La musique persane,
Formalisation algébrique des structures

Rapport de stage à l'équipe représentation musicale, l'IRCAM
Mars-Mai 2005

Vedad FamourZadeh

Première Année de Mastère de l'ingénierie mécanique et acoustique,
Université du Maine

Sous la direction de

Mondher Ayari,
Moreno Andreatta

La musique persane, Formalisation algébrique des structures

L'introduction:

Au cours de la seconde moitié du XXe siècle, de nombreux mathématiciens et musiciens ont utilisé les outils mathématiques (tels que la « *Set Theory* ») pour formaliser les structures musicales. Les structures musicales – en particulier les hauteurs et les rythmes - peuvent être organisées en classes d`équivalence au moyen d'opérateurs logiques tels que la transposition, l'inversion, la permutation… et d'une structure algébrique de groupe. Comme Xenakis l`a souligné en 1965 « *On peut affirmer qu`avec les vingt-cinq siècles d`évolution musicale, on aboutit à une formulation universelle en ce qui concerne la perception des intervalles [et également des rythmes], qui est la suivante : l`ensemble des intervalles mélodiques [il en va de même pour les rythmes] est muni d`une structure de groupe avec comme loi de composition l`addition* ».
Au cours de la présente étude, je tâcherai d'entreprendre l'analyse de la musique persane actuelle à l'aide d'une approche computationelle de la musicologie, et je souhaiterais découvrir les relations d`équivalence entre les gestes mélodico rythmique de cette musique.

De nos jours, nombreux sont les musicologues qui entreprennent des recherches pour accéder aux théories musicales élaborées, au cours de l'histoire, par les savants illustres iraniens tels que *Farabi* (né en 872 J.C) ou bien *Abd al-Qadir Maragehi* (d. 1435). Ces illustres savants se sont adonnés à l'élaboration de systèmes théoriques, pour répertorier les gammes et les rythmes, et pour rationaliser leur interprétation. La plupart du temps, ces savants, loin de confiner leurs recherches à la seule musique persane, ont laissé à la postérité une description des variétés musicales de l'ensemble de la communauté musulmane : arabe, turque, etc.

Lorsqu'on regarde de plus prés les travaux de ce courant de la musicologie contemporaine, on constate deux anomalies : d'un côté, la plupart du temps, leurs recherches ne donnent que d'obscurs résultats, à cause de la trop grande variété de « langues musicales » étudiées simultanément par ces musicologue ; car chaque culture a sa propre musique comme elle a sa propre langue, et vouloir les étudier toutes en même est une ambition absurde et infructueuse. D'un autre côté, si nombre d'entre eux entreprennent l'étude de la musique arabe à la lumière de ces théories séculaires, jamais aucun n'a choisi comme objet d'étude la musique actuelle de l'Iran, bien que *Farabi*, *Maragehi*, *Qutb al-Din Shirazi* (1236-1311)… aient été iraniens et que leur intention première aie été l'étude de la musique persane.

Or, l'étude de la musique persane est quasiment incontournable pour la plaine compréhension des musiques du monde arabe, car de nombreux modes répertoriées par ces savants qui existent aujourd'hui hors de l'Iran dans différent pays musulman sont d'origine iranienne et leur extension hors de l'Iran est due à l'influence de la musique persane sur les diverses traditions musicales. Certains modes dits arabes témoignent de ce phénomène par le nom persan qu'ils portent : *Isfahan* [ville iranienne], *Nava* [air de musique], *Zanguleh* [clochette], *Zirafkand, Buzurg,...*

D'emblée, un obstacle apparaît, qui peut être ainsi formulée : par sa nature, la musique persane semble incompatible avec une analyse algébrique. En effet, la musique persane est l'art de la mélodie. Elle est presque entièrement basée sur l'intuition du musicien, qui, lors de l'interprétation, puise dans sa mémoire, parmi les nombreuses séquences mélodiques mémorisées au cours de l'apprentissage, des mélodies particulières et les fait harmonieusement s'enchaîner, glissant parfois d'une gamme à une autre, guidé dans ces successions par le seul sentiment qu'il éprouve et qui appelle à être partagé. La musique persane actuelle est l'héritage de siècles de pratique artistique des mélomanes et se soucie peu de la théorie. Un exemple révélateur : une mélodie, transposée à l'octave (plus aigu mais sans changer les notes) est considérée comme identique selon les lois de la théorie musicale, puisque les notes, plus exactement l'intervalle ou la « distance » entre les notes, restent inchangés. Toutefois, comme nous le verrons, du point de vue de la tradition musicale iranienne, généralement cette nouvelle mélodie n'a plus le même caractère musical.

Partant de là, notre problématique sera l'établissement d'une passerelle entre deux manières d'aborder la musique : la réflexion théorique et l'intuition artistique. Loin de vouloir imposer à la pratique musicale les lois algébriques, nous tenterons d'adapter notre point de vue de manière à comprendre mathématiquement ce que la musique persane a de plus fondamental, à savoir les lois de composition qui sont intuitivement appliquées par les musiciens pour la succussion des mélodies. Dans ce dessein, nous aurons recours à des outils mathématiques adaptés tel que la théorie des ensemble (set theory).

