Coupure enharmonique, complétude et applications

François Durand

3 mai 2012

Table des matières

Avant-propos

Ce document est un rapport de recherche. Il ne s'agit pas d'un produit définitif : son seul but est de permettre aux personnes intéressées de prendre connaissance de nos travaux et d'engager les discussions pour de futures collaborations. Nous prions le lecteur de nous excuser pour son style assez sec et pour les inévitables erreurs qui s'y seront glissées.

Nous demandons également au lecteur mathématicien de nous pardonner certaines légèretés : par exemple, dans toutes les définitions, nous écrivons « nous dirons A si B » au lieu de « nous dirons A si et seulement si B ».

Nous proposons un fascicule séparé pour les annexes. Celles-ci font partie intégrante de notre travail : si le présent document en expose la méthode, elles en constituent le principal résultat. Les deux parties de l'ouvrage sont conçues pour être ouvertes simultanément et consultées en va-et-vient permanent.

Bonne lecture !

Introduction

Dans cet ouvrage, nous développons une théorie harmonique qui est à la fois tempérée, c'est-à-dire que le tempérament égal à douze notes est considéré comme acquis, et diatonique, c'est-à-dire que l'ajout d'une huitième note dans un empilement de quintes successives constitue une forme de rupture, une singularité, un événement de toute première importance. Pour en rendre compte, nous adoptons l'hypothèse que l'écriture habituelle des notes, avec sept lettres et des altérations, rend compte d'un phénomène musical extrêmement profond, même en tempérament égal.

En cela, notre théorie diffère totalement de la *set theory*, bien que les deux approches ne soient pas exclusives l'une de l'autre. En particulier, il nous semble que des relations comme l'inversion, la prise du complémentaire, la Z-relation, bien que fort intéressantes à bien des égards, conservent bien moins l'identité sonore d'un ensemble de notes qu'une relation comme la *complétion*, que nous allons présenter et qui ne peut être définie que dans un cadre diatonique.

Ces travaux sont également assez éloignés des théories riemanniennes ou néo-riemanniennes, notamment parce que nous accordons une importance limitée à l'intervalle de tierce. Nous pensons que c'est un avantage car les théories traditionnelles rencontrent de nombreuses difficultés pour analyser avec pertinence les accords non obtenus par empilement de tierces, y compris pour des configurations qui semblent tout à fait consonantes à une oreille occidentale actuelle.

Toute une tradition d'analyse musicale, au moins depuis Rameau voire Pythagore, fait de la série des harmoniques naturelles le noyau incontournable de la génération des accords. Encore aujourd'hui, même dans la théorie dominante en jazz, la caractérisation d'un accord se fait par la tierce et la septième, les autres notes étant généralement considérées comme des extensions. Or, il nous semble que ce point de vue n'est pas conforme à l'expérience musicale, comme nous allons l'exposer. Sans nier l'importance de ce phénomène physique, nous proposons une théorie dont il ne constitue pas la fondation ultime.

Dans certaines de ses conclusions, mais non dans ses méthodes, notre théorie se rapproche des travaux de George Russell, en particulier son ouvrage intitulé *Lydian Chromatic Concept of Tonal Organization*. La principale question étudiée par Russell est la suivante : étant donné un accord, quelles gammes utiliser pour improviser par-dessus ? Sur ce point, nos conclusions présentent de nombreuses similitudes mais au moins deux différences : d'une part, notre approche non normative se borne à souligner des similitudes sonores entre différents types de situation, sans émettre de recommandation ; d'autre part, elle permet de se prononcer sur tout ensemble de notes. Par ailleurs, quand les conclusions sont identiques, nous pensons que notre cadre théorique permet d'y arriver de façon plus simple et plus élégante.

Chapitre 1

Collections de notes

Dans tout cet ouvrage, sauf mention contraire :

– nous nous placerons en tempérament égal à douze notes ;

– nous considérerons comme valide le principe d'équivalence des octaves.

Ainsi, nous appellerons **note** une classe de notes considérée à octave près (*pitch class*), en tempérament égal à douze notes. En ce sens, il n'existe que douze notes différentes. Quand nous parlerons de **transposition**, sauf mention contraire, il ne sera donc pas tenu compte des questions d'enharmonie.

1.1 Définitions des collections de notes

Définition 1.1 *Nous appellerons **ensemble pointé** une collection non vide de notes, dont l'une est désignée pour jouer un rôle particulier*[1].

Exemple 1.2 $(C, \{D, E, F, G, A, B\})$ *est un ensemble pointé, la gamme ionienne de C. En pratique, nous le noterons* $\boxed{\boldsymbol{C}}$ *D E F G A B ou même C D E F G A B.*

Un ensemble pointé servira à représenter une gamme, c'est-à-dire un ensemble de notes dont l'une est désignée comme point de départ et/ou d'arrivée, ou un accord, c'est-à-dire un ensemble de notes dont l'une est désignée comme la basse. Dans cette représentation, on remarquera qu'on ne tient pas compte de l'agencement des notes au-dessus de la basse.

Définition 1.3 *Nous appellerons **mode** un ensemble pointé considéré à transposition près*[2].

Exemple 1.4 *Les ensembles pointés C D E F G A B et G A B C D E F♯ représentent le même mode : la gamme ionienne.*

1. Formellement, un ensemble pointé est la donnée d'un ensemble de notes $\mathcal{E}$ et d'une fonction d'arité 0 vers $\mathcal{E}$, c'est-à-dire une fonction constante qui renvoie un élement x_0 de $\mathcal{E}$. En pratique, on peut le représenter par le couple $(x_0, \mathcal{E} \setminus x_0)$, c'est-à-dire un couple $(x_0, \mathcal{F})$, où $x_0 \notin \mathcal{F}$.

2. En termes mathématiques, l'ensemble des modes est le quotient de l'ensemble des ensembles pointés par la transposition.

Définition 1.5 *Nous appellerons* ***ensemble*** *une collection non vide de notes*[3]*.*

Exemple 1.6 $\{C, D, E, F, G, A, B\}$ *est un ensemble. Il engendre les ensembles pointés de C ionien, D dorien, etc. En pratique, si cela ne crée pas de confusion dans le contexte, nous le noterons simplement C D E F G A B.*

Définition 1.7 *Nous appellerons* ***supermode*** *un ensemble considéré à transposition près*[4]*.*

Exemple 1.8 (et définition) *Les ensembles pointés C D E F G A B et D E F♯ G A B C représentent le même supermode. En effet, en transposant le premier d'une quinte vers le haut, on obtient les notes du second. Nous l'appelons le* ***supermode heptaphonique naturel*** *(de telles conventions sont résumées dans l'annexe A).*

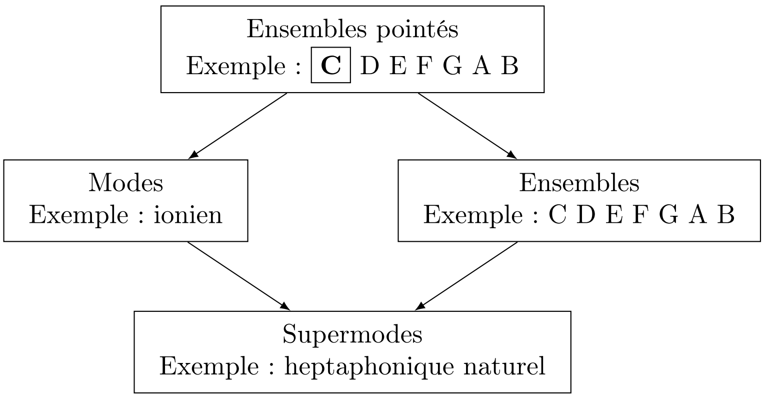


FIGURE 1.1 – Les différents types de collections de notes

Dans la figure 1.1, chaque flèche représente un niveau de généralisation. Par exemple, à chaque mode correspond plusieurs ensembles pointés (ses différentes transpositions) : nous dirons que la notion de mode est plus générale, ou plus abstraite, que celle d'ensemble pointé.

Quand on définit certaine propriété sur une catégorie générale, elle s'étend naturellement aux niveaux plus particuliers. Par exemple, si on définit le nombre de notes d'un ensemble de façon usuelle, il n'est alors plus nécessaire de définir le nombre de notes d'un ensemble pointé : c'est simplement le nombre de notes de l'ensemble correspondant.

Réciproquement, quand on définit certaine propriété sur une catégorie particulière, il est fréquent qu'elle s'étende naturellement aux niveaux plus généraux. Par exemple, tous les ensembles réprésentant le même supermode ont le même

3. Nous choisissons d'exclure l'ensemble vide, d'une part parce que son intérêt musical est sujet à caution — sauf peut-être dans *4'33"*, d'autre part parce qu'il n'engendre aucun ensemble pointé.

4. En termes mathématiques, l'ensemble des supermodes est le quotient de l'ensemble des ensembles par la transposition. C'est aussi le quotient des modes par le changement de note distinguée.

nombre de notes : nous pouvons donc parler sans ambiguïté du nombre de notes d'un supermode.

Dans la suite de cet ouvrage, nous ne préciserons pas toujours qu'une notion définie pour un de ces niveaux de généralisation s'étend naturellement à certains autres ou à tous les autres. La plupart du temps, ce sera évident et une telle mention alourdirait inutilement l'exposé.

1.2 Périodicité

Définition 1.9 *Soit p un nombre entier naturel qui divise 12. Nous dirons qu'un ensemble est* ***p-périodique*** *si cet ensemble est stable par une transposition de p demi-tons. Dans ce cas, nous dirons également qu'il possède une* ***symétrie de rotation d'ordre*** *q, où $q = \frac{12}{p}$.*

Puisque nous considérons les notes à octave près, remarquons que tout ensemble est 12-périodique.

Définition 1.10 *Nous appellerons* ***période*** *d'un ensemble le plus petit entier naturel p pour lequel cet ensemble est p-périodique. Nous appellerons* ***ordre*** *d'un ensemble le nombre $q = \frac{12}{p}$, où p est sa période.*

Les notions 1.9 et 1.10 s'étendent naturellement aux ensembles pointés, aux modes et aux supermodes.

Exemple 1.11 *L'ensemble C E♭ G♭ A est 3-périodique (stable par transposition d'une tierce mineure), 6-périodique (stable par transposition d'un triton) et 12-périodique. Sa période est donc 3.*

Il est classique que si un ensemble est p'-périodique, alors il est de période p si et seulement si p' divise p, ce qu'on note $p' \mid p$.

Définition 1.12 *Nous dirons qu'un ensemble est* ***à transposition limitée*** *si sa période est strictement inférieure à 12.*

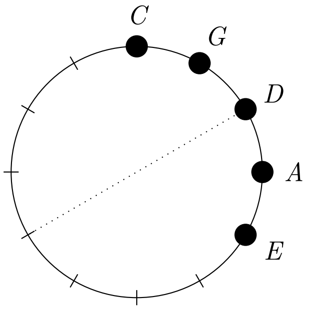
1.3 Symétrie miroir

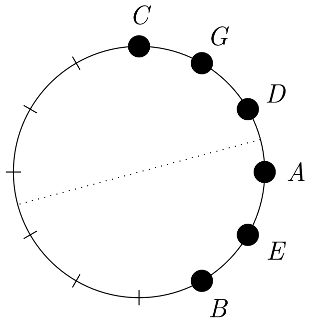
Définition 1.13 *Nous dirons qu'un ensemble possède une* ***symétrie miroir impaire*** *si, dans le cercle chromatique (ou le cycle des quintes), il possède un axe de symétrie qui passe par une note du cercle.*

Nous dirons qu'un ensemble possède une ***symétrie miroir paire*** *si, dans le cercle chromatique (ou le cycle des quintes), il possède un axe de symétrie qui ne passe pas par une note du cercle.*

Nous dirons qu'un ensemble possède une ***symétrie miroir*** *s'il possède l'une ou l'autre.*

Exemple 1.14 *L'ensemble C D E G A possède une symétrie miroir impaire. L'ensemble C D E G A B possède une symétrie miroir paire.*



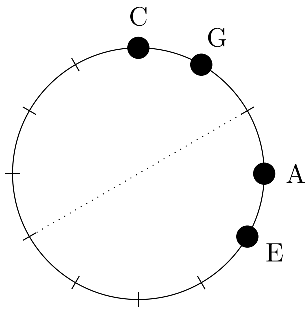


Propriété 1.15 *Un ensemble qui possède une symétrie miroir paire possède un nombre pair de notes.*

En revanche, un ensemble qui possède une symétrie miroir impaire peut posséder un nombre impair ou un nombre pair de notes.

Preuve La première phrase est triviale, puisque dans ce cas, chaque note d'un côté de l'axe possède une et une seule contrepartie de l'autre côté.

En revanche, pour la symétrie impaire, 0, 1 ou 2 notes de l'ensemble peuvent se trouver sur l'axe lui-même, ce qui modifie la parité. Voici un exemple avec un nombre pair de notes.



Et nous en avons déjà vu un avec un nombre impair de notes. ∎

1.4 Cardinaux des collections de notes

Définition 1.16 *Pour p un nombre entier naturel qui divise 12, nous noterons :*
- *P_p le nombre d'ensembles pointés de période p,*
- *M_p le nombre de modes de période p,*
- *E_p le nombre d'ensembles (éventuellement vides) de période p,*
- *S_p le nombre de supermodes (éventuellement vides) de période p.*

Propriété 1.17 *Pour p un nombre entier naturel qui divise 12 :*

$$P_p = 12 \times 2^{p-1} - \sum_{p'|p, p' \neq p} P_{p'}.$$

Preuve Pour faire un ensemble pointé p-périodique, il faut et il suffit de choisir une note distinguée parmi les douze notes du tempérament, puis de prendre ou rejeter chacun des $p-1$ demi-tons au-dessus d'elle ; il y a donc $12 \times 2^{p-1}$ possibilités. Pour obtenir seulement les ensembles pointés de période p, il faut retrancher de ce compte les ensembles pointés qui sont également p'-périodiques pour un p' plus petit. ∎

Propriété 1.18 *Il existe 24 576 ensembles pointés.*

Preuve Pour faire un ensemble pointé, il faut choisir une note distinguée parmi les douze notes du tempérament, puis prendre ou rejeter chacune des onze autres notes. Le cardinal cherché est donc $12 \times 2^{11} = 24\,576$. ∎

Propriété 1.19 *Pour p un nombre entier naturel qui divise 12 :*

$$M_p = 2^{p-1} - \sum_{p' | p, p' \neq p} M_{p'}.$$

Preuve Pour faire un mode p-périodique, le choix de la note distinguée n'a aucune importance, puisqu'on peut transposer. Il faut et il suffit de prendre ou rejeter chacun des $p-1$ demi-tons au-dessus d'elle ; il y a donc 2^{p-1} possibilités. Pour obtenir seulement les modes de période p, il faut retrancher de ce compte les modes qui sont également p'-périodiques pour un p' plus petit. ∎

Propriété 1.20 *Il existe 2 048 modes.*

Preuve Le choix de la note privilégiée n'a aucune importance. Il faut et il suffit de prendre ou rejeter chacune des onze autres notes. Le cardinal cherché est donc $2^{11} = 2\,048$. ∎

Propriété 1.21 *Pour p un nombre entier naturel qui divise 12 :*

$$E_p = 2^p - \sum_{p' | p, p' \neq p} E_{p'}.$$

Preuve Pour un ensemble p-périodique, on doit et on ne peut choisir que p notes indépendamment, ce qui donne 2^p possibilités. Pour avoir les ensembles de période p, il faut retrancher de ce compte les ensembles qui sont également p'-périodiques pour un p' plus petit. ∎

Propriété 1.22 *Il existe 4 095 ensembles (non vides).*

Preuve Il faut et il suffit de prendre ou rejeter chacune des douze notes, ce qui donne $2^{12} = 4\,096$ possibilités en comptant l'ensemble vide. ∎

Propriété 1.23 *Pour p un nombre entier naturel qui divise 12 :*

$$S_p = \frac{1}{p} \times E_p.$$

Preuve Chaque ensemble de période p possède exactement p transpositions différentes qui correspondent au même supermode. ∎

Propriété 1.24 *Il existe 351 supermodes (non vides).*

Preuve Il suffit d'appliquer les formules 1.21 et 1.23.
$E_1 = 2^1 = 2.$
$E_2 = 2^2 - E_1 = 4 - 2 = 2.$
$E_3 = 2^3 - E_1 = 8 - 2 = 6.$
$E_4 = 2^4 - E_1 - E_2 = 16 - 2 - 2 = 12.$
$E_6 = 2^6 - E_1 - E_2 - E_3 = 64 - 2 - 2 - 6 = 54.$
$E_{12} = 2^{12} - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - E_6 = 4\,096 - 2 - 2 - 6 - 12 - 54 = 4\,020.$
$S_1 = \frac{E_1}{1} = \frac{2}{1} = 2.$
$S_2 = \frac{E_2}{2} = \frac{2}{2} = 1.$
$S_3 = \frac{E_3}{3} = \frac{6}{3} = 2.$
$S_4 = \frac{E_4}{4} = \frac{12}{4} = 3.$
$S_6 = \frac{E_6}{6} = \frac{54}{6} = 9.$
$S_{12} = \frac{E_12}{12} = \frac{4\,020}{12} = 335.$
Il y a donc $2 + 1 + 2 + 3 + 9 + 335 = 352$ supermodes, en comptant le supermode vide. ∎

p	Ensembles pointés	Modes	Ensembles	Supermodes
1	12	1	1	1
2	12	1	2	1
3	36	3	6	2
4	72	6	12	3
6	324	27	54	9
12	24 120	2 010	4 020	335
Total	24 576	2 048	4 095	351

TABLE 1.1 – Cardinaux des collections de notes non vides de période p

Dans le tableau 1.1, on trouvera tous les cardinaux calculés précédemment.

Exemple 1.25 *En période 1, on a un seul supermode et un seul mode : le dodécaphonique. Un seul ensemble, constitué de toutes les notes du tempérament. Ceci fait 12 ensembles pointés : les gammes dodécaphoniques débutant sur chacune des douze notes du tempérament.*

En période 2, on a un seul supermode et un seul mode : la gamme tonton (voir l'annexe A pour les conventions utilisées). Deux ensembles : C D E F♯ G♯ A♯ et D♭ E♭ F G A B. Et 12 ensembles pointés, les gammes tonton débutant sur chacune des douze notes du tempérament.

En période 3, on a deux supermodes : titon et mimi. Trois modes : titon, tonti et mimi. Ceci correspond à 6 ensembles et 72 ensembles pointés.

1.5 Classification des supermodes par leurs symétries

On peut classer les supermodes en fonction de leurs symétries. Ceci a sans doute déjà été fait dans de nombreux ouvrages mais nous l'indiquons pour mémoire.

Définition 1.26 *Étant donné un supermode, nous dirons qu'il présente une :*
- ***symétrie dodécagonale*** *s'il possède les même symétries que le supermode titi ;*
- ***symétrie hexagonale*** *s'il possède les même symétries que le supermode tonton ;*
- ***symétrie carrée*** *s'il possède les même symétries que le supermode mimi ;*
- ***symétrie triangulaire impaire*** *s'il possède les même symétries que le supermode mama ;*
- ***symétrie triangulaire paire*** *s'il possède les même symétries que le supermode timi ;*
- ***symétrie rectangulaire impaire*** *s'il possède les même symétries que le supermode triton ;*
- ***symétrie rectangulaire paire*** *s'il possède les même symétries que le supermode tititimi.*

Propriété 1.27 *Le tableau 1.2 donne le nombre de supermodes pour chaque configuration possible des symétries.*

Configuration des symétries	Cardinal	Exemples
Symétrie dodécagonale	1	Titi
Symétrie hexagonale	1	Tonton
Symétrie carrée	2	Titon, mimi
Symétrie triangulaire impaire	2	Tititon, mama
Symétrie triangulaire paire	1	Timi
Symétrie rectangulaire impaire	5	Triton
Symétrie rectangulaire paire	2	Tititimi
Symétrie d'ordre 2 sans miroir	2	Titonmi, timiton
Symétrie miroir impaire sans rotation	54	C
Symétrie miroir paire sans rotation	27	C G
Aucune symétrie	254	C G A
Total	351	

TABLE 1.2 – Classement des supermodes par leurs symétries

Preuve 16 supermodes à transposition limitée sont présentés dans l'annexe E et classés par groupe d'isométrie. Or, nous savons par le tableau 1.1 qu'il y en a exactement 16, donc il n'en existe pas d'autre. Ceci prouve les huit premières lignes du tableau 1.2 (jusqu'aux symétries d'ordre 2 sans miroir).

