

Chapitre 2

Espace II. Algèbres d'opérateurs et Géométrie non commutative.

Dans le formalisme de la mécanique quantique, les observables ne sont plus des grandeurs ou fonctions numériques, que l'on peut multiplier entre elles dans un ordre indifférent, mais des opérateurs, que l'on peut composer entre eux suivant un ordre qui n'est plus indifférent. Il en est de même dans la géométrie non commutative initiée par Alain Connes dans les années 1980, qui s'en inspire : au lieu du double mouvement de la géométrie des topos

espace des points \rightsquigarrow site des ouverts \rightsquigarrow topos des faisceaux,

on a le double mouvement

espace des points \rightsquigarrow algèbres de fonctions \rightsquigarrow algèbres d'opérateurs¹.

La théorie des algèbres d'opérateurs (*algèbres de von Neumann*, de leur nom technique plus précis) peut être vue sous deux aspects complémentaires : comme étant obtenue par passage à la dimension infinie en Algèbre linéaire, ou par passage au non commutatif en Théorie de la mesure.

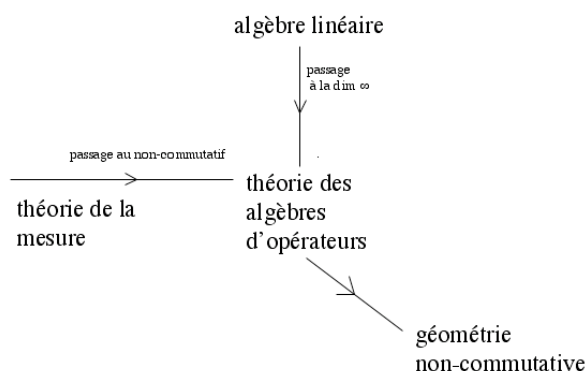


FIG. 2.1 – Leitfaden

Comme au chapitre précédent, nous allons commencer par faire sonner puis varier quelques thèmes (opérateurs linéaires, point de vue fonctionnel sur les espaces, spectres...), avant de les tresser ensemble.

¹la « morale de l'histoire » se trouve aux paragraphes 2.3.4 et 2.3.5.

2.1 Associativité et commutativité.

Les Mathématiques sont un « monde associatif ». Nous entendons par là que la plupart des lois de composition auxquelles on a affaire en Mathématiques sont associatives², ce qui veut dire ceci : supposons qu'on ait des transformations $f, g, h \dots$ et un moyen de les composer (gf représentant la transformation composée de f suivie de g), alors on a la relation $(hg)f = h(gf)$.

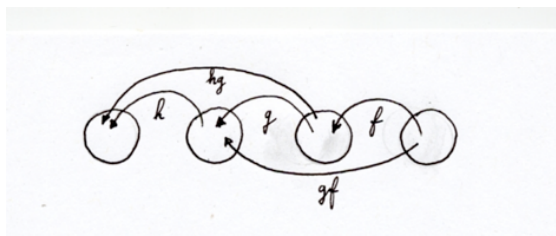


FIG. 2.2 –

Par contre les Mathématiques sont loin d'être un « monde commutatif » : si f et g sont composables dans les deux sens, en général gf n'est pas égal à fg . On dit que f commute à g lorsque $gf = fg$.

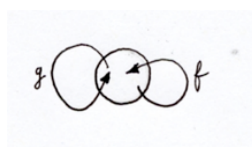


FIG. 2.3 –

Autrement dit, la commutativité est la possibilité de changer l'ordre des opérations, tandis que l'associativité est la possibilité de changer le groupement des opérations, sans affecter le résultat.

La non-commutativité est du reste un phénomène fort commun : si l'on demande son chemin et que l'on s'avise de permuter l'ordre des déplacements indiqués, il y a peu de chance que l'on parvienne à destination... Gardons-nous donc de voir du « quantique » dans tout ce qui est non commutatif !

Écartons encore un malentendu à propos du terme « non commutatif » : il faut prendre garde qu'en Mathématiques, ce terme est bien plus souvent employé dans le sens de « non nécessairement commutatif » (et donc représente une généralisation du cas commutatif) que comme négation de « commutatif ».

Commençons à présent notre exploration en partant du haut du Leitfaden.

2.2 Petite boîte à outils d'algèbre linéaire.

L'Algèbre linéaire est la partie la plus simple des Mathématiques. Elle est issue de la méthode des coordonnées cartésiennes pour repérer les points d'une droite,

²ou bien s'y ramènent aisément, par des constructions naturelles, si elles ne le sont pas elles-mêmes (comme le crochet de Lie par exemple).

d'un plan, ou de l'espace. Cette méthode étant uniforme dans les trois cas, on en est venu, dans les années 1840, à l'étendre en dimension n plus grande, quitte à se passer de l'intuition géométrique immédiate. Fixer une origine O permet d'identifier tout point P au vecteur \vec{OP} ; l'addition des vecteurs, familière en Statique et en Cinématique, se transporte alors à la droite, au plan, voire à l'espace à n dimensions, et correspond à l'addition des coordonnées lorsqu'un repère d'origine O est fixé.

Un peu plus tard, Grassmann a entrepris de dégager l'algèbre linéaire de l'arbitraire des choix de repères, en calculant directement avec les objets géométriques. Mais l'entreprise n'a abouti qu'avec Peano (1888, après l'introduction du langage ensembliste par Dedekind et Cantor), qui a forgé la petite boîte à outils brièvement présentée ci-dessous.

2.2.1 Espaces vectoriels.

Ces espaces, dont les points sont appelés *vecteurs*, ont une origine (le vecteur nul noté simplement 0); les vecteurs peuvent être additionnés entre eux d'une part³

$$v_1, v_2 \mapsto v_1 + v_2,$$

et être multipliés par des nombres⁴ (réels ou complexes, suivant la situation⁵) d'autre part

$$v \mapsto \lambda \cdot v.$$

Exemples : la droite réelle $V = \mathbb{R}$ (où un vecteur s'identifie à un nombre), le plan réel $V = \mathbb{R}^2$ (où un vecteur s'identifie à un couple de nombres, son abscisse et son ordonnée), etc...

2.2.2 Applications linéaires.

Etant donnés deux espaces vectoriels V et W , une application linéaire $F : V \rightarrow W$ de V vers W est une règle qui associe à tout vecteur v de V un vecteur $F(v)$ de W et qui vérifie les compatibilités naturelles relatives à la structure d'espace vectoriel, à savoir :

$$F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2), \quad F(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot F(v).$$

Avec les espaces vectoriels pour objets et les applications linéaires comme morphismes (cf. 1.5.1), on obtient la catégorie des espaces vectoriels (complexes, disons).

