle des cycles de la figure 6.2.2*a*.

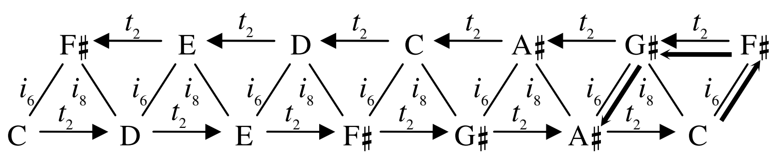


FIG. 6.2.2*b*

6.3 La figure 6.3.1 reprend une nouvelle fois le même passage tel qu'il apparaît à la figure 6.1.1*a*, en mesurant les déplacements d'une note à la suivante à l'intérieur de chaque moitié, supérieure ou inférieure, du coin. Les déplacements ascendants sont mesurés par une valeur positive en nombre de demi-tons, les déplacements descendants par une valeur négative. Lorsque la succession d'une note à une autre nécessite de franchir l'axe de symétrie horizontale traversant A♯$_4$, ou pour atteindre cette dernière hauteur, le déplacement est compris comme une inversion.

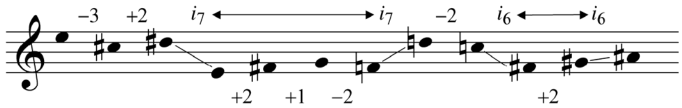


FIG. 6.3.1

La somme des déplacements ascendants et descendants de la moitié supérieure est égale à l'opposé de la somme correspondante pour la partie inférieure, donnant −3 et 3 respectivement. Les déplacements au sein des deux moitiés s'équilibrent donc, de même que les inversions i_7 et i_6 au passage d'une moitié à l'autre. Enfin, lorsqu'on calcule les sommes des déplacements ascendants d'une part et descendants d'autre part pour les deux moitiés réunies, on obtient des résultats identiques en valeur absolue mais de signe opposé, égaux respectivement à 7 et −7, montrant un équilibre similaire.

Une telle particularité de conduite des voix se retrouve à d'autres moments de la pièce. Ainsi, entre les deux premières c.c.h. de la pièce (mes. 1–2), la somme des déplacements des deux parties supérieures, égale à 2, est compensée par la somme de ceux des deux parties inférieures, égale à −2 (fig. 6.3.2) :

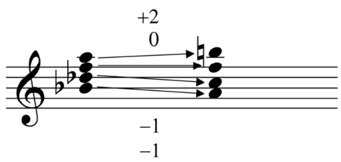


FIG. 6.3.2

Ceci pourrait bien entendu n'être que fortuit. Mais la mesure 6 présente une illustration intéressante de ce principe. Alors que les trois déplacements ascendants de la main gauche se font de manière simultanée, avec une somme égale à 6, la main droite effectue d'abord à la partie supérieure un déplacement descendant de −5 vers la deuxième c.c.h. Celui-ci est alors complété à la partie intermédiaire par un déplacement de −1 vers la troisième c.c.h. de la mesure, la somme de ces deux déplacements étant égale à −6 (fig. 6.3.3) :

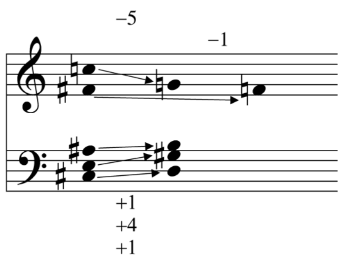


FIG. 6.3.3

Enfin, à la mesure 10, la tierce mineure (B♭, D♭) s'échange avec (D♯, F♯) par un double déplacement ascendant de 5 demi-tons, coïncidant avec l'échange de la tierce majeure (F, A) avec (C, E) par un double déplacement descendant de 5 demi-tons également (fig. 6.3.4), soit des sommes de déplacements respectives de 10 et −10. Bien que très simples, ces phénomènes sont néanmoins intéressants pour la façon dont ils éclairent les principes de conduite des voix suivis par Schœnberg dans cette pièce. Leur fréquence ne permet en outre pas de les considérer comme accidentels.