Nous émettons l'hypothèse suivante : par la définition d'une méthode et le choix d'outils mathématiques adéquats l'analyse algébrique est à même de rendre compte de ces lois de composition. Parmi ces lois, la plus fondamentale est la notion de la « proximité » : ce qui détermine le passage d'une mélodie à une autre est le fait que le musicien

les perçoive comme sensiblement « proche ». Comme le souligne E. Cassirer « *La question des ressemblances perceptives entre différents profils mélodiques est liée à un problème plus général, un problème qui concerne les mathématiques abstraites* » (E. Cassirer : *the concept of group and theory of perception*)

La présente étude a pour objectif d'établir des relations d`équivalence nécessaire pour traduire la « proximité musicale » entre deux séquences mélodiques, ce qui nous conduira à comprendre les lois compositionnelle de la musique persane. De plus, nous étudierons en détail les relations entre la musique persane actuelle et son ancêtre, telle que l'a connu *Farabi*.

L'étude sera menée en quatre étapes, qui sont autant de chapitres du présent écrit : le premier chapitre abordera les fondement générales de la musique : l'intervalle et la consonance, du point de vue des définitions mathématiques. Le deuxième chapitre sera consacré à la description du système de *Farabi* qui malgré les siècles est encore aujourd'hui à même de rendre compte de la musique persane actuelle ; ce chapitre comportera également l'analyse et les donnée de la musique persane actuelle d'après un grand musicien et musicologue iranien contemporain, Dariush Talai. Le troisième aura pour objectif de mettre en lumière l'intérêt de la théorie des ensemble dans la compréhension de la musique. J'y définirai un opérateur nouveau, adapté à l'analyse de la musique persane. Finalement le quatrième chapitre aura un objectif double : d'abord, je tâcherai de mettre en évidence les relations entre la musique persane actuelle et la musique de *Farabi*, et ce faisant, je serai amené à rectifier certaines des valeurs données par Talai ; puis, il s'agira d'utiliser la théorie des ensemble pour définir les classes d'équivalence des structures intervalliques et rythmiques de la musique persane actuelle.

1. Les fondements théoriques:

1.1 : L'intervalle musical :

Si un son est périodique, il peut être décomposé, selon les séries de Fourier, aux composantes multiples naturelles de sa fréquence fondamentale (ses harmoniques)[1] :

Si, $s(t) = s(t+T)$ alors $s(t) = \sum_n S_n \times e^{ift2\pi} \Rightarrow f_n = n \times f_1 \quad (1.1)$

Les harmoniques multiples de deux d'une note de musique constituent non pas des notes différentes, mais cette même note à des octaves différentes. On les considère donc comme appartenant à une même classe d'équivalence. Ce qui signifie que l'adition d'un intervalle octave à une note, ne la change pas. Ainsi, nous avons affaire à un groupe cyclique[2]. L'intervalle musical (c'est-à-dire la relation entre deux notes) est le rapport de la fréquence fondamentale de deux sons périodique : $\text{int}_a^b \cong f_b / f_a$ et l'addition musicale des intervalles équivaut à la multiplication des rapports fréquentiels : $\text{int}_a^c = \text{int}_a^b + \text{int}_b^c \Leftrightarrow f_c / f_a = (f_c / f_b) \times (f_b / f_a) \quad (1.2)$

1.2 : La gamme tempérée :

Pour diviser un intervalle comme l'octave en « n » parties égales, il faut définir un sous-intervalle tel qu'en l'additionnant « n » fois à lui-même (autrement dit par la multiplication de ce sous-intervalle) l'on aboutisse à l'octave de la note de départ : $\text{int}^n = 2 \Rightarrow \text{int} = 2^{1/n}$

Dans la gamme tempérée occidentale, chaque « demi-ton » est égale à $2^{1/12}$, en divisant encore un demi-ton par 100 parties égales, l'on aboutit au « Cent ». Pour calculer un intervalle musical en cent :

$2^{in_{cent}/1200} = f_b / f_a \Rightarrow in_{cent} = 1200 \times \log(f_b / f_a) / \log 2 \quad (1.3)$

Farabi n'ayant pas ces moyens mathématiques à sa disposition, employait d'autres procédé pour calculer deux intervalles perceptiblement égaux. Par exemple, il cherchait deux parties égales de l'intervalle second (9/8) comme ceci : $9/8 = 18/16 = (18/17) \times (17/16)$

Il est à noter que $9/8 = 204_{cent}$, $18 \backslash 17 = 99_{cent}$ et $17/16 = 105_{cent}$

1.3 : Les rapport fréquentiels sur un instruments à corde :

La fréquence du premier mode de chaque instrument (la fondamentale) lui est imposée par les conditions aux limites. Dans le cas des instruments à corde, c'est la longueur de la corde qui détermine la fréquence des notes. Plus la corde est courte, plus la note est aiguë. Ainsi, sur une corde, il est possible de calculer la longueur

---

[1] Il est à noter que dans les faits, les harmoniques peuvent être légèrement décalés par rapport aux valeurs $f_n = n \times f_1$. Par exemple, sur une corde soumise à tension à cause de sa raideur. Mais de tels phénomènes ne seront pas pris en compte dans notre article.

[2] pour les définitions mathématiques, voir le deuxième chapitre.

correspondant à une note donnée, en multipliant l'inverse du rapport fréquentiel de cette note par la longueur totale de la corde (qui correspond à la note de référence du rapport fréquentiel).
« Prenons une corde A-B ; si nous la divisons en deux partie égales au point J, la note fournie par le segment J-B a la fréquence double de la note produit par A-B. si l'on divise encore la partie A-J en deux parties égales au point D, la longueur D-B, étant 3/4 de A-B, produira la quarte (4/3) de la note de AB. De la même manière, en divisant la longueur de la corde en trois parties égales, l'on obtient la longueur 2/3 qui produit la quinte (3/2). L'intervalle qui sépare la quinte de la quarte est un ton majeur (9/8). »[3]

1.4 : La consonance[4] :