³L'addition des vecteurs est associative et commutative, l'addition de 0 à un vecteur v ne change pas v , et tout vecteur v admet un opposé $-v$, qui, lui étant ajouté, donne $v + (-v) = 0$; on dit que $(V, +)$ est un « groupe abélien » (ou commutatif).

⁴la multiplication d'un vecteur v par le nombre 1 ne change pas v . Par ailleurs, la multiplication de v par un nombre vérifie la relation d'« associativité » $(\lambda_1 \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$ et est liée à l'addition des vecteurs par les relations de « distributivité » $\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$ et $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$. On allège souvent l'écriture en se dispensant du point : on écrit λv au lieu de $\lambda \cdot v$.

⁵on parle d'espace vectoriel réel ou complexe, respectivement; en général, dans ce chapitre, nous considérons des espaces vectoriels complexes.

Les applications linéaires de V vers W forment elles-mêmes un espace vectoriel : $F + G$ est l'application linéaire définie par $(F + G)(v) = F(v) + G(v)$, et $\lambda \cdot F$ est l'application linéaire définie par $(\lambda \cdot F)(v) = \lambda \cdot F(v)$.

Un cas qui nous intéresse particulièrement est celui où $V = W$. On parle alors d'*opérateur* (sous-entendu : linéaire) sur V plutôt que d'application linéaire de V vers V , et on note $\mathcal{L}(V)$ l'espace vectoriel des opérateurs (linéaires) de V (\mathcal{L} comme « linéaire »). Du fait que les espaces de départ et d'arrivée coïncident, on peut *composer* les opérateurs entre eux : $GF : V \xrightarrow{F} V \xrightarrow{G} V$.

2.2.3 Bases, dimension, matrices.

La *dimension* d'un espace vectoriel est le « nombre de ses degrés de liberté ». Un peu plus précisément, l'espace vectoriel V est de dimension⁶ finie n si tout vecteur v peut s'écrire de façon unique comme *combinaison linéaire*⁷ $v = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i$ de vecteurs particuliers e_1, e_2, \dots, e_n (formant ce que l'on appelle une *base* de V). Les nombres λ_i sont les *coordonnées* de v dans la base (e_1, e_2, \dots, e_n) (retour aux coordonnées cartésiennes!).

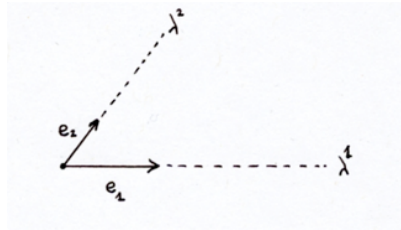


FIG. 2.4 –

Une base étant fixée, se donner un vecteur revient donc à se donner n nombres λ_i . De la sorte, tout espace vectoriel réel de dimension n s'identifie à \mathbb{R}^n (modulo le choix d'une base) ; de même, tout espace vectoriel complexe de dimension n s'identifie à \mathbb{C}^n .

Si F est un opérateur, on peut écrire $F(e_1) = \sum_i \lambda_{i1} e_i, \dots, F(e_n) = \sum_i \lambda_{in} e_i$.

Une base étant fixée, se donner un opérateur revient donc à se donner une *matrice carrée*

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}.$$

La composition des opérateurs s'exprime très simplement en termes de leurs matrices :

$$F \rightsquigarrow \lambda_{ij}, \quad G \rightsquigarrow \mu_{ij}, \quad GF \rightsquigarrow \sum_k \mu_{ik} \lambda_{kj}.$$

⁶le cas limite de la dimension 0 correspond à l'espace vectoriel nul, ne contenant que le vecteur nul.

⁷le signe $\sum_{i=1}^{i=n}$ indique que l'on somme sur tous les indices i de 1 à n .

2.2.4 Importance des problèmes linéaires.

Le rôle de l'Algèbre linéaire est de traiter les « problèmes linéaires », c'est-à-dire, *grosso modo*, ceux dont l'ensemble des solutions est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel (comme par exemple la propagation des ondes).

Ces problèmes sont particulièrement faciles en dimension finie⁸.

En mécanique classique, les problèmes sont souvent non linéaires, mais de dimension finie. Une technique classique consiste à se ramener, par une approximation au premier ordre, au cas linéaire, ce qui permet d'appliquer les techniques de l'Algèbre (ou de l'Analyse) linéaire pour traiter le problème approché.

En mécanique quantique, la situation est en quelque sorte opposée : le principe de superposition nous assure que les équations d'évolution sont linéaires ; mais cette fois la difficulté vient du fait que la dimension est infinie.

C'est une difficulté sérieuse : l'Algèbre linéaire pure « bute » en dimension infinie. Par exemple, l'expression $\sum_k \mu_{ik} \lambda_{kj}$ qui traduit la composition des opérateurs devient une somme infinie et n'a donc pas de sens en général. Pour qu'elle ait un sens, il faut que la série soit convergente, et pour cela il faut introduire un peu de topologie...

Nous y reviendrons après un certain détour. Mais il nous reste à clore ces généralités sur l'Algèbre linéaire en précisant la notion d'« algèbre » - au sens technique que lui donne le domaine des Mathématiques appelé « Algèbre »⁹.

2.2.5 Algèbres.

Une *algèbre* est un espace vectoriel muni d'une loi de composition

$$(g, f) \rightarrow gf$$

qui est associative, bilinéaire et avec un élément unité¹⁰ 1.

Elle est dite commutative si l'on a toujours $gf = fg$. Par exemple l'espace vectoriel des *fonctions*¹¹ $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ sur un espace X quelconque, muni de la multiplication entre fonctions¹² est une algèbre *commutative*.

Un exemple d'algèbre *non commutative*¹³ est l'algèbre $\mathcal{L}(V)$ des *opérateurs* $F : V \rightarrow V$, munie de la composition (on notera I l'élément unité, c'est-à-dire l'opérateur « qui ne fait rien »). Nous verrons en particulier que les algèbres de

⁸du moins du point de vue théorique. En revanche, bien des problèmes concrets de calcul numérique sont des problèmes linéaires en très grande dimension qui font peiner les ordinateurs...

⁹ tout comme le terme *topologie* vu dans le chapitre précédent, « algèbre » désigne à la fois un domaine des Mathématiques et une structure mathématique particulière appartenant à ce domaine.

¹⁰ vérifiant $1f = f1 = f$ pour tout élément f de l'algèbre.

¹¹ rappelons qu'une fonction f sur un ensemble X est une règle qui associe à tout élément de X (ou parfois seulement à certains d'entre eux) un nombre réel ou complexe. On met en général des conditions supplémentaires adaptées à l'ensemble particulier X que l'on considère. Par exemple, si X est un espace « topologique », il est naturel de considérer des fonctions continues (cf. 1.1.5).

¹² définie par $(fg)(x) = f(x).g(x)$.