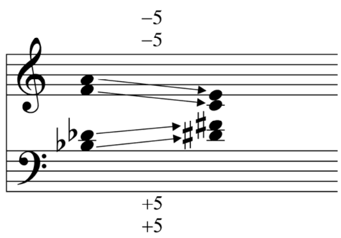


FIG. 6.3.4

7. La « cadence »

7.1 Les trois dernières mesures de la pièce constituent une amplification du motif μ_B (cf. fig. 2.1.2). Leur rôle est comparable à celui d'une cadence, à la fois du point de vue mélodique et harmonique.

La figure mélodique reprend en la dupliquant la cellule (B♭$_4$, D♭$_5$, C$_5$) de μ_B, consistant en une tierce mineure ascendante suivie d'un demi-ton descendant. Cette cellule est d'abord inversée, la tierce étant ensuite renversée, pour donner une sixte majeure ascendante suivie d'un demi-ton, également ascendant, (G♯$_3$, F$_4$, F♯$_4$). La deuxième partie de la figure débute comme une inversion de la cellule précédente, par une sixte majeure descendante. Mais au lieu qu'elle soit suivie par un demi-ton descendant, celui-ci reste ascendant, et la cellule résultante est (G$_4$, B♭$_3$, B♮$_3$). Ce type de symétrie complexe, mêlant des caractères de translation (transposition) et de réflexion (inversion) est typique de la technique de Schœnberg. L'inversion procure à la figure sa qualité conclusive, tandis que la conservation de la direction du mouvement de demi-ton rappelle un pas de sensible ascendant. L'évocation de la tonalité est accusée par la relation de quinte descendante entre les deux successions semitonales F–F♯ et B♭–B, soit le mouvement du quatrième degré haussé vers la dominante, suivi de celui de la sensible vers la tonique.

La figure 7.1.1 *a*, *b*, *c*, *d* montre respectivement les cellules mélodiques tricordales des motifs μ_B (mes. 1–2), μ_H (mes. 8), obtenue après inversion et permutation de la précédente, et enfin μ_K (mes. 11) et μ_L (mes. 12–13), qui viennent d'être discutées. Toutes les c.c.h. sous-jacentes à ces cellules appartiennent à la classe 3–2, sauf la dernière, qui appartient à la classe 3–3 :

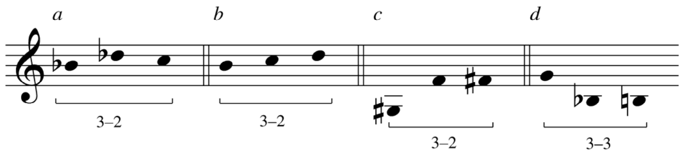


FIG. 7.1.1

Le type de réseau ainsi que les hyper-opérateurs utilisés dans la section 3.2 ci-dessus vont à nouveau s'avérer utiles pour interpréter ces quatre c.c.h. et les relations qu'elles entretiennent entre elles. La figure 7.1.2*a* montre ainsi les *K*-réseaux $B_{4,1\text{-}1}$, $H_{4,1\text{-}2}$, $K_{4,1}$ et $L_{4,1}$ décrivant chacune de ces c.c.h., et la figure 7.1.2*b* l'hyper-réseau qui relie ces *K*-réseaux au niveau supérieur :