La consonne est définie comme le résultat de la synchronisation des partiels (harmoniques) de deux ou plusieurs sons musicaux différents. Voir figure 1. Plus deux sons ont de partiel en communs, plus ils sont consonants. En outre, le degré de consonance s'élevé à mesure que ce phénomène à lieu parmi les partiels les plus petits. Supposons que deux cordes d'un instrument soient accordées à l'unisson. Tous leurs partiels sont alors communs et il y a entre elles le degré maximal de consonance. À présent, si l'on modifie très progressivement la fréquence fondamentale de l'une des cordes, en changeant la longueur de cette corde, leurs partiels commencent à s'éloigner. On entendra d'abord le battement s'accélérer à mesure que les partiels s'éloignent, puis on distinguera deux notes dissonantes, jusqu'à ce qu'enfin la distance entre les partiels soit suffisante pour entendre la première consonne car les partiels s'alignent encore. Voir figure 2.
Pour trouver plus exactement le degré de concurrence entre deux sons, il faut recourir à l'analyse spectrale plutôt qu'aux séries de Fourier. Ce qui offre la possibilité d'une part de choisir la taille et le type de la fenêtre temporelle, et d'autre part de prendre en compte le décalage des harmoniques.

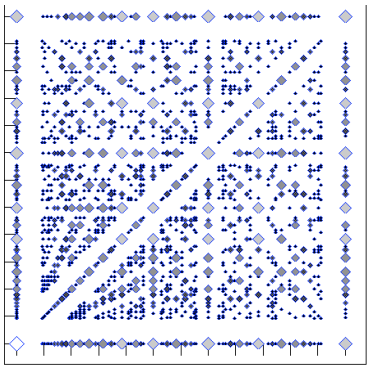


Figure 1:
Les partiels en communs de l'intervalle (4/3)

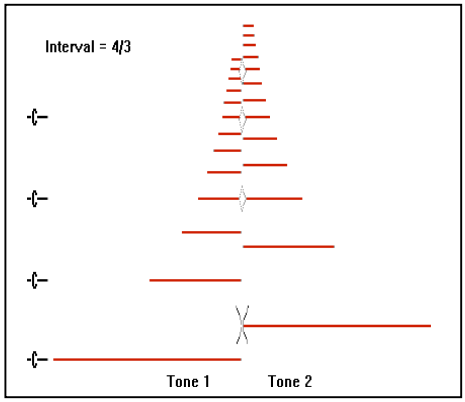


Figure 2:
Le degré de concurrence

La quinte est produite par l'harmonique trois (la multiplication par trois de la fréquence fondamentale), de même que la quarte (la quarte étant l'inverse da la quinte par rapport à l'octave) et la tierce majeure est produite par l'harmonique cinq. La figure 3[5], montre les neuf premiers harmoniques qui sont les plus importants dans les intervalles d'« intonation juste » (*just intonation intervals*)

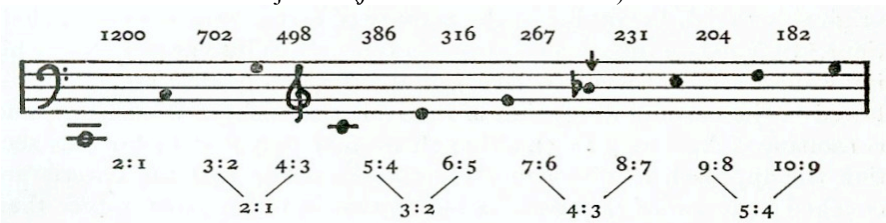


Figure 3 : Les neufs premiers partiels et leurs intervalles musicaux

Néanmoins, du point de vue de la perception, de nombreux théoriciens, tels que Harry Partch soulignent le fait que nous jugeons un intervalle plus consonant quand son rapport fréquentiel est formé de petits nombres (aussi bien dans le numérateur que dans le dénominateur). Ce qui signifie que la consonance des intervalles décroît à mesure que les nombres impairs dans leur rapport augmentent. Ce, à partir de 1/1, puis 2/1, 3/2, 4/3, 5/4, 5/3, etc. en passant par des nombres présentant un rapport de plus en plus grand, jusqu'à une dissonance infinie. Il faut rappeler que souvent, dans la plupart des gammes des différentes traditions musicales, les trois premiers intervalles sont considérés comme les degrés de gammes les plus importants[6]. Voir Figure 4[7].

---

3 Mondher Ayari, *l'écoute des musiques arabes improvisées : Essai de psychologie cognitive de l'audition*, l'Harmattan 2003, Page 38.

