# Chapitre 8

# Épilogue : s'orienter dans la pensée mathématique.

Qu'est-ce que s'orienter dans la pensée, pour un mathématicien ?

Comment le mathématicien s'oriente-t-il, de la recherche des questions fécondes à la formulation et à la démonstration des théorèmes ?

Du mystère à la théorie, quelles boussoles pour le guider ?[1]

En effleurant ces questions profondes de l'intellectualité mathématique[2], nous nous efforcerons surtout de mettre en lumière le rôle singulier qu'y joue *l'art des conjectures*. Hétérogènes à l'appareil déductif du discours mathématique, les conjectures ont un statut heuristique transitoire et semblent suspendues à leur mystérieux pouvoir d'énonciation ; telles des phares, elles pointent une cible sans indiquer le chemin qui y mène.

Avant d'aborder notre thème proprement dit, il va nous falloir déblayer un peu le terrain, en tentant de récuser deux des préjugés les plus courants sur les Mathématiques.

## 8.1 L'arbuste.

Le premier préjugé que nous avons en vue a trait à l'*architecture* des Mathématiques. Nous l'épinglerons par l'image de « l'arbuste des mathématiques ». En référence, bien sûr, à la célèbre image cartésienne de l'arbre de la philosophie[3]. Rappelons-nous : l'arbre dont les racines sont la métaphysique ; le tronc, la physique ; les branches : la morale, la médecine, la mécanique, chacune ayant ses fruits. Et les mathématiques, dans cette image cartésienne ? Elles sont la sève de l'arbre.

[1] cet épilogue est la version abrégée d'un article intitulé « Le problème de l'orientation dans la pensée mathématique et l'art des conjectures » à paraître au journal *Synthèse*.

[2] et en nous limitant aux Mathématiques dites pures - donc en laissant de côté tout ce qui touche aux applications.

[3] *Principes de la Philosophie*, lettre-préface.

L'arbuste des mathématiques, lui, aurait pour racines la Logique, pour tronc la Théorie des ensembles, et pour branches l'Algèbre, l'Analyse, la Géométrie.

Nous voudrions soulever quatre objections contre cette image.

1ère objection : cette image rend compte de manière totalement faussée de l'état des lieux, en paraissant donner un rôle central et nourricier à la Logique et à la Théorie des ensembles. En réalité,
*i*) ces deux disciplines occupent une place à la fois marginale et relativement congrue dans le paysage mathématique (ce qui n'ôte rien à leur intérêt propre) ;
*ii*) loin d'entretenir un rapport nourricier avec la « grande composante connexe » des Mathématiques (Algèbre, Théorie des nombres, Géométrie algébrique et différentielle, Topologie algébrique et différentielle, les grands domaines de l'Analyse linéaire et non-linéaire, *etc*...), elles en sont presque disconnectées (*cf.* 7.2.5) ;

Si l'on tenait à l'image de l'arbuste, il faudrait du moins convenir que la fascinante unité des Mathématiques n'est pas fondée sur une racine ou un tronc, mais sur la circulation d'une mystérieuse sève entre les nombreux rameaux qui forment la « grande composante connexe ».

2ème objection : contre le *réductionnisme* qui accompagne cette image. Ce réductionnisme, qui opère en deux mouvements, est surtout le fait d'un certain courant d'épistémologie bien implanté ; nous appellerons ses adeptes les « épistémologues courants » (en empruntant le mot à A. Badiou).

Le premier mouvement de réduction est l'*élagage de l'arbuste* : ces « épistémologues courants », tout préoccupés de fondements, se figurent que pour penser les Mathématiques, il suffit, si celles-ci reposent sur la Logique et la Théorie des ensembles, de ne retenir que ces dernières en ignorant tout le reste. Ce « reste » ne serait qu'épiphénomènes laissés aux techniciens.

Une fois ce sciage de branches effectué, ils sont alors aussi bien placés pour parler des fondements des Mathématiques que le serait un sourd n'ayant jamais ouvert une partition, mais possédant son solfège, pour parler des fondements de la musique !