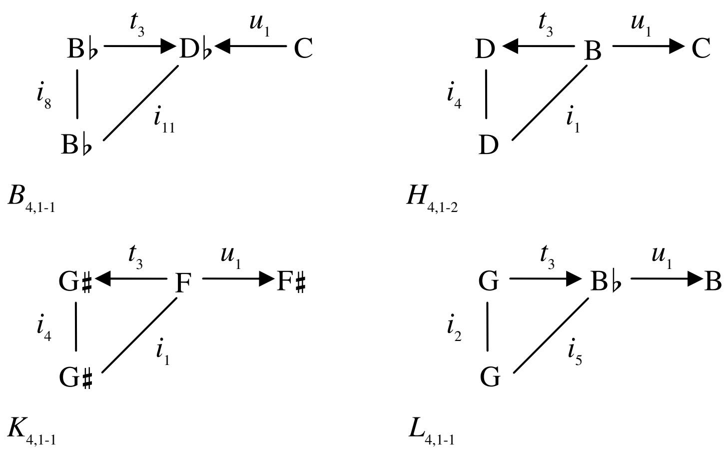


FIG. 7.1.2*a*

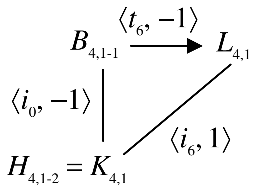


FIG. 7.1.2*b*

Tous ces réseaux sont étroitement liés, avec $H_{4,1\text{-}2}$ et $K_{4,1}$ fortement isographes, alors que $B_{4,1\text{-}1}$ est négativement isographe via $\langle i_0, -1\rangle$ à ces deux réseaux.

Ce mode d'interprétation met en avant la relation d'inversion entre les premières et deuxièmes notes de chacune des cellules mélodiques des mesures 11 et 12–13, avec G♯ = i_3(G) et B♭ = i_3(F). Un autre mode d'interprétation permettra de privilégier au contraire la transposition B♭ = t_5(F) et B = t_5(F♯) entre les deuxièmes et troisièmes notes des cellules. C'est ce mode qui est représenté par les *K*-réseaux de la figure 7.1.3*a* et l'hyper-réseau de la figure 7.1.3*b*, où l'on retrouve le même lien étroit entre $H_{4,1\text{-}3}$, $K_{4,1}$ et $B_{4,1\text{-}2}$:

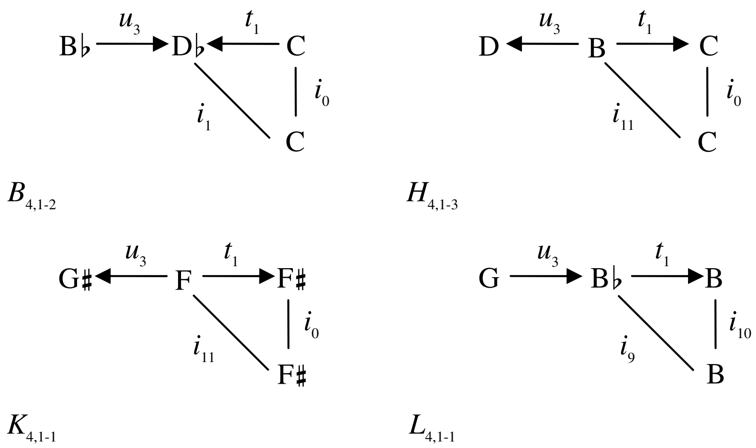


FIG. 7.1.3*a*

$$\begin{tikzcd}
H_{4,1\text{-}3} = K_{4,1\text{-}1} \arrow[r, "{\langle t_{10}, -1\rangle}"] \arrow[d, dash, "{\langle i_{0}, -1\rangle}"'] & L_{4,1\text{-}1} \arrow[dl, dash, "{\langle i_{10}, 1\rangle}"] \\
B_{4,1\text{-}2} &
\end{tikzcd}$$

FIG. 7.1.3*b*

Cette multiplicité des modes d'interprétation est inhérente à l'application des *K*-réseaux à l'analyse musicale. C'est à l'analyste qu'il appartient d'effectuer, de manière heuristique, les choix les plus pertinents. Il est en effet normal, pour une œuvre d'art, de se prêter à des interprétations différentes, dont aucune ne l'épuise jamais. Ce n'est pas en raison d'un défaut de l'analyse que celle-ci puisse mettre à jour des ambiguïtés dans l'œuvre d'art, contrairement à l'étude de la nature par les sciences. L'ambiguïté est dans l'essence même de l'art : c'est une de ses spécificités. Il ne saurait y avoir une seule manière d'entendre un morceau de musique, et selon la perspective qu'on adopte, plusieurs interprétations sont généralement possibles, même avec des outils d'analyse identiques, et avec des exigences de cohérence comparables.

7.2 L'accord de l'avant-dernière mesure se décompose en un tricorde {F, B♭, B} de la classe 3–5 et d'une paire {G♯, A} vérifiant la relation R_h de Forte (similarité quant aux classes de hauteurs) [2]. Ceci signifie que le cardinal des deux c.c.h. diffère d'une unité et qu'il existe une transposition de ces c.c.h. telle que l'une forme une sous-collection de l'autre.

Dans une première interprétation, on considérera un D♯ sous-entendu qui, réuni à la paire {G♯, A}, forme un tricorde appartenant également à la classe 3–5. On interprète alors ces deux tricordes par des *K*-réseaux $L_{4,2}$ et $L_{4,3}$, ainsi que $B_{4,2\text{-}1}$ et $H_{4,2}$ pour les deux autres tricordes de la classe 3–5 aux mesures 2 et 8 (fig. 7.2.1*a*) :

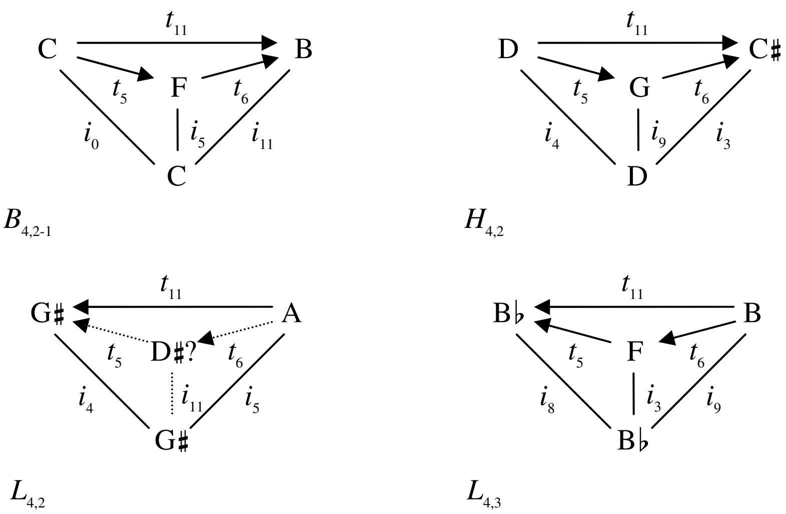


FIG. 7.2.1*a*

La constitution de l'hyper-réseau se fait alors aisément, avec des hyper-opérateurs $\langle t_4\rangle$ identiques entre $B_{4,2\text{-}1}$ et $H_{4,2}$, ainsi que $L_{4,2}$ et $L_{4,3}$ (fig. 7.2.1*b*).

$$\begin{tikzcd}
B_{4,2\text{-}1} \arrow[r, "\langle t_4\rangle"] \arrow[d, dash, "\langle i_4\rangle"'] & H_{4,2} \arrow[d, dash, "\langle i_0\rangle"] \\
L_{4,2} \arrow[r, "\langle t_4\rangle"'] & L_{4,3}
\end{tikzcd}$$

FIG. 7.2.1*b*

Du fait de leur placement en plusieurs points stratégiques, les tricordes de la classe 3–5 constituent l'une des sonorités de référence de la pièce. Ceci justifie la restitution de D♯ dans la partie inférieure du dernier accord, à la mesure 12 (Schœnberg ayant pu l'omettre pour conserver un espacement suffisamment large dans l'extrême grave). Mais il convient également d'entendre les deux tricordes de la classe 3–9 formant l'accord de la mesure précédente en relation avec cette sonorité. Il suffit en effet d'un déplacement minimal d'un demi-ton dans une seule des voix, pour transformer un tricorde de la classe 3–9 en tricorde de la classe 3–5 : la figure 7.2.2 montre les deux possibilités de réalisation de ce déplacement pour le tricorde {E, F♯, B}.

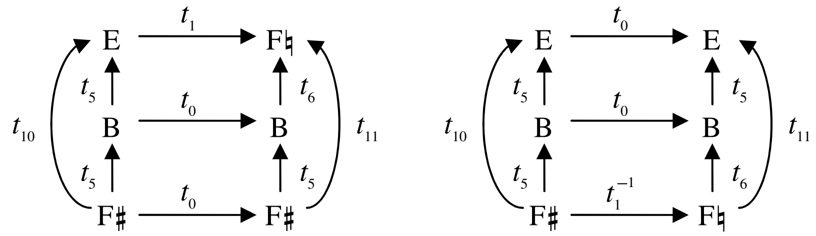


FIG. 7.2.2

Cette observation est intéressante dans notre perspective d'une conception « cadentielle » de ces mesures. Le premier tricorde est alors perçu comme « dissonant » par rapport au deuxième, en ce qu'il lui ressemble suffisamment pour l'évoquer fortement, sans lui être tout à fait identique. Il appelle donc une forme de « résolution » de sa sonorité vers celle du second. C'est ce qu'accomplit la mesure suivante, en combinant ce geste avec une transposition. La symétrie de la disposition des deux tricordes de la mesure 11 (interprétables par des *K*-réseaux négativement isographes via $\langle i_0 \rangle$, cf. sect. 4.1 et fig. 4.1.3*b*) invite à percevoir l'accord final comme également constitué de deux tricordes de classe identique.

7.3 Mais l'omission supposée de D♯ dans l'accord final peut également avoir pour but d'entretenir une ambiguïté. Outre la classe 3–5 [0, 1, 6], la classe 3–2 [0, 1, 3] est abondamment représentée dans la pièce. La mesure 8 superposait déjà deux tricordes appartenant à ces classes, également interprétables par des *K*-réseaux négativement isographes via $\langle i_0 \rangle$ (cf. sect. 4.1 et fig. 4.1.3*a*). On peut donc percevoir l'accord de la mesure 12 comme une réplique de cette combinaison, d'autant qu'elle ne nécessite aucune restitution de hauteur sous-entendue puisqu'il suffit de considérer les trois notes les plus graves de l'accord pour former un tricorde {G♯, A, B} appartenant à la classe 3–2.

On interprète au sein d'un même *K*-réseau le tricorde {E, F♯, B} ∈ 3–9 (mes. 11, m.d.) ainsi que le tricorde {F, B, B♭} ∈ 3–5 (mes. 12, m.d.). La classe de hauteurs B étant commune à ces deux tricordes, on se contente d'un réseau à cinq sommets. Ceci permet de conserver l'ambiguïté de la paire {G♯, A} qui, réunie au tricorde {C, D, G} ∈ 3–9 (mes. 11, m.g.), peut également être interprétée par un *K*-réseau d'ordre 5 sans faire l'hypothèse, comme ci-dessus, d'un D♯ sous-entendu. La figure 7.3.1 montre ces deux *K*-réseaux, $L_{5,1}$ et $L_{5,2}$. Ces réseaux sont fortement isographes, montrant ainsi une forme de lien étroit entre les événements de la main gauche et ceux de la main droite lors de cette cadence terminale.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "t_7"] \arrow[d, dash, "i_{10}"'] & A \arrow[d, dash, "i_9"'] \arrow[dr, dash, "i_4"] & \\
G\sharp \arrow[r, "t_4"'] & C \arrow[r, "t_5"'] & G
\end{tikzcd}$$

$L_{5,1}$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "t_7"] \arrow[d, dash, "i_{10}"'] & B \arrow[d, dash, "i_9"'] \arrow[dr, dash, "i_4"] & \\
F\sharp \arrow[r, "t_4"'] & B\flat \arrow[r, "t_5"'] & F
\end{tikzcd}$$

$L_{5,2}$

FIG. 7.3.1

Considérons pour finir les réseaux $B_{3,1}$, $B_{3,2}$, $H_{3,1\text{-}1}$, $H_{3,2\text{-}1}$, $L_{3,1}$ et $L_{3,2}$ décrivant les tricordes des classes 3–2 et 3–5 aux mesures 2, 8 et 12 respectivement. Cette dernière interprétation privilégie donc la deuxième lecture possible de l'accord final, comme superposant deux tricordes appartenant à chacune de ces classes respectivement. On remarque que $B_{3,1}$ est négativement isographe à $L_{3,2}$ via $\langle i_0 \rangle$, tout comme $B_{3,2}$ à $L_{3,1}$, et $H_{3,1\text{-}1}$ à $H_{3,2\text{-}1}$ (fig. 7.3.2*a*) :

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, dash, "i_8"'] & C \arrow[l, "t_{11}"'] \arrow[d, dash, "i_9"] \\
 & A
\end{tikzcd}$$

$B_{3,1}$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "t_{11}"] \arrow[dr, dash, "i_5"'] & B \arrow[d, dash, "i_4"] \\
 & F
\end{tikzcd}$$

$B_{3,2}$

$$\begin{tikzcd}
F\sharp \arrow[dr, dash, "i_3"'] & G \arrow[l, "t_{11}"'] \arrow[d, dash, "i_4"] \\
 & A
\end{tikzcd}$$

$H_{3,1\text{-}1}$

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "t_{11}"] \arrow[dr, dash, "i_9"'] & C\sharp \arrow[d, dash, "i_8"] \\
 & G
\end{tikzcd}$$

$H_{3,2\text{-}1}$

$$\begin{tikzcd}
G\sharp \arrow[dr, dash, "i_7"'] & A \arrow[l, "t_{11}"'] \arrow[d, dash, "i_8"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

$L_{3,1}$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "t_{11}"] \arrow[dr, dash, "i_4"'] & B\flat \arrow[d, dash, "i_3"] \\
 & F
\end{tikzcd}$$

$L_{3,2}$

FIG. 7.3.2*a*

De même, les deux hyper-réseaux où ces *K*-réseaux sont plongés au niveau supérieur sont négativement isographes via $\langle i_0 \rangle$. Ils sont de surcroît, pour l'un, fortement isographe au rétrograde de $L_{3,1}$, pour l'autre, fortement isographe au rétrograde de $B_{3,2}$. Il s'agit là d'un exemple quasi parfait de récursivité entre le niveau des *K*-réseaux et celui des hyper-réseaux.

FIG. 7.3.2*b*

Malgré l'attrait d'une telle solution, l'analyse ne peut se focaliser exclusivement sur la recherche d'hyper-réseaux de ce type. L'élégance mathématique, si elle engendre sa propre satisfaction esthétique, n'est pas en effet toujours compatible avec l'efficacité analytique, qui dépend du matériau qu'elle prend pour objet. On recherche dans tous les cas des modèles reproductibles, des formes de régularité et de cohérence : si, de surcroît, on rencontre l'élégance, c'est une chance supplémentaire.

Bibliographie :

[1] Reinhard DIESTEL (2005), *Graph Theory*, Springer Verlag, Heidelberg–New York.

[2] Allen FORTE (1973), *The Structure of Atonal Music*, Yale University Press, New Haven (USA).

[3] Xavier HASCHER (2002), Liszt et les sources de la notion d'agrégat, *Analyse musicale* 43, 48–56.

[4] David LEWIN (1987), *Generalized Musical Intervals and Transformations*, Harvard University Press, Cambridge (USA).

[5] David LEWIN (1990), Klumpenhouwer Networks and Some Isographies that Involve Them, *Music Theory Spectrum* 12.1, 83–120.

[6] David LEWIN (1994), A Tutorial on Klumpenhouwer Networks, Using the Chorale in Schoenberg's Opus 11, No. 2, *Journal of Music Theory* 38.1, 79–101.

[7] David LEWIN (2002), Thoughts on Klumpenhouwer Networks and Perle-Lansky Cycles, *Music Theory Spectrum* 24.2, 196–230.

[8] Arnold SCHOENBERG (1913), *Sechs kleine Klavierstücke*, Universal Edition, Vienne (UE 5069).

Xavier HASCHER
Université Marc-Bloch (Strasbourg-II)
xavier.hascher@umb.u-strasbg.fr