4 Norman Sohl : *An Atlas of Consonance*, Seattle Washington, 1986-2002. **[J1].**

5 O. Wright : *The Modal system of Arab and Persian music*, Oxford University Press 1978. **[M3].**

6 Notons qu'il y a certaines gamme, comme la gamme de *Tambour Bagdad* dans lesquelles intervalles (3/2) n'existent pas.

7 Harry Partch : Genesis of Music **[J3].**

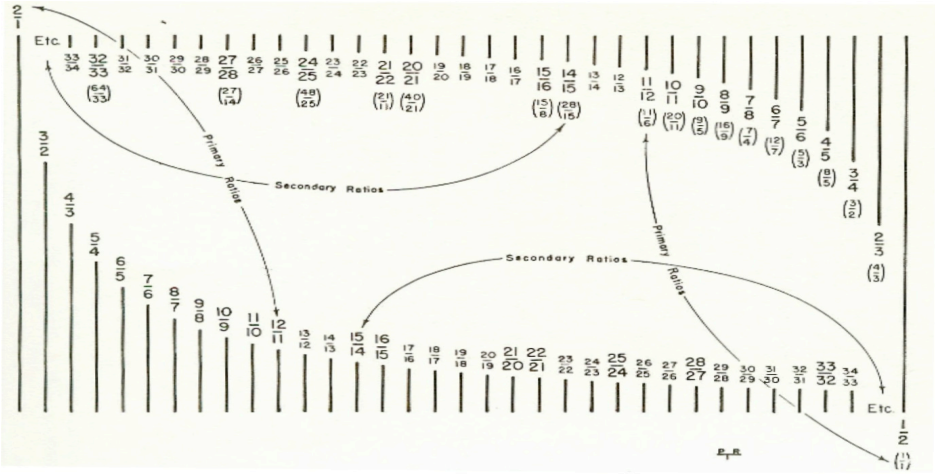


Figure 4 : l'ordre perpétuel des intervalles consonants (descendants et ascendants)

1.5 : La « musique juste » (*just music*)[8] :

Une échelle musicale uniquement fondée sur les consonnes est appelée l'échelle juste.

« *Intonation juste (Just Intonation) : un système dans lequel l'intervalle et la construction de la gamme sont basés sur le critérium de l'ouie et par conséquent un système et procédure qui est limité aux rapports arithmétiques des nombres simples et petits ; l'intervalle initial dans l'intonation juste est 2/1, et si l'on continue, ils en proviennent la richesse de l'intervalle musical inhérent dans la relation des nombres simples et petits. L'intonation juste est le terme pour décrire cette procédure* » Harry Partch, Genesis of Music.

Partch donne d'autres aspects de la perception avec ce qu'il appelle « The Athletic Ear ». Il explique que par la pratique musicale dans l'histoire, d'un côté, l'usage des intervalles comportant des nombres impairs supérieurs est devenus de plus en plus courant dans les gammes et ces intervalles sont de plus en plus considérés comme consonants, D'un autre côté, il décrit comment la perception auditive modifie le son qu'elle reçoit réellement pour l'approcher du son qu'elle est en attente de recevoir. Avec la pratique, parfois le sujet finit par préférer ce son dans quelque situation. Cependant, pour Partch, ce phénomène est réservé aux consonances parfaites (l'octave, la quinte et le quarte), et ne concerne pas les quasi-consonances.
Dans cette perspective, il définit une table qu'il l'appelle « The Incipient Tonality Diamond », le diamant élémentaire de tonalité. Les lignes sont basées sur le même partiel dans dénominateur et le colonnes sur le même partiel dans le numérateur. Voir Figure 5.

	Num :2	Num :5	Num :3
Dén :3	4/3	5/3	3/3
Dén :5	8/5	5/5	6/5
Dén :2	2/2	5/4	3/2

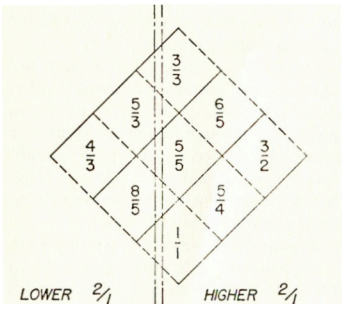


Figure 5: The Incipient Tonality Diamond

Chaque ligne constitue un accord (que Partch appelle les Odentities, 1, 5, 3 d'une Otonalité) et ainsi que chaque colonne (les Udentities d'une Utonalité). Partch s'arrête à la limite des partiels utilisés : le partiel impair 11 (au numérateur et au dénominateur), et de cette manière, il construit une échelle de 43 notes[9] dans une octave où il y a 29 intervalles présentant un rapport de premiers ordres et figurant dans le diamant ; les autres étant des rapports de deuxième ordre, c'est-à-dire le résultat de la multiplication de deux intervalles de premier ordre.[10]

Le rapport fréquentiel de chaque intervalle peut être représenté par les puissances des nombres primaires : 2, 3, 5, 7, 11 au numérateur et dénominateur. Puisque les puissances de deux appartiennent à la même classe d'équivalence (la même note musicale). l'on peut marquer chaque intervalle d'une échelle au moyen des puissances de 3, 5, 7, 11 de son rapport fréquentiel, comme ceci : 3/4, 3/2, 3, 6, … par $\left[3^1\right]$

8 Harry Partch : Genesis of Music, **[J3].**

9 Voir Appendice III

10 Pour plus de détails, voir **[J3].**

Prenons un Exemple : L'intervalle 10/9. D'abord que représente cet intervalle du point de vue musicale ? $10/9 = 5/4 \times 4/3 \times 4/3 \times 1/2$, cet intervalle est donc la tierce majeure d'une quarte d'une quarte.

Et l'on peut représenter cet intervalle par $\left[3^{-2}, 5^{1}\right]$ ou tout simplement $\left[-2,1\right]$. Il convient de noter la différence caractéristique entre une mélodie telle que do, ré, mi, $(9/8) \times (9/8) \cong 204_{cent} + 204_{cent}$, et une autre, $(9/8) \times (10/9) \cong 204_{cent} + 180_{cent}$, formée sur la tierce d'intonation juste (5/4).
Enfin, il est important de savoir que plus le rapport arithmétique d'un intervalle est petit, plus il est consonant, même si d'un coté, cette règle est sujette à des préférences d'ordre culturelles pour certains intervalles au détriment d'autres - comme par exemple dans la culture occidentale, qui utilise la tierce (5/4 et 6/5) bien plus volontiers que la quarte (4/3) ; ou encore la culture orientale qui, elle, préfère la quart (4/3) à la quinte (3/2)- et d'un autre côté dans certains cas la quarte utilisée n'est pas la quarte juste (4/3). Ces préférences sont des choix culturels, notre étude tâchera de formaliser ces données culturelles et leurs raisons esthétiques.