Or voici, après l'élagage, le second mouvement de réduction, le *rabougrissement de l'arbuste* : pour « améliorer » encore leur point de vue, nos « épistémologues courants » se sont avisés qu'on ne comprend jamais si bien un domaine de la pensée qu'à travers ses crises. Dès lors, ils focalisent toute leur attention sur la petite trentaine d'années dite de « la crise des fondements », au début du siècle dernier.

À les lire, on a souvent l'impression que les Mathématiques furent pendant une génération entière comme frappées de tétraplégie, jusqu'à ce que l'organe central, la Logique, eût enfin réparé les ravages causés par le traumatisme des paradoxes. Il est à peine besoin de mentionner à quel point cette vision est fausse, absurde, ridicule : le début du XXe fut en réalité une époque extraordinairement fertile, qui vit la naissance de l'Algèbre abstraite, de l'Analyse abstraite, de la Topologie générale et algébrique, *etc*...

3ème objection : contre le *caractère de fondement de la Logique*. A. Lautman avait soutenu dès 1937

> cette idée que la véritable logique n'est pas *a priori* par rapport aux mathématiques mais qu'il faut à la logique une mathématique pour exister.

Cette idée trouve dans les travaux contemporains très influentiels de J.-Y. Girard, créateur de la Logique linéaire, une confirmation éloquente. Outre ses objections vigoureuses contre le piètre fondement que constitue la traditionnelle régression à l'infini des méta-, méta-méta-théories logiques, se soutenant l'une l'autre en gigogne, mentionnons son programme actuel qui, renversant l'image traditionnelle, vise à fonder la Logique sur les Mathématiques, et les Mathématiques parmi les plus avancées : la Géométrie non commutative[4].

Il y a un autre aspect de l'évolution de la Logique mathématique qui conduit à lui dénier tout statut spécial *a priori*, c'est le rôle récent et de plus en plus important qu'elle joue en informatique théorique, qui n'est pas du tout celui d'un fondement, mais celui d'un outil au service de l'invention de nouveaux langages de programmation ou d'algorithmes...

À notre sens, c'est une émancipation : enfin des rôles créatifs et non plus de soutènement ! Le logicien Atlas est libéré, sans que la voûte des Mathématiques ne s'effondre dans le Tartare !

4ème objection : *contre l'illusion de la recherche « essentialiste » de fondements immuables*. Pendant qu'Atlas s'en est allé cueillir les pommes de silicium au jardin de l'informatique, il n'est nul besoin qu'un Hercule le remplace...

Nous ne développerons pas ce point, qui nous entraînerait trop loin, et nous contenterons de remarquer que la critique la plus radicale à cet égard est celle d'Alain Badiou, pour qui il ne saurait être question de fondements ontologiques sur lesquels s'appuieraient les Mathématiques : en effet, la thèse inaugurale de son livre *L'être et l'évènement* - d'une radicalité stupéfiante pour un mathématicien - est justement l'identité : Mathématiques = Ontologie ; plus précisément :

> les mathématiques sont l'historicité du discours sur l'être-en-tant-qu'être.

Voilà pour les objections contre l'image de « l'arbuste des mathématiques ».

## 8.2 Le tricotin.

Venons-en au second préjugé, qui touche non plus à l'architecture des Mathématiques vivantes, mais à sa *nature* même. Nous épinglerons ce préjugé par l'image du « tricotin », ce jouet de bois jadis populaire, portant quatre épingles, à l'aide duquel on tricotait indéfiniment une tresse de laine, la seule variation possible étant celle des couleurs des fils enroulés autour des épingles.

Ce que nous visons ici, c'est une certaine forme vulgaire de logicisme, et cette image des Mathématiques qu'elle véhicule : des axiomes enroulés ad libitum autour de quatre épingles, tricotés indéfiniment en une tresse ininterrompue de vérités qui s'en déduisent, modus ponens, modus tollens, maille à l'endroit, maille à l'envers !...

[4]voir *Le point aveugle*.

Nous voudrions de nouveau soulever quatre objections contre cette image.

1$^{\text{ère}}$ objection. Certes, le discours mathématique est un discours déductif, qui soumet ses énoncés à un ordre rigoureux. Mais l'image du tricotin omet un point évident (déjà chez Euclide) : à savoir qu'un texte mathématique n'est pas un enchaînement uniforme d'implications, mais apparaît polarisé entre « énoncés » d'un côté, et « démonstrations » de l'autre ; en outre, le côté « énoncé » est lui-même stratifié suivant une hiérarchie d'importance et de profondeur, en lemmes, propositions, théorèmes, corollaires. Ni cette polarisation, ni cette hiérarchie, qui percent l'universalité égalitaire du texte ne résultent d'une loi formelle, mais de choix délicats du mathématicien qui vont bien plus loin que de simples choix rédactionnels ou de style.

2$^{\text{ème}}$ objection : contre le *réductionnisme* du logicisme vulgaire, qui consiste à réduire les Mathématiques à la suite de symboles dont est tricoté le texte mathématique, et aux règles élémentaires du tricotage.

Certes, c'est une singularité de la Mathématique parmi les sciences que s'être *dotée d'une écriture propre* (on peut en dire autant de la musique parmi les arts). Pour autant, elle ne se réduit pas à son écriture.

Rien n'empêche, certes, d'étudier de manière purement formelle un certain discours mathématique idéalisé, comme le fait notamment la Théorie de la démonstration ; pourvu qu'on ne prétende pas représenter ainsi la pensée mathématique, ni même les démonstrations réelles des mathématiciens, - mais seulement leur trace formelle.

Une des aberrations les plus visibles de ce réductionnisme grossier est de faire table rase de toute heuristique, à commencer par l'opposition, si fondamentale dans la pensée du mathématicien, entre le trivial et le profond.

3$^{\text{ème}}$ objection : la démonstration, celle pratiquée par le mathématicien au travail, n'est pas un processus formel, elle ne tient pas de la bureaucratie des formules et des procès-verbaux. Démonstration n'est pas identique à vérification.

Certaines vérifications peuvent être automatisées. La démonstration présuppose une idée - ce que les mathématiciens appellent une idée de démonstration - , même si elle se réduit à un calcul. Les mathématiciens savent bien, d'ailleurs, qu'il y a des démonstrations de qualités bien différentes - indépendamment des questions de rigueur -, et ils passent beaucoup de temps à reprouver des théorèmes connus. Les démonstrations les plus frustes - et frustrantes - sont celles qui se réduisent à un calcul : elles emportent conviction, certes, mais il reste à comprendre le calcul lui-même - *pourquoi* cela marche. À l'autre extrême, il y a des démonstrations qui illuminent, qui ouvrent des horizons.

4$^{\text{ème}}$ objection : contre l'arbitraire des axiomes. Que sont les axiomes, en fait ? Ce sont des parties constitutives de la définition d'un concept, ou plus largement d'un cadre conceptuel mathématique. Or les mathématiciens sont généralement de grands adeptes du rasoir d'Ockham, et détestent la multiplication gratuite des concepts (et donc des axiomes) ; ils travaillent assidûment à la recherche du « bon cadre conceptuel », qui fait l'objet de débats passionnés entre spécialistes, et est tout sauf arbitraire. Les changements de systèmes d'axiomes correspondent à des changements de cadre conceptuel, à des mutations de point de vue, hautement significatifs pour l'histoire de la discipline. Si, suivant Cantor,

> l'essence des Mathématiques, c'est la liberté,

la liberté du mathématicien ne consiste certainement pas dans l'arbitraire et le gratuit.

## 8.3 Brouillards et analogies.

Nous sommes maintenant prêts à aller au cœur du sujet de ce chapitre. Nous irons vite, pour arriver enfin aux conjectures ; qu'on nous pardonne de commencer un peu comme un catéchisme !