Il y a $2^7 - 1 = 127$ ensembles non vides à symétrie miroir impaire passant par C. Ensuite, retirons ceux qui ont une rotation : 1 fois celui à symétrie dodécagonale, 2 fois celui à symétrie hexagonale (qui a deux symétries miroir impaires non semblables), 1 fois ceux à symétrie carrée, 2 fois ceux à symétrie triangulaire impaire (qui ont deux symétries miroir impaires non semblables), 2 fois ceux à symétrie rectangulaire impaire (qui ont deux symétries miroir impaires non semblables). Nous obtenons $127-1-2\times1-2-2\times2-2\times5 = 108$. Mais nous avons compté deux fois chaque supermode (une fois « tête en haut » et une fois « tête en bas »), donc il y a 54 supermodes à symétrie miroir impaire sans rotation.

De même, il y a $2^6 - 1 = 63$ ensembles non vides à symétrie miroir paire autout de la quinte C-G. Retirons 1 fois celui à symétrie dodécagonale, 1 fois ceux à symétrie carrée, 2 fois celui à symétrie triangulaire paire et 2 fois ceux à symétrie rectangulaire paire. Nous obtenons $63 - 1 - 2 - 2 \times 1 - 2 \times 2 = 54$. Mais là encore nous avons vu double, donc il y a 27 supermodes à symétrie miroir paire sans rotation.

Comme nous savons qu'il y a 351 supermodes, il ne reste plus qu'à faire une soustraction pour savoir que 254 d'entre eux ne possèdent aucune symétrie. ∎

Chapitre 2

Coupure enharmonique

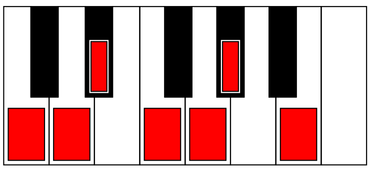
2.1 Définition de la coupure enharmonique

Étant donné un ensemble de notes, la coupure enharmonique vise, comme son nom l'indique, à couper le cycle des quintes pour le transformer en segment. Ceci fait, nous pourrons orthographier les notes en suivant la liste des quintes le long du segment, sans qu'il demeure aucune hésitation liée à l'enharmonie. Nous ferons ensuite l'hypothèse que cette orthographe recouvre des propriétés musicales.

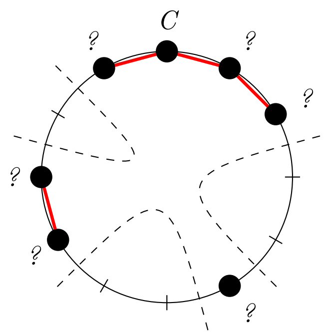
Définition 2.1 *La coupure enharmonique obéit aux règles suivantes dans l'ordre de priorité suivant :*

1. *Couper aussi peu que possible des quintes de l'ensemble ;*
2. *Couper aussi peu que possible des secondes majeures de l'ensemble ;*
3. *Couper aussi peu que possible des tierces mineures de l'ensemble ;*
4. *Couper aussi peu que possible des tierces majeures de l'ensemble ;*
5. *Couper aussi peu que possible des secondes mineures de l'ensemble.*

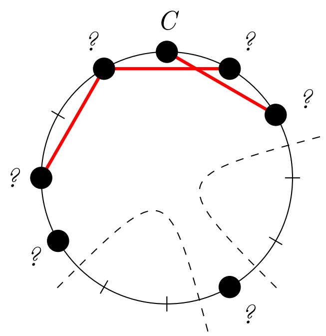
Exemple 2.2 *Considérons l'ensemble suivant.*



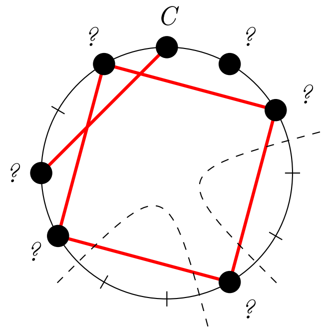
On place les notes sur le cycle des quintes et on trace des traits rouges pour tous les couples de notes distantes d'une quinte. Ceci restreint les coupures possibles à celles figurées en pointillés.



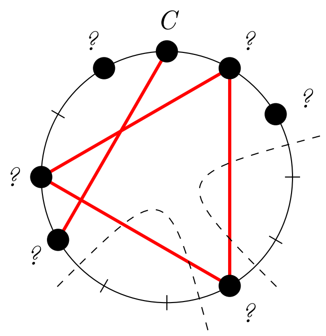
Ensuite, on trace les secondes. Ceci élimine une des coupures précédentes.



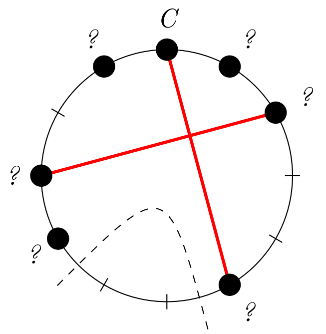
On trace les tierces mineures. Les deux coupures encore en lice cassent chacune une tierce mineure, donc cela ne permet pas de choisir l'une plutôt que l'autre.



On trace les tierces majeures. Là non plus, on ne peut conclure.



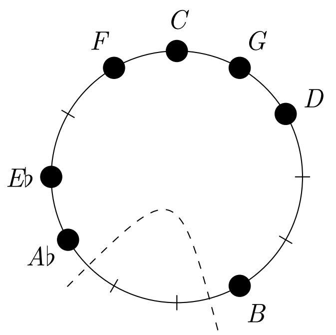
On trace les secondes mineures. Seule l'une des deux coupures ne coupe pas de seconde mineure, donc on choisit celle-là.



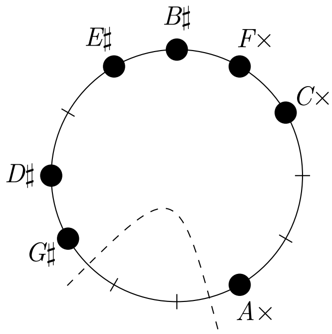
Propriété 2.3 *La connaissance de la coupure enharmonique permet d'orthographier les notes de l'ensemble. Cette orthographe est définie à une tranposition globale de l'ensemble par une seconde diminuée.*

Presque toutes les propriétés que nous considérerons dans la suite de cet ouvrage ne dépendent pas de cette transposition globale. C'est pourquoi nous l'ignorerons, sauf mention contraire.

Exemple 2.4 *Reprenons l'ensemble précédent. Si on décide d'écrire le C avec l'orthographe C, alors les autres notes n'ont qu'une orthographe possible.*



Si on décide d'écrire le C avec l'orthographe B♮, alors les autres orthographes sont automatiquement modifiées.

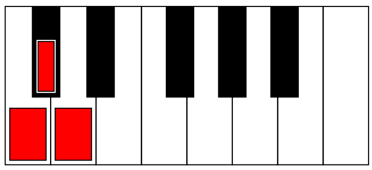


2.2 Ambiguïté enharmonique

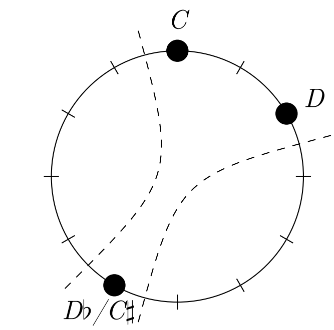
Définition 2.5 *Un ensemble qui possède plusieurs coupures enharmoniques sera appelé* ***ambigu****.*

Un ensemble qui possède une seule coupure enharmonique sera appelé ***non ambigu****.*

Exemple 2.6 *Considérons l'ensemble suivant*[1]*.*



Manifestement, les deux coupures représentées conviennent et on ne peut départager entre elles. Cet ensemble est donc ambigu.



1. Attention, dans les chromatismes, ne pas penser en termes de trait mélodique montant ou descendant, ce qui détermine l'écriture dans un contexte classique car la note du milieu est considérée comme une note de passage. Ici, on considère un ensemble de notes, a priori égales entre elles, comme un réservoir dans lequel on va piocher pour composer. La question que nous posons est donc : dans ce cas, y a-t-il une orthographe canonique pour cet ensemble de notes ?

Propriété 2.7 *La coupure enharmonique d'un ensemble est unique, aux symétries près de cet ensemble.*

En particulier, si un ensemble possède plusieurs coupures enharmoniques, il est nécessairement à transposition limitée ou à symétrie miroir.

Preuve La preuve est omise dans cette première version du document. ∎

Propriété 2.8 *Un ensemble à transposition limitée possède autant de coupures enharmoniques que son ordre de symétrie.*

Preuve C'est une conséquence triviale de la propriété 2.7. ∎

Propriété 2.9 *Un ensemble qui possède une seule symétrie miroir possède une ou deux coupures enharmoniques.*

En particulier, on notera qu'il n'est pas nécessairement ambigu.

Preuve C'est une conséquence triviale de la propriété 2.7. Il suffit de remarquer qu'un ensemble à un seul miroir ne peut pas être à transposition limitée. ∎

Exemple 2.10 *Le supermode heptaphonique naturel possède une seule symétrie miroir et il n'est pas ambigu.*

Propriété 2.11 *Parmi les 351 supermodes :*

- *305 sont non ambigus ;*
- *46 sont ambigus, dont 16 à transposition limitée et 30 à une seule symétrie miroir.*

Preuve Le plus simple est de les énumérer ou d'écrire un programme pour le faire. Par ailleurs, le fait qu'il y ait 16 supermodes à transposition limitée est une conséquence directe du tableau 1.1. ∎

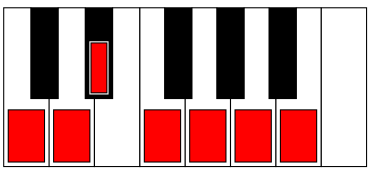
2.3 Propriétés de la coupure enharmonique

Propriété 2.12 *La ou les coupures enharmoniques d'un ensemble se trouvent toujours au niveau d'un ou de plusieurs plus grands trous de cet ensemble dans le cycle des quintes.*

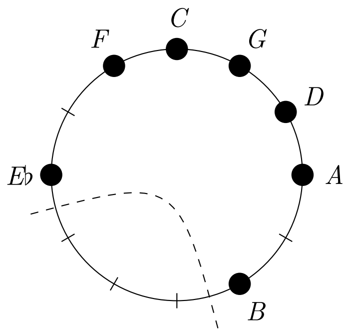
Preuve C'est trivial. Par exemple, si les plus grands trous couvrent un intervalle de 3 quintes (une tierce mineure), alors tout trou plus petit cassera une tierce mineure : au mieux, il restera en lice après application des règles 1 et 2 de la définition 2.1, mais il sera éliminé par la règle 3.

En pratique, cette propriété permet de déterminer la coupure plus rapidement.

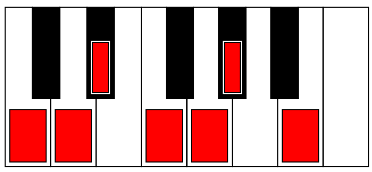
Exemple 2.13 *Considérons l'ensemble suivant.*



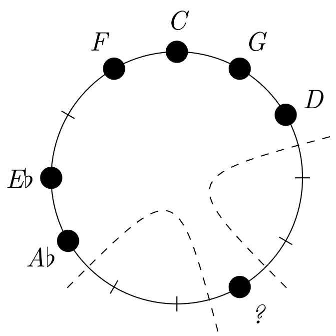
Il y a un seul plus grand trou dans le cycle des quintes, donc la coupure se trouve à ce niveau. Ceci permet immédiatement d'orthographier les notes de l'ensemble.



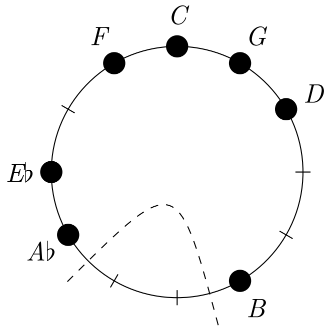
Exemple 2.14 *Reprenons l'ensemble suivant.*



Il n'y a que deux plus grand trous, donc on peut garder ces deux seuls candidats et orthographier la majorité des notes.



Il ne reste plus qu'à déterminer de quel côté le point d'interrogation est le plus attiré. Il est lié par une tierce mineure et une tierce majeure de part et d'autre, ce qui ne permet pas de conclure. Mais il n'est lié par une seconde mineure que du côté du C, ce qui exclut la coupure de droite.


C
F
G
D
E♭
A♭
B

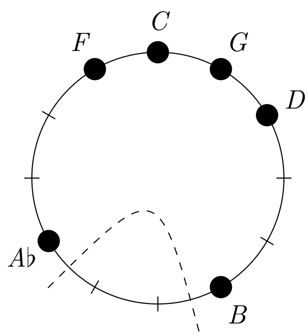
Chapitre 3

Injectivité, surjectivité et bijectivité

3.1 Définitions

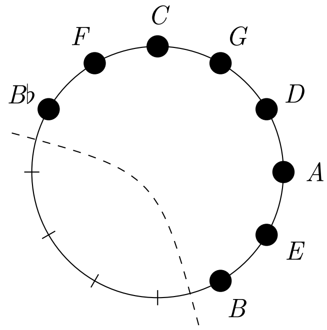
Définition 3.1 *Nous dirons qu'un ensemble non ambigu est **injectif** s'il contient au plus une fois chaque lettre de A à G.*

Exemple 3.2 *L'ensemble ci-dessous est injectif.*



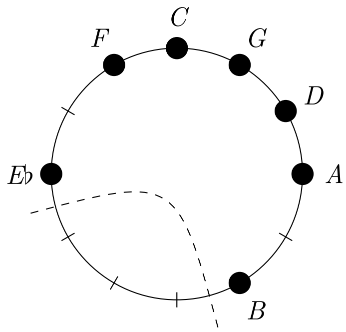
Définition 3.3 *Nous dirons qu'un ensemble non ambigu est **surjectif** s'il contient au moins une fois chaque lettre de A à G.*

Exemple 3.4 *L'ensemble ci-dessous est surjectif.*



Définition 3.5 *Nous dirons qu'un ensemble non ambigu est* ***bijectif*** *s'il est à la fois injectif et surjectif, c'est-à-dire s'il contient exactement une fois chaque lettre de A à G.*

Exemple 3.6 *L'ensemble ci-dessous est bijectif.*

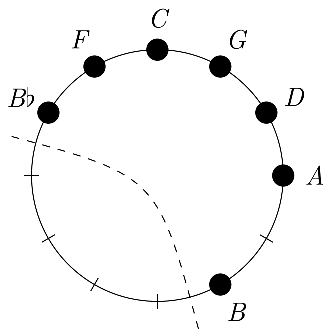


3.2 Propriétés

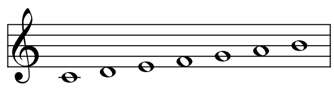
Propriété 3.7 *Un ensemble injectif possède au plus 7 notes. Un ensemble surjectif possède au moins 7 notes. Un ensemble bijectif possède exactement 7 notes.*

Preuve C'est trivial. ∎

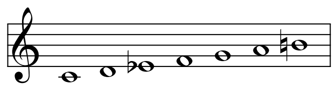
Exemple 3.8 *Attention, un ensemble qui possède 7 notes n'est pas forcément bijectif, comme le prouve cet exemple, qui n'est ni injectif (car il y a un B♭ et un B♮) ni surjectif (car il n'y a pas de E).*



Définition 3.9 *Nous définissons les supermodes suivants (cf. annexe A).*

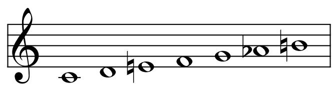


Heptaphonique naturel



Mineur mélodique[1]

Mineur harmonique



Majeur harmonique

Phrygien mélodique

Propriété 3.10 *Il y a exactement 5 supermodes non ambigus bijectifs :*
- *heptaphonique naturel,*
- *mineur mélodique,*
- *mineur harmonique,*
- *majeur harmonique,*
- *phrygien mélodique.*

Preuve Par énumération informatique de tous les supermodes, on teste ceux qui sont bijectifs. Nous verrons plus loin une autre démonstration. ▮

Propriété 3.11 *Parmi les 305 supermodes non ambigus, le tableau 3.1 donne les cardinaux de ceux qui sont injectifs ou non, surjectifs ou non.*

Preuve Par énumération informatique. ▮

1. Dans tout cet ouvrage, nous appelons **mineur mélodique** le mineur mélodique ascendant, comme c'est l'usage dans de nombreux ouvrages théoriques en jazz.

	Injectifs	Non injectifs
Surjectifs	5	19
Non surjectifs	87	194

TABLE 3.1 – Injectivité et surjectivité des supermodes non ambigus

Chapitre 4

Cartographie des notes autour d'un ensemble

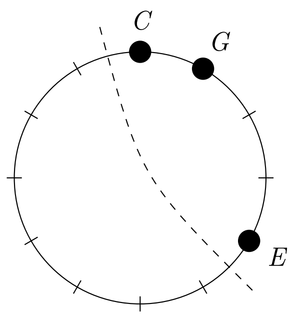
4.1 Orthographe de toutes les notes

Définition 4.1 *Une orthographe étant donnée, nous dirons qu'une note est* ***plus diésée*** *(resp.* ***plus bémolisée****) qu'une autre si elle est plus loin sur la spirale des quintes, en direction des dièses (resp. des bémols).*

Exemple 4.2 *E est plus diésée que C. En revanche, F♭ est plus bémolisée que C.*

Définition 4.3 *Au sein d'un ensemble non ambigu, nous appellerons note* ***la plus diésée*** *(resp.* ***la plus bémolisée****) celle qui est le plus loin en direction des dièses (resp. des bémols).*

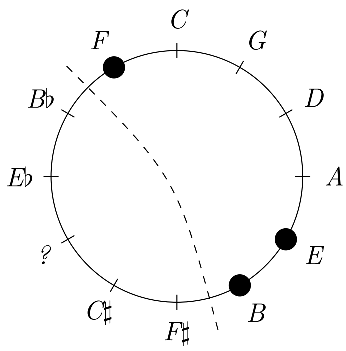
Exemple 4.4 *Dans l'ensemble ci-dessous, la note la plus bémolisée est C et la note la plus diésée est E.*



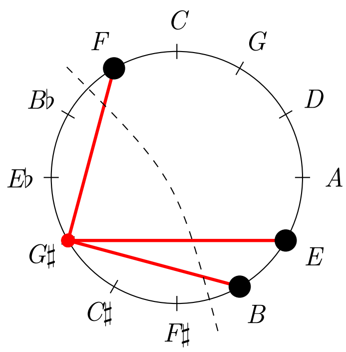
Propriété 4.5 *La connaissance de la coupure enharmonique permet d'orthographier les 12 notes du cycle des quintes.*

Nous avons déjà vu comment orthographier les notes de l'ensemble. On peut orthographier les autres notes à l'intérieur de la coupure de la même façon. Pour les notes à l'extérieur de la coupure, si elles sont plus proches de la note la plus diésée de l'ensemble, nous les orthographierons en dièses ; de la note la plus bémolisée, en bémols. Si une note se trouve à égale distance de ces deux notes extrêmes, nous utilisons une règle d'attraction identique à celle qui permet de déterminer la coupure.

Exemple 4.6 *Considérons l'ensemble F, E, B. Il est facile de trouver la coupure, d'orthographier les notes à l'intérieur de la coupure et celles à l'extérieur qui sont plus près de la note la plus diésée ou de la note la plus bémolisée.*

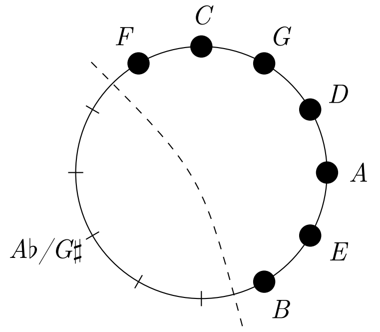


Reste à orthographier le point d'interrogation. Il est autant attiré par F (ce qui plaiderait pour l'orthographe A♭) que par B (ce quiplaiderait pour G♯). Mais il est attiré par E, pas par C. Donc l'orthographe correcte est G♯.



Définition 4.7 *Si la méthode précédente ne permet pas de conclure, nous dirons que la note est **ambigüe** et nous considérerons les deux orthographes dans les analyses.*

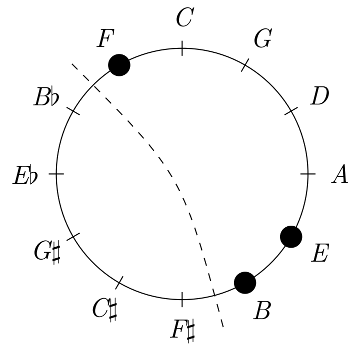
Exemple 4.8 *Considérons l'ensemble C, D, E, F, G, A, B. Il n'est pas possible de décider entre les orthographes G♯ et A♭ : cette note est ambigüe et nous l'orthographierons des deux manières.*



Définition 4.9 *Nous appelerons **point limite** l'endroit du cercle où on passe d'une écriture en dièses à une écriture en bémols. S'il y a une note ambigüe, le point limite se situe à son niveau. Sinon, le point limite est entre la note orthographiée comme la plus bémolisée et la note orthographiée comme la plus diésée.*

Exemple 4.10 *Dans l'exemple précédent, le point limite se situe au niveau du G♯/A♭.*

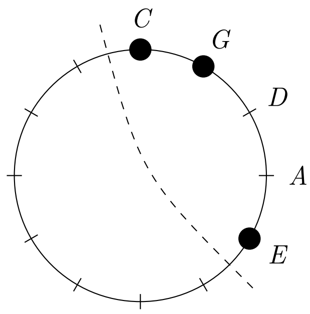
Dans l'exemple ci-dessous, le point limite se situe entre le G♯ et le E♭.



4.2 Ruban

Définition 4.11 *Nous appellerons **ruban** d'un ensemble non ambigu la zone, délimitée par la coupure enharmonique, qui contient les notes de l'ensemble. C'est la zone allant de la note la plus bémolisée à la note la plus diésée dans le sens des dièses.*

Exemple 4.12 *Dans l'exemple ci-dessous, C E G, le ruban est l'arc de cercle qui contient C, G, D, A, E.*



Définition 4.13 *Nous appellerons* ***étendue quintale*** *ou* ***longueur*** *d'un ensemble non ambigu le nombre de notes comprises dans le ruban (qu'elles soient dans l'ensemble ou pas).*

Exemple 4.14 *L'ensemble C E G a une longueur égale à 5 car son ruban couvre une zone de 5 notes.*

Propriété 4.15 *La longueur d'un ensemble non ambigu est comprise entre 1 et 11.*

Preuve C'est clair. La coupure se situe au niveau d'un plus grand trou. Si ce trou contient 0 note, alors il s'agit de la gamme dodécaphonique, qui est ambigüe, ce qui est exclus ici. Donc ce trou contient au moins une note et la longueur est inférieure ou égale à 11. ∎

Définition 4.16 *Étant donné un ensemble non ambigu, nous appellerons* ***note interne*** *toute note du ruban, qu'elle soit dans l'ensemble ou pas. Nous appellerons* ***note externe*** *toute note qui n'est pas dans le ruban.*

Exemple 4.17 *Dans l'exemple précédent, C E G, les notes C, G, D, A et E sont internes. Toutes les autres sont externes.*

4.3 Homonymes

Définition 4.18 *Une orthographe étant donnée, nous dirons que deux notes sont* ***homonymes*** *si elles portent la même lettre mais pas la même altération.*

Exemple 4.19 *A et A♭ sont homonymes.*

Nous pouvons reformuler la définition d'ensemble injectif : un ensemble est injectif si et seulement si il ne contient pas de notes homonymes.

Propriété 4.20 *Une orthographe étant fixée, une note non ambigüe possède 0 ou 1 homonyme, jamais davantage.*

Preuve Cela provient simplement du fait que pour avoir trois notes homonymes entre elles, il faudrait $2 \times 7 + 1 = 15$ notes sur le cycle des quintes, qui n'en comporte que 12. ∎

Propriété 4.21 *Une orthographe étant fixée, une note ambigüe possède toujours 2 homonymes.*

Preuve Cette note possède deux orthographes, par exemple G♭ et F♯. Mais alors, comme G est entre G♭ et F♯ dans la liste des quintes, il existe dans l'orthographe choisie ; de même pour F. ∎

Propriété 4.22 *Une orthographe étant donnée, au plus 2 notes n'ont pas d'homonyme. Quand il y en a 2, elles sont éloignées d'une quinte.*

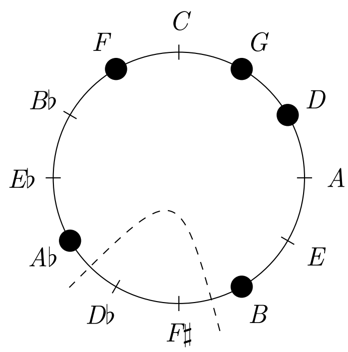
Preuve Si le point limite est situé sur une note, la seule note sans homonyme est la note diamétralement opposée. Sinon, seules les deux notes diamétralement opposées au point limite n'ont pas d'homonyne. ∎

Propriété 4.23 *Les notes hors du ruban ont toujours une homonyme (interne ou externe).*

Preuve Par construction du point limite, la note ou les deux notes sans homonyme sont nécessairement dans le ruban. ∎

Définition 4.24 *Étant donné un ensemble, nous appellerons* ***cœur*** *l'ensemble des notes du ruban qui n'ont pas d'homonyme dans le ruban.*

Exemple 4.25 *Dans l'exemple ci-dessous, G B D F A♭, le cœur est la zone qui s'étend du F au D.*



Propriété 4.26 *Soit L la longueur du ruban.*
Si $L \leq 7$, le cœur a une longueur égale à L.
Si $L > 7$, le cœur a une longueur égale à $14 - L$.

Preuve Si $L \leq 7$, aucune note du ruban n'a d'homonyme, donc le cœur est égal au ruban. Si $L > 7$, alors $L - 7$ notes du ruban possèdent une honomyme plus diésée dans le ruban et $L - 7$ notes du ruban possèdent une homonyme plus bémolisée dans le ruban. Le nombre de notes sans homonymes est donc : $L - (L - 7) - (L - 7) = 14 - L$. ∎

Propriété 4.27 *Le cœur est toujours injectif.*

Preuve Conséquence triviale de la définition. ∎

4.4 Classification des notes

À titre de référence future, les différents types de notes que nous allons définir dans cette section, leur notation et leur définition sont résumés dans l'annexe A.

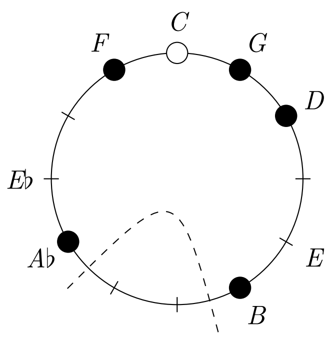
Définition 4.28 *Étant donné un ensemble, nous appellerons* ***note univoque*** *toute note présente dans l'ensemble et ne possédant pas d'homonyme dans l'ensemble.*

Définition 4.29 *Étant donné un ensemble, nous appellerons* ***note équivoque*** *toute note présente dans l'ensemble et possédant une homonyme dans l'ensemble. Si la note est plus bémolisée que son homonyme, nous dirons que c'est une* ***note équivoque locrienne****. Dans le cas contraire, nous dirons que c'est une* ***note équivoque lydienne****.*

La propriété 4.20 assure qu'étant donnée une note équivoque, on peut parler sans ambiguïté de « son » homonyme.

Définition 4.30 *Étant donné un ensemble, nous appellerons* ***note sous-entendue*** *toute note présente dans le ruban, absente de l'ensemble et ne possédant pas d'homonyme dans le ruban.*

Exemple 4.31 *Dans l'exemple ci-dessous, G B D F A♭, la note C est sous-entendue. En revanche, E et E♭ ne sont pas sous-entendues car elles sont homonymes et toutes deux dans le ruban.*

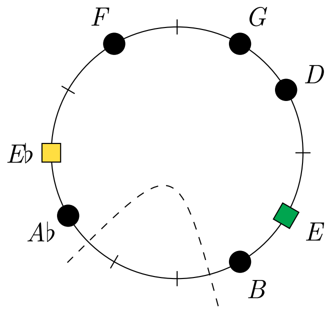


Propriété 4.32 *Une note qui n'appartient pas à l'ensemble est sous-entendue si et seulement si elle est dans le cœur.*

Preuve C'est juste une reformulation de la définition. ∎

Définition 4.33 *Étant donné un ensemble, nous appellerons* ***extension interne*** *toute note présente dans le ruban, absente de l'ensemble et possédant une homonyme qui est également dans le ruban mais pas dans l'ensemble. Si elle est plus diésée (resp. bémolisée) que son homonyme, nous dirons que c'est une* ***extension interne lydienne*** *(resp.* ***extension interne locrienne****).*

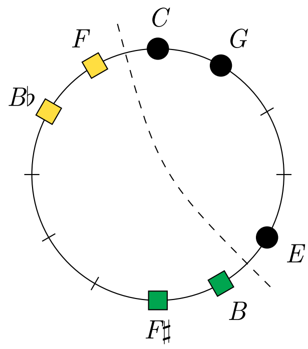
Exemple 4.34 *Dans l'exemple ci-dessous, G B D F A♭, la note E est une extension interne lydienne et E♭ est une extension interne locrienne.*



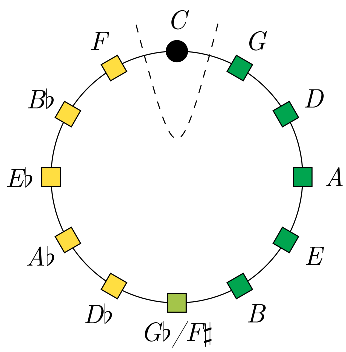
Définition 4.35 *Étant donné un ensemble, nous appellerons* ***extension externe*** *toute note hors du ruban et possédant une homonyme (ou deux) hors du ruban. Si elle possède deux homonymes (c'est-à-dire si elle est ambigüe), nous dirons que c'est une* ***extension externe ambigüe****. Si elle n'est pas ambigüe, alors si elle est plus diésée (resp. bémolisée) que son homonyme, nous dirons que c'est une* ***extension externe lydienne*** *(resp.* ***extension externe locrienne****).*

Il découle de la définition qu'une extension externe ne peut posséder une homonyme dans le ruban. En effet, les deux homonymes sont par définition hors du ruban, et il ne peut en exister de troisième d'après la propriété 4.20.

Exemple 4.36 *Dans l'exemple ci-dessous, C E G, les notes B et F♯ sont des extensions externes lydiennes. Les notes F et B♭ sont des extensions externes locriennes.*



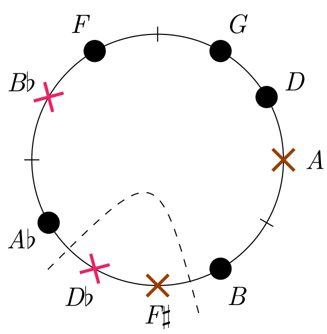
Il n'existe d'extension externe ambigüe que dans un cas : celui du supermode monophonique. Dans l'exemple ci-dessous, G♭/F♯ est une extension externe ambigüe.



Définition 4.37 *Étant donné un ensemble, nous appellerons* ***note étrangère*** *toute note absente de l'ensemble et possédant au moins une homonyme dans l'ensemble. Nous dirons qu'elle est externe ou interne suivant la définition habituelle. Si elle est ambigüe, elle est nécessairement externe et nous dirons que c'est une* ***note étrangère (externe) ambigüe****. Si elle n'est pas ambigüe, nous dirons qu'elle est lydienne si elle est plus diésée que son homonyme, locrienne si elle est plus bémolisée. Nous distinguerons ainsi quatres types de notes étrangères non ambigües :* ***note étrangère interne lydienne****,* ***note étrangère interne locrienne****,* ***note étrangère externe lydienne*** *et* ***note étrangère externe locrienne****.*

Remarquer que quand N est une note ambigüe, si son homonyme bémolisée appartient à l'ensemble, alors son homonyme diésée aussi (sinon, on pourrait décider de l'orthographe de N). Donc c'est bien une note étrangère des deux points de vue : c'est en même temps une version diésée de la première et une version bémolisée de la seconde.

Exemple 4.38 *Dans l'exemple ci-dessous, G B D F A♭ :*
- *A est une note étrangère interne lydienne,*
- *B♭ est une note étrangère interne locrienne,*
- *F♯ est une note étrangère externe lydienne,*
- *D♭ est une note étrangère externe locrienne.*



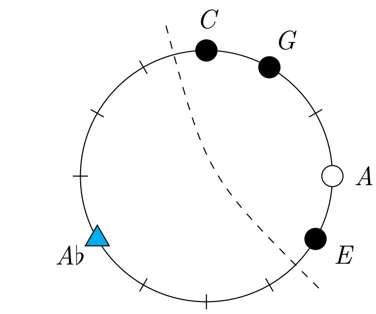
Définition 4.39 *Étant donné un ensemble, nous appellerons* ***projection*** *toute note hors du ruban et possédant une homonyme dans l'ensemble. Si elle est*

ambigüe, nous dirons que c'est une ***projection ambigüe****. Si elle n'est pas ambigüe, nous dirons que c'est une* ***projection lydienne*** *(resp.* ***projection locrienne****) si elle est plus diésée (resp. bémolisée) que son homonyme.*

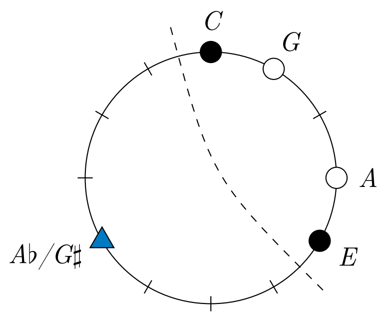
Autrement dit, alors qu'une note étrangère est une homonyme d'une note de l'ensemble (elle-même étant hors de l'ensemble), une projection est une homonyme d'une note sous-entendue.

Remarquer que quand N est une note ambigüe, si son homonyme bémolisée n'appartient pas à l'ensemble, alors son homonyme diésée non plus (sinon, on pourrait décider de l'orthographe de N). Donc c'est bien une projection des deux points de vue : c'est en même temps une version diésée de la première et une version bémolisée de la seconde.

Exemple 4.40 *Dans l'exemple ci-dessous, C E G, la note A♭ est une projection locrienne.*



Dans l'exemple ci-dessous, C E, la note A♭/G♯ est une projection ambigüe.



Propriété 4.41 *Étant donné un ensemble, toute note de l'ensemble est soit :*
- *une note univoque,*
- *une note équivoque locrienne,*
- *une note équivoque lydienne.*

Preuve C'est trivial. ∎

Propriété 4.42 *Étant donné un ensemble, toute note interne n'appartenant pas à l'ensemble est soit :*
- *une note sous-entendue,*
- *une extension interne locrienne,*
- *une extension interne lydienne,*
- *une note étrangère interne locrienne,*
- *une note étrangère interne lydienne.*

Preuve Si cette note N ne possède pas d'homonyme dans le ruban, c'est une note sous-entendue. Si elle possède une homonyme dans le ruban, de deux choses l'une : soit cette homonyme est dans l'ensemble, et N est une note étrangère ; soit elle n'est pas dans l'ensemble, et N est une extension. ∎

Propriété 4.43 *Étant donné un ensemble, toute note externe est soit :*
- *une extension externe locrienne,*
- *une extension externe lydienne,*
- *une extension externe ambigüe,*
- *une note étrangère externe locrienne,*
- *une note étrangère externe lydienne,*
- *une note étrangère ambigüe,*
- *une projection locrienne,*
- *une projection lydienne,*
- *une projection ambigüe.*

Preuve Si N est ambigüe, c'est nécessairement une extension externe ambigüe, une projection ambigüe ou une note étrangère ambigüe. Sinon, d'après la propriété 4.23, N possède nécessairement une homonyme. Si cette homonyme est dans l'ensemble, N est une note étrangère externe. Si cette homonyme est interne mais pas dans l'ensemble, N est une projection. Enfin, si cette homonyme est externe, N est une extension externe. ∎

Propriété 4.44 *Étant donné un ensemble, toute note du tempérament est soit :*
- *une note univoque,*
- *une note équivoque locrienne,*
- *une note équivoque lydienne,*
- *une note sous-entendue,*
- *une extension interne locrienne,*
- *une extension interne lydienne,*
- *une note étrangère interne locrienne,*
- *une note étrangère interne lydienne,*
- *une extension externe locrienne,*
- *une extension externe lydienne,*
- *une extension externe ambigüe,*
- *une note étrangère externe locrienne,*
- *une note étrangère externe lydienne,*
- *une note étrangère ambigüe,*
- *une projection locrienne,*
- *une projection lydienne,*
- *une projection ambigüe.*

Preuve Conséquence immédiate des propriétés précédentes. ∎

4.5 Cartographie autour d'un accord

La propriété musicale remarquable, c'est que des notes appartenant à la même catégorie ont des sonorités similaires. Par exemple, une note étrangère locrienne, jouée sur un accord, aura une sonorité commune avec une autre note étrangère locrienne sur un autre accord. Bien que ces considérations soient subjectives, nous pouvons proposer les qualificatifs suivants.

Type de note	**Exemples de qualificatifs**
Note sous-entendue	« Pas surprenant ».
Extension locrienne	« Horizontal », résolutif.
Extension lydienne	« Vertical », suspensif.
Étrangère locrienne	« Blues ».
Étrangère lydienne	« Out ».
Projection locrienne	« Bluesy ».
Projection lydienne	Suspendu, coloré.

Table 4.1 – Sonorités des différents types de notes

On remarquera que, pour le moment, nous avons considéré l'ensemble isolé dans l'espace et dans le temps. Quand nous disons qu'une note sous-entendue n'est pas surprenante, c'est donc par rapport à l'ensemble pris hors contexte.

Chapitre 5

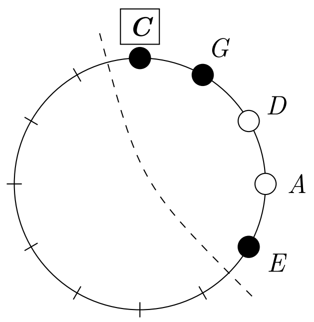
Gammes particulières par rapport à un ensemble

5.1 Gammes qui respectent le ruban

Définition 5.1 *Étant donné un ensemble, nous appellerons son **ensemble parent** ou son **complété** la combinaison : notes de l'ensemble + notes sous-entendues.*

Définition 5.2 *Étant donné un ensemble pointé, nous appellerons sa **gamme parente** la combinaison : notes de l'ensemble + notes sous-entendues, en gardant la même note privilégiée.*

Exemple 5.3 *La gamme parente de la triade majeure C E G est la gamme pentaphonique majeure C D E G A.*

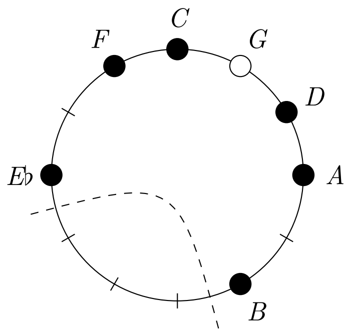


Propriété 5.4 *Étant donné un ensemble de longueur $L \leq 7$, son complété est constitué de toutes les notes du ruban.*

Preuve C'est trivial, puisque dans ce cas le cœur est égal au ruban. ∎

En revanche, ce n'est pas vrai en général.

Exemple 5.5 *Dans le cas ci-dessous, le complété est la gamme mineure mélodique de C. Mais les notes B♭ et E♮, quoique dans le ruban, ne sont pas sous-entendues et ne font donc pas partie du complété.*

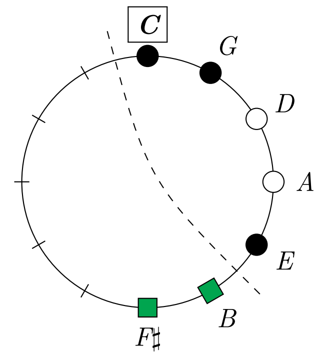


Définition 5.6 *Étant donné un ensemble, nous appellerons son* ***ensemble parent lydien*** *(resp.* ***ensemble parent locrien****) la combinaison : notes de l'ensemble + notes sous-entendues + extensions lydiennes (resp. locriennes).*

Définition 5.7 *Étant donné un ensemble pointé, nous appellerons sa* ***gamme parente lydienne*** *(resp.* ***gamme parente locrienne****) la combinaison : notes de l'ensemble + notes sous-entendues + extensions lydiennes (resp. locriennes), en gardant la même note privilégiée.*

La gamme parente lydienne sera également appelée **gamme parente russellienne**, en hommage à George Russell et à son *Concept lydien chromatique d'organisation tonale.* Dans la majorité des cas, notre définition de gamme parente lydienne coïncide avec la gamme parente au sens de Russell.

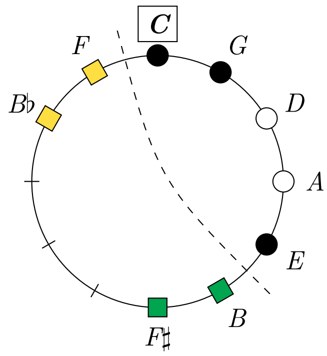
Exemple 5.8 *La gamme parente lydienne de la triade majeure C E G est la gamme lydienne (au sens habituel) de C.*



Définition 5.9 *Étant donné un ensemble, nous appellerons son* ***surjectivé*** *la combinaison : notes de l'ensemble + notes sous-entendues + extensions lydiennes + extensions locriennes.*

Définition 5.10 *Étant donné un ensemble pointé, nous appellerons sa* ***gamme surjectivée*** *la combinaison : notes de l'ensemble + notes sous-entendues + extensions lydiennes + extensions locriennes, en gardant la même note privilégiée.*

Exemple 5.11 *Le surjectivé de la triade majeure C E G est une gamme ennéaphonique (que nous nommerons plus tard).*



Propriété 5.12 *Le surjectivé d'un ensemble conserve la même orthographe et il est surjectif.*

Preuve Soit L la longueur de l'ensemble initial. Si $L > 7$, les extensions éventuelles sont internes et il est clair que la coupure est conservée. Si $L \leq 7$ (en pratique $L < 7$), les extensions éventuelles sont externes et elles se situent sur bords extérieurs du ruban. En ajoutant les notes de l'ensemble, les notes sous-entendues et les extensions, on obtient donc un ensemble qui est un empilement de quintes, donc l'orthographe est la même que pour l'ensemble initial.

L'orthographe étant conservée dans tous les cas, il est clair que l'ensemble obtenu est surjectif : la définition est faite pour ça. ∎

Propriété 5.13 *Soit un ensemble de longueur L.*
Si $L < 7$, son surjectivé a une longueur égale à $14 - L$.
Si $L \geq 7$, son surjectivé a une longueur égale à L.

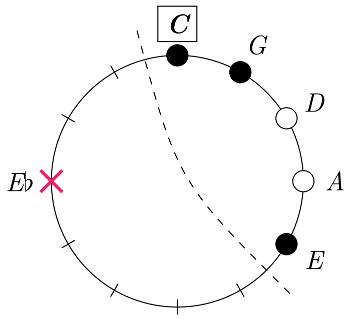
Preuve Si $L < 7$, alors $7 - L$ notes externes possèdent une honomyme externe plus diésée et $7 - L$ notes externes possèdent une homonyme externe plus bémolisée, toutes ces extensions étant accolées aux bords du ruban. Donc la longueur cherchée est $L + (7 - L) + (7 - L) = 14 - L$.

Si $L \geq 7$, les extensions éventuelles sont internes, donc la longueur du surjectivé est L. ∎

Définition 5.14 *Étant donné un ensemble, nous appellerons son* ***ensemble parent blues*** *la combinaison : notes de l'ensemble + notes sous-entendues + notes étrangères locriennes.*

Définition 5.15 *Étant donné un ensemble pointé, nous appellerons sa* ***gamme parente blues*** *(ou gamme blues) la combinaison : notes de l'ensemble + notes sous-entendues + notes étrangères locriennes, en gardant la même note privilégiée.*

Exemple 5.16 *La gamme parente blues de la triade majeure C E G est la gamme blues majeure C D $E\flat$ $E\natural$ G A.*

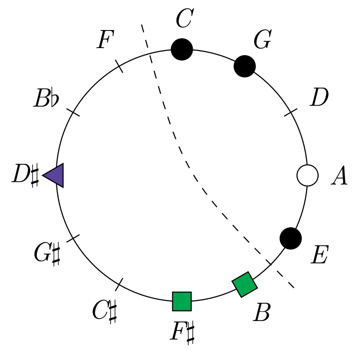


Bien sûr, de nombreuses autres gammes typiques peuvent être définies pour tout accord, par exemple : notes de l'ensemble + extension lydiennes + projections lydiennes. Nous avons simplement listé les plus courantes.

5.2 Gammes basées sur une déformation du ruban

Définition 5.17 *Nous appellerons* ***élargissement*** *le procédé qui consiste à déplacer par la pensée le point limite d'un ensemble, tout en restant à l'extérieur du ruban. On obtient ainsi une nouvelle orthographe, qu'on peut exploiter pour trouver de nouvelles gammes bijectives par exemple. Si on déplace le point limite vers les dièses (resp. bémols), on parlera d'****élargissement lydien*** *(resp.* ***élargissement locrien****).*

Exemple 5.18 *Étant donnée la triade majeure C E G, nous déplaçons le point limite pour atteindre le $D\sharp$. Ceci nous permet de gagner la gamme ci-dessous.*

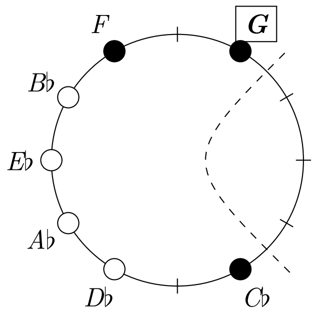


Si la section harmonique joue une triade majeure de C, le $D\sharp$ sera normalement entendu comme un $E\flat$. Mais, particulièrement si le soliste fait un usage intensif des notes B et $F\sharp$, il peut modifier la perception du point limite et faire brièvement sonner le $D\sharp$ comme tel. Attention, nous ne parlons pas d'orthographe *traditionnelle liée à une note de passage chromatique ascendante, mais bien de la résonnance du D♯ en tant que tel (vision harmonique).*

Définition 5.19 *Nous appellerons* ***retournement*** *le procédé qui consiste à déplacer par la pensée le point limite d'un ensemble à l'intérieur du ruban. Typiquement, ce point limite fictif, pour créer l'illusion, se trouvera dans le plus grand trou du ruban.*

Définition 5.20 *On applique un retournement à un ensemble pointé et on conserve l'orthographe de la basse. Si le point limite fictif est déplacé vers les dièses (resp. les bémols), alors nous parlerons de* ***retournement lydien*** *(resp.* ***retournement locrien****).*

Exemple 5.21 *Étant donné l'accord G B F, on peut faire un retournement en considérant que une coupure enharmonique fictive entre G et B. Le point limite, qui était entre C♯ et A♭, s'est déplacé vers les bémols : c'est un retournement locrien. Les orthographes sont modifiées et on peut examiner la nouvelle gamme parente : il s'agit de la gamme superlocrienne de G. Nous dirons donc qu'elle est une (ici, la) gamme parente de G B F par retournement locrien.*



Enfin, le soliste peut faire entendre une tout autre coupure que celle donnée par l'harmonie, c'est-à-dire jouer totalement « out » et parvenir à faire sonner une tout autre tonalité (sensation polytonale) : nous parlerons alors de **lutte harmonique**.

Chapitre 6

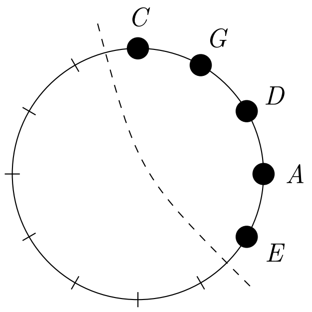
Complétude et classification des supermodes

6.1 Définition

Rappel : étant donné un ensemble, nous avons défini son complété comme : notes de l'ensemble + notes sous-entendues.

Définition 6.1 *Un ensemble est dit* ***complet*** *s'il n'engendre pas de note sous-entendue, c'est-à-dire s'il est égal à son propre complété.*

Exemple 6.2 *La gamme pentaphonique naturelle est complète.*



Propriété 6.3 *Il existe 36 supermodes non ambigus complets.*

Preuve Par énumération informatique, on examine tous les supermodes et on teste s'ils sont complets. L'annexe C constitue une preuve, quoique fastidieuse à vérifier manuellement. ∎

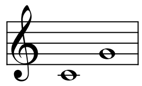
Propriété 6.4 *Tout ensemble surjectif est complet.*

Preuve C'est trivial : si l'ensemble est surjectif, il ne peut y avoir de note sous-entendue. ∎

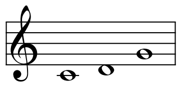
Une propriété intéressante mais moins stricte que la bijectivité (surjectivité et injectivité) est d'être complet est injectif.

Propriété 6.5 *Il existe 12 supermodes non ambigus complets injectifs.*

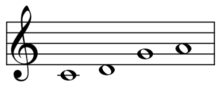
Monophonique



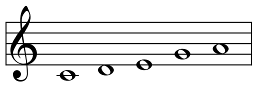
Diphonique naturel



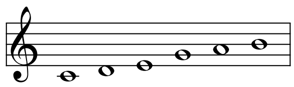
Triphonique naturel



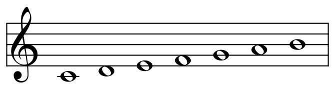
Tétraphonique naturel



Pentaphonique naturel

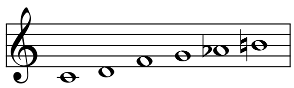


Hexaphonique naturel

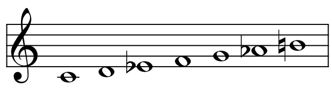


Heptaphonique naturel

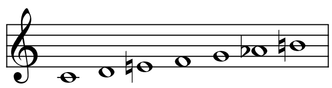
Mineur mélodique



Harmonique sans tierce



Mineur harmonique



Majeur harmonique

Phrygien mélodique

Preuve Soit un ensemble complet injectif de longueur L.

Si $L \leq 7$, alors le cœur est égal au ruban, donc toutes les notes du ruban sont dans l'ensemble. On obtient ainsi les supermodes monophonique, diphonique naturel, triphonique naturel, tétraphonique naturel, pentaphonique naturel, hexaphonique naturel et heptaphonique naturel, dont on vérifie qu'ils sont bien non ambigus, complets et injectifs.

Si $L > 7$, quitte à transposer, prenons B comme note la plus diésée.

- Si $L = 8$, alors B♭ appartient à l'ensemble, ce qui contredit l'injectivité.
- Si $L = 9$, alors E♭ appartient à l'ensemble. Les notes du cœur, F C G D A, également. Par injectivité, B♭ et E♮ sont exclues. On obtient ainsi le supermode mineur mélodique, qui convient.
- Si $L = 10$, alors A♭ appartient à l'ensemble. Les notes du cœur, F C G D, également. Par injectivité, B♭ et A♮ sont exclues. On a alors le choix entre ne pas ajouter de E, ajouter le E♮ ou le E♭. On obtient ainsi les supermodes harmonique sans tierce, mineur harmonique et majeur harmonique, qui conviennent.
- Si $L = 11$, alors D♭ appartient à l'ensemble. Les notes du cœur, F C G, également. Par injectivité, B♭ et D♮ sont exclues. On a alors deux choix : d'une part, pas de A, A♭ ou A♮ ; d'autre part, pas de E, E♭ ou E♮. Neuf supermodes sont *a priori* possible, mais un seul ne contredit pas la coupure enharmonique que nous avons fixée : il faut choisir A♮ et E♭. On obtient ainsi le supermode phrygien mélodique, qui convient. ∎

Remarque : au passage, nous avons prouvé qu'il n'existe que 5 supermodes bijectifs, comme nous l'avions déjà mentionné.

Propriété 6.6 *Parmi les 36 supermodes non ambigus complets, le tableau 6.1 donne les cardinaux de ceux qui sont injectifs ou non, surjectifs ou non.*

	Injectifs	Non injectifs
Surjectifs	5	19
Non surjectifs	7	5

TABLE 6.1 – Injectivité et surjectivité des supermodes non ambigus complets

Preuve La colonne de gauche est déjà prouvée. La colonne de droite peut s'obtenir par le même type de raisonnement (la distinction de cas est simplement plus longue) ou par énumération informatique. La liste des supermodes non ambigus complets et de leurs propriétés est disponible dans l'annexe C. ∎

6.2 Réalisations et notes caractéristiques

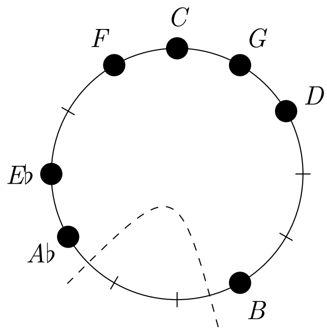
Définition 6.7 *Étant donné deux ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ non ambigus, nous dirons que $\mathcal{E}_1$ est une **réalisation non ambigüe** de $\mathcal{E}_2$ si et seulement si :*

- *$\mathcal{E}_1$ est inclus dans $\mathcal{E}_2$,*
- *$\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ ont le même complété.*

Définition 6.8 *Étant donné un ensemble non ambigu (complet ou non), nous dirons qu'une note est **caractéristique (au sens large)** si elle est présente dans toute réalisation non ambigüe de cet ensemble.*

Exemple 6.9 *Dans l'ensemble C E G, il est facile de voir que les notes caractéristiques sont C et E.*

Dans la gamme mineure harmonique de C, il est facile de voir que A♭, E♭ et B sont caractéristiques. Mais G et D le sont également : en effet, si on supprime l'une des deux, la coupure enharmonique change et le complété également. Le cas de la note C sera examiné plus tard.



Propriété 6.10 *Soit un ensemble non ambigu de longueur L.*

La note la plus diésée et la note la plus bémolisée sont caractéristiques.

Si $L \leq 6$, alors ce sont les seules.

Si $L \leq 8$ et si l'ensemble est complet, alors ce sont les seules.

Preuve Il est clair que la note la plus diésée et la note la plus bémolisée sont toujours caractéristiques.

Si $L \leq 7$, alors le complété de l'ensemble est le ruban tout entier. Si on prend la note la plus diésée et la note la plus bémolisée, leur complété est également le ruban tout entier.

Si $L = 7$ et si l'ensemble est complet, alors l'ensemble est le ruban tout entier, par exemple la gamme de C ionien. Alors F C B et F G B sont des réalisations, donc les seules notes caractéristiques sont F et B.

Si $L = 8$ et si l'ensemble est complet, alors l'ensemble est le ruban tout entier, par exemple la gamme de C D E F G A B♭ B♮. Alors B♭ D B♮ et B♭ A B♮ sont des réalisations, donc les seules notes caractéristiques sont B♭ et B♮. ∎

Propriété 6.11 *Dans un ensemble non ambigu, les notes de l'ensemble hors du cœur sont toujours caractéristiques.*

Preuve Puisqu'elles sont hors du cœur, elles possèdent une homonyme dans le ruban et ne peuvent être sous-entendues dans aucune réalisation. ∎

Définition 6.12 *Nous dirons qu'une note est **absolument caractéristique** si elle est la note la plus diésée ou la plus bémolisée de l'ensemble, ou si elle appartient à l'ensemble et qu'elle est hors du cœur.*

Exemple 6.13 *Dans la gamme mineure harmonique de C, les notes absolument caractéristiques sont A♭, E♭ et B.*

Les notes absolument caractéristiques rendent la notion de ce que seraient les notes caractéristiques si la coupure était fixée ; autrement dit, si on travaillait dans la spirale des quintes et si, de la sorte, la question de l'enharmonie ne se posait pas.

Propriété 6.14 *Les notes absolument caractéristiques sont caractéristiques.*

Preuve Simple reformulation des propriétés précédentes. ∎

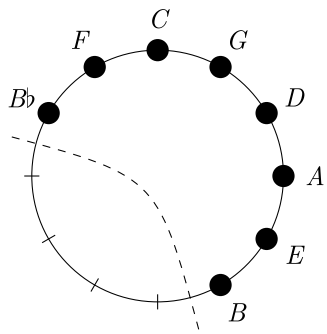
Définition 6.15 *Étant donné deux ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ non ambigus, nous dirons que $\mathcal{E}_1$ est une* ***réalisation non ambigüe minimale*** *de $\mathcal{E}_2$ si et seulement si :*
- *$\mathcal{E}_1$ est une réalisation non ambigüe de $\mathcal{E}_2$,*
- *aucune réalisation non ambigüe de $\mathcal{E}_2$ n'est strictement incluse dans $\mathcal{E}_1$.*

Propriété 6.16 *Tout ensemble de longueur $L \leq 6$ possède une seule réalisation miminale, constituée de la note la plus diésée et la note la plus bémolisée.*

Preuve C'est trivial. ∎

Par définition, les notes caractéristiques sont présentes dans toute réalisation, et a fortiori dans toute réalisation non ambigüe miminale. Mais l'ensemble des notes caractéristiques ne suffit pas forcément pour constituer une réalisation minimale.

Exemple 6.17 *Dans l'ensemble ci-dessous, les notes caractéristiques (et absolument caractéristiques) sont B♭ et B♮. Mais l'ensemble B♭ B♮ ne constitue pas une réalisation : en effet, sa coupure oblige à l'orthographier A♯ B♮ et son complété est une gamme hexaphonique. En revanche, B♭ D B♮ est une réalisation miminale de cet ensemble.*



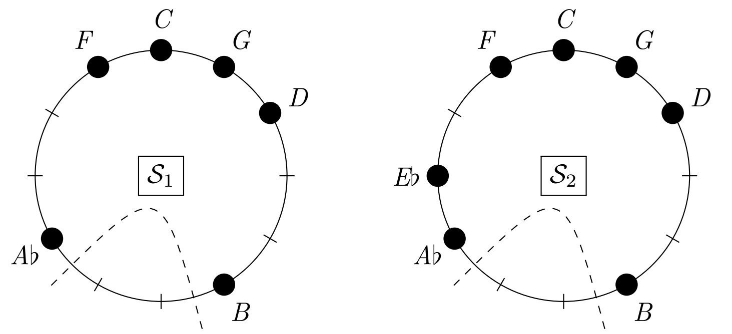
Dans l'annexe C, on trouvera pour chaque ensemble complet la liste de ses réalisations non ambigües ainsi que ses notes caractéristiques et absolument caractéristiques.

6.3 Plongements canoniques

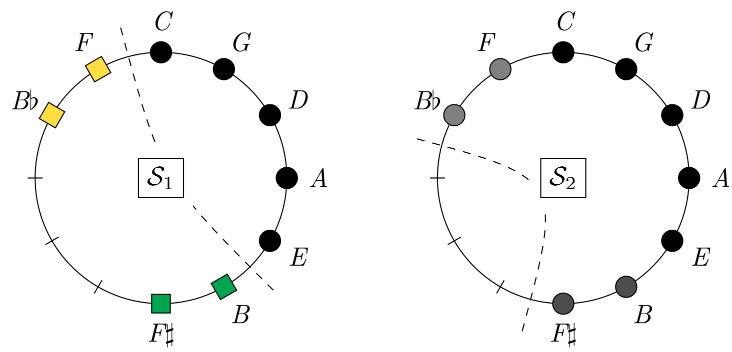
Définition 6.18 *Soient deux supermodes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$. Nous dirons qu'il y a un* ***plongement canonique*** *de $\mathcal{S}_1$ dans $\mathcal{S}_2$ si et seulement si :*

- *les surjectivés de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ ont la même longueur ;*
- *si on prend un ensemble $\mathcal{E}_1$ représentant $\mathcal{S}_1$ et un ensemble $\mathcal{E}_2$ représentant $\mathcal{S}_2$ tels qu'ils aient le même ruban, alors les notes de $\mathcal{E}_1$ sont toutes dans $\mathcal{E}_2$.*

Exemple 6.19 *Soit $\mathcal{S}_1$ le supermode harmonique sans tierce et S_2 le supermode mineur harmonique. Il y a un plongement canonique de $\mathcal{S}_1$ dans $\mathcal{S}_2$.*



Exemple 6.20 *Soit $\mathcal{S}_1$ le supermode pentaphonique naturel et S_2 le supermode ennéaphonique naturel. Il y a un plongement canonique de $\mathcal{S}_1$ dans $\mathcal{S}_2$.*



On trouvera en annexe B les cartes des supermodes non ambigus complets, avec les relations de plongement canonique entre eux. Pour chaque longueur possible, on visualise ainsi bien tous les ensembles complets.

Conjointement avec l'annexe C, cela donne un panoramique de tous les supermodes non ambigus : les complets se trouvent dans les graphes de plongement et les non-complets sont référencés comme réalisation de leur complété.

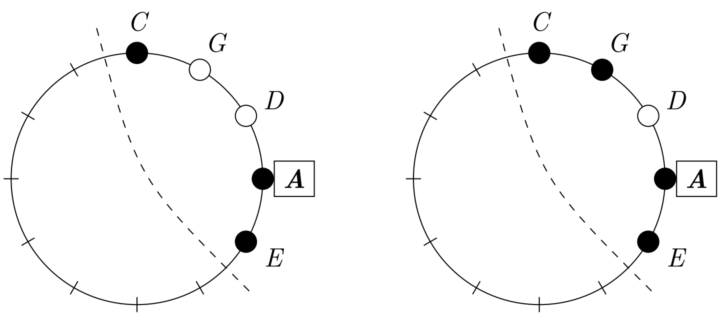
Chapitre 7

Classification des modes

7.1 Familles et renversements

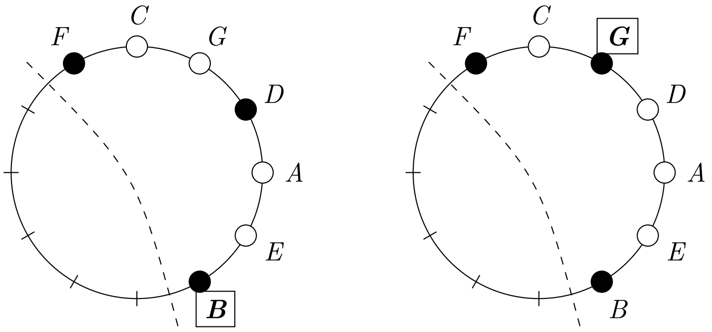
Définition 7.1 *Nous dirons que deux ensembles pointés sont de la même* ***famille*** *s'ils ont le même complété et la même basse (autrement dit, la même gamme parente).*

Exemple 7.2 *A C E et A C E G sont de la même famille.*



Définition 7.3 *Étant donné deux ensembles pointés, nous dirons qu'ils sont des* ***renversements généralisés*** *l'un de l'autre s'ils ont le même complété et des basses différentes.*

Exemple 7.4 *B D F et G B F sont des renversements généralisés l'un de l'autre.*



7.2 Chiffrage et nomenclature

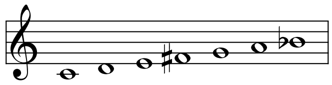
Les conventions présentées dans cette section sont résumées dans l'annexe A pour référence future.

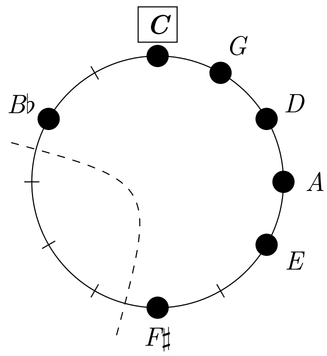
Étant donné un ensemble, il suffit de donner ses notes absolument caractéristiques, munies de leur orthographe, pour déterminer son complété. En effet, l'orthographe des notes absolument caractéristiques donne la coupure, donc le cœur, et l'identité des notes donne le reste. Étant donné un ensemble pointé, il suffit de donner sa basse et ses notes caractéristiques munies de leur orthographe.

Définition 7.5 *Étant donné un ensemble pointé complet, son* ***chiffrage*** *sera donné par sa basse, puis les orthographes des notes absolument caractéristiques.*

Pour la quarte et la quinte, on précisera l'altération si elle n'est pas juste. Pour la seconde, la tierce et la sixte, on précisera l'altération si elle n'est pas majeure. Pour la septième, on précisera toujours l'altération pour éviter les confusion avec la notation traditionnelle. Dans les cas où ce n'est pas obligatoire, on pourra ajouter des altérations de précaution si on le souhaite.

Exemple 7.6 *Soit l'ensemble pointé suivant.*





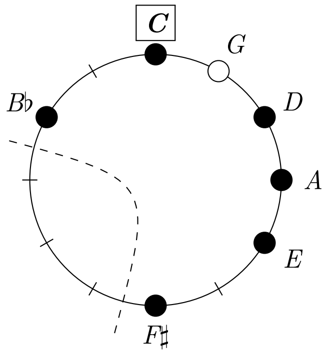
Son chiffrage est C 4♯, 7♭.

Définition 7.7 *Étant donné un mode, on le chiffrera de la même façon, mais sans préciser la basse.*

Exemple 7.8 *Le mode défini par l'exemple précédent est chiffré 4♯, 7♭.*

Définition 7.9 *Étant donné un ensemble pointé non complet, on le chiffrera comme son complété, mais en précisant les notes qui manquent.*

Exemple 7.10 *Par rapport à l'exemple précédent, supprimons le G.*



Le chiffrage est C 4♯, 7♭ (no 5).

Définition 7.11 *Un mode sera* ***nommé*** *par la donnée des degrés caractéristiques et éventuellement par les notes manquantes par rapport à son complété. À titre de précaution (et bien que ce ne soit pas nécessaire), on commencera par annoncer le nombre de notes par le mot correspondant : monophonique, diphonique, etc.*

Exemple 7.12 *Par rapport aux exemples précédents, le mode complet (avec G) est appelé heptaphonique de quarte augmentée et septième mineure.*

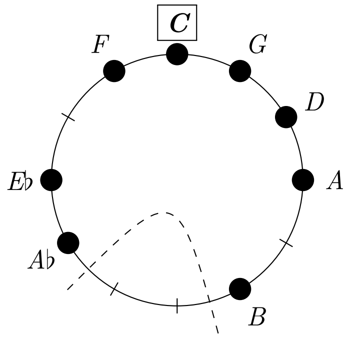
Le mode sans G est appelé hexaphonique de quarte augmentée et septième mineure (sans quinte).

Le chiffrage d'un mode complet peut également servir à nommer toute une famille, s'il n'est pas nécessaire de préciser quelles notes sont absentes.

7.3 Triangle des accords et modes

La note la plus bémolisée et la note la plus diésée d'un ensemble étant toujours absolument caractéristique, il est intéressant de repérer un mode (ou une nature d'accord) par leurs positions par rapport à la basse.

Exemple 7.13 *Dans l'ensemble pointé ci-dessous, la note la plus diésée est B, située 5 quintes au-dessus de la basse. La note la plus bémolisée est A♭, située 4 quintes en-dessous de la basse.*



Définition 7.14 *Le* ***triangle des accords et modes*** *est un tableau à double entrée dans lequel on classe les natures d'accord et les modes. En colonne, on repère la note la plus diésée par sa position par rapport à la basse. En ligne, la note la plus diésée.*

Ce tableau est donné dans l'annexe F. Plus la note diésée est loin de la basse, moins la note la plus bémolisée peut l'être, et vice-versa, ce qui lui donne la forme d'un triangle.

Le long d'une ligne de ce tableau, on peut visualiser les enrichissements possibles d'un accord ou mode par le côté des dièses. Le long d'une colonne, par celui des bémols. Les diagonales ascendantes du tableau permettent de visualiser les renversements généralisés.

On remarquera que sur chaque diagonale ascendante, on peut aussi visualiser les supermodes complets. Ainsi, il y a une diagonale de cinq cases, de la case (0,4) à la case (4,0), correspondant au supermode pentaphonique naturel.

Au-dessus de la cinquième diagonale, on est dans l'harmonie quartale : il n'y a pas encore de tierce majeure, les accords sont très ouverts. À la cinquième diagonale arrive un événement de toute première importance : l'apparition de la tierce majeure. À la septième diagonale, on a l'apparition du triton et de la première gamme bijective. En-dessous, on est dans des accords assez riches, non présents dans la gamme heptaphonique naturelle.

Chapitre 8

Supermodes ambigus

8.1 Propriétés vraies des supermodes ambigus

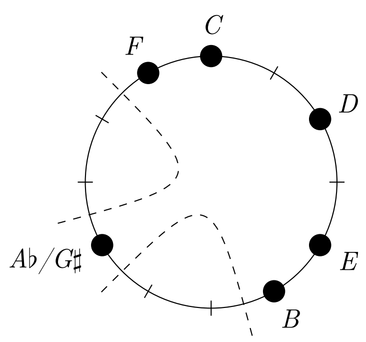
Définition 8.1 *Étant donné un supermode ambigu, nous appellerons **coupures vraies** ses coupures enharmoniques obtenues suivant la règle habituelle.*

Pour analyser un supermode ambigu, il y a toujours une possibilité : choisir arbitrairement une de ses coupures vraies, et travailler entièrement comme si elle était la seule. On peut faire tout comme d'habitude, en se souvenant qu'on a ajouté une part d'arbitraire.

Propriété 8.2 *Étant donné un supermode ambigu, les propriétés suivantes ne dépendent pas de la coupure vraie choisie :*
- *longueur,*
- *injectivité,*
- *surjectivité,*
- *bijectivité,*
- *complétude.*

Preuve Ces propriétés sont conservées par transposition ou par symétrie miroir. Or, si on change de coupure vraie, la propriété 2.7 assure qu'on obtient juste une image miroir ou transposée de l'ensemble initial. ∎

Exemple 8.3 *Considérons l'ensemble ci-dessous.*



Si on choisit G$\sharp$, alors l'ensemble est injectif mais pas surjectif, sa longueur est 10 et il n'est pas complet : en effet, A apparaît alors comme une note sous-entendue.

Si on choisit A$\flat$, alors l'ensemble est injectif mais pas surjectif, sa longueur est 10 et il n'est pas complet : en effet, G apparaît alors comme une note sous-entendue.

Ainsi, la note sous-entendue varie, mais les autres conclusions sont les mêmes.

Définition 8.4 *Nous dirons qu'un ensemble ambigu est* ***injectif*** *(resp.* ***surjectif****,* ***bijectif****,* ***complet****) si, en choisissant une coupure vraie, il est injectif (resp. surjectif, bijectif, complet).*

Nous appellerons ***étendue quintale*** *ou* ***longueur*** *d'un ensemble ambigu la longueur constatée en choisissant une coupure vraie.*

Propriété 8.5 *Qu'un ensemble soit ambigu ou pas, la longueur est 12 moins la taille du ou des plus grands trous dans le cycle des quintes.*

Preuve C'est clair. ∎

Ceci nous fournit d'ailleurs une définition alternative de la longueur d'un ensemble, sans qu'il soit besoin de faire référence à la coupure enharmonique.

Propriété 8.6 *La longueur d'un ensemble ambigu est comprise entre 7 et 12.*

Preuve Si la longueur est inférieure à 7, alors l'ensemble ne peut être ambigu. On peut d'ailleurs exhiber un ensemble ambigu de longueur 7 : le triton. Par ailleurs il est clair que 12 est une valeur maximale, obtenue pour la gamme dodécaphonique. ∎

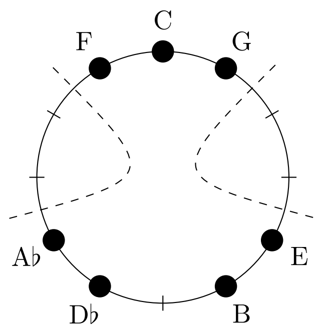
Propriété 8.7 *Les propriétés suivantes dépendent toujours de la coupure vraie choisie :*

- *note la plus diésée/bémolisée,*
- *ruban,*
- *point limite,*
- *note ambigüe,*
- *note interne/externe,*
- *cœur.*

Preuve C'est évident. ∎

Propriété 8.8 *Il n'existe aucun supermode ambigu bijectif.*

Preuve S'il en existe un, soit L sa longueur. Reprenons alors le raisonnement de la preuve de la proposition 6.5. Si $L \leq 10$, nous y avions listé tous les ensembles candidats, et aucun n'était ambigu. Si $L = 11$, les seuls candidats sont le phrygien mélodique, qui n'est pas ambigu, et l'ensemble C D$\flat$ E F G A$\flat$ B.



Mais les coupures vraies de cet ensemble ne donnent pas cette orthographe, donc il est exclu. ∎

Propriété 8.9 *Les supermodes à transposition limitée qui sont injectifs sont :*
- *tonton,*
- *mimi,*
- *mama,*
- *tonma,*
- *triton.*

Preuve Voir l'annexe E. ∎

Propriété 8.10 *Les supermodes à transposition limitée qui sont surjectifs sont :*
- *le dodécaphonique (titi),*
- *tititon.*

Preuve Voir l'annexe E. ∎

Propriété 8.11 *Parmi les 16 supermodes à transposition limitée, le tableau 8.1 donne les cardinaux de ceux qui sont injectifs ou non, surjectifs ou non, complets ou non.*

	Injectifs	Non injectifs
Surjectifs	0	2
Complets non surjectifs	0	0
Non complets	5	9

TABLE 8.1 – Injectivité, complétude et surjectivité des supermodes à transposition limitée

Preuve Voir l'annexe E. ∎

Propriété 8.12 *Les supermodes ambigus à un seul miroir qui sont injectifs sont :*
- *le supermode 6.4 (harmonique ambigu),*
- *le supermode 4.2.*

Preuve Voir l'annexe D. ∎

Propriété 8.13 *Parmi les 30 supermodes ambigus à un seul miroir, le tableau 8.2 donne les cardinaux de ceux qui sont injectifs ou non, surjectifs ou non, complets ou non.*

	Injectifs	Non injectifs
Surjectifs	0	5
Complets non surjectifs	0	0
Non complets	2	23

Table 8.2 – Injectivité, complétude et surjectivité des supermodes ambigus à un seul miroir

Preuve Voir l'annexe D. ∎

Dans les cartes de l'annexe B, nous avons inclus les supermodes ambigus complets suivant leurs coupures vraies.

Dans les annexes D et E, nous avons présenté l'analyse de chaque supermode ambigu suivant ses coupures vraies.

Dans l'annexe F, les accords et modes ambigus injectifs ont été reportés dans le tableau suivant leurs coupures vraies.

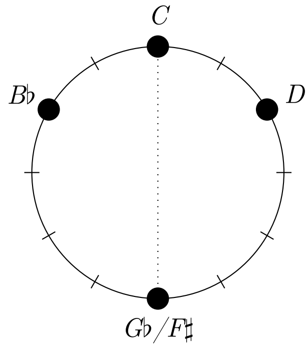
8.2 Pseudo-propriétés des supermodes ambigus à symétrie miroir

Ici, on s'intéresse aussi bien aux supermodes à transposition limitée qui possèdent une symétrie miroir (ils en ont alors toujours au moins une autre) qu'aux supermodes ambigus à un seul miroir.

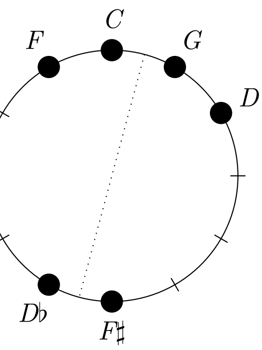
Définition 8.14 *Soit un ensemble possédant une symétrie miroir. L'axe de symétrie possède deux extrémités, que nous allons appeler* ***tête*** *et* ***pied****. Pour savoir lequel est lequel, on procède de la sorte :*

- *Pour chaque distance possible à l'axe, à chaque extrémité, on regarde s'il y a des notes ou pas.*
- *Dès qu'on trouve des notes du côté d'une extrémité et pas de l'autre, on dit que c'est la tête. L'autre est le pied.*
- *Si on ne peut conclure, c'est que le supermode possède un deuxième axe de symétrie orthogonal au premier. Dans ce cas, les deux extrémités sont considérées pied et tête (et il s'agit nécessairement d'un supermode à transposition limitée).*

Exemple 8.15 *Considérons l'ensemble suivant. À distance 0 des extrémités de l'axe, il y a C d'un côté, G♭/F♯ de l'autre. À distance 1, il n'y a rien ni autour de C ni autour de G♭/F♯. À distance 2, il y a B♭ et D du côté de C, rien du côté de G♭/F♯. Donc nous dirons que la tête de cet axe de symétrie se situe du côté de C.*



Considérons l'ensemble suivant. À distance 0,5 des extrémités de l'axe, il y a C et G d'un côté, D♭et F♯ de l'autre. À distance 1,5, il y a F et D d'un côté et rien de l'autre. Donc nous dirons que la tête de cet axe de symétrie se situe du côté de C et G.



On remarquera que la définition précédente s'applique aussi à des ensembles miroirs non ambigus.

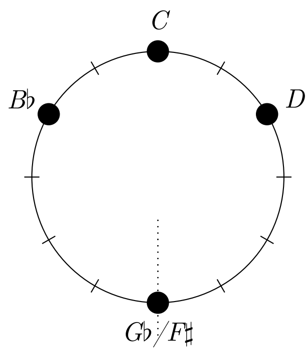
Propriété 8.16 (théorème des supermodes miroirs) *Si un supermode miroir est non ambigu alors sa coupure enharmonique se situe au niveau de son pied.*

Preuve S'il n'est pas ambigu, sa coupure recouvre nécessairement une extrémité de l'axe (sinon, la coupure symétrique serait différente et tout aussi valide). Reste à savoir si c'est la tête ou le pied. La définition de ces deux zones est exactement sur le même modèle que celle de la coupure enharmonique et assure qu'il s'agira du pied. ∎

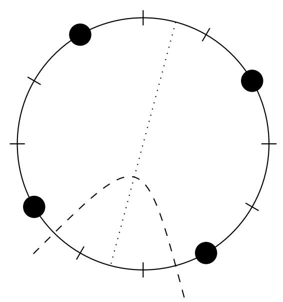
Définition 8.17 *Étant donné un supermode ambigu possédant une symétrie miroir, nous appelons* ***pseudo-coupure*** *celle qui consiste à couper au niveau du pied, si ce n'est pas une coupure vraie.*

Si le pied se trouve au niveau d'une note, on considère qu'elle est coupée en deux et que ses deux orthographes sont valides.

Exemple 8.18 *Considérons l'ensemble suivant. La pseudo-coupure se situe au niveau du G♭/F♯(d'où l'orthographe utilisée dans l'exemple précédent).*



La mention « si ce n'est pas une coupure vraie » est destinée aux modes à transposition limitée où, sinon, une coupure ainsi définie pourrait être une coupure vraie, comme dans l'exemple ci-dessous.



La pseudo-coupure sera renforcée à l'oreille si elle est matérialisée musicalement, par exemple à l'aide d'un ostinato jouant la note ou la quinte de la tête.

Propriété 8.19 *Étant donné un supermode ambigu à un seul miroir, sa pseudo-coupure est unique.*

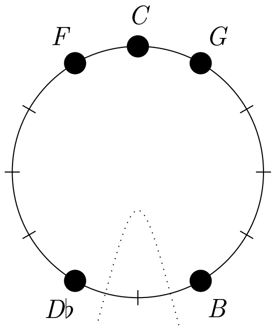
Preuve Il n'a qu'un axe de symétrie et celui-ci possède alors une tête et un pied distincts. ∎

Définition 8.20 *Étant donné un supermode ambigu possédant une symétrie miroir, nous dirons que L en est sa* ***pseudo-étendue quintale*** *ou* ***pseudo-longueur*** *relative à cette symétrie si, en considérant la pseudo-coupure découlant de cette symétrie, il a cette longueur.*

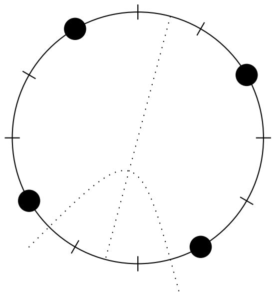
Étant donné un supermode ambigu à un seul miroir, nous pourrons parler de ***sa*** *pseudo-longueur car elle est unique.*

Propriété 8.21 *Une pseudo-longueur d'un supermode ambigu possédant une symétrie miroir est comprise entre 11 et 13.*

Exemple 8.22 *Nous avons vu ci-dessus des exemples où elle vaut 12 ou 13. En voici un de pseudo-longueur 11.*



Preuve Il est clair que la pseudo-longueur ne peut dépasser 13. Reste à montrer qu'elle ne peut être inférieure à 11. Si elle vaut 10 ou moins, la pseudo-coupure laisse un trou de 2 notes ou davantage. Or il s'agit du pied donc, au niveau de la tête, il y a aussi un trou d'au moins 2 notes. Pour que ce soit une pseudo-coupure, il faut aussi qu'il existe des coupures meilleures de part et d'autre de l'axe, donc encore des trous d'au moins 2 notes. Ceci nous fait au total au moins 4 trous de 2 notes chacun, et au moins 4 notes pour faire les séparations ; soit 12 emplacements au total. La seule configuration candidate est donc :



Mais la prétendue pseudo-coupure indiquée en pointillés est en fait une coupure vraie, ce qui est exclu. ∎

Définition 8.23 *Si le supermode a une pseudo-longueur égale à 13, la note traversée par la pseudo-coupure appartient à l'ensemble et elle peut avoir deux homonymes dans l'ensemble. Dans ce cas, nous dirons que c'est une* ***note équivoque ambigüe****, c'est-à-dire à la fois une note équivoque locrienne et une note équivoque lydienne.*

Définition 8.24 *Étant donné un supermode ambigu possédant une symétrie miroir, nous dirons qu'il est* ***pseudo-injectif*** *(resp.* ***pseudo-surjectif****,* ***pseudo-bijectif****,* ***pseudo-complet****) par rapport à cette symétrie si, en considérant la pseudo-coupure liée à cette symétrie, il est injectif (resp. surjectif, bijectif, complet).*

Étant donné un supermode ambigu à un seul miroir, nous pourrons dire pseudo-injectif (resp. pseudo-surjectif, pseudo-bijectif, pseudo-complet) sans plus de précision, puisqu'il y a une seule symétrie.

Propriété 8.25 *Il existe 3 supermodes pseudo-bijectifs :*

Double harmonique

Gamme tonton

Harmonique ambigu[1]

Preuve On reprend le raisonnement de la preuve de la propriété 6.5. Si la pseudo-longueur vaut 11, le seul candidat est le supermode double harmonique, qui convient.

Si la pseudo-longueur vaut 12, par symétrie il y a nécessairement un nombre pair de notes, chacune avec une seule orthographe ; or il faut exactement 7 orthographes pour un supermode bijectif !

Si la pseudo longueur vaut 13, il y a nécessairement un F♯, un C et un G♭. Par symétrie on peut ensuite ajouter un B♭ et un D, ou un D♭ et un B. Mais dans ce dernier cas, la pseudo-coupure se trouverait au niveau du C, ce qui est exclu par hypothèse ; donc on ne peut qu'ajouter B♭ et D. Ensuite on peut ajouter un E♭ et un A, ou un A♭ et un E. On obtient ainsi l'harmonique ambigu et la gamme par ton, qui conviennent. ∎

Dans les cartes de l'annexe B, nous avons inclus les supermodes ambigus pseudo-complets.

Dans les annexes D et E, nous avons présenté l'analyse de chaque supermode ambigu suivant ses pseudo-coupures quand il y en a.

Dans l'annexe F, les accords et modes ambigus pseudo-injectifs ont été reportés dans le tableau.

8.3 Réalisations et notes caractéristiques

Définition 8.26 *Étant donné deux ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, où $\mathcal{E}_1$ est ambigu, nous dirons que $\mathcal{E}_1$ est une* ***réalisation ambigüe vraie*** *de $\mathcal{E}_2$ si et seulement si, en choisissant une certaine coupure vraie de $\mathcal{E}_1$ et une certaine coupure vraie ou pseudo-coupure de $\mathcal{E}_2$:*

- *$\mathcal{E}_1$ est inclus dans $\mathcal{E}_2$,*
- *$\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ ont le même complété.*

Définition 8.27 *Étant donné deux ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, où $\mathcal{E}_1$ est ambigu, nous dirons que $\mathcal{E}_1$ est une* ***pseudo-réalisation*** *de $\mathcal{E}_2$ si et seulement si, en choisissant une certaine pseudo-coupure de $\mathcal{E}_1$ et une certaine coupure vraie ou pseudo-coupure de $\mathcal{E}_2$:*

- *$\mathcal{E}_1$ est inclus dans $\mathcal{E}_2$,*

1. Nous verrons plus loin pourquoi nous l'appelons « harmonique ambigu ».

– *$\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ ont le même complété.*

Définition 8.28 *Nous appellerons **réalisation ambigüe** une réalisation ambigüe vraie ou une pseudo-réalisation. Nous appellerons **réalisation** une réalisation non ambigüe ou une réalisation ambigüe.*

Définition 8.29 *Étant donné un ensemble non ambigu (complet ou non), nous dirons qu'une note est **caractéristique (au sens strict)** si elle est présente dans toute réalisation de cet ensemble.*

Dans les annexes C, D et E, nous avons présenté toutes les réalisations, qu'elles soient ambigües ou non.

Chapitre 9

Utilisation de gammes ambigües et/ou miroir sur un accord

Les idées développées dans ce chapitre n'utilisent que peu les notions principales de cet ouvrage, comme la coupure enharmonique et la complétude. Par ailleurs, elles ont sans doute été introduites par divers auteurs. Nous les mentionnons afin de compléter les méthodes précédemment introduites.

Dans ce chapitre, les orthographes utilisées sont en partie arbitraires, car nous considérerons des ensembles ambigus.

9.1 Ensembles parents à transposition limitée

Définition 9.1 *Étant donné un ensemble $\mathcal{E}$ et un entier naturel p qui divise 12, nous appelons* ***ensemble parent d'ordre*** p ***de*** $\mathcal{E}$ *l'intersection des ensembles p-périodiques qui contiennent $\mathcal{E}$.*

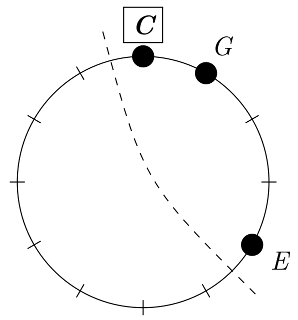
Propriété 9.2 *L'ensemble parent d'ordre p d'un ensemble est p-périodique.*

Preuve C'est trivial. ∎

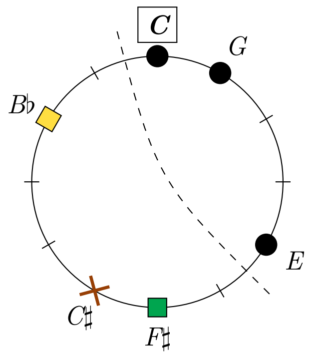
Propriété 9.3 *Étant donné un ensemble $\mathcal{E}$ et un entier naturel p qui divise 12, l'ensemble parent d'ordre p de $\mathcal{E}$ peut être obtenu en prenant les notes de $\mathcal{E}$ et toutes leurs images successives (orbites) par les rotations d'ordre p.*

Preuve C'est trivial. ∎

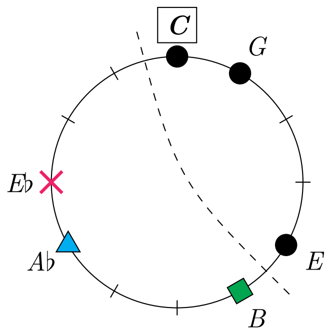
Exemple 9.4 *Considérons une triade majeure, C E G.*



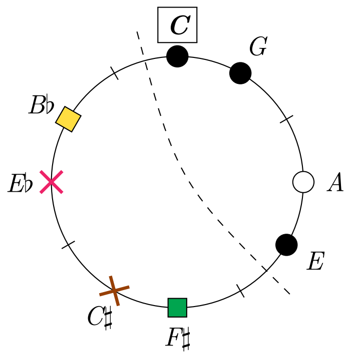
Sa gamme parente d'ordre 2 est la gamme timiton.



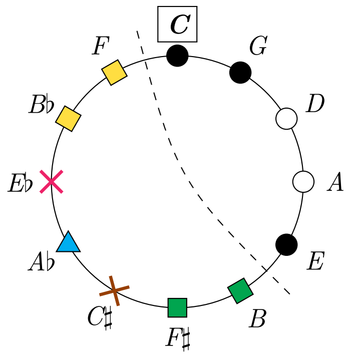
Sa gamme parente d'ordre 3 est la gamme miti.



Sa gamme parente d'ordre 4 est la gamme titon.



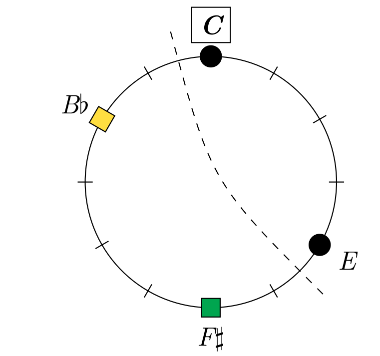
Ses gammes parentes d'ordre 6 et 12 sont identiques : il s'agit de la gamme dodécaphonique (titi).



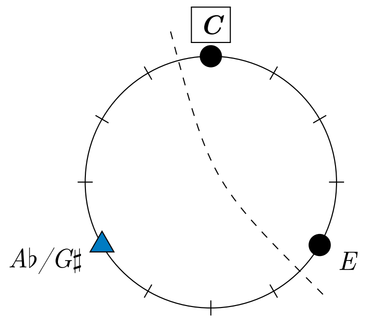
On remarquera que les raisonnements ci-dessus auraient aussi bien pu être menés sur le cercle chromatique que sur le cycle de quintes. Cependant, ce dernier permet également de tester la nature des notes obtenues (extensions, notes étrangères, etc.) selon les méthodes habituelles et donc de donner des indices sur la sonorité et éventuellement la pertinence de la gamme obtenue pour une certaine intention musicale.

Imaginons que dans une grille harmonique, nous soyons confrontés à l'accord C 3. Le problème est que potentiellement, la réalisation de cet accord contient les notes C, G, D, A et E. Toutes les gammes parentes d'ordre p sont alors égales à la gamme dodécaphonique, donc ce procédé perd de son intérêt. Un contournement intéressant consistera alors à ne l'appliquer qu'aux notes caractéristiques voire absolument caractéristiques.

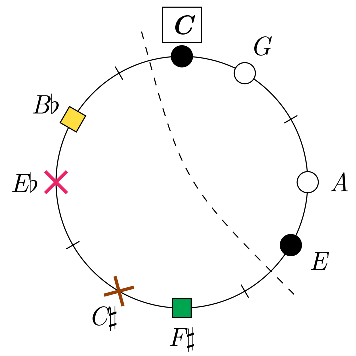
Exemple 9.5 *Considérons donc la famille d'accords C 3. En ne considérant que les notes caractéristiques C et E, la gamme parente d'ordre 2 est la gamme maton.*



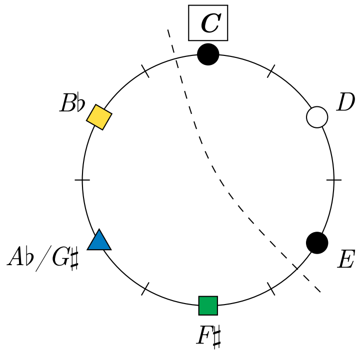
La gamme parente d'ordre 3 est la gamme mama.



La gamme parente d'ordre 4 est la gamme titon.



La gamme parente d'ordre 6 est la gamme tonton.



L'ensemble parent d'ordre 12, comme toujours, est la gamme dodécaphonique (titi).

9.2 Ensembles parents miroirs

Définition 9.6 *Étant donné un ensemble $\mathcal{E}$ et une symétrie miroir du cycle des quintes, nous appelons* ***ensemble parent miroir de*** $\mathcal{E}$ *relatif à cette symétrie l'intersection des ensembles qui contiennent $\mathcal{E}$ et qui possèdent cette symétrie.*

Propriété 9.7 *L'ensemble parent miroir d'un ensemble selon une symétrie miroir possède cette même symétrie.*

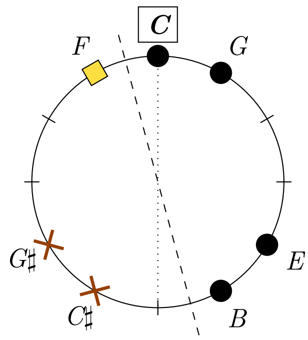
Preuve C'est trivial. ∎

Propriété 9.8 *Étant donné un ensemble $\mathcal{E}$ et une symétrie miroir du cycle des quintes, l'ensemble parent miroir de $\mathcal{E}$ relatif à cette symétrie peut être obtenu en prenant les notes de $\mathcal{E}$ et leur image par cette symétrie.*

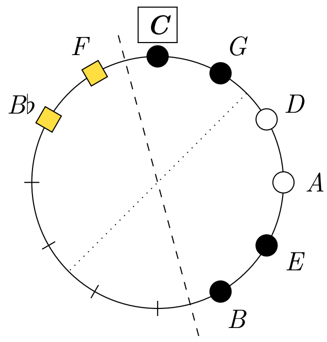
Preuve C'est trivial. ∎

On remarquera qu'un ensemble miroir parent peut être ambigu mais que ce n'est nullement obligatoire.

Exemple 9.9 *Considérons une tétrade majeure, C E G B. Sa gamme parente miroir par rapport à l'axe qui passe par C est une gamme double harmonique.*



Sa gamme parente miroir par rapport à l'axe qui passe entre G et D est la gamme octophonique C 7♭,7♮.

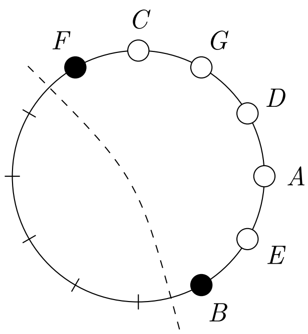


Chapitre 10

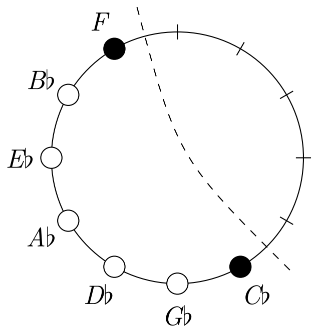
Substitutions basées sur une réalisation ambigüe

Étant donné un ensemble ambigu, on peut choisir arbitrairement une coupure puis déterminer le complété. Ce complété dépend de la coupure choisie. Ceci établit un point commun, une passerelle, entre les différents complétés obtenus de cette manière.

Exemple 10.1 *Considérons le triton F-B. Si on choisit la coupure qui donne cette orthographe, on obtient le complété ci-dessous.*



Avec l'autre coupure, on obtient le complété ci-dessous.



Ceci établit une passerelle entre la gamme de C ionien et celle de G♭ ionien. Autrement dit, entre les accords G 3,7♭ et D♭ 3,7♭, ou entre les accords B 5♭ et F 5♭, etc.

Dans l'exemple ci-dessus, nous avons retrouvé le principe bien connu de la substitution tritonique. Mais le même procédé peut s'appliquer à n'importe quel ensemble ambigu et donner d'autres types de substitution.

Exemple 10.2 *Si on considère l'accord augmenté C E G♯, on trouve une substitution bitonique entre les accords C 4♭, C 3,6♭ et C 5♯. Ou entre C 3,6♭, E 3,6♭ et A♭ 3,6♭. Etc.*

Si on considère le supermode harmonique ambigu C D E♭ F♯ A B, on trouve une substitution entre G 3♭,6♭,7♮ (G mineur harmonique) et B♭ 3,6♭,7♮ (B♭ mineur harmonique). C'est pourquoi nous nommons ce supermode « harmonique ambigu ».

Chapitre 11

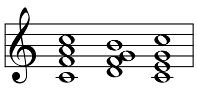
Enchaînements

Définition 11.1 *Nous appellerons* ***enchaînement*** *ou* ***cadence*** *une séquence d'ensembles pointés.*

Exemple 11.2 *G B F - C E G est un enchaînement.*

Définition 11.3 *Nous dirons qu'un enchaînement est* ***injectif*** *(resp.* ***surjectif****,* ***bijectif****,* ***complet****) si l'ensemble de ses notes l'est.*

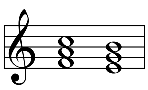
Exemple 11.4 *Considérons l'enchaînement suivant.*



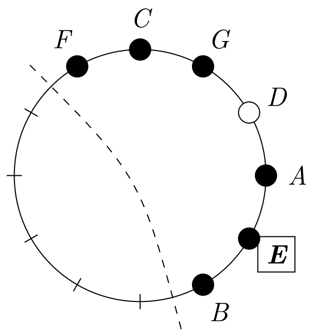
Ses notes sont celles de C ionien. Il est donc bijectif (et a fortiori *complet).*

Définition 11.5 *Soit $\mathcal{P}$ un ensemble pointé. Nous dirons qu'un enchaînement est une* ***cadence modale*** *de $\mathcal{P}$ si l'ensemble des notes de l'enchaînement est inclus dans $\mathcal{P}$, a le même complété que $\mathcal{P}$ et si la note privilégiée du dernier ensemble pointé de l'enchaînement est la même que celle de $\mathcal{P}$.*

Exemple 11.6 *Considérons l'enchaînement suivant.*



Reportons ses notes et sa basse d'arrivée dans le cycle des quintes.



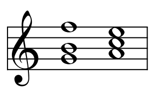
Il s'agit donc d'une cadence modale de E phrygien.

Propriété 11.7 *Soit $\mathcal{P}$ un ensemble pointé. Une cadence modale de $\mathcal{P}$ contient nécessairement les notes caractéristiques de $\mathcal{P}$.*

Preuve C'est trivial. ∎

Étant donné un ensemble pointé $\mathcal{P}$, pour créer une cadence modale, il suffit d'en choisir une réalisation minimale dans les tables (cf. annexes C, D et E) puis de créer un enchaînement qui contient au moins ces notes et termine sur la bonne basse. Si $\mathcal{P}$ a une longueur inférieure à 7, c'est encore plus facile puisque dans ce cas, les notes caractéristiques suffisent. Si $\mathcal{P}$ a une longueur égale à 7, il n'y a que deux notes caractéristiques, la plus bémolisée et la plus diésée, et il suffit de les prendre accompagnées d'une troisième note pour avoir une réalisation mininale.

Exemple 11.8 *Imaginons que nous voulions créer une cadence modale de A éolien. Il est nécessaire de prendre les notes caractéristiques F et B, ainsi que la basse finale A. Or, ces trois notes constituent déjà une réalisation de A éolien. Il ne nous reste plus qu'à les inclure comme bon nous semble.*



Définition 11.9 *Étant donné un ensemble pointé $\mathcal{P}$, nous dirons qu'un accord est un* ***accord modal*** *de $\mathcal{P}$ si ses notes sont dans $\mathcal{P}$ et si son complété est le même que celui de $\mathcal{P}$.*

Exemple 11.10 *G 3,7♭ est un accord modal de C ionien, de A éolien, etc.*

On remarquera que pour des raisons pratiques, nous ne respectons pas la cohérence formelle avec la notion de cadence modale : nous n'exigeons pas que l'accord ait la même note privilégiée que $\mathcal{P}$.

Chapitre 12

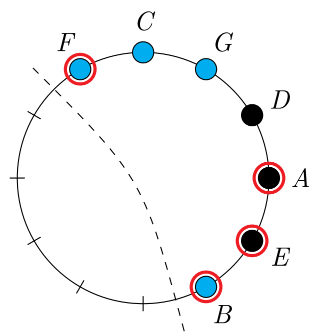
Cadences parfaites et coparfaites

12.1 Définition

Définition 12.1 *Nous appellerons* ***squelette de cadence parfaite*** *un ensemble de notes obtenu par transposition des notes F, C, G, B. Nous dirons que sa* ***note naturelle de résolution*** *est C (ou la note correspondante par transposition).*

Nous appellerons ***squelette de cadence coparfaite*** *un ensemble de notes obtenu par transposition des notes F, A, E, B. Nous dirons que sa* ***note naturelle de résolution*** *est A (ou la note correspondante par transposition).*

Exemple 12.2 *Le supermode heptaphonique naturel contient un squelette de cadence parfaite (en bleu ci-dessous) et un squelette de cadence coparfaite (en rouge).*



Exemple 12.3 *La cadence fauréenne D 3,6♭ - A 3 est une cadence coparfaite.*

La cadence rompue G 3,7♭ - A 3♭,5 est une cadence coparfaite.

La cadence G 2♭,3 - C 3 est à la fois une cadence parfaite et coparfaite. Elle possède un très fort pouvoir résolutif.

On notera que la symétrie entre les deux notions n'est qu'apparente. En effet, alors que la cadence parfaite résout vers C, la cadence coparfaite ne résout pas vers E mais vers A. Ceci est dû au fait que les harmoniques d'un son se développent vers l'aigu et non vers le grave. Ainsi, quand on résout vers la quinte C-G, la basse naturelle est le C, mais quand on résout vers la quinte A-E, la basse naturelle est le A.

Propriété 12.4 (théorème des supermodes surjectifs) *Soit un ensemble non ambigu surjectif.*

Si on le transpose de telle sorte que B soit sa note la plus diésée, alors l'ensemble contient un squelette de cadence parfaite dont la note naturelle de résolution est C.

Si on le transpose de telle sorte que F soit sa note la plus bémolisée, alors l'ensemble contient un squelette de cadence coparfaite dont la note naturelle de résolution est A.

Autrement dit, tout supermode surjectif contient :
- un squelette de cadence parfaite dont la note naturelle de résolution est une seconde mineure au-dessus de la note la plus diésée de l'ensemble,
- un squelette de cadence coparfaite dont la note naturelle de résolution est située une sixte mineure en-dessous de la note la plus bémolisée de l'ensemble.

Preuve Nous allons seulement prouver la première propriété car la seconde s'obtient par symétrie.

Comme la note la plus diésée est B, la note la plus bémolisée du cœur est F. Dans le pire des cas, le supermode est de longueur 11 et sa note la plus bémolisée est D♭, donc la note la plus diésée du cœur est G. Comme l'ensemble est surjectif, il contient les notes du cœur, donc au moins F, C et G. Par ailleurs, il contient B par hypothèse. ∎

On remarquera que cela entraîne également le fait que les notes F, C et G (resp. A, E, B) sont univoques.

Propriété 12.5 (théorème des supermodes complets) *Soit un ensemble complet de longueur L.*

Si on le transpose de telle sorte que B soit la note la plus diésée du surjectivé, alors :
- *l'ensemble contient toujours F ;*
- *si $L \geq 2$, l'ensemble contient C ;*
- *si $L \geq 3$, l'ensemble contient G ;*
- *si $L \geq 7$, l'ensemble contient B.*

Si on le transpose de telle sorte que F soit la note la plus bémolisée du surjectivé, alors :
- *l'ensemble contient toujours B ;*
- *si $L \geq 2$, l'ensemble contient E ;*
- *si $L \geq 3$, l'ensemble contient A ;*
- *si $L \geq 7$, l'ensemble contient F.*

Preuve Par symétrie, nous ne prouverons que la première partie du théorème.

Si $L \geq 7$, alors le surjectivé a la même longueur que l'ensemble initial. Les considérations de la preuve précédente s'appliquent : les notes F, C, G sont dans le cœur, donc dans l'ensemble par complétude, et la note B est présente par hypothèse.

Si $L < 7$, alors le surjectivé a comme longueur $14 - L$. B est l'extension lydienne la plus diésée, donc B♭ est l'extension locrienne la moins bémolisée. Par conséquent, F est la note la plus bémolisée de l'ensemble. Il en découle que l'ensemble contient F, que si $L \geq 2$ alors il contient C et que si $L \geq 3$ alors il contient G. ∎

On remarquera que cela entraîne également le fait que les notes F, C et G (resp. A, E, B) sont univoques.

12.2 Modes principal et secondaire

Définition 12.6 *Étant donné un supermode complet de longueur $L \geq 7$:*
- *nous appellerons son **mode principal** le mode dont la note privilégiée est une seconde augmentée au-dessus de la note la plus diésée ;*
- *nous appellerons son **mode secondaire** le mode dont la note privilégiée est une sixte mineure au-dessous de sa note la plus bémolisée.*

Exemple 12.7 *La table 12.1 présente les modes principal et secondaire de chaque supermode bijectif. Le squelette de cadence parfaite du théorème est représenté en bleu ; celui de cadence coparfaite en rouge.*

On notera que dans les supermodes harmoniques, mode principal et mode secondaire sont confondus. Ces supermodes possèdent une remarquable puissance résolutive vers la note C.

Définition 12.8 *Les supermodes obtenus par quintes successives seront appelés **naturels**. On parlera ainsi du diphonique naturel, triphonique naturel, etc.*

Les autres supermodes non ambigus complets de longueur $L \geq 7$ sont nommés comme leur mode principal.

Exemple 12.9 *Comme nous l'avons fait depuis le début, nous nommerons donc « mineur harmonique » le supermode aussi bien que le mode lui-même.*

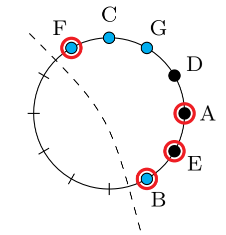
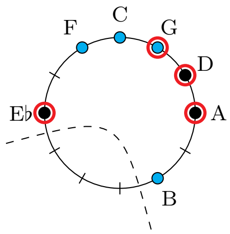
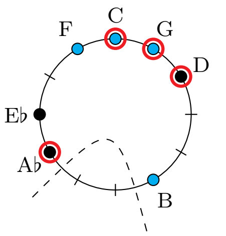
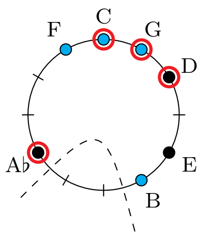
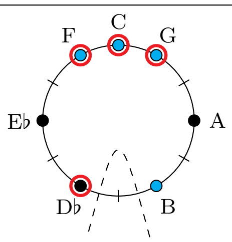
Supermode	Mode principal	Mode secondaire
	C ionien	A éolien
	C mineur mélodique	G 3,6♭
	C mineur harmonique	C mineur harmonique
	C majeur harmonique	C majeur harmonique
	C phrygien mélodique	F 3,4♯,6♭,7♭

TABLE 12.1 – Mode principal et mode secondaire dans les 5 supermodes bijectifs

Chapitre 13

Analyse fonctionnelle

Dans tout ce chapitre, sauf mention contraire, nous supposerons que nous sommes en ton de C (quel que soit le sens exact donné à ce terme, sur lequel nous reviendrons dans le chapitre suivant).

13.1 Fonctions de basse et de notes

Définition 13.1 *Dans le ton de C, nous associons à chaque note une* ***fonction*** *et un* ***point cardinal*** *suivant le tableau suivant.*

Note	Fonction	Point cardinal
F	sous-dominante	nord
C	tonique	nord
G	dominante	nord
D	sous-dominante	est
A	tonique	est
E	dominante	est
B	sous-dominante	sud
G♭	tonique	sud
D♭	dominante	sud
A♭	sous-dominante	ouest
E♭	tonique	ouest
B♭	dominante	ouest

TABLE 13.1 – Fonctions et points cardinaux en ton de C

Parmi les sous-dominantes, nous verrons plus loin pourquoi nous avons choisi le nord sur F (naturel pour les théoriciens classique) plutôt que sur D (naturel pour les théoriciens jazz).

Définition 13.2 *Dans le ton de C, étant donné un ensemble pointé, sa* ***fonction de basse*** *et son* ***point cardinal de basse*** *sont données par sa note privilégiée suivant le tableau 13.1.*

Définition 13.3 *Dans le ton de C, considérons un ensemble de longueur L.*

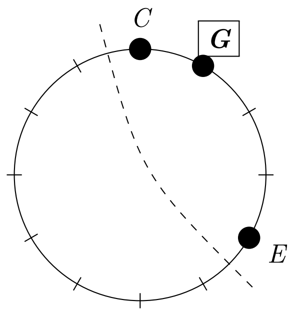
*Si $L \leq 6$, sa **fonction de notes** et son **point cardinal de notes** sont donnés par sa note la plus bémolisée suivant le tableau 13.1.*

*Si $L \geq 7$, sa ou ses **fonctions de notes** et son ou ses **point cardinaux de notes** sont donnés par les tritons de son complété. Si le complété contient les notes F et B orthographiées de cette manière (c'est-à-dire que le ruban contient la zone allant de F à B), alors l'ensemble à pour fonction et point cardinal de notes ceux donnés par la note G suivant le tableau 13.1. Les autres cas s'en déduisent par transposition.*

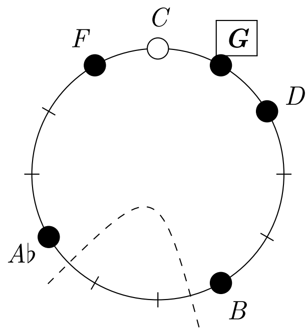
On remarquera qu'un ensemble de longueur $L \geq 7$ peut avoir plusieurs fonctions et plusieurs points cardinaux de notes.

Par abus de langage, on dira parfois « fonction » pour « fonction et point cardinal » si c'est clair dans le contexte.

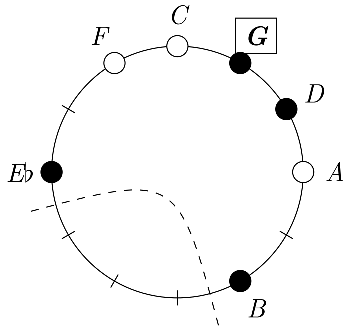
Exemple 13.4 *Considérons l'ensemble pointé G C E. Sa fonction de basse, donnée par G, est dominante nord. Sa fonction de notes, donnée par C, est tonique nord.*



Considérons l'ensemble pointé G B D F A♭. Sa fonction de basse est dominante nord. Le complété contient les tritons A♭-D et F-B, donc ses fonctions de notes sont dominante ouest et dominante nord.



Considérons l'ensemble G B D E♭. Sa fonction de basse est dominante nord. Le complété contient le triton E♭-A donc une fonction de notes est donnée par la note F : c'est sous-dominante nord. Il contient aussi le triton F-B, ce qui lui donne également une fonction de notes dominante nord.



En l'occurrence, la basse choisie renforce l'impression de dominante nord et dans un contexte tonal de C, il est probable que cet ensemble pointé soit utilisé comme tel. Mais selon la basse, cette impression pourra changer. Ainsi, sur une basse de D, cet ensemble conduira volontiers vers G, ce qui confirme sa fonction possible de sous-dominante.

On remarquera que cet ensemble pointé, dans l'absolu (c'est-à-dire sans information supplémentaire, hors contexte), sous-entend un supermode dont le mode principal est C mélodique mineur et le mode secondaire G 3, 6♭. La sonorité de ce supermode conduit naturellement, par cadence parfaite ou coparfaite, vers les toniques C ou G. C'est précisément ce qu'on souhaite exprimer par la notion de fonction : il conduit vers C, ce qui correspond à une fonction dominante, et il conduit vers G, ce qui correspond à une fonction sous-dominante.

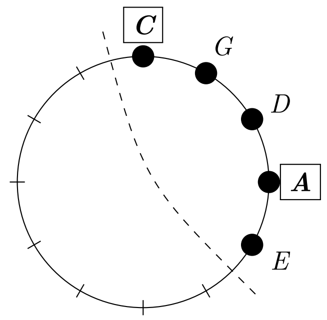
Propriété 13.5 *Étant donné un ensemble pointé, ses fonctions et points cardinaux de basse, ainsi que ses fonctions et points cardinaux de notes, ne dépendent que de sa famille.*

Preuve C'est trivial : les ensembles pointés de la même famille partagent la même basse, donc la même fonction et le même point cardinal de basse ; et le même complété, donc les mêmes fonctions et points cardinaux de notes. ∎

13.2 Position fondamentale

Définition 13.6 *Soit $\mathcal{P}$ un ensemble pointé dont l'ensemble est $\mathcal{E}$. Nous dirons que $\mathcal{P}$ est une* ***position fondamentale*** *de $\mathcal{E}$ si et seulement si une fonction de note de $\mathcal{P}$ est identique à la fonction de basse de $\mathcal{P}$, même si le point cardinal est différent.*

Exemple 13.7 *Considérons l'ensemble C G D A E. Si on est en ton de C, son unique fonction de notes est tonique nord. Les deux positions fondamentales ont donc pour basse C et A. Si on est en ton de G par exemple, son unique fonction de notes est sous-dominante, et les deux basses qui ont fonction sous-dominante sont également C et A.*

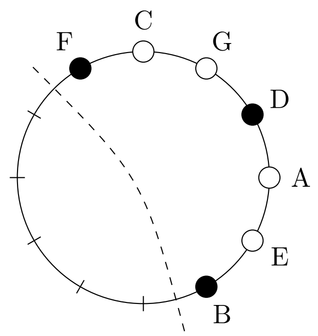


Propriété 13.8 *Les positions fondamentales d'un ensemble ne dépendent pas de la tonalité ambiante.*

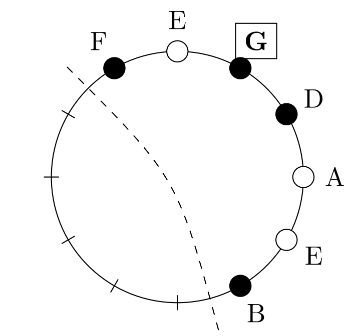
Preuve Si, au lieu d'être dans le ton de C, on est dans le ton d'une autre note, le tableau 13.1 est transposé de la même manière, ce qui modifie de la même façon les fonctions de basse et de notes. ∎

Propriété 13.9 *Un ensemble peut posséder zéro, une ou plusieurs positions fondamentales.*

Preuve Considérons l'ensemble B D F en ton de C. Le seul triton de son complété est F-B, donc sa fonction de notes est dominante. Or aucune de ses trois notes ne donnerait une fonction de basse dominante. Donc cet ensemble n'a pas de position fondamentale.



Considérons l'ensemble G B D F. Cette fois-ci, une seule basse correspond à la fonction dominante : c'est G. Sa seule position fondamentale est donc sur basse de G.



On notera enfin que si on ajoute la note E dans l'ensemble, il y a une deuxième position fondamentale sur basse de E. ∎

En pratique, le mouvement de basse par tierce majeure descendante est relativement faible, ce qui le rend risqué pour une cadence de fin. Ainsi, l'accord E 2♭,5 évoqué ci-dessus produit une cadence finale vers un accord de C qu'on n'emploiera qu'avec précaution. En revanche, il produit une cadence finale très intéressante vers un accord de A mineur par exemple (la basse produit un mouvement de cadence parfaite et les notes constituent une cadence coparfaite). Comme celui-ci a une fonction de tonique, cela confirme bien la fonction dominante de E 2♭,5.

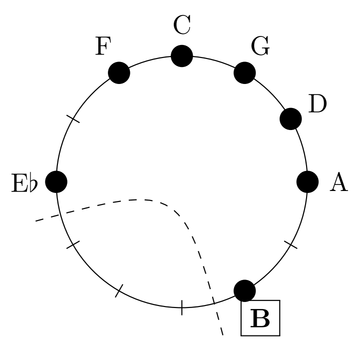
Propriété 13.10 *Un intervalle (c'est-à-dire un ensemble de deux notes) différent du triton possède une seule position fondamentale, dont la basse est la note la plus bémolisée suivant sa coupure enharmonique.*

Preuve Cela découle immédiatement de la définition. ∎

Exemple 13.11 *Les intervalles dans leurs positions fondamentales sont donc l'unisson, la quinte juste, la seconde majeure, la sixte majeure, la tierce majeure et la septième majeure. Le triton n'a pas de position fondamentale.*

13.3 Fonctions de réalisation et d'enchaînement

Considérons l'ensemble pointé B 4♭.



Il contient les tritons E♭-A et F-B donc, en C, ses fonctions de notes sont sous-dominante nord et dominante nord. *A priori*, le rôle fonctionnel de cet ensemble pointé n'est donc pas clair.

Imaginons la réalisation suivante.

Le triton E♭-A est entendu dans les graves, donc il imprime davantage son champ harmonique que le triton B-F : cette réalisation privilégie l'impression de sous-dominante.

À présent, considérons la réalisation suivante.

Cette fois, c'est le triton B-F qui est entendu dans les graves, donc on entend davantage la fonction de dominante.

Ainsi, pour les accords qui ont plusieurs fonctions de notes (sans même compter les points cardinaux), la réalisation de l'accord peut influer sur la perception de la fonction. Mais puisque ces accords portent intrinsèquement les deux fonctions (ou plus), il est difficile de tracer une frontière claire entre la perception de l'une et de l'autre. Nous parlerons ainsi de **fonction de réalisation**, sans essayer d'en donner une définition formelle qui serait forcément plus ou moins arbitraire. Remarquons que cet exemple constitue une violation du principe d'identité des octaves, qui reste cependant une bonne approximation dans la plupart des cas et que nous adoptons généralement dans le reste de cet ouvrage.

Un autre aspect peut influer sur la perception de fonction. Par exemple, si cet accord B 4♭ résout vers un accord de E, cela renforce la perception de dominante de E, c'est-à-dire de sous-dominante (en C). En revanche, s'il résout vers un accord de C, cela renforce la perception de dominante. Là non plus, nous ne formaliserons pas davantage, mais nous retiendrons simplement que pour un accord possédant plusieurs fonctions, sa **fonction d'enchaînement** consiste à prendre en compte vers quel accord il résout.

Nous disposons ainsi de quatre notions de fonction :

- fonction de basse,
- fonction de notes,
- fonction de réalisation,
- fonction d'enchaînement.

La fonction, dans sa globalité, est une notion complexe qui regroupe ces quatre aspects. Si les quatre aspects donnent la même fonction, l'accord a un rôle extrêmement clair, monolithique, dans la perception harmonique. Si plusieurs aspects donnent des fonctions différentes, l'accord a un rôle tonal plus composite, plus insaisissable. Ces deux cas sont bien sûr intéressants musicalement, suivant l'intention du musicien et le style pratiqué.

Si on envisage de substituer un accord à un autre, il est important de considérer la fonction de celui-ci dans sa complexité. Si l'accord a une double-fonction de notes de sous-dominante et dominante, mais une fonction de dominante dans le contexte (basse, réalisation, enchaînement), il sera plus compromettant de le remplacer par un accord sous-dominante que par un accord dominante.

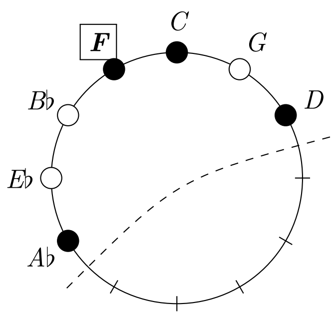
13.4 Discussion de la notion de fonction

On peut arriver à la notion de fonction par plusieurs chemins.

On peut partir de la constatation suivante. Le triton F-B peut résoudre vers 4 notes par cadence parfaite ou coparfaite : C, A, G♭, E♭. Ces 4 notes sont ainsi liées par un point commun : un accord comprenant le triton F-B, l'intervalle le plus tendu du cycle des quintes, peut naturellement résoudre vers l'une d'entre elles. Il en découle que dans une écriture tonale, accordant une importance privilégiée aux cadences parfaites et coparfaites, ces 4 notes pourront souvent se substituer l'une à l'autre dans certaines résolutions. De la même façon, les notes G, E, D♭, B♭ d'une part, et F, D, B, A♭ d'autre part, partagent le même type de lien. Nous sommes donc amenés à définir trois groupes, que nous appelons sous-dominante, tonique et dominante. Comme, bien sûr, il ne s'agit que de point commun et pas d'égalité, nous ajoutons la notion de point cardinal pour différencier les quatre notes d'un même groupe.

Nous aurions aussi pu définir six fonctions : par exemple dominante et co-dominante, correspond aux notions de cadence parfaite et coparfaite. Ainsi, G 3,7♭ et D♭ 3,7♭ seraient dominantes, tandis que E 3,7♭ et B♭ 3,7♭ seraient co-dominantes. Nous aurions même pu définir douze fonctions aux noms totalement différents. Mais la formalisation en 3 fonctions et 4 points cardinaux a pour mérite de pouvoir décrire toutes ces idées à la fois.

Exemple 13.12 *Considérons le premier accord de la cadence fauréenne F 3♭,6 - C 3. Sa fonction de basse est sous-dominante nord, ce qui sonne une sonorité majestueuse de cadence plagale, et sa fonction de basse est dominante ouest, un type de co-dominante qui lui donne un pouvoir résolutif vers C 3 important, quoique plus subtil que celui d'une cadence parfaite.*



Une autre méthode, plus empirique, consiste à partir du supermode heptaphonique naturel, le plus simple des bijectifs (il a la plus petite longueur), et de son mode principal C ionien. Ce mode contient trois accords parfaits majeurs : F 3, C 3 et G 3. Chacun possède un renversement généralisé qui est un accord parfait mineur, respectivement D m, A m et E m. Comme les accords ayant le même complété ont une sonorité proche, on décide de construire une notion de fonction de notes qui ne dépend que du complété. Ainsi, F 3 et D m, C et A m, G et E m respectivement, auront la même fonction de notes. Ensuite, on constate empiriquement que le cycle de résolution suivant paraît couler de source (dans un certain cadre culturel en tout cas).

C 3 (ou A m) - F 3 (ou D m) - G 3 (ou E m) - C 3 (ou A m).

À chaque place dans le cycle, on associe un nom de fonction comme c'est fait traditionnellement. Ensuite, on teste toutes les familles d'accord en essayant de les substituer à un accord de ce cycle. Par exemple, on remarque empiriquement que l'accord D 3 prend très facilement la place de F 3 et on dit donc que la fonction de notes de D 3 est sous-dominante. Et ainsi de suite.

Ensuite, on définit la fonction de basse : par le pouvoir de son champ harmonique, elle fait entendre l'accord majeur correspondant. La fonction de basse est donc définie comme celle de son accord majeur [1].

L'intime conviction de l'auteur de ces lignes est que la notion de fonction ne correspond pas à un phénomène aussi simple et profond que d'autres notions exposées dans cet ouvrage, comme la complétude. Il s'agirait plutôt d'un raccourci formel très pratique qui permet de recouvrir plusieurs phénomènes.

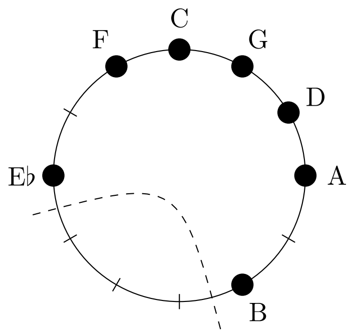
– Des triades parfaites homonymes, comme C 3 et C m, ont ainsi la même fonction, ce qui correspond à l'idée tonale que c'est le ton qui compte (en priorité sur le mode).
– Les substitutions tritoniques (G 3,7♭ par D♭ 3, 7♭) et sesquitoniques (G 3,7♭ par B♭ 3, 7♭), qui s'appliquent à des accords de longueur 7 ou 10 naturellement mais aussi à d'autres, correspondent à une substitution par un accord de même fonction.
– Les cadences parfaites et coparfaites se représentent très bien dans ce cadre.

Par ailleurs, il ne faut pas demander davantage à cette notion que ce qu'elle peut donner : elle est très pratique dans un contexte tonal et particulièrement dans des mouvements cadenciels. La faire sortir de ce cadre ne serait pas forcément pertinent.

13.5 Génération des accords d'une tonalité

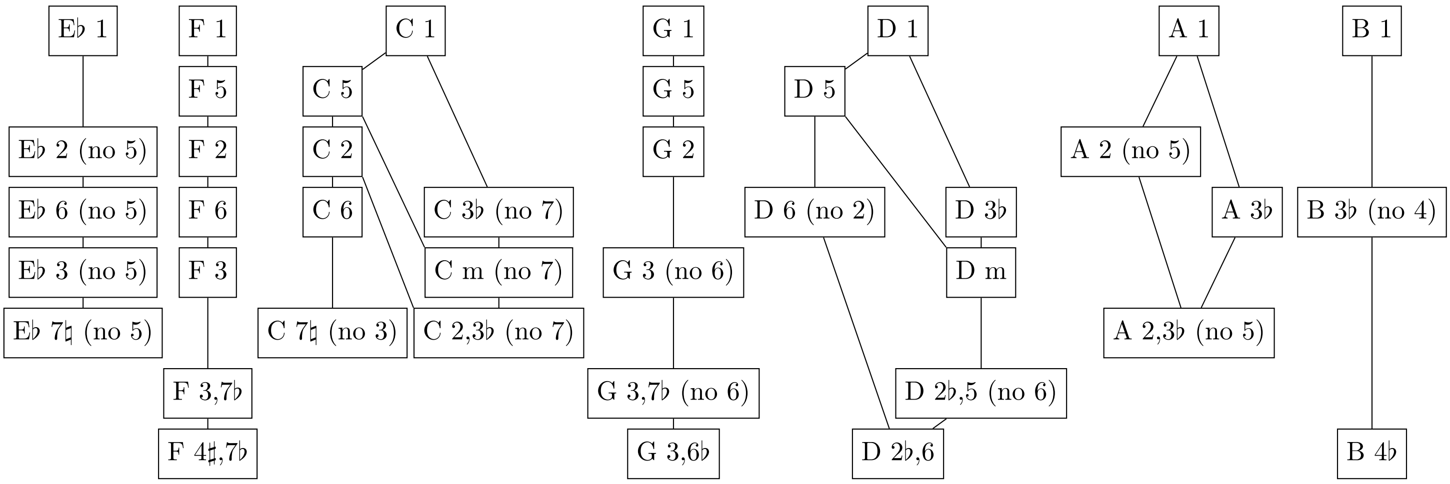
Considérons une tonalité/modalité, par exemple C mineur mélodique.

1. Ceci éclaire pourquoi nous avons choisi de placer conventionnellement la sous-dominante nord sur F. Les accords F 3 et D m, présents dans le ton le plus simple de C (supermode de moindre longueur, mode principal), c'est-à dire C ionien, prennent pour cette raison le point cardinal nord. Et la basse F prend la fonction de l'accord majeur correspondant. Ceci dit, si on choisissait conventionnellement de placer la sous-dominante nord sur D, la théorie n'en serait que peu modifiée. D'ailleurs, la différence de point de vue entre théorie classique et théorie jazz n'est que minime, puisque F 3 et D m sont des renversements généralisés l'un de l'autre.



Traditionnellement, pour étudier ses accords, on prend les triades et éventuellement les tétrades basées sur chaque note de la gamme. Notre approche est totalement différente : nous allons considérer les familles d'accord, au sens que nous avons défini précédemment. Pour chaque longueur, nous examinons les accords présents dans la tonalité. Par exemple, sur basse de E♭, il y a un accord de longueur 1 (E♭ 1), un accord de longueur 3 (E♭ 2 no 5), etc.

Afin d'alléger le schéma ci-dessous, seules les positions fondamentales y figurent. Une arête signifie que l'accord du haut est inclus dans celui du bas.



Nous pourrions aussi faire figurer les accords qui violent la coupure de la tonalité, comme B 3 (no 2,5,6).

Il est notable qu'un accord comme E♭ 7♮ no 5 échappe totalement à l'approche traditionnelle, qui identifierait plutôt l'accord de quinte augmentée avec ou sans septième majeure (E♭ 5♯ [2]). Or, il nous semble que cet accord possède une sonorité très différente sans la quinte augmentée et qu'il s'agit bien d'un accord différent, intéressant pour composer dans cette tonalité.

2. Cet accord semble absent de notre schéma mais il n'est est rien : c'est un renversement de F 4♯,7♭, de G 3,6♭, de D 2♭,6 et de B 4♭. Il ne figure pas en tant que tel car nous n'avons fait apparaître que les positions fondamentales.

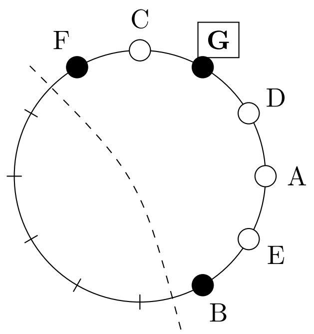
Chapitre 14

Persistance auditive et analyse horizonto-verticale

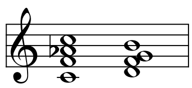
Ce chapitre présente des travaux en cours.

14.1 Persistance auditive

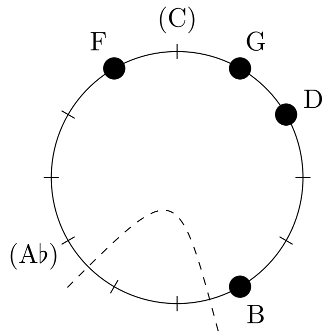
Considérons l'accord G B F.



Si cet accord est pris hors contexte, nous avons vu que A est une note sous-entendue, c'est-à-dire « peu surprenante ». À présent, considérons l'enchaînement suivant.



Sur le second accord, empiriquement, la note A serait plus surprenante que la note A♭. L'interprétation théorique de ce fait est fort simple : au moment où résonne le second accord, le A♭ du premier accord conserve une trace dans la mémoire de l'auditeur. C'est ce phénomène que nous appelons **persistance auditive**. On peut le formaliser par le schéma suivant.



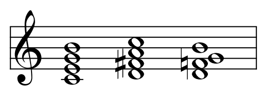
Ainsi, la persistance auditive du premier accord influe sur la perception du second.

14.2 Tonalités locales par persistance

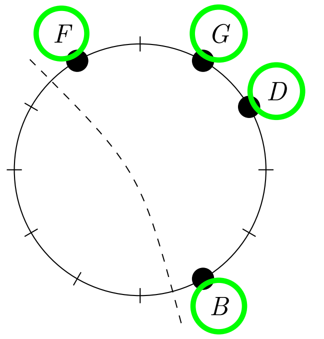
Ce phénomène nous donne une piste pour déterminer les tonalités et les modalités locales d'une œuvre. Nous testons actuellement plusieurs algorithmes dont nous pouvons présenter les principes généraux.

1. Étant donné un instant dans l'œuvre, on place sur le cycle des quintes les notes entendues à cet instant, on place un signe distinctif sur elles (on les « verrouille ») et on calcule la coupure enharmonique.
2. Ensuite, en remontant vers le passé, on prend les notes rencontrées, on les ajoute sur le cycle des quintes et on calcule la coupure enharmonique de l'ensemble des notes déjà rencontrées. On verrouille les notes qui n'ont pas d'homonyme concurrente dans les notes présentes.
3. Si l'ensemble des notes verrouillées est surjectif (avec la coupure considérée), on s'arrête et on conserve les notes verrouillées uniquement. Sinon, on continue à remonter dans le temps.
4. Si on atteint le début de l'œuvre sans que l'ensemble des notes verrouillées soit surjectif, on prend son complété.
5. On obtient ainsi la **tonalité locale par persistance** à l'instant considéré.

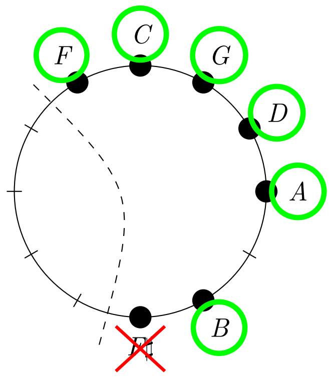
Exemple 14.1 *Considérons l'enchaînement suivant et analysons-le à l'instant du dernier accord.*



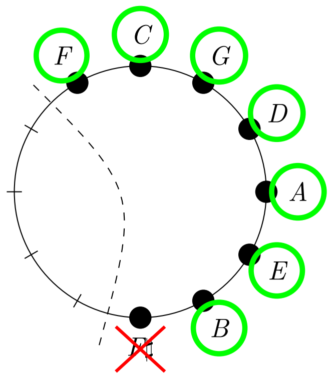
On place le dernier accord sur le cycle des quintes et on verrouille les notes correspondantes



L'ensemble des notes verrouillées n'est pas surjectif, donc on remonte à l'accord précédent. La coupure est légèrement déformée. Toutes les notes sont verrouillées, sauf le F♯ dont on a entendu entretemps une autre version, le F♮.

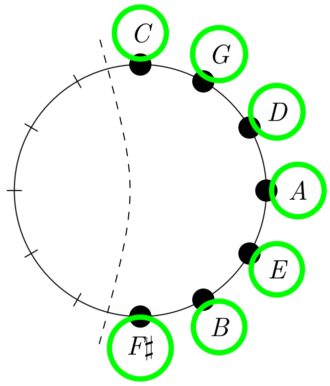


On remonte enfin au premier accord et l'ensemble des notes verrouillées est surjectif.

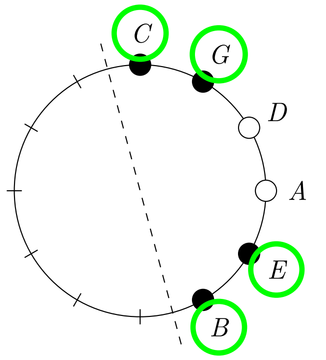


À l'instant du dernier accord, nous sommes donc localement dans le supermode heptaphonique naturel dont le mode principal est C ionien.

Pour poursuivre avec cet exemple, nous pouvons l'analyser à l'instant du deuxième accord. La tonalité locale est alors G ionien.



Enfin, nous pouvons conduire l'analyse à l'instant du premier accord, que nous supposerons être le début de l'œuvre. Cette fois-ci, l'analyse s'arrête sans que l'ensemble des notes verrouillées soit surjectif, donc on prend son complété. À cet instant de l'œuvre, où on n'a encore aucune autre information, la tonalité locale par persistance est le mode hexaphonique de septième majeure de C.



On remarquera que cette méthode ne fournit qu'un supermode et non un mode : ainsi, elle ne dit pas si on est en C ionien ou en A éolien par exemple. Plusieurs éléments complémentaires peuvent constituer des indices sur cette question :
- examiner les basses employées,
- supposer que les cadences parfaites sont employées davantage que les cadences coparfaites (ainsi, l'accord G 3,7♭ aiguille plus vers C ionien que vers A éolien),
- supposer que par défaut, on est dans le mode principal du supermode.

On peut également décider de ne pas répondre à cette question. D'ailleurs, dans certaines œuvres, même très tonales, il est difficile de juger si on est en C ionien ou en A éolien.

14.3 Tonalité locale

Parmi les tonalités dégagées par la méthode précédente, toutes ne sont pas égales. Certaines ne représentent qu'un bref emprunt, alors que d'autres représentent une véritable **tonalité locale**. Plusieurs pistes peuvent être évoquées pour distinguer ces cas.

On peut utiliser des critères rythmiques, comme la durée pendant laquelle on reste sur une certaine tonalité. Mais, d'une part, cela pose un problème de réglage : où placer la limite entre le court et le long ? D'autre part, c'est assez discutable en pratique, car on peut parfois faire entendre très clairement une modulation dans une tonalité affirmée, même sur une courte durée.

Une autre option est de conduire exactement la même analyse que précédemment, mais en renversant la flèche du temps. Si, à un instant donné, on obtient la même tonalité par les deux méthodes, il s'agit d'une tonalité locale affirmée. On distingue ainsi deux types de passages : ceux où les deux sens d'analyse donnent la même tonalité, qu'on peut donc considérer comme étant dans la tonalité en question ; et ceux où les deux sens d'analyse donnent des résultats différents, qu'on peut donc considérer comme des passages modulants. Il est d'ailleurs possible que pendant une œuvre entière, les deux sens donnent des résultats différents : dans ce cas, cela signifie que la tonalité locale par persistance n'est jamais confirmée et qu'il s'agit d'une œuvre très modulante voire atonale.

14.4 Tonalité globale

Par définition, nous dirons qu'une œuvre possède une **tonalité-modalité globale** si sa tonalité locale initiale et sa tonalité locale finale sont les mêmes. Par exemple, si on commence en C ionien et qu'on termine en C ionien [1].

Si la tonalité locale initiale et la tonalité locale finale diffèrent mais que leurs modes principaux reposent sur la même note et ont la même tierce, on parlera de **tonalité globale**. Ainsi, si on commence en C ionien et qu'on termine en C majeur harmonique, on dira que la tonalité globale est C majeur.

Si elles diffèrent mais que leur mode principaux reposent sur la même note mais ont des tierces différentes, on pourra parler de **ton global**. Ainsi, si on commence en C ionien et qu'on termine en C mineur harmonique, on dire que le ton global est C.

14.5 Discussion de la méthode

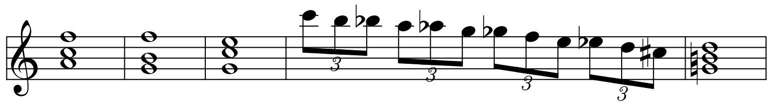
Un avantage de cette méthode est qu'elle ne demande pas de déterminer *a priori* quelles seraient les notes « harmoniquement signifiantes » et quelles seraient les « notes de passage ». On examine toutes les notes sans discrimination. C'est un avantage à la fois du point de vue pratique si on souhaite implanter la méthode dans un programme informatique, et à la fois du point de vue musical car certaines notes, y compris courtes et sur les temps faibles, font entendre un emprunt à une autre tonalité, une modulation passagère voire annoncent une véritable modulation. Ces différents cas sont distingués par la deuxième analyse (en sens inverse du temps).

Un autre avantage, nous l'avons dit, est de ne pas accorder une importance primordiale aux questions rythmiques. Ceci dit, la méthode peut bien sûr être raffinée sur la base de telles considérations.

Les difficultés sont cependant multiples. Nous avons passé sous silence un

1. Pour la tonalité initiale, on considérera la première tonalité locale surjective, sauf s'il n'y en a pas.

phénomène pourtant clair. Examinons l'exemple (musicalement discutable) suivant.



Il est évident qu'à l'instant du dernier accord, on a gardé en mémoire la tonalité de C ionien même si, par exemple, le E♭ a été entendu plus récemment que le E♮. Nous pourrions appeler ce phénomène **persistance auditive à saut**. Nous avons cependant choisi de l'ignorer pour le moment car il est vraisemblable qu'il dépende fortement de la personne concernée : après l'écoute d'un passage chromatique comme ci-dessus, une oreille entraînée garde la mémoire de la tonalité antérieure. Une oreille qui l'est moins, surtout si le passage chromatique est plus long, sera peut-être totalement désorientée.

Mais surtout, que fait-on quand, à un stade de l'analyse, on obtient une configuration ambigüe ? Plus gênant encore, quand on enlève les notes non verrouillées à la fin de l'algorithme, cela peut modifier de nouveau la coupure enharmonique. Dans le même genre d'idées, une note peut être éliminée à un moment (non verrouillée) car possédant une homonyme, mais ne plus avoir d'homonyme à un stade ultérieur car la coupure a changé. Bref, la plupart de difficultés est liée à la gestion de la coupure enharmonique et aussi à l'ordre dans lequel on procède : est-ce qu'on verrouille les notes au fur et à mesure, ou est-ce qu'on accumule sans distinction jusqu'à avoir un ensemble surjectif, puis on fait une deuxième passe ? Est-ce qu'on ne considère que les notes verrouillées et les nouvelles notes pour déterminer la coupure, ou bien est-ce qu'on considère toutes les notes déjà rencontrées ?

Dans les cas simples, toutes ces variantes de la méthode donnent les mêmes résultats. C'est en les étudiant sur une collection important d'exemples limites et en les confrontant à l'expérience d'un analyste humain qu'on pourra juger de leur performances respectives.