1.6 : Le Système pythagoricien :

On dit qu'une échelle est formée selon le système pythagoricien si elle utilise uniquement la première dimension, c'est-à-dire les puissances de 3.

1.7 : Lima, Comma :

Dans le système pythagoricien, lorsque l'on retranche la tierce 81/64 (qui est construite par deux secondes majeurs 9/8) de la quarte juste, l'on obtient un lima pythagoricien :
$(lm) \times (81/64) = (4/3) \Rightarrow lm = (4/3) \times (64/81) = 256/243 = 2^8/3^5 \cong \left[3^{-5}\right] = 90_{cent}$ si l'on retranche un lima d'un ton majeur (9/8), l'intervalle restant est un apotome $\left[3^{7}\right]$. En retranchant un lima d'un apotome, l'on obtient le comma pythagoricien $\left[3^{12}\right] = 24_{cent}$ le lima est obtenue par la soustraction de l'intervalle comma pythagoricien d'une seconde majeure (9/8).[11]

1.8 : Le seuil différentiel des intervalles :

Lors d'une expérience sur la perception auditive[12], les sujets sont exposés à deux sons purs sinusoïdaux très proches, mais ils distinguent deux sons différents seulement lorsque l'écart entre leur fréquence est supérieur à un seuil. La valeur de ce seuil change en fonction des fréquences. La Figure 6 montre le seuil différentiel pour des fréquences diverses.

En réalité, un « son musical »[13] n'est pas un son purement sinusoïdal (fort heureusement !) et chaque son musical influe sur les autres selon (Masking effect) des différents sons les uns les autres. Par ailleurs, généralement, nous n'entendons pas des son musicaux isolés tout seul, mais inscrits dans un contexte. Compte tenu de ces faits, l'estimation de ce seuil n'est pas une tâche aisée. Enfin, J'estime qu'un seuil différentie de 5_{cent} sera satisfaisant dans le cadre de la présente étude.

---

11 Mondher Ayari, l'écoute des musiques arabes improvisées : Essai de psychologie cognitive de l'audition, l'Harmattan 2003, **[J3].**

12 Kindsler, Frey : Fundamental of Acoustic,

13 Un son musical est un son périodique, mais complexe décomposable à de nombreuses composantes sinusoïdales par l'analyse spectrale.

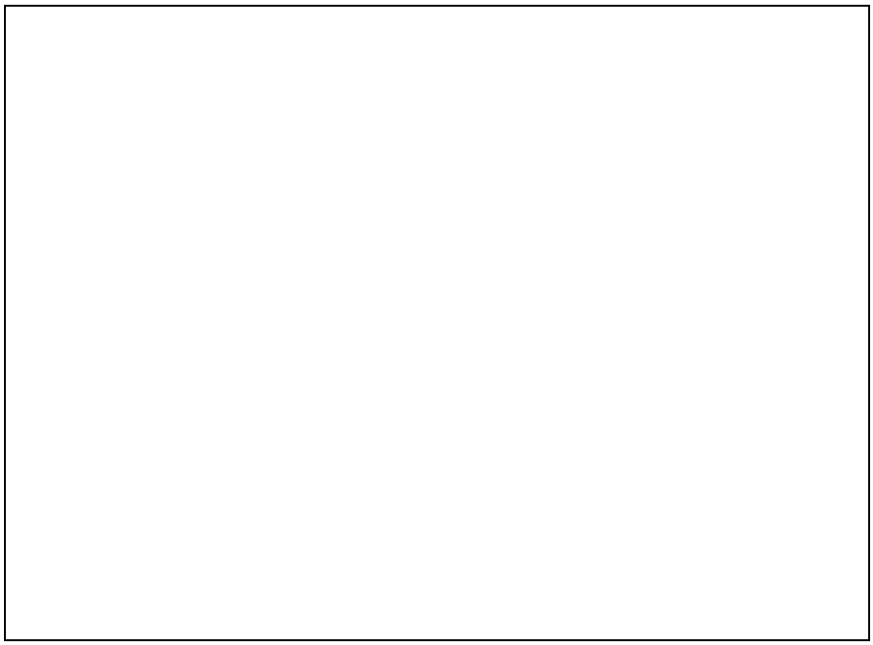


Figure 6 : Le seuil différentiel d'intervalle

1.9 : Le tempérament 240 :

Je propose d'utiliser un tempérament 240 car :

1. Il contient à la fois la gamme 12 tempérée occidentale et l'échelle 24 tempérée. De nombreux musicologues qui ont travaillé sur la musique arabe et persane, ont opté pour des analyses dans le tempérament quart de ton. Bien que, comme nous le verrons, je sois opposé à la modélisation de la musique persane en tempérament 24, Ce tempérament me permettra de comparer mes résultats avec leurs analyses dans l'échelle 24 tempérée.
2. Chaque partie de ce tempérament est égale à 5_{cent} qui équivaut à peu près au seuil différentiel de la perception auditive.
3. Ce tempérament nous permet d'utiliser la théorie de Bolzano pour chercher toutes les micros structures et d'étudier le fonctionnement des types des structures dans la gamme 12 tempérée. Mais, comme je ne suis pas parvenu à trouver de telles micro structures dans la musique persane, je cite la théorie de Balzano seulement dans l'appendice.

Dans la suite, j'utiliserai ce tempérament avec un indice « α », par exemple : $\left[3^1\right] = 140_{\alpha} = 700_{cent}$, pour calculer un intervalle en *cent*, il suffit de le multiplier par 5.