– Qu'est-ce qui meut le mathématicien dans sa pensée ?

– Le désir.

– Quel désir ?

– Le désir de comprendre.

– Comprendre quoi ?

– Certaines choses concernant les objets mathématiques, et surtout les mystères de leurs rapports mutuels.

– Et ce qui excite ce désir ?

– Le mystère même ; le mystère qui enflamme l'imagination, qui elle-même fait surgir les idées nouvelles, qui déchireront le voile.

La plupart du temps, il est vrai, cette pêche au mystère, cette recherche des problèmes, n'est qu'un cabotage le long des côtes bien familières des théories constituées. Souvent aussi, il s'agit de la recherche d'un isthme entre deux terres connues mais jusque-là séparées. Quelquefois, il s'agit vraiment de pêche en eaux profondes.

Ce qui s'y joue, A. Weil l'a peint dans un célèbre passage[5] :

> Rien n'est plus fécond, tous les mathématiciens le savent, que ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une théorie à l'autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables ; rien aussi ne donne plus de plaisir au chercheur. Un jour vient où l'illusion se dissipe ; le pressentiment se change en certitude ; les théories jumelles revèlent leur source commune avant de disparaître ; comme l'enseigne la *Gita*, on atteint à la connaissance et à l'indifférence en même temps. La métaphysique est devenue mathématique, prête à former la matière d'un traité dont la beauté froide ne saurait plus nous émouvoir. [...] Heureusement pour les chercheurs, à mesure que les brouillards se dissipent sur un point, c'est pour se reformer sur un autre.

Ainsi, ces « obscures analogies » conditionnent-elles, orientent-elles à la façon d'une boussole - mais encore dans le trouble - le cheminement de la pensée mathématique.

## 8.4 Points de vue féconds.

C'est là, dans le passage mystérieux des troubles reflets initiaux à la découverte de questions, notions, théorèmes nouveaux, que se pose la question de

[5] De la métaphysique aux mathématiques, 1960.

l'orientation de la pensée mathématique. Le jour « où l'illusion se dissipe » n'advient qu'après la longue patience de ce travail d'orientation. A. Grothendieck a admirablement décrit le rôle qu'y joue *la recherche de points de vue féconds*[6] :

> [...] ces innombrables questions, notions, énoncés [...] ne prennent [...] un sens qu'à la lumière d'un tel « point de vue » - ou pour mieux dire, ils en naissent spontanément, avec la force de l'évidence. [...] Le point de vue fécond est celui qui nous révèle, comme autant de parties vivantes d'un même Tout qui les englobe et leur donne un sens, ces questions brûlantes que nul ne sentait, et (comme en réponse peut-être à ces questions) ces notions tellement naturelles que personne n'avait songé à dégager, et ces énoncés enfin qui semblent couler de source, et que personne ne risquait de poser, aussi longtemps que les questions qui les ont suscités, et les notions qui permettent de les formuler, n'étaient pas apparues encore. Plus encore que ce qu'on appelle les théorèmes-clef en Mathématique, *ce sont les points de vue féconds qui sont, dans notre art, les plus puissants outils de découverte - ou plutôt, ce ne sont pas des outils, mais ce sont les yeux même du chercheur qui, passionnément, veut connaître la nature des choses mathématiques*.

## 8.5 Conjectures.

se perdre en conjectures...

L'idée que nous voudrions développer est que dans cette traversée « de la métaphysique aux mathématiques », comme disait Weil, dans ce long cheminement labyrinthique allant des brouillards vers la clarté du théorème, ce qui oriente la pensée non plus à la manière d'une boussole, mais *comme un phare éclairant de loin la petite porte cachée qui ouvre sur la clarté*, c'est la conjecture. Aux avant-postes de ces points de vue dont parle Grothendieck, les conjectures marquent et éclairent un but... mais pas du tout le chemin pour l'atteindre.

« Conjecture » a un sens bien précis en Mathématiques. Il s'agit d'un *énoncé destiné à devenir un théorème.* Ce qui manque encore, c'est la démonstration.

La conjecture fait donc partie du domaine heuristique. Son existence, en tant que conjecture, est en principe transitoire. Elle n'a aucune place dans l'image logiciste des Mathématiques.

Une fois la conjecture formulée, la question de l'orientation de la pensée dans cette aventure mathématique devient celle de la recherche de stratégies de démonstration (ou de réfutation, éventuellement !). Après maint tatônnement, on a fini par mettre un doigt sur le nœud du mystère, on en a un condensé formulé, un précipité ; et l'aventure se poursuit sur un mode plus concret et souvent plus technique.

Cela peut même se traduire par un relais des compétences : les conjectures sont souvent ce point où les « theory-builders » (les bâtisseurs de théories) passent le relais aux « problem-solvers » (les résolveurs de problèmes). Mais le cycle se referme : la résolution des grandes conjectures s'accompagne souvent d'idées tout

[6] Récoltes et Semailles.

à fait nouvelles, dont l'approfondissement est alors l'occasion d'un passage de relai dans l'autre sens.

*Critères.* Pour être acceptée comme telle, une conjecture doit satisfaire à certains critères (qui naturellement sont bien différents des critères de vérité, de preuve rigoureuse, exigés pour un théorème). Nous en distinguerons quatre :

1) puisqu'elle est censée devenir, telle quelle, un théorème, son énonciation doit satisfaire aux *mêmes critères formels que ceux d'un théorème* : précision, absence d'ambiguïté, unité interne. Ce n'est pas une simple question.

2) À défaut de preuve, elle doit être accompagnée de ce qu'on appelle en anglais « *some evidence* » (ce qui n'est pas de l'évidence, mais ce qu'on pourrait traduire par « témoignage en faveur de » ou « bien-fondé heuristique »). Cette « evidence » peut être de nature diverse et hétérogène : il peut s'agir d'expérimentations (numériques ou non), de la démonstration de cas particuliers, ou encore d'analogies précises avec des énoncés qui sont déjà des théorèmes.

3) La conjecture doit être *en situation*, se rapporter à un problème identifié. On doit pouvoir lui attribuer une portée non nulle. Cela exclut les simples devinettes.

4) En formulant une conjecture, l'auteur de la conjecture s'engage, *prend parti*. C'est une sorte de pari. La réputation de l'auteur, comme expert et comme visionnaire, joue un rôle certain dans l'obtention de l'assentiment de la communauté. Ce dernier critère doit toutefois être nuancé. Notamment lorsqu'il s'agit de conjectures anciennes - parfois présentées par leurs auteurs comme des questions intéressantes « qui les entraîneraient trop loin » ; c'est la postérité qui en a fait des conjectures.

*Gestes.* Nous avons parlé, à propos de conjecture, de condensation, de prédiction, d'engagement, de pari. La conjecture, par nature transitoire, est suspendue au mystérieux pouvoir de son énonciation. G. Châtelet écrivait ceci

> les vérités mathématiques sont bien éternelles, mais leur conquête, en vue de leur stratification dans un savoir, présuppose des gestes qui les font ressortir pour les arracher au tissu de l'Être.

Ainsi sont ces gestes qui posent les conjectures architectoniques : gestes qui captent et qui pointent. Et qu'il ne faut pas confondre avec ces évènements capitaux, ces grands catalyseurs de la pensée mathématique, que sont les irruptions d'idées nouvelles ; autres gestes : déchirure, coup d'aile.

*Typologie.* En tant que « phares », les conjectures sont de portée très variable. Les plus puissantes sont celles que nous appellerons, en suivant le mathématicien B. Mazur, *architectoniques* : elles façonnent le paysage conjectural d'un domaine.

Parfois, elles engendrent de véritables programmes de travail mettant en jeu de nombreux mathématiciens, ce qu'on a pu ironiquement appeler les *plans quinquénaux* des Mathématiques.

Par ailleurs, il arrive dans certains domaines mathématiques que les conjectures ne soient pas isolées, mais nombreuses et liées les unes aux autres par des liens logiques ou heuristiques très forts ; c'est typiquement le cas dans la Théorie des « motifs », créée par Grothendieck, où les conjectures forment comme l'armature idéale dans laquelle s'échafaude la théorie.

*Exemple.* Nous aimerions mentionner brièvement au moins un exemple emblématique de conjecture architectonique : la conjecture de W. Thurston (1976)[7] qui dessine le paysage de la Géométrie en dimension 3. Elle prédit qu'il y a huit modèles-type et huit seulement, dont toute variété de dimension trois se déduit, après découpage canonique et identifications par symétries ; en outre, le modèle-type dont dépend telle variété donnée est déterminé par la structure algébrique de son groupe fondamental (*cf.* 3.3.2).

Les récents travaux d'Analyse de G. Perelman permettent de démontrer cette conjecture (les experts sont en train de vérifier les derniers détails)[8].

## 8.6 Conclusion.

On sera peut-être surpris de n'avoir pas entendu, jusqu'à ce point, de tirade sur la beauté des Mathématiques, comme aiment à les faire les mathématiciens. C'est que, s'il est aisé de chanter l'épithalame de la beauté et de la vérité en Mathématiques, il semble bien difficile de *penser* leur union, ou même de marquer les modalités précises de rencontre entre elles.

En guise de conclusion, nous voudrions hasarder que les conjectures architectoniques illustrent la modalité suivante :

*Beauté, promesse de vérité.*

Il ne s'agit que d'une « conjecture » ! Et la seule « evidence » que nous avons à verser au dossier, c'est que nous ne connaissons pas d'exemple de conjecture architectonique qui se soit révélée fausse ! Ce qui étaie quelque peu le sentiment fréquent du mathématicien devant les grandes idées heuristiques : « c'est trop beau pour être faux »[9].

Et même si cela arrivait, ce serait peut-être encore plus intéressant - que le bouleversement complet de nos conceptions dans le domaine qu'elle éclaire conduise à une nouvelle traversée du désert, ou bien qu'elle s'accompagne de la découverte d'une réalité mathématique insoupçonnée. Du reste, l'essentiel n'est peut-être pas d'atteindre le but marqué par la conjecture : il est plutôt dans les *idées nouvelles* qui surgissent dans l'effort déployé vers ce but, et dont la portée peut dépasser celle de la conjecture originaire au point de rendre celle-ci dérisoire.

Une des sources de la beauté en Mathématiques réside dans la cohérence et l'harmonie. Il en est ainsi dans ces constellations de conjectures que nous évoquions. Voici, pour finir, ce qu'en dit Grothendieck (*op. cit.* p. 211), grand maître ès conjectures s'il en fut :

---

[7] conjecture qui date des années 70 et contient la fameuse conjecture de Poincaré (1905) comme cas particulier.

[8] l'histoire de la conjecture est contée, en évitant les aspects techniques, sur http ://images.math.cnrs.fr/Geometriser-l-espace-de-Gauss-a.html. Voir aussi G. Szpiro, *La conjecture de Poincaré : Comment Grigori Perelman a résolu l'une des plus grandes énigmes mathématiques*, Lattès.

[9] dans l'autre sens, il arrive fréquemment en recherche que l'on écarte d'emblée telle ligne d'attaque d'un problème en raison de son manque d'élégance. Sur le rôle des considérations esthétiques dans « l' invention mathématique », on pourra lire le bel article de Poincaré portant ce titre (1908).

Dix choses soupçonnées seulement, dont aucune [...] n'entraîne conviction, mais qui mutuellement s'éclairent et se complètent et semblent concourir à une même harmonie encore mystérieuse, *acquièrent dans cette harmonie force de vision*. Alors même que toutes les dix finiraient par se révéler fausses, le travail qui a abouti à cette vision provisoire n'a pas été fait en vain...