¹³ sauf lorsque V est de dimension 0 ou 1.

von Neumann sont des sous-algèbres (*i.e.* des sous-ensembles stables par addition, multiplication par un nombre, et composition) de $\mathcal{L}(V)$.

Remarquons également que si A est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(V)$, on peut en fabriquer une autre en prenant son *commutant* A' , c'est-à-dire l'ensemble de tous les opérateurs qui commutent à tout opérateur dans A . Le commutant de $\mathcal{L}(V)$ est réduit aux opérateurs dits « scalaires » (ceux qui multiplient tout vecteur de V par un nombre fixe).

On vérifie que $A' = A'''$, et après une petite contorsion d'esprit, on en déduit qu'une algèbre A est égale à son bi-commutant A'' si et seulement si A est elle-même un commutant. Ce n'est pas automatiquement le cas, du reste.

2.3 Espaces et fonctions. Vers la Géométrie non commutative.

Revenons au Leitfaden de ce chapitre, et quittons temporairement la direction verticale pour la direction horizontale, en partant de la gauche.

Il n'y a pas de notion générale d'« espace en tant qu'espace » en Mathématiques. Jusqu'à présent, même les écoles les plus doctrinaires se sont abstenues de s'approprier symboliquement cette notion commune en la « taguant » d'une définition mathématique générale.

En revanche, il existe bien des *points de vue mathématiques* sur la notion commune d'espace, dont dérivent beaucoup de types d'espaces mathématiques particuliers, toujours flanqués d'un prédicat (nous avons déjà rencontré les espaces topologiques et les espaces vectoriels).

Nous allons brièvement décliner trois de ces points de vue qui donnent lieu à des « catégories » d'espaces particuliers : grandeur, localité, topographie. Démêler ces trois points de vue fut d'ailleurs un très long travail conceptuel, achevé peu avant la première guerre mondiale.

2.3.1 « Grandeur ».

D'une certaine façon, c'est peut-être le point de vue le plus ancien (problèmes d'arpentage de l'antiquité). En termes mathématiques contemporains, nous avons ici en vue tout ce qui se rapporte à la Théorie de la mesure, qui traite des *espaces mesurés*¹⁴ $(X, \mathfrak{B}, d\mu)$.

Les fonctions $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ qu'il est naturel de considérer dans ce contexte sont les fonctions (mesurables¹⁵) *bornées presque partout*, c'est-à-dire bornées hors d'une partie de mesure nulle. Elles forment une algèbre commutative notée $L^\infty(X, \mathfrak{B}, d\mu)$ (ou $L^\infty(X)$ pour abrégé).

¹⁴une mesure $d\mu$ est une fonction à valeurs positives ou infinies sur une tribu \mathfrak{B} de parties de X , qui est additive pour la réunion disjointe d'une collection finie ou dénombrable de parties deux à deux disjointes. Une *tribu* est un ensemble de parties stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable.

¹⁵c'est-à-dire celles pour lesquelles l'image inverse de tout ouvert de \mathbb{C} est dans \mathfrak{B} .

La Théorie de la mesure fait la synthèse entre les idées apparemment éloignées d'arpentage, de moyenne, de probabilité. Techniquement, la Théorie des probabilités s'y rattache en effet : une probabilité n'étant rien d'autre, selon la définition moderne (Kolmogorov), qu'une mesure telle que la mesure de l'espace X , vu comme ensemble de tous les évènements possibles, soit égale à 1¹⁶.

C'est un chapitre passionnant de l'histoire des Mathématiques que l'étude des chemins sinueux et ramifiés ayant mené des antiques problèmes d'arpentage à la Théorie de la mesure, sous la forme définitive qu'elle a prise avec Lebesgue, en passant par le calcul intégral à partir de la seconde moitié du XVII^e siècle, par l'intégrale de Riemann au milieu du XIX^e, et par les travaux de Cantor¹⁷.

2.3.2 « Localité ».

Il s'agit ici des notions de voisinage, de frontière, de compacité et de complétude, qui font l'objet de la Topologie générale, qui traite des *espaces topologiques* (X, \mathcal{D}) (cf. 1.1)¹⁸.

Les fonctions sur X qu'il est naturel de considérer dans ce contexte sont les *fonctions continues*. Elles forment une algèbre commutative notée $C(X, \mathcal{D})$ (ou $C(X)$ pour abrégé).

2.3.3 « Topographie ».

Il s'agit ici des notions de cartes, de ligne de niveau, de géodésie en général, de courbure, *etc...* Nous avons ici en vue tout ce qui se rapporte à la Géométrie différentielle, et plus particulièrement à la Géométrie différentielle riemannienne, qui traite des *variétés riemanniennes* (X, ds^2) : variétés qui sont, *infinitésimalement*, linéaires et munies d'un « élément métrique » ds^2 .

Les fonctions sur X qu'il est naturel de considérer dans ce contexte sont les *fonctions lisses*, c'est-à-dire indéfiniment différentiables (par exemple les fonctions coordonnées sur un espace vectoriel). Elles forment une algèbre commutative notée $C^\infty(X)$.

¹⁶s'y rattachent de même les aspects mathématiques de la mécanique statistique, où l'étude mécanique d'un système de très nombreuses particules est remplacé par celui de l'espace des états muni de la mesure de Gibbs au moyen de laquelle on prend les moyennes.

¹⁷quelques traits de cette histoire sont esquissés au chapitre 7.

¹⁸Puisque nous aurons à évoquer ci-dessous les espaces topologiques *compacts* ou *complets*, donnons, sans rentrer dans les détails techniques (voir 7.3.2, 7.3.3), une idée de ces deux notions voisines, en supposant pour simplifier qu'on dispose d'une métrique permettant de préciser numériquement la proximité de deux points ; on a alors aussi la notion de limite d'une suite de points.

La *complétude* d'un espace X reflète le fait qu'une suite de points converge (*i.e.* a une limite dans X) dès que les points sont tous arbitrairement proches les uns des autres à partir d'un certain rang. La *compacité* de X reflète le fait que de toute suite de points de X , on peut extraire une suite convergente, *i.e.* qui a une limite. Plus formellement, et dans les termes de 1.2.3, ce qui est requis est que toute famille couvrante d'ouverts U_i de X , il existe une sous-famille couvrante finie.

Par exemple, les espaces \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n sont complets mais non compacts. Les parties compactes de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n sont les parties bornées et fermées (*i.e.* qui contiennent leur frontière) ; elles sont aussi complètes.

Ce point de vue est encore dû aux réflexions de Riemann sur les fondements de la géométrie « courbe » en toute dimension (après Gauss, qui traita le cas des surfaces dans un ouvrage célèbre).

2.3.4 Le point de vue fonctionnel sur les espaces. Les points et leur ombre.

Ce point de vue - qui est apparu à divers moments et dans divers contextes de l'histoire des Mathématiques - consiste *grosso modo* à *inverser le rôle de la fonction et celui de la variable* : au lieu de voir une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ comme fonction (fixe) d'un point variable x de l'espace X , on regarde le point x comme fixe, et on considère son « ombre » constituée des valeurs $f(x)$ prises par toutes les fonctions f sur X (ou plus précisément la règle qui associe à une fonction variable f le nombre complexe $f(x)$).

Cela amène à remplacer l'espace X (mesuré, topologique, ou riemannien) par l'algèbre commutative $L^\infty(X)$, ou $C(X)$, ou $C^\infty(X)$ suivant le cas.

La question qui se pose alors est de savoir si l'on ne perd rien ce faisant. Notamment, peut-on récupérer un point à partir de son « ombre » ?

Il se trouve que sous des hypothèses assez larges, c'est effectivement le cas, comme nous le verrons plus loin : on retrouve *grosso modo* l'espace comme *spectre* de l'algèbre associée, c'est-à-dire essentiellement comme l'ensemble des « ombres » des points.

Mais, si l'on ne perd rien, que gagne-t-on ?

C'est, en premier lieu, de pouvoir *calculer* : on calcule avec des fonctions (qui forment une algèbre, à laquelle on peut appliquer les outils de l'Analyse classique), et non avec les points d'un espace. Autrement dit, on gagne de passer du visuel (Géométrie) au scriptural (Algèbre).

À cet égard, nous aimerions inviter le lecteur à une grande prudence en ce qui concerne les thèses sur le prétendu antagonisme calcul/raisonnement en Mathématiques. Ni le slogan romantique « les Mathématiques consistent à remplacer les calculs par des idées », ni les slogans opposés d'une certaine tradition logico-informaticienne (plus récente mais se réclamant non sans raison de Leibniz) ne rendent le moins du monde justice à la très délicate dialectique entre *calcul*, *raisonnement*, *problèmes*, *constructions*, et *formation de concepts* en Mathématiques.

Bien que ces leçons privilégient de manière presque exclusive le cinquième terme de cette dialectique, il convient de ne pas négliger le rôle essentiel des autres si l'on veut éviter de se forger une image complètement déformée de la pensée mathématique.

Ainsi, pour ne citer qu'un exemple parmi bien d'autres, la Théorie des graphes ne s'est pas constituée par une méditation approfondie sur l'essence de la notion de graphe, immédiatement saisissable, mais par la combinaison féconde de problèmes, constructions et raisonnements.

2.3.5 Comment le non commutatif s'introduit aussi subrepticement que naturellement dans le point de vue fonctionnel sur les espaces, en reléguant les points dans l'ombre. L'idée de Géométrie non commutative.

Beaucoup d'espaces intéressants s'obtiennent par recollement. Par exemple, toute variété de dimension n s'obtient par recollement de « cartes » qui sont des parties ouvertes de \mathbb{R}^n .

L'opération de recollement est donc une des opérations les plus fondamentales de la Géométrie, et dans beaucoup de problèmes, il importe de ne pas considérer seulement le résultat du recollement, mais de garder trace de l'opération même de recollement. Comment traduire cela dans le point de vue fonctionnel esquissé ci-dessus ?

Considérons le cas le plus simple, passablement trivial, d'un espace X constitué d'un seul point, obtenu en identifiant deux espaces du même type $\{x\}$ et $\{y\}$. L'algèbre des fonctions sur la réunion disjointe $\{x\} \cup \{y\}$ est l'algèbre commutative \mathbb{C}^2 des couples de nombres (un pour chaque point). L'opération ensembliste de recollement se traduit alors en considérant tous les opérateurs sur \mathbb{C}^2 , c'est-à-dire l'algèbre non commutative de toutes les matrices 2×2

$$\begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} \end{pmatrix}.$$

Dans le cas beaucoup moins trivial quoique similaire d'une variété compacte X obtenue par recollement de « cartes », l'algèbre qui décrit le recollement est l'algèbre des matrices infinies $(f_{x,x'})$, nulles à l'infini, indexées continûment par les couples de points où le recollement a lieu. C'est une algèbre non commutative de dimension infinie.

Toutefois, dans ces deux exemples, on peut encore retrouver les points (c'est-à-dire l'espace X lui-même) à partir de spectres, comme dans le cas commutatif : du point de vue spectral, les algèbres non commutatives que l'on voit apparaître par recollement sont en fait équivalentes à l'algèbre commutative des fonctions sur X . Cela est dû au fait que les espaces en question obtenus par recollement restent très « conventionnels » du point de vue de l'Analyse classique.

En revanche, pour des recollements plus sauvages (comme ceux qui apparaissent quand on considère les feuilles d'un feuilletage associé à un système dynamique), ce n'est plus du tout le cas. L'espace recollé peut avoir très peu de points « physiques » subsistants - l'opération de recollement ayant relégué en quelque sorte les points dans l'ombre (ou dans la colle !). Le point de vue ensembliste est totalement inadéquat pour décrire des situations de cette sorte (pourtant communes dans la Théorie des systèmes dynamiques par exemple), et il en est de même de l'Analyse classique : l'algèbre commutative des fonctions des points de cet espace recollé est un objet beaucoup trop pauvre pour décrire le recollement en question. Il devient nécessaire de remplacer résolument ensembles de points et algèbres de fonctions par une algèbre non commutative du type de celles considérées ci-dessus.

Parvenu à ce stade, on peut alors retourner complètement le point de vue et tâcher de définir et d'étudier directement, en termes d'algèbres non commutatives, les structures qui correspondaient, dans les situations géométriques classiques, aux notions de grandeur (mesure), de localité (topologie), de topographie (géodésie). Ce sont ces algèbres non commutatives qui remplacent les espaces, ou plutôt, qui jouent le rôle d'« espaces non commutatifs » sans points.

C'est là l'objet de la *Géométrie non commutative*, initiée et développée principalement par A. Connes¹⁹.

Dans la suite, nous nous concentrerons sur l'aspect « théorie de la mesure » de la Géométrie non commutative, qui n'est autre que la théorie des algèbres de von Neumann et des poids (théorie qui est en fait antérieure à la Géométrie non commutative).

2.4 Espaces de Hilbert et Analyse fonctionnelle.

Revenons derechef au Leitfaden de ce chapitre, en reprenant la direction verticale là où nous l'avions laissée, c'est-à-dire au passage à la dimension infinie en Algèbre linéaire.

2.4.1 Espaces euclidiens.

Revenons d'abord brièvement à Euclide. Il construisait des triangles, abaissait des perpendiculaires, comparait des angles et des longueurs de côtés. Deux millénaires et demi après, on considère que pour faire ces opérations, le substrat adéquat est celui d'espace euclidien, défini comme suit.

Un *espace euclidien*²⁰ est un espace vectoriel V de dimension finie muni d'un *produit scalaire*²¹, qui associe à tout couple de vecteur (v_1, v_2) un nombre (réel ou complexe) noté $\langle v_1, v_2 \rangle$. On requiert que

- $\langle v_1, v_2 \rangle = \overline{\langle v_2, v_1 \rangle}$
- $\langle \lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$,
- que $\langle v_1, v_2 \rangle$ soit additif en v_1 et en v_2 et soit un nombre positif non nul lorsque $v_1 = v_2 \neq 0$.

À partir du produit scalaire, on définit la *norme* (= longueur) d'un vecteur²² :

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

La norme permet de mesurer la distance entre deux vecteurs (c'est la norme de la différence des vecteurs). Outre la norme, le produit scalaire permet aussi de

¹⁹le discours ci-dessus passe sous silence les motivations et sources d'inspiration très importantes provenant de la mécanique quantique et de la physique statistique quantique. Nous y ferons brièvement allusion dans la suite.

²⁰réel ou complexe ; on dit aussi espace hermitien plutôt qu'espace euclidien complexe.

²¹dans le cas du plan euclidien réel proprement dit, le produit scalaire $\langle v_1, v_2 \rangle$ n'est autre que le produit des normes (= longueurs) de v_1 et de v_2 par le cosinus de l'angle entre v_1 et v_2 .

²²qui correspond intuitivement, si l'on pense à un vecteur \vec{OP} dans le plan, à sa longueur.

définir la notion d'*orthogonalité* (synonyme de perpendicularité) :

$$v_1 \perp v_2 \Leftrightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0.$$

Pour deux vecteurs orthogonaux, on a alors la « relation de Pythagore »

$$|v_1 + v_2|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2.$$

Étant donné un sous-espace W de l'espace euclidien V , l'espace orthogonal à W , formé des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de W , est noté W^\perp . On a $W^{\perp\perp} = W$. En outre, V se décompose en $V = W \oplus W^\perp$, autrement dit tout vecteur $v \in V$ s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur $w \in W$ (la projection de v dans W , qu'on écrit aussi $P_W(v)$) et d'un vecteur w^\perp orthogonal à w .

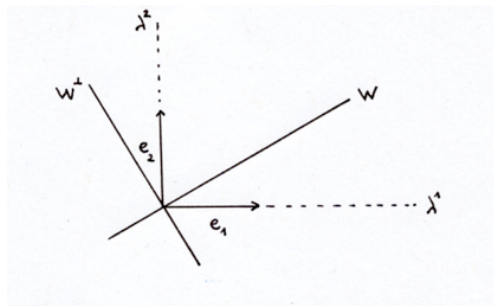


FIG. 2.5 –

Le produit scalaire permet aussi de définir l'*adjoint* F^* d'un opérateur $F \in \mathcal{L}(V)$. Une façon abstraite et intrinsèque est de dire que l'adjoint satisfait l'équation

$$\langle F^*(v), w \rangle = \langle v, F(w) \rangle.$$

Une façon plus concrète (mais équivalente) est d'utiliser les matrices associées (modulo le choix de bases *orthonormées*, c'est-à-dire formées de vecteurs orthogonaux et de norme 1) : l'adjonction est l'opération qui remplace lignes par colonnes et passe au conjugué complexe, c'est-à-dire $(\lambda_{ij}) \rightsquigarrow (\bar{\lambda}_{ji})$. On a :

$$F^{**} = F, \quad (GF)^* = F^*G^*.$$

Par exemple, considérons le *projecteur* P_W sur un sous-espace vectoriel W de V . C'est l'opérateur qui à tout vecteur $v \in V$ associe sa composante dans W eu égard à la décomposition $V = W \oplus W^\perp$ (ce point se décrit aussi comme le point de W le plus proche de v).

Alors P_W vérifie les équations $P_W = P_W^* = P_W P_W$, et ces équations caractérisent les opérateurs qui sont des projecteurs.

Autre exemple important : les opérateurs *unitaires*. Ce sont ceux (inversibles) qui préservent le produit scalaire. Ils vérifient les équations $U^*U = UU^* = I$, qui les caractérisent.

2.4.2 Espaces de Hilbert.

Il s'agit de la généralisation en dimension infinie des espaces euclidiens. Ces espaces ont été introduits par Hilbert en 1909, pour développer l'Analyse fonctionnelle abstraite, dont le point de départ consiste à considérer des fonctions comme points d'un espace vectoriel topologique idoine - dans les cas les plus simples, d'un espace de Hilbert²³.

Un espace (vectoriel) *de Hilbert* \mathcal{H} admet un produit scalaire tout comme un espace euclidien, mais il est de dimension infinie (dénombrable, pour simplifier), et complet (pour la distance définie par la norme définie elle-même par le produit scalaire comme ci-dessus).

En particulier, \mathcal{H} admet une base orthonormée infinie $(\dots, e_{-1}, e_0, e_1, e_2, \dots)$, et tout vecteur $v \in \mathcal{H}$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire infinie convergente

$$v = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \lambda_n e_n, \quad \text{où } \lambda_n = \langle e_n, v \rangle,$$

et on a la « relation de Pythagore » en dimension infinie $|v|^2 = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |\lambda_n|^2$.

Les espaces de Hilbert ressemblent donc beaucoup aux espaces euclidiens, mais la dimension infinie donne une plus grande souplesse (bien qu'il n'existe, à isomorphie près, qu'un seul espace de Hilbert²⁴). Par exemple, \mathcal{H} peut être décomposé en somme directe de deux copies de lui-même !

L'exemple standard est fourni par les séries de Fourier²⁵. Étant donné deux fonctions périodiques $f_1(t)$ et $f_2(t)$ de période 2π , on définit leur produit scalaire par :

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}_1 f_2 dt$$

L'espace \mathcal{H} des fonctions f pour lesquelles $\langle f, f \rangle$ est bien défini, est un espace de Hilbert. Une base orthonormée est donnée par $e_n = e^{\sqrt{-1}nt}$ (où n est un entier positif ou négatif quelconque) : tout $f \in \mathcal{H}$ s'écrit de manière unique

$$f = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \langle e_n, f \rangle e_n.$$

2.4.3 Opérateurs sur un espace de Hilbert et algèbres stellaires.

Un opérateur sur un espace de Hilbert \mathcal{H} est une application linéaire $\mathcal{H} \xrightarrow{F} \mathcal{H}$ continue (ce qui revient à dire qu'elle est bornée sur la *boule unité* formée des vecteurs de norme au plus 1). La norme de F est le maximum des normes des valeurs que prend F sur la boule unité.

²³voir L. Schwartz, *Analyse hilbertienne*, Hermann, Paris, 1979.

²⁴sous-entendu : de dimension dénombrable.

²⁵préfet de l'Isère, auteur de la théorie de la chaleur - pour laquelle il inventa il y a 200 ans le développement en séries trigonométriques (séries de Fourier) et la transformation de Fourier - et du bel aphorisme selon lequel les Mathématiciens « n'ont pas de signe pour exprimer les notions confuses ».

Les opérateurs se composent, et forment une algèbre non commutative notée $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, munie d'une norme $||$ et d'une involution (l'adjonction $F \mapsto F^*$). On a la relation $||FF^*|| = ||F||^2$.

De manière générale, une algèbre munie d'une involution et d'une norme vérifiant cette propriété répond au beau nom d'*algèbre stellaire*.

2.5 Spectres.

2.5.1 De Newton à Gelfand.

L'histoire des spectres en sciences physico-mathématiques est une histoire merveilleuse pour laquelle nous renvoyons aux travaux de J. Mawhin.

Il semble que les spectres apparaissent pour la première fois en physique chez Newton à propos de la dispersion de la lumière solaire par un prisme (1671). D'après Mawhin,

le développement de ces travaux au cours du XIXe siècle conduit à la spectroscopie, indispensable outil d'exploration de l'infiniment grand (astrophysique) et de l'infiniment petit (physique atomique). L'introduction du mot « spectre » en Mathématiques est beaucoup plus tardive (fin du XIXe siècle), mais les notions qu'il recouvre sont plus anciennes et trouvent leur origine dans des disciplines mathématiques multiples (équations différentielles, Mécanique céleste, Géométrie analytique, Physique mathématique, théorie de propagation de la chaleur, Algèbre). Il faut attendre le XXe siècle pour que les notions physique et mathématique de spectre se réconcilient, au sein de la mécanique quantique.

On a pu dire que le spectre d'un élément chimique est comme son « code-barre ». Dans le cas de l'hydrogène, les raies du spectre d'émission obéissent à la loi arithmétique de fréquence en $\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}$ ($n > m$) (loi de Ritz-Rydberg 1890), dont l'incompatibilité avec les lois de Newton et de Maxwell a été l'une des sources de l'émergence de la mécanique quantique de Heisenberg et Schrödinger (1925-26).

Du côté mathématique, si $F \in \mathcal{L}(V)$ est un opérateur, son spectre est l'ensemble des nombres complexes λ tels que $F - \lambda I$ ne soit pas inversible²⁶.

Par exemple, si l'on prend comme opérateur un projecteur P d'un espace euclidien ou de Hilbert, le spectre de P est contenu dans l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$. Plus généralement, si un opérateur (continu) est auto-adjoint, c'est-à-dire si $F = F^*$, son spectre est un sous-ensemble compact de \mathbb{R} .

Si l'on considère en revanche des opérateurs auto-adjoints « non continus »²⁷, alors le spectre est réel mais pas nécessairement compact (c'est le cas notamment des opérateurs hamiltoniens de la mécanique quantique).

Revenant au cas d'un opérateur (continu) auto-adjoint F , on peut aussi définir son spectre comme l'ensemble des caractères (= fonctions linéaires multipli-

²⁶un opérateur F est dit *inversible* s'il existe un opérateur G tel que $FG = GF = I$, où I est, rappelons-le, l'opérateur identité. On reviendra sur les spectres en 4.1.1.

²⁷contrairement à notre convention précédente selon laquelle les opérateurs d'un espace de Hilbert sont par définition continus.

catives²⁸) de l'algèbre stellaire $A = \mathbb{C}[F]$ qu'il engendre. Ceci permet d'étendre la notion de spectre au cas d'une algèbre stellaire commutative quelconque A : Gelfand définit le *spectre* de A comme l'ensemble des caractères de A . C'est de manière naturelle un espace topologique compact (mais plus forcément un ensemble de nombres).

2.5.2 Retour au point de vue fonctionnel. Les théorèmes de Gelfand et de Riesz.

Revenons maintenant au point de vue fonctionnel (cf. 2.3.4), et précisons le fait qu'on « ne perd rien » dans ce passage.

Commençons par le cas d'un espace topologique compact (X, \mathfrak{D}) . On lui associe l'algèbre stellaire commutative $A = C(X, \mathfrak{D})$ des fonctions continues à valeurs complexes sur X ²⁹.

Réciproquement, partant d'une algèbre stellaire commutative A , Gelfand lui associe son spectre X qui est un espace topologique compact. Le théorème de Gelfand dit que ces deux opérations sont *inverses* l'une de l'autre. En particulier, on récupère X à partir de A : un point $x \in X$ correspond à un caractère χ défini par la formule

$$f(x) = \chi(f) \text{ pour tout } f \in A.$$

Supposons en outre que X soit muni d'une mesure $d\mu$ (et pour faire « bonne mesure », faisons aussi l'hypothèse technique que la topologie de X provient d'une métrique³⁰). La mesure $d\mu$ permet d'intégrer les fonctions, et définit donc une application linéaire

$$\mu : A = C(X) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \mu(f) = \int_X f d\mu,$$

telle que $\mu(ff^*) \geq 0$.

Le théorème de Riesz (1909) affirme que, réciproquement, une telle fonction μ correspond toujours à une mesure $d\mu$, telle que $\mu(f) = \int f d\mu$ ³¹. On peut alors considérer l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = L^2(X, d\mu) = \left\{ f \mid \int |f|^2 d\mu < \infty \right\}$$

des fonctions complexes sur X de carré intégrable. Toute fonction presque partout bornée agit par multiplication sur \mathcal{H} , de sorte que l'algèbre

$$M = L^\infty(X, d\mu)$$

des fonctions presque partout bornées est une sous-algèbre stellaire de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Elle contient

$$A = C(X)$$

²⁸en particulier, tout caractère χ vérifie $\chi(ff^*) \geq 0$ et $\chi(1) = 1$.

²⁹l'involution $f \mapsto f^*$ étant induite par la conjugaison complexe, et la norme $|f|$ étant le maximum des modules des valeurs prises par f sur X .

³⁰on prend pour tribu \mathfrak{B} la plus petite contenant les ouverts et les parties de mesure nulle.

³¹cas particulier : le caractère associé à un point x n'est autre que la mesure de Dirac en x .

et coïncide en fait avec le commutant de A . Elle est donc égale à son propre bicommutant : $M = M''$. En outre, μ s'étend à M , avec la même propriété de positivité.

En combinant les théorèmes de Gelfand et de Riesz, on voit que *les données géométriques* (espace topologique mesuré)

$$(X, \mathfrak{D}, d\mu)$$

et *les données fonctionnelles*

$$(A, M \xrightarrow{\mu} \mathbb{C})$$

se déterminent mutuellement³².

On peut alors préciser ce qui a été dit à la fin de 2.3.5.

En Géométrie non commutative, c'est la théorie des algèbres stellaires non commutatives³³, analogues non commutatifs des algèbres $C(X, \mathfrak{D})$, qui jouera le rôle de « topologie générale non commutative ».

C'est la théorie des algèbres de von Neumann et de leurs poids, analogues non commutatifs des algèbres $M = L^\infty(X, d\mu)$ et des mesures μ , qui jouera le rôle de « théorie de la mesure non commutative ».

2.6 Algèbres de von Neumann, facteurs et poids.

2.6.1 Ce que c'est.

La théorie des algèbres de von Neumann a été créée en l'espace de quelques années (de 1936 à 1943) par von Neumann et son élève F. J. Murray. Leur motivation principale venait de la mécanique quantique : tentative de classification des algèbres d'observables qu'on y rencontre.

Une *algèbre de von Neumann*³⁴ (on dit aussi, plus simplement : *algèbre d'opérateurs*) est une sous-algèbre stellaire M de l'algèbre stellaire $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ des opérateurs sur un espace de Hilbert complexe \mathcal{H} , qui est égale à son bi-commutant (voir 2.2.4), c'est-à-dire telle que

$$M = M''.$$

C'est la généralisation non commutative de l'algèbre $L^\infty(X)$ des fonctions presque partout bornées sur un espace mesuré X .

Un *facteur* M est une algèbre de von Neumann telle que les seuls éléments de M qui commutent avec tous les autres sont les opérateurs scalaires (opérateurs de multiplication par un nombre fixe), ce qui revient à dire que

$$M \cap M' = \mathbb{C}.$$

³² Il y a quelque chose d'analogue, mais plus compliqué (en termes d'opérateurs de Dirac) dans le cas où l'on ajoute une structure riemannienne.

³³ de préférence séparables en norme, ce qui reflète, dans le cas commutatif, la condition que le spectre peut être muni d'une métrique.

³⁴ Si par hasard un connaisseur tombait sur ces lignes, prévenons que, techniquement, nous nous limiterons souvent tacitement aux algèbres de von Neumann à préduel séparable. Sur les algèbres de von Neumann et leur usage en Géométrie non commutative, on peut consulter A. Connes, *Géométrie non commutative*, Interéditions, Paris, 1990 (deuxième éd. refondue chez Dunod, 2005).

Nous avons déjà rencontré des exemples simples de facteurs (les moins intéressants qui soient, à dire vrai) :

- pour tout $n = 1, 2, \dots$ l'algèbre stellaire $I_n = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ des matrices $n \times n$,
- l'algèbre stellaire $I_\infty = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ des opérateurs (continus) sur l'espace de Hilbert.

Ce sont les facteurs *de type I*. On verra qu'il existe deux autres types bien plus intéressants.

Un théorème fondamental de von Neumann assure la possibilité de « désintégrer » toute algèbre de von Neumann M en facteurs ; les facteurs sont les briques élémentaires, et il suffit de les comprendre pour comprendre les algèbres d'opérateurs.

Voilà donc le début de la théorie de von Neumann. Des motivations solides d'où est issu un concept fondamental bien précis (celui de facteur en l'occurrence). Il s'est alors agi de développer cette théorie :

1. développement d'une technologie aussi riche que celle de la théorie classique de la mesure (dans le cas commutatif). Par exemple la notion de mesure a un analogue dans le cas non commutatif, celle de *poids* ; le théorème de Riesz vu plus haut assure que dans le cas commutatif, il n'y a pas « deux poids, deux mesures », c'est la même chose.
2. Exploration de phénomènes nouveaux.
3. Construction et classification des facteurs.

2.6.2 Facteurs de type II et géométrie en dimension continue.

Soit $M \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un facteur. Murray et von Neumann ont eu l'idée de chercher à classifier les projecteurs P de M (voir 2.4.1), en s'inspirant de ce qui se passe en dimension finie n , c'est-à-dire pour le type I_n .

Deux projecteurs P_1 et P_2 sont dits *équivalents* (on écrit $P_1 \sim P_2$) s'il existe un opérateur $V \in M$ tel que $P_1 = V^*V$ et $P_2 = VV^*$ (on a alors $P_2V = VP_1$). En dimension finie, cela signifie simplement que les dimensions des espaces vectoriels images des projecteurs sont les mêmes ; modulo équivalence, les projecteurs P sont donc entièrement classifiés par la dimension $D(P)$ de leur image.

Murray et von Neumann ont découvert quelque chose d'analogue pour tout facteur M . On peut associer de façon canonique à chaque projecteur P une *dimension* $D(P) \in [0, \infty]$ qui est un nombre réel positif ou l'infini, vérifiant :

1. $P_1 \sim P_2 \Leftrightarrow D(P_1) = D(P_2)$,
2. $P_1P_2 = 0 \Rightarrow D(P_1 + P_2) = D(P_1) + D(P_2)$.

On peut alors effectuer une première classification grossière des facteurs suivant les valeurs que peuvent prendre les dimensions des projecteurs. On obtient les cinq familles suivantes (y compris les deux vues précédemment), réparties en trois types :

$$I_n : \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

$$I_\infty : \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$II_1 : [0, 1]$$

$$II_\infty : [0, \infty]$$

$$III : \{0, \infty\}$$

L'apparition de « dimensions continues » constitue la première grande découverte de la théorie. Ces dimensions apparaissent en fait comme des « densités de dimension », au sens où on pourrait dire que les entiers pairs sont de densité $1/2$ parmi tous les entiers³⁵.

Pour construire un exemple de facteur de type II_1 , on peut s'y prendre de la manière suivante. Prenons un groupe (discret) dénombrable Γ d'opérateurs unitaires qui est « assez non commutatif » ; alors le commutant $M = \Gamma'$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un facteur de type II_1 .

2.6.3 Facteurs de type III et dynamique.

Les facteurs de type III sont précisément ceux sur lesquels la théorie de la dimension de von Neumann et Murray ne dit rien. Pendant un quart de siècle, et bien que la provision d'exemples s'enrichît, cette classe resta complètement mystérieuse.

La deuxième grande découverte de la théorie les concerne, et vient des travaux de Tomita, Takesaki et Connes³⁶. Pour tout facteur M muni d'un poids μ , il existe un groupe à un paramètre d'évolution (analogue aux flots d'évolution dans le temps que l'on rencontre en mécanique statistique quantique)

$$t \mapsto (F \in M \mapsto e^{\sqrt{-1}tH_\mu} \cdot F \cdot e^{-\sqrt{-1}tH_\mu}),$$

qui ne dépend du poids μ qu'à conjugaison unitaire près. Il définit donc un morphisme canonique de groupes

$$\delta : \mathbb{R} \rightarrow \text{Out } M,$$

où $\text{Out } M$ est le groupe des « automorphismes extérieurs » (c'est-à-dire les automorphismes à conjugaison unitaire près) du facteur M .

Il se trouve que les facteurs de type III sont justement ceux pour lesquels ce groupe à un paramètre d'évolution est non trivial : *les facteurs de type III sont des objets dynamiques*.

2.6.4 Classification des facteurs moyennables.

Comme dans beaucoup de théories, où des motivations solides et quelques exemples non triviaux ont mené, dans un premier mouvement, à la définition d'un objet mathématique fondamental, se pose le problème de la classification des objets répondant à cette définition. C'est là un second mouvement, en général très difficile et dont l'achèvement signe souvent la maturité de la théorie.

³⁵sans lien, *a priori*, avec les dimensions fractionnaires des fractals.

³⁶Voir, par exemple, Alain Connes, « Une classification des facteurs de type III », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* Sér. 4, 6 no. 2 (1973), p. 133-252.

La classification des objets, loin de « sortir » de la définition même, requiert d'abord une période de « gestation » où s'accumulent des exemples provenant de constructions variées et parfois surprenantes, puis une période « taxinomique » où les objets construits sont analysés en détail et comparés entre eux ; vient un moment où l'on a l'impression d'avoir une liste complète. Reste à le démontrer.

Il arrive parfois qu'une classification complète soit impossible, et que cette impossibilité - en un sens précisé - soit démontrée. C'est en fait ce qui se passe pour les facteurs. La tâche de classification se complique alors : il s'agit de déterminer d'abord une « bonne » classe qui, tout en étant suffisamment ubiquitaire, soit susceptible de classification³⁷.

Dans le cas des facteurs, de nombreux travaux convergents ont permis de dégager cette « bonne » classe : c'est celle des *facteurs moyennables*³⁸, caractérisés par la propriété d'être approximés par des sous-algèbres stellaires de dimension finie. Ce sont des algèbres de dimension infinie (sauf pour le type I_n), mais « pas trop » !

La classification des facteurs moyennables, due à A. Connes³⁹, est la suivante :

I_n

I_∞

II_1 : il n'y a qu'un seul facteur moyennable de ce type.

II_∞ : idem.

III_λ avec $\lambda \in]0, 1[$: idem. En fait λ est directement relié à la dynamique δ (cf. 2.6.3) : l'ensemble $\{t : \delta(t) = 0\}$ est l'ensemble des $\frac{2\pi n}{\log \lambda}$ pour n entier quelconque.

III_1 : encore un seul facteur moyennable de ce type.

III_0 : dans cette rubrique, il y a une infinité de facteurs moyennables, tous décrits « géométriquement » à l'aide de la Théorie des systèmes dynamiques.

2.6.5 Prolongements.

Le facteur moyennable de type II_1 est l'un des plus remarquables de la liste, tant à cause de ses multiples propriétés que de ses applications. On peut le construire comme indiqué en 2.5.2 en prenant pour Γ un groupe localement fini (par exemple un groupe de substitutions sur un alphabet infini ou chaque élément du groupe ne permute qu'un nombre fini de lettres).

C'est un facteur de dimension infinie, certes, mais il possède une double propriété de finitude : la moyennabilité - approximation par des sous-algèbres stellaires de dimension finie -, et l'existence d'une *trace*, c'est-à-dire un poids particulier qui joue le rôle d'une probabilité. C'est l'analogie non commutatif d'un espace de probabilités.

³⁷Nous y reviendrons en 4.4.1.

³⁸il y a beaucoup d'autres noms « équivalents », par exemple facteurs hyperfinis, ou encore injectifs. Il ne s'agit d'ailleurs nullement d'une pure synonymie : chacun de ces noms est associé à une propriété spécifique de facteurs, qui a d'abord été étudiée pour elle-même, et la coïncidence de ces propriétés est un résultat majeur de la théorie qui met en évidence l'importance de cette classe de facteurs.

³⁹voir, en particulier, l'article « Classification of injective factors », *Ann. of Math.* 104 (1976), 73-115.

La classification des sous-facteurs du facteur II_1 moyennable par V. Jones a donné lieu à des nouveaux invariants pour la Théorie des nœuds, et a ouvert un nouveau chapitre des Mathématiques, la « topologie quantique ».

2.7 Coda : Logique des interactions.

En guise de conclusion⁴⁰, nous dirons quelques mots (beaucoup trop brefs) sur l'intervention surprenante du facteur moyennable de type II_1 en Logique, dans le cadre de la Théorie de la démonstration, plus précisément dans la récente « logique des interactions » de J.-Y. Girard⁴¹.

Il est intéressant de remarquer que l'histoire en Logique mime un peu l'histoire que nous avons racontée à propos du changement de point de vue :

espace des points \rightsquigarrow algèbres de fonctions \rightsquigarrow algèbres d'opérateurs.

Le point de vue naïf d'espace de points correspond au point de vue des débuts de la Logique formelle : dans cette analogie les points correspondent aux *formules* logiques. Les fonctions, quant à elles, correspondent aux *programmes*, et l'équivalence de Gelfand entre espaces compacts de points et algèbres stellaires commutatives de fonctions correspond à l'équivalence de de Bruijn-Curry-Howard entre preuves et programmes. L'analyse poussée de la notion de preuve a souligné l'importance théorique de l'*élimination des coupures* (il s'agit, *grosso modo*, de transformer une preuve en une autre plus directe, en supprimant les lemmes intermédiaires), qui est associatif d'après des résultats de Church-Rosser-Girard. Une description en termes topologiques classiques avait été tentée (domaines de Scott), mais le résultat est peu satisfaisant, les espaces obtenus étant non séparés ; cela correspond à la situation décrite en 2.3.5 des points « englués ».

Grâce à sa notion opératorielle de *feed-back* dans le processus d'élimination des coupures, Girard est parvenu à donner une description géométrique (au sens non commutatif) de la situation, en termes de géométrie de dimension continue associée au facteur moyennable de type II_1 , en jouant de la double propriété de finitude de ce facteur remarquable.

Il est impossible de rentrer ici dans les détails, mais disons simplement ce que devient la tautologie « de A , on infère A » dans ce nouveau contexte : on utilise la décomposition de l'espace de Hilbert en deux copies de lui-même, et l'avatar opératorielle de ladite tautologie est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ associée à cette décomposition.

⁴⁰ « la bêtise consiste à vouloir conclure » disait Flaubert...

⁴¹ voir *Le Point Aveugle. Cours de théorie de la démonstration*, Roma Tre, Octobre-Décembre 2004, Hermann, collection « Visions des Sciences ». Tomes I, II.