2. La musique persane:

La musique persane n'est pas une variété ou bien un style de la musique arabe, contrairement à ce que croient de nombreux musicologues (souvent d'origine arabes). L'origine de cette erreur peut être liée au fait que ces deux traditions musicales ont beaucoup échangé au cours des siècles, à tel point que lorsque les savants iraniens, tel que *Farabi* (né en 872 J.C) ou bien *Abd al-Qadir Maragehi* (d. 1435), ont tâché de mettre en place des théorie pour la musique de leur époque, ils n'ont pas seulement décrit la musique persane, mais aussi toute la musique de la communauté musulmane dans différents styles, dont les plus importants sont le style du « *Tambour*[14] *Khorasan*[15] », du Luth persan[16] et le style du « *Tambour Bagdad*[17] » qui n'ont en commun aucun intervalle excepté la quarte (4/3).

La musique persane actuelle est le fruit d'une longue lignée. Un riche style originel a été transmis oralement au cours des siècles, comme une langue. Aujourd'hui, ce style musical se retrouve dans d'autres pays que l'Iran, mais si elle a conservé ses principes fondamentaux, elle y a subi diverses transformations et hybridations plus ou moins conséquentes. Il existe des intervalles principales que l'on retrouve dans toutes ces variétés, et des frettes secondaire ou auxiliaire, les « *Mojanab* », dont certains intervalles sont utilisés seulement en Iran et certains autres uniquement en dehors d'Iran. Par ailleurs, la seule description des intervalles ne constitue pas une définition suffisante d'un système musical, et il est nécessaire de découvrir de quelle manière ces intervalles sont utilisés. Ainsi, outre les divergences dans les intervalles, ces musiques différent dans leur manière de succéder les intervalles, et de les mettre en mélodies. Notons que souvent le nom des échelles et des mélodies désigne leur lieu d'origine.

En vérité, le critère le plus important pour distinguer la musique persane des musiques arabe, turque… est le rythme. Dans toutes ces traditions, le rythme est basé sur la construction rythmique de la poésie, mais ces constructions rythmiques différent d'un pays à un autre. À quoi s'ajoute, le concept de « *Dastgâh*[18] » qui existe seulement en Iran et qui peut être considéré comme une sorte de forme globale dans laquelle les compositions sont organisées.

2.1 : Farabi[19]:

Farabi dans *Musigi Kabîr* a choisi de définir la gamme musicale directement sur les instruments. Car les intervalles seuls sont insuffisants pour rendre compte d'un système musical, puisque la nature de chaque instrument présente ses propres limitations, possibilités et techniques, et joue donc un rôle capital dans la formation de son système musical. *Farabi* a pris le Luth persan comme instrument de référence pour décrire son système musical ; ce système est également applicable tel quel au « *Tambour Khorasan* ».

Le Luth persan comptait quatre corde. On appellera la corde la plus grave « I » et les autres respectivement II, III, IV. Chaque corde est accordée à l'intervalle quarte de la corde précédente et l'intervalle entre la corde à vide et la dernière frette (*Dastan*) appelé *Khinsir* et noté « *x* » est également une quarte. Farabi ajoutait une cinquième corde V pour arriver à deux octaves, et il a ainsi établi deux octaves exactement identiques dans leurs intervalles. Toutefois, les autres musiciens comme « Zaryab » et « Ishaqe Mawsili » ont refusé d'ajouter la cinquième corde. Pour eux, l'idée de deux octave identiques n'avait pas de sens. Ils ont conservé la forme ancestrale de leur luth, qui leur convenait très bien pour s'exprimer.

Les frettes ↓

	I	**II**	**III**	**IV**	**V**
a	1/1	4/3	16/9	64/27	256/81
s	9/8	3/2	2/1	8/3	32/9
b	81/64	27/16	9/4	3/1	4/1
x	4/3	16/9	64/27	256/81	1024/243

← Les cordes

Figure 7 : les rapports fréquentiels des frettes principales du Luth

Dans un premier temps, *Farabi* plaçait les frettes principales : la frette *Sababeh*, (que nous noterons « *s* ») était située de telle manière que la note produite à cette position sur la troisième corde (*s*-III) soit l'octave de la première corde à vide (*a*-I). Par ce procédé, il a placé l'intervalle second majeur 9/8. Puis, il a ajouté un

---

14 *Tambour* est un instrument à corde comportant deux cordes. Il faut remarquer l'adéquation de la place des frettes (*Dastane*) de cet instrument avec celles du luth persan et du *Tar*, instrument à corde principal de la musique actuelle de l'Iran.

15 *Khorasan* est une région de l'est de l'Iran, qui a vu naître Ferdowsi, grand poète épique persan qui écrivait dans le style de Khorasan.

16 Le luth persan est ancêtre de la famille des luths actuels que l'on retrouve dans différent pays du monde.

17 *Bagdad* est la capitale de l'Iraq et le « style de *Bagdad* » désigne uniquement la musique arabe seulement, et non la musique persane. On ne parlera pas de ce style dans cet article.

18 Voir Section 2.3, la musique persane actuelle

19 *Musiqi al-Kabir* : Mohamad Tarkhan Farabi, **[M2].**

autre intervalle de ton majeur (9/8) au moyen de la frette *Bensir*, « *b* », en trouvant l'octave de *s*-I sur *b*-III ainsi que celle de *s*-III sur *b*-V. La figure 7 récapitule le résultat des recherches de *Farabi* sur le luth.

Une autre frette principale du luth est la *Vosta* (médius), que nous appellerons « *v* ». Au temps de Farabi, trois valeurs concurrentes étaient attribuées à cette frette : la *Vosta Gadim*[20] (ancien), la *Vosta Fars* (perse) « *vp* » et la *Vosta* de *Zalzal*[21] « *z* ». *Farabi* explique que c'était la *Vosta* de *Zalzal* qui était la plus courante dans la pratique musicale persane de son époque.[22] Il divisait l'intervalle entre « *s* » et « *b* », 9/8, en quatre parties quasi-égales : $9/8 = (18/17) \times (17/16) = (36/35) \times (35/34) \times (34/33) \times (33/32)$, où $36/35 \approx 49_{cent} \approx 10_{\alpha}$, $35/34 \approx 50_{cent} \approx 10_{\alpha}$, $34/33 \approx 52_{cent} \approx 10_{\alpha}$ et $33/32 \approx 53_{cent} \approx 11_{\alpha}$.
Il plaçait la *Vosta* perse, « *vp* », sur la deuxième partie et la *Vosta* de *Zalzal*, « *z* », sur la troisième partie. Autrement dit : $vp = (9/8) \times (18/17) = (81/68)$ et $z = (9/8) \times (18/17) \times (34/33) = (9/8) \times (12/11) = 27/22$.
En plaçant la frette *Zalzal*, les intervalles (18/11), (24/11), (32/11), (128/33), sont produits respectivement sur les cordes II, III, IV, V. Puis, dans un second temps, il ajoutait des frettes partielles ou des frettes complémentaires, les « *Mojanab* », pour établir deux octave identiques dans leurs divisions intervalliques. Voir la Figure 8.

	I	**II**	**III**	**IV**	**V**
a	1/1	4/3	16/9	64/27	256/81
n	-----	-----	-----	27/11	36/11
d	-----	-----	-----	81/32	27/8
ms	12/11	16/11	64/33	256/99	-----
s	9/8	3/2	2/1	8/3	32/9
mv	32/27	128/81	512/243	2048/729	-----
z	27/22	18/11	24/11	32/11	128/33
b	81/64	27/16	9/4	3/1	4/1
x	4/3	16/9	64/27	256/81	1024/243

Figure 8 : les rapports fréquentiels des frettes du Luth de Farabi

Il précisait que dans une mélodie, les frettes *Vosta perse* et *Vosta Zalzal* et *Bensir* ne sont jamais utilisées ensemble. Autrement dit, dans une succession mélodique des intervalles, si la frette « *z* » est jouée, la « *b* » est automatiquement hors d'usage[23]. Aussi, les micro-intervalles ne sont pas utilisés en succession immédiate ; l'intervalle minimal utilisée étant un limma, (256/243). Il convient de noter que pour les intervalles très proches des cordes à vide, les musiciens plaçaient une frette après la quarte « *x* ».
Ibn Sina (Avicenne, 980-1037 J.C), lui, a opté pour la valeur 13/12 au lieu de 12/11, ce qui implique un changement de place des frettes : « *z* », « *ms* » et « *n* ».

	I	**II**	**III**	**IV**	**V**
n	-----	-----	-----	39/16	13/4
ms	13/12	13/9	52/27	-----	-----
z	39/32	13/8	13/6	26/9	104/27

Figure 9 : les intervalles d'Ibn Sina

En fin, il me semble nécessaire de donner quelques exemples du rôle joué par les particularités de l'instrument dans la formation du système musical:

1. l'intervalle entre 81/68, « *vp* », et 32/27, « *mv* », est seulement de 9 *cent*. Mais, c'est « *mv* » qui a survécu dans la pratique musicale persane jusqu'à aujourd'hui. Quelles sont les raisons de cette survivance et de la disparition de la « *vp* » ? Ce phénomène est vraisemblablement due au fait que les notes de l'intervalle « *vp* » se retrouvent à l'octave sur l'une des autres cordes à vide (*a*-IV est l'octave de *mv*-I et *a*-V est l'octave de *mv*-II), qui fonctionne comme corde sympathique[24] et par sa résonance, renforce les notes de cet intervalle.
2. Des tels effets peuvent avoir des inconvénients. Par exemples, en Iran, le mode *Mahur* est traditionnellement joué avec la tonique *a*-III, mais la nature des intervalles surtout la résonance de *s*-

---

20 Kanzol Tahofe dans le livre Mafatihol Olum de Mohammad ibn Khawarizmi

21 Mansûr Zalzal, le luthiste renommé de huitième siècle.

22 Dans la section suivante, nous verrons qu'il en va de même, aujourd'hui.

23 *Farabi* les appelait « *Alhané Motejanese* ».

24 Corde sympathique : corde libre sur laquelle on n'exerce aucune action, mais qui vibre par simple résonance (par sympathie) avec les notes jouées de même hauteur, créant un effet de résonance.

III et de *a*-I fait tendre la mélodie vers *s*-III qui est un ton majeur (9/8) après *a*-III. Le musicien qui veut finir sur *a*-III, accorde I avec III.

La musique Maghâmi **:** Au cours de la siècle, la musique décrite par *Farabi* est jouée dans les *Maghâme* (modes musicaux[25]). « D'après l'enseignement des maîtres, les éléments essentiels d'un mode musical : **1.** L'ambitus ou l'étendue de l'échelle modale. **2.** Les genres constitutifs de la gamme (Ajnâs). **3.** Le point de départ **4.** Les point d'arrêt momentanés ou secondaires, passagers **5.** Le point de repos final ou tonique »[26] A cette définition, il faudrait rajouter le processus de mélodie (Naghmeha) et les règles de modulation et cheminements mélodiques**.**

2.2 : Safiyyu d-Din

: *Safiyyu d-Din Ormavi* (décédé en 1293 J.C) dans *Kitab al-adwar* (écrit en 1252 J.C) a tenté de modéliser la musique de son époque au moyen d'un système pythagoricien de 17 pas commençant à la puissance -11 et allant jusqu'à la puissance 5 :

$$\left\{\left[3^{-11}\right],\left[3^{-10}\right],\left[3^{-9}\right],...,\left[3^{-1}\right],\left[3^{0}\right],\left[3^{1}\right],\left[3^{2}\right],\left[3^{3}\right],\left[3^{4}\right],\left[3^{5}\right]\right\}$$

En réalité, pour trouver ces intervalles, il n'a pas utilisé le calcul des puissances (quelque peu anachronique), mais il y est parvenu en procédant de la manière suivante : dans un premier temps, il a divisé une corde de référence (AQ) en deux sections égales (AS et SQ) pour obtenir l'octave de la note fondamentale. Puis il a divisé ensuite la corde en trois sections égales (dont KQ) pour trouver 3/2 et en quatre sections égales (dont HQ) pour trouver 4/3. L'intervalle qui sépare la quinte de la quarte est 9/8. Il s'agit ensuite de diviser la quarte (la section HQ) en quatre parties (la première étant le point O) pour trouver 16/9 de la corde entière. Après quoi il a divisé la corde entière en neuf sections géométriquement égales (marquant la première du point D) pour trouver 32/27 (celui de D à H). Et il a poursuivi cette logique sur laquelle je ne m'attarderai pas plus longtemps, pour trouver le reste des intervalles. **[M1]**

Pourtant, il déclarait lui-même dans son livre suivant, *Risala al-Sharafiyya*, que cette division ne correspondait pas tout à fait à la pratique musicale de cette époque et, il a abandonné le système des 17 intervalles pythagoriciens au bénéfice du système de *Farabi*, qui contenait des intervalles véritablement utilisés dans la pratique musicale. Malgré cela, il m'a paru nécessaire de donner une explication du système pythagoricien, qui possède des propriétés très intéressantes.

1. $77_\alpha = \left[3^{-8}\right] = 384_{cent} \approx 386_{cent} = \left[5^{1}\right] = 5/4$ et $36_\alpha = \left[3^{-10}\right] \approx 10/9$ comme nous l'avons vu dans la section **1.5** , la différence entre cet intervalle et l'intervalle $\left[3^{4}\right] = 81/64 = 204_{cent} = 41_\alpha$ est très important du point de vue de la perception. Les deux existent dans le système de Farabi. Les autres consonances important es qui apparaissent dans ce système sont : $5/3 \approx 176_\alpha = \left[3^{-9}\right]$, $15/8 \approx 217_\alpha = \left[3^{-7}\right]$, $7/5 \approx 117_\alpha \approx \left[3^{-6}\right]$, 14/11, 11/7, 13/11, 17/9, …

2. Ce système peut être modélisé tout simplement par limas et commas, il a une structure de type : *llcllcllcllcllcl*, dont l'organisation nous apparaîtra plus clairement après une permutation circulaire : *lllcllcllcllcllc*, Il convient de noter que cette structure a la propriété de l'imparité rythmique[27], ce qui signifie qu'on ne peut pas couper le cercle en deux parties égales, quel que soit le point de rupture.

2.3 : La musique persane actuelle[28], *Dastgahi*[29], l'approche de Talai[30] :

La musique persane est transmise oralement au cours d'une relation directe entre maître et élève. À l'origine chaque maître possédait son répertoires de mélodies récoltées et mémorisés que les élevés devaient apprendre par cœur à leur tour. Au XIX^{e} siècle, les musiciens se sont appliqués à rassembler, classer et organiser le répertoire mélodique des maîtres en différents « *Radif* ». Un *Radif* est fondamentalement un répertoire de

---

25 Pas dans sa sens occidentale

26 Rodolphe d'Erlanger : *La musique arabe*, « *Essai de codification des règles usuelles de la musique arabe moderne – Échelle générale des sons – Système modal* », (1949), p. 100.

27 Attention : contrairement aux apparences, ici, ce terme n'a donc aucun rapport avec le rythme et notre propos reste centré sur les structures intervalliques ; la raison de cette dénomination trompeuse est le fait que cette propriété est également utilisée dans l'analyse rythmique.

28 Le répertoire de musique *Dastgahi*, constitue la musique la plus importante en Iran, mais à côté de lui, existent d'autres répertoires qui peuvent être considérés comme les racines de la musique *Dastgahi*, comme la musique *Magami*, folklorique ,…

29 Ici, est présentée l'approche de Dariush Talai qui me semble la plus juste est présentée, Celui-ci a mené plusieurs années de recherches sur la pratique musique actuelle de l'Iran. Mais, les intervalles qu'il a donnés en cent sont des approximations et ne sont donc qu'à peu près justes. La discussion sur ses rapports fréquentiels et sur leur lien avec la musique de Farabi viendra dans le chapitre suivant.

30 Dariush Talai : *Traditional Persian Art Music: The Radif of Mirza Abdullah*, Bibliotheca Persica 1997, **[M4]**

mélodies traditionnelles collectées par un maître,[31] comme le Radif de Mirza-Abdollah (1843-1918) qui comporte 250 pièces, « *Gushé* ». À cette classification « bibliographique » se superpose une classification « technique » comportant des « *Gushé* » organisés dans 7 groupes complexes « *Dastgâh* » pour la musique instrumentale, et 5 groupe plus simple « *Âvâz*[32] » pour le chant. L'organisation des 7 « *Dastgâh* » et 5 « *Âvâz* », