

# Chapitre 5

## Singularités.

« La singularité  
est dangereuse en tout. »

Fénelon, Lettre à l'Académie.

### 5.1 Généricité, lissité, singularités.

#### 5.1.1 Notion de singularité.

« Singulier » s'oppose à « générique », mais il n'y a pas de définition formelle de ces termes en Mathématiques. De manière générale, toutefois, l'adjectif « générique » est employé en Mathématiques dans le sens suivant. Étant donné une collection d'objets  $x$  formant un espace  $X$  (mesuré, ou topologique, ou algébrique...), on dit qu'une propriété  $\mathcal{P}$  de ces objets est *générique* si elle est vraie « presque partout », c'est-à-dire pour « presque tout » objet  $x$  - le sens de « presque partout » variant suivant le contexte<sup>1</sup>.

On qualifie parfois l'ensemble des  $x$  qui ne vérifient pas  $\mathcal{P}$  de *lieu singulier* (eu égard à  $\mathcal{P}$ ). En ce sens très général, « singularité » a donc valeur d'« exception », de « dégénérescence ». C'est par exemple le lieu où certaines fonctions ne sont pas « bien définies », où certaines quantités deviennent infinies, *etc...*

Toutefois, l'acception la plus courante de ce terme en Mathématiques, celle qui est en jeu dans la Théorie des singularités, concerne le cas où la propriété  $\mathcal{P}$  est la *lissité*.

Rappelons qu'intuitivement, *lisse* veut dire « infiniment doux à la caresse » (cf. 4.1.2) ; formellement : indéfiniment différentiable.

On parle ainsi de fonctions et de variétés lisses ; une variété lisse est en tout point infinitésimalement linéaire, c'est-à-dire qu'elle s'identifie infinitésimalement à son espace tangent en chacun de ses points.

---

<sup>1</sup>dans le contexte mesuré, cela signifie « hors d'un ensemble de mesure nulle » (nous avons déjà rencontré cette acception en 2.3.1) ; dans le contexte topologique, « dans un ouvert dense », ou plus généralement, « dans une intersection dénombrable d'ouverts denses » ; dans le contexte algébrique, « hors d'un sous-ensemble algébrique de dimension moindre que celle de  $X$  ».

Le cadre dans lequel la Théorie des singularités opère est celui d'objets géométriques ou de systèmes évolutifs qui sont *génériquement lisses*<sup>2</sup>. C'est le cas des systèmes dynamiques de la science classique (optique, mécanique...) dont l'étude est à l'origine de la Théorie des singularités, et en fait de la plupart des modèles mathématiques des sciences de la nature.

Au sens mathématique strict, *une singularité est donc un « défaut de lissité », une « aspérité » ou une « crise », dans un contexte génériquement lisse.*

### 5.1.2 Enjeux.

Si le lisse est générique, si donc « la caresse rencontre presque partout de l'infiniment doux », pourquoi se préoccuper des singularités, ces « aspérités exceptionnelles » ?

Une première réponse est que (comme nous allons le voir au paragraphe suivant) les singularités apparaissent « spontanément » même dans des contextes *lisses a priori*, et on ne peut se contenter de les ignorer : la catégorie ayant comme objets les variétés lisses et comme morphismes les applications lisses s'avère vite trop « étroite » pour faire de la Géométrie.

En fait, les singularités et autres bifurcations (changements de régime), loin d'être des « impuretés » dont il faudrait se débarrasser, en disent souvent long sur les systèmes étudiés tout entiers, comme si ces derniers étaient *caractérisés par leurs « crises »*.

En fait, nous verrons plus loin qu'en plusieurs sens, les objets géométriques tendent à être conditionnés, voire caractérisés, par leurs singularités.

Par ailleurs, on remarque que dans le doublet générique/singulier, c'est le générique qui est surdéterminé par rapport au singulier ; le sens mathématique de ce doublet est donc bien différent du sens philosophique traditionnel.

En effet, les singularités apparaissent *a priori comme de purs négatifs* : carence de lissité, obstruction au principe de linéarisation. Mais la Théorie des singularités va opérer une sorte de renversement dialectique : elle va thématiser ces obstructions, en faire des objets mathématiques à part entière, les décrire, les classer, etc... Dans ses listes, le point lisse ne figurera plus qu'en tant que « singularité triviale ».

L'aspect le plus remarquable de ce renversement est la description des singularités en termes d'objets combinatoires (par exemple des diagrammes de Dynkin) : au bout du compte, par un mouvement subtil et réversible, *on sera passé d'objets du monde continu à des objets du monde discret.*

Outre l'illustration de ces deux thèses, ce chapitre sera l'occasion de faire un peu de *phénoménologie des singularités* : comment elles apparaissent, se déploient, et disparaissent (en laissant quelles traces ?)

---

<sup>2</sup>cela exclut donc les objets fractals, même s'ils ont tendance à « rentrer par la petite porte » en Théorie des systèmes dynamiques...

### 5.1.3 Comment les singularités apparaissent.

Voici trois modes très communs d'apparition des singularités en Mathématiques.

• *Projections*. Illustrons ce mode en trois versions :

1) projection sur un plan d'une courbe lisse dans l'espace : on peut voir apparaître un croisement, ou un point de rebroussement.

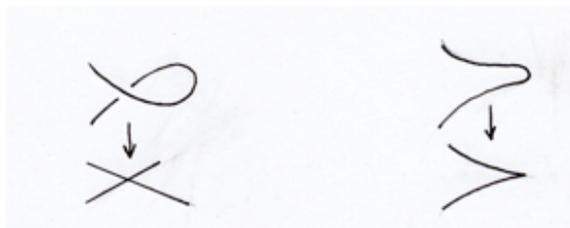


FIG. 5.1 –

2) projection d'une surface lisse dans l'espace à 3 dimensions sur une surface (e.g. la rétine).

Un observateur regarde des collines : les contours sont en général des courbes lisses (plis), mais peuvent apparaître des singularités (fronces...). Figuration des draperies en peinture (études de Dürer<sup>3</sup>, Vinci...)



FIG. 5.2 –

3) projection d'une surface lisse dans l'espace à 3 dimensions sur une droite : lignes de niveau

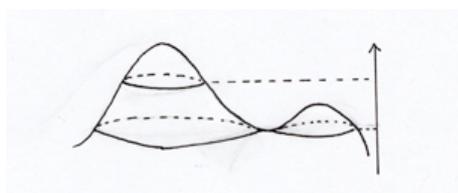


FIG. 5.3 –

• *Dégénérescences* : ajout de fibres « dégénérées » dans le processus de compactification d'une famille de variétés lisses. par exemple, si l'on veut compactifier la famille d'hyperboles  $x_1x_2 = \lambda$ , il faut ajouter les fibres correspondant à  $\lambda = 0$  et  $\lambda = \infty$ . En  $\lambda = 0$ , il s'agit de deux droites ayant un point d'intersection, qui est donc une singularité.

<sup>3</sup>Geometric libris, 1532.

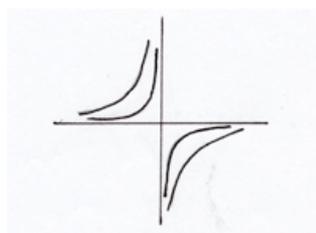


FIG. 5.4 –

• *Quotients*, repliements. Il ne s'agit pas ici des quotients « sauvages » qui mènent aux espaces non commutatifs. Des quotients très « modérés », comme celui du plan par un groupe fini de symétries, peuvent présenter des singularités, qui correspondent aux points fixes sous l'action du groupe (voir 5.5.3 ci-après).

## 5.2 Points critiques.

### 5.2.1 Linéarisation des champs de vecteurs.

Considérons une variété lisse  $M$  et un champ de vecteurs  $\vec{v}$ , c'est-à-dire la donnée, pour tout point  $x$  de  $M$  d'un vecteur tangent  $\vec{v}(x)$  qui varie de manière continue et même lisse avec  $x$ . Un théorème classique affirme qu'au voisinage de tout point  $x$  où  $\vec{v}(x)$  ne s'annule pas, le champ de vecteur est linéarisable, c'est-à-dire équivalent à un champ de vecteurs constant (en termes heuristiques : on peut peigner là où il n'y a pas d'épi !):



FIG. 5.5 –

### 5.2.2 Points critiques de fonctions.

Considérons une fonction lisse  $f$  sur  $M$ . Un point  $\xi$  de  $M$  est dit *critique* pour  $f$  si la partie linéaire de  $f - f(\xi)$  s'annule en  $\xi$ . Cela revient à dire que dans des coordonnées locales convenables  $x_1, \dots, x_n$  au voisinage du point  $\xi$ , le champ de vecteurs défini par les dérivées partielles  $(\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)$  s'annule en  $\xi$ <sup>4</sup>. L'image  $f(\xi)$  par  $f$  d'un point critique  $\xi$  s'appelle *valeur critique* de  $f$  (ces valeurs sont exceptionnelles).

Le théorème de linéarisation précédent implique qu'au voisinage de tout point *non critique*, la fonction  $f$  est équivalente à sa partie linéaire.

<sup>4</sup>cette condition ne dépend pas en fait du choix des coordonnées locales, bien que le champ de vecteurs en dépende.



FIG. 5.6 –

Plus précisément, fixons une valeur  $\nu$  de  $f$  et considérons la fibre  $f^{-1}(\nu)$  de  $f$  au-dessus  $\nu$ , c'est-à-dire l'ensemble des points  $\xi$  en lesquels  $f$  prend la valeur  $\nu$  (si  $M$  représente la surface d'un ensemble de collines, et  $f$  est la fonction altitude,  $f^{-1}(\nu)$  n'est autre que la *ligne de niveau*  $\nu$ ). Si  $\nu$  n'est pas une valeur critique, alors en tout point  $\xi$  de la fibre  $f^{-1}(\nu)$ , il existe un système de coordonnées  $x_1, \dots, x_n$  dans lequel cette fibre est définie par l'équation linéaire  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = \nu$ ; elle est donc lisse. On voit ainsi que les points critiques correspondent à des singularités, non de  $M$  ni de  $f$  (qui sont lisses), mais des fibres  $f^{-1}(\nu)$  (lignes de niveau).

### 5.2.3 Points critiques génériques.

En un point critique  $\xi$  (où il n'est plus vrai qu'une fonction soit équivalente à sa partie linéaire), que peut-on dire ?

Il se trouve qu'il y a une hiérarchie de points critiques. En particulier, on peut définir la notion de point critique « générique ». Au voisinage d'un point *critique générique*, la fonction  $f$  est équivalente à sa partie quadratique : elle est en fait de la forme  $f(x) \sim \nu + a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2$ , les  $a_i$  étant non nuls, pour un choix convenable de coordonnées locales  $x_1, \dots, x_n$  (la constante  $\nu$  étant la valeur de  $f$  au point  $\xi$  considéré).

L'indice d'un point critique générique est le nombre de  $a_i$  positifs. Par exemple, en dimension 2, on trouve trois types de points critiques génériques : le sommet ( $f \sim \nu - x_1^2 - x_2^2$ , d'indice 0), le col ( $f \sim \nu + x_1^2 - x_2^2$ , d'indice 1), le bassin ( $f \sim \nu + x_1^2 + x_2^2$ , d'indice 2).

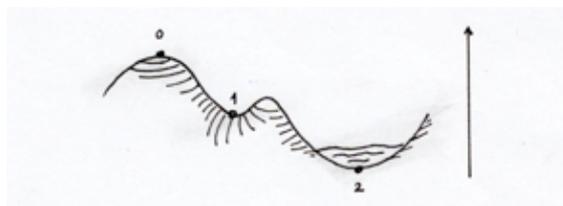


FIG. 5.7 –

On montre que toute fonction lisse « générique »  $f$  est *de Morse*, c'est-à-dire n'admet que des points critiques génériques, et qu'il n'y a pas deux points critiques en lesquels  $f$  prend même valeur.

## 5.2.4 Topographie et Théorie de Morse.

L'idée, ancienne, vient de la topographie : représenter un relief, un paysage montagneux, par des lignes de niveaux. Sa mise en œuvre mathématique, ébauchée au XIXe par le physicien Maxwell et l'avocat-mathématicien Cayley, a abouti au XXe à la Théorie de Morse, qui montre que *la topologie d'une variété lisse compacte  $M$  peut être reconstruite, de manière combinatoire, à partir de l'étude des points critiques (singularités des fibres) d'une fonction auxiliaire  $f$  suffisamment générique.*

Pour en saisir l'intuition, dans l'exemple du paysage montagneux, on peut se représenter que le relief est progressivement submergé par une crue, et essayer de se figurer la variation de la topologie de la partie immergée lors de la montée des eaux. Il est assez clair que celle-ci ne change pas lorsque le niveau n'est pas critique. Avec un certain effort d'attention, on peut se rendre compte que le franchissement d'un sommet revient, topologiquement, à attacher un point supplémentaire (0-cellule), celui d'un col à attacher un segment (1-cellule), celui d'un bassin à attacher un disque (2-cellule).

Il s'agit d'un phénomène général, valable en toute dimension<sup>5</sup> : la partie au-dessus du niveau critique  $\nu$  se construit, topologiquement, en attachant à la partie au-dessous du niveau  $\nu$  une cellule de dimension égale à l'indice.

## 5.3 Généricité et stabilité.

### 5.3.1 La dialectique générique/singulier selon Poincaré.

En jetant les bases de la théorie qualitative des systèmes dynamiques, H. Poincaré a mis en lumière l'importance cruciale du générique dans ce domaine, et la subtilité de la dialectique générique/singulier (bien au-delà de la simple opposition logique)<sup>6</sup>.

Dans la perspective des applications de l'étude des systèmes dynamiques aux sciences de la nature, il paraît raisonnable, dans un premier temps, de se limiter aux situations génériques : en effet, les paramètres du système ne sont connus qu'approximativement en pratique, et une modification arbitrairement petite des paramètres permet toujours de sa ramener au cas générique.

Toutefois, l'argument tombe en défaut lorsqu'il s'agit précisément d'analyser une famille de systèmes : on rencontre inévitablement, en général, un lieu de *bifurcation*  $\Sigma$ . Le principe de généricité doit être affiné de la manière suivante : s'il s'agit d'une famille à un paramètre de systèmes, on pourra, en pratique, se limiter aux bifurcations génériques (c'est-à-dire correspondant à presque tous les points de  $\Sigma$ ). Plus généralement, on aura une stratification de  $\Sigma$ , les strates de codimension  $i$  correspondant aux systèmes à  $i + 1$  paramètres génériques.

Un programme de classification ambitieux consiste alors à chercher les *formes normales*, c'est-à-dire des équations les plus simples possibles, auxquelles se ramènent les systèmes à  $i$  paramètres (ou, si l'on veut, à  $i$  degrés de liberté).

<sup>5</sup>cf. J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton 1963.

<sup>6</sup>pour les détails concernant ce paragraphe et les suivants, nous renvoyons à V. Arnold, *Catastroph theory*, Springer, 1984, et D. Bennequin, *Caustique mystique*, Séminaire Bourbaki 634 (1984).

### 5.3.2 L'exemple des draperies.

Les Mathématiques ont récemment achevé<sup>7</sup>, sur le plan théorique, la tradition des études de Dürer et Vinci, en menant à bien la classification complète de toutes les singularités des draperies qui apparaissent lorsque l'observateur-peintre se déplace : il y en a 13.

Le manteau  $M$  est vu comme surface lisse plongée dans l'espace usuel  $\mathbf{R}^3$ . L'observateur-peintre occupe une position  $\omega$  (le point de vue) dans  $\mathbf{R}^3$ , et ce qu'il observe/peint est la projection de  $M$  sur un plan  $\mathbf{R}^2$ , suivant le point de vue  $\omega$ . Voici la classification des singularités qui apparaissent, suivant le nombre de degrés de liberté qu'on accorde au point de vue.

- Pour un point de vue  $\omega$  générique, il n'y a, d'après un théorème classique de Whitney, que deux singularités possibles (dépendant de la forme de  $M$  dans  $\mathbf{R}^3$ ) : le *pli* et la *fronce*.



FIG. 5.8 –

Les formes normales de  $M$  correspondantes s'écrivent respectivement

$$x_3 = x_1^2, \quad x_3 = x_1^3 + x_1x_2$$

(dans des coordonnées pour lesquelles la projection est donnée par élimination de la troisième coordonnée, de sorte que  $\omega$  est considéré comme rejeté à l'infini).

- Pour des points de vue  $\omega$  à un degré de liberté, s'introduisent trois nouvelles singularités (correspondant à des bifurcations génériques) : la *lèvre*, le *bec-à-bec* et le *passage du chameau*.



FIG. 5.9 –

Les formes normales de  $M$  s'écrivent respectivement

$$x_3 = x_1^3 + x_1x_2^2, \quad x_3 = x_1^3 - x_1x_2^2, \quad x_3 = x_1^4 + x_1x_2.$$

- Pour des points de vue  $\omega$  à deux degrés de liberté, s'introduisent quatre nouvelles singularités (correspondant à des bifurcations de codimension 1). Les

<sup>7</sup>travaux successifs de Whitney, Arnold, Platonova, Sherback.

formes normales de  $M$  s'écrivent respectivement

$$x_3 = x_1^3 + x_1x_2^3, \quad x_3 = x_1^4 + x_1x_2 + x_1x_2^2, \quad x_3 = x_1^5 + x_1^3x_2 + x_1x_2, \quad x_1^5 - x_1^3x_2 + x_1x_2.$$

• Enfin, si l'on tient compte de tous les points de vue possibles, s'introduisent encore quatre nouvelles singularités (correspondant à des bifurcations de codimension 2). Les formes normales de  $M$  s'écrivent respectivement

$$x_3 = x_1^3 + x_1x_2^4, \quad x_3 = x_1^3 - x_1x_2^5, \quad x_3 = x_1^4 + x_1^2x_2 + x_1x_3, \quad x_1^5 + x_1x_2.$$

Le théorème de Whitney sur le pli et la fronce a été popularisé par les modélisations (plus ou moins fantaisistes) de la « Théorie des catastrophes appliquée ». Voici un exemple d'interprétation catastrophiste de la fronce<sup>8</sup>. Dans cet essai de « modélisation de la créativité »,  $x_1$  mesure l'enthousiasme,  $x_2$  la force technique,  $x_3$  la réussite (!). Sans grand enthousiasme, la réussite croît de façon monotone en fonction de la force technique ; mais si l'enthousiasme est grand, il peut y avoir un saut qualitatif dans la qualité des résultats à partir d'une certaine virtuosité (bifurcation entre maniaques et génies (!)).

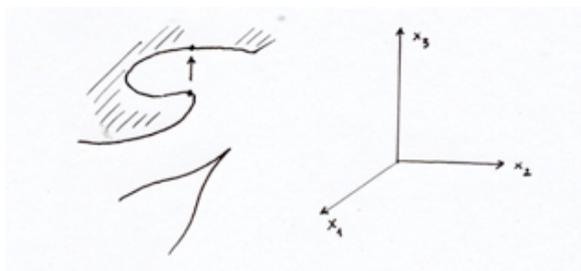


FIG. 5.10 –

« Défiez-vous des ensorcellements  
et des attrait diaboliques de la géométrie. »

Fénelon

### 5.3.3 Singularités stables.

Une singularité est dite *stable* si toute déformation suffisamment petite des conditions où elle apparaît donne lieu à une singularité « équivalente ».

Exemple : le croisement, comme singularité de projection de courbe, est stable ; en revanche, le point de rebroussement ne l'est pas.



FIG. 5.11 –

On peut alors se demander si toute singularité générique est stable.

La réponse dépend en fait de ce qu'on entend, ci-dessus, par « équivalente ». Dans le contexte purement topologique<sup>9</sup>, la réponse est oui (théorème de Mather).

<sup>8</sup>E.C. Zeeman, *Catastroph theory*, selected papers 1972-77, Addison-Wesley, 1977.

<sup>9</sup>où « équivalente » est entendu comme « isomorphe en tant qu'espace topologique ».

## 5.4 Déploiements et catastrophes.

### 5.4.1 Comment les singularités se déploient.

Considérons à nouveau une fonction  $f$  sur une variété lisse de dimension  $d$  (par exemple sur une surface, pour fixer les idées) à valeurs réelles (ou complexes), et poursuivons l'étude des points critiques  $\xi$  (de valeur critique  $f(\xi) = 0$  pour fixer les idées), sans plus nous limiter au cas générique.

Plus précisément, penchons-nous sur les singularités isolées  $\xi$  de la fibre  $f^{-1}(0)$  (l'hypersurface de  $M$  définie par  $f(x) = 0$ ).

Un *déploiement* de  $(f, \xi)$  est une déformation  $F$  de  $f$  à un ou plusieurs paramètres  $\lambda$ , qui s'annule en  $\xi$  (tout comme  $f$ ). Autrement dit :

$$F(x, 0) = f \text{ pour tout } x \in M, \quad F(\xi, \lambda) = 0 \text{ pour tout } \lambda.$$

On montre qu'il existe un déploiement  $F$  dit *versel*<sup>10</sup>, dont tous les autres se déduisent.

L'ensemble des  $\lambda$  pour lesquels la variété définie par  $F(x, \lambda) = 0$  est singulière (c'est-à-dire non lisse) s'appelle le *discriminant*.

Exemples. • Le déploiement versel de  $(f(x) = x^3, 0)$  est  $F(x) = x^3 + \lambda x$ . Le discriminant est  $\lambda = 0$ .

• Le déploiement versel de  $(x^4, 0)$  est  $x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x$ . Le discriminant est une fronce.

• Le déploiement versel de  $(x^5, 0)$  est  $x^5 + \lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x$ . Le discriminant est une *queue d'aronde*



FIG. 5.12 –

### 5.4.2 Singularités simples.

Une singularité est dite *simple* si, par déformation suffisamment petite, elle n'« engendre » qu'un nombre fini de classes d'équivalence de singularités.

La classification complète des singularités simples du type précédent (singularités isolées d'hypersurfaces) est achevée, et fait intervenir - encore eux ! - les diagrammes de Dynkin (cf. 4.4.3). En fait, ces singularités correspondent exactement aux diagrammes de Dynkin sans arête double, c'est-à-dire les diagrammes de type  $A, D, E$ , la liste des formes normales étant la suivante (Arnold et al...) :

<sup>10</sup>pas tout-à-fait universel, il y a un petit grain de sel technique...

$$\begin{aligned}
 A_n : \quad & \circ - \circ - \dots - \circ - \circ \rightsquigarrow f = x_1^{n+1} + \sum_3^d x_i^2, \\
 D_n : \quad & \circ - \circ - \dots - \circ < \overset{\circ}{\circ} \rightsquigarrow f = x_1^{n-1} + x_1 x_2^2 + \sum_3^d x_i^2, \\
 E_6 : \quad & \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \end{array} \rightsquigarrow f = x_1^3 + x_2^4 + \sum_3^d x_i^2, \\
 E_7 : \quad & \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \end{array} \rightsquigarrow f = x_1^3 + x_1 x_2^3 + \sum_3^d x_i^2, \\
 E_8 : \quad & \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \end{array} \rightsquigarrow f = x_1^3 + x_2^5 + \sum_3^d x_i^2.
 \end{aligned}$$

Le principe du codage par les diagrammes est le suivant : dans un déploiement versel, la singularité se transforme en un ensemble de cercles (dits *évanescents*)<sup>11</sup>, chacun étant figuré par un sommet du diagramme ; une arête relie deux sommets quand les cercles associés se touchent.

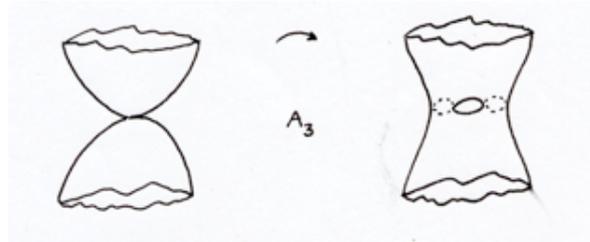


FIG. 5.13 –

### 5.4.3 Géométrie symplectique et catastrophes.

De même que la Géométrie euclidienne est modélée sur l'espace euclidien, défini par un crochet  $\langle , \rangle$  symétrique (*i.e.* inchangé lorsque l'on permute les deux vecteurs), la Géométrie symplectique<sup>12</sup> est modélée sur l'espace symplectique, défini par un crochet  $\langle , \rangle$  antisymétrique : le signe change lorsque l'on permute les deux vecteurs.

Cette géométrie, qui est sous-jacente à la mécanique hamiltonienne, est aussi celle sous-jacente à la Théorie des catastrophes<sup>13</sup> développée par Thom et Arnold.

Il se trouve que les catastrophes sont classifiées, elles aussi, par les diagrammes de Dynkin de type  $A, D, E$ . L'explication est que cette classification se ramène à la précédente : les catastrophes ne sont autres que les singularités des discriminants des déploiements versels des singularités isolées simples d'hyper-surfaces. Par exemple, en dimension  $\leq 4$ , on trouve les catastrophes élémentaires de Thom :

<sup>11</sup>voir les petits films de C. Sorger, [http ://www.math.sciences.univ-nantes.fr/\[tilde\]sorger/colloquium/](http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/[tilde]sorger/colloquium/)

<sup>12</sup>le terme est dû à Weyl.

<sup>13</sup>techniquement : les catastrophes associées aux applications lagrangiennes en Géométrie symplectique.

- $A_2$  : le pli,
- $A_3$  : la fronce,
- $A_4$  : la queue d'aronde,
- $D_4$  : l'ombilic (dont Thom distingue deux sous-espèces),
- $A_5$  : le papillon,
- $D_5$  : le champignon.

## 5.5 Le contexte analytique (*i.e.* « plus-que-lisse »).

### 5.5.1 Principe du prolongement analytique.

Si le lisse est l'infiniment doux à la caresse, que peut bien être le plus-que-lisse ?

Eh bien, c'est ce dont la forme est si harmonieuse que le toucher ou la contemplation d'un fragment permet de deviner la forme entière !

Par exemple, les *fonctions analytiques* sont celles qui sont non seulement développables en puissances de la variable  $x$  à un ordre arbitraire, mais qui sont en fait sommes de leur série de puissances :  $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$  (on parle de même de *variété analytique*  $M$  (réelle ou complexe), de fonction analytique  $f$  sur  $M$ , etc...).

Le *principe de prolongement analytique*<sup>14</sup> assure que si on étend un germe de fonction analytique sur  $M$  le long d'un chemin tracé sur  $M$ , ce prolongement ne change pas si on déforme le chemin, à extrémités fixées.

En revanche, le long de deux chemins non déformables l'un sur l'autre, on peut très bien aboutir à deux valeurs différentes de la fonction. On a déjà vu ces ambiguïtés galoisiennes en 1.2.1 et 3.3.2.

### 5.5.2 Comment les singularités disparaissent.

On connaît deux moyens de faire disparaître les « aspérités » en Géométrie, qu'on pourrait comparer à la « lime » et à la « dynamite » respectivement.

On peut parfois « limer » les singularités par déploiement (c'est par exemple le cas des singularités simples isolées d'hypersurfaces). Les « traces » qu'elles laissent en se déployant sont ces cercles évanescents évoqués en 5.4.2.

L'autre moyen, plus « brutal » mais qui marche toujours dans le cadre *analytique* en vertu d'un théorème fondamental de Hironaka (1964), est d'*éclater* les singularités.

L'exemple le plus simple d'éclatement est celui de l'origine  $O$  dans le plan : on remplace  $O$  par l'ensemble des droites passant par  $O$  (ensemble qui lui-même forme une droite projective, c'est-à-dire un cercle dans le cas réel), ce qui revient à faire le changement de variable  $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2/x_1)$ .

Partant d'une variété  $M$  ayant un lieu singulier  $\Sigma$  (qui peut être un point, ou une sous-variété de dimension quelconque), le procédé de désingularisation

<sup>14</sup>mis en forme par Weierstrass dans les années 1880.

de Hironaka<sup>15</sup> consiste à éclater une sous-variété lisse soigneusement choisie de  $\Sigma$ , et à itérer autant de fois qu'il le faut pour aboutir à une variété lisse  $\tilde{M}$ . On peut même s'arranger pour que l'image inverse de  $\Sigma$  dans  $\tilde{M}$  soit une réunion d'hypersurfaces<sup>16</sup> lisses  $H_i$  se coupant transversalement.

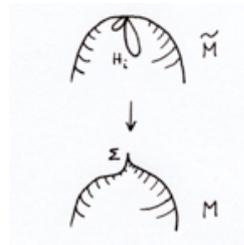


FIG. 5.14 –

Autrement dit,  $M$  s'obtient à partir de la variété analytique lisse  $\tilde{M}$  par contraction des hypersurfaces  $H_i$  sur  $\Sigma$ . Hors de  $\Sigma$  et des  $H_i$  respectivement,  $M$  et  $\tilde{M}$  coïncident. Les  $H_i$  sont en quelque sorte la « trace » que laisse le lieu singulier  $\Sigma$  en disparaissant par éclatement.

### 5.5.3 Le rôle des « groupes platoniciens ».

Soit  $G$  l'un des groupes finis suivants : le groupe cyclique des rotations d'un polygone à  $n$  côtés, le groupe diédral de toutes les symétries d'un tel polygone, l'un des trois groupes de symétries d'un solide platonicien (tétraèdre, cube/octaèdre, icosaèdre/dodécaèdre).

Le quotient du plan, fabriqué en identifiant des points au moyen de  $G$ , est singulier à l'origine (qui est un point fixe de  $G$ ). Là encore, la singularité se code au moyen des diagrammes de Dynkin  $A, D, E$  :

- $A_n$  correspond aux groupes cycliques,
- $D_n$  aux groupes diédraux,
- $E_6$  au groupe du tétraèdre,
- $E_7$  au groupe du cube,
- $E_8$  au groupe de l'icosaèdre.

Le principe de ce codage par les diagrammes est le suivant : dans une résolution par éclatements à la Hironaka, la singularité se transforme en un ensemble de droites projectives - c'est-à-dire de cercles dans le cas réel -, chacune étant figurée par un sommet du diagramme ; une arête relie deux sommets quand les cercles associés se touchent.

Au bout du compte - après ce qui a été dit plus haut des discriminants de singularités isolées simples et des catastrophes en Géométrie symplectique - , on voit que *la classification des catastrophes en toute dimension se ramène à celle des groupes platoniciens*. Retour au Timée de Platon ?

<sup>15</sup>dont la preuve a été progressivement considérablement simplifiée, voir J. Kollar, Lectures on Resolution of Singularities, 2007 ; le procédé a même été algorithmisé, voir <http://www.risc.uni-linz.ac.at/projects/basic/adjoints/blowup/index.html>

<sup>16</sup>c'est-à-dire de sous-variétés de dimension un de moins que la dimension de  $\tilde{M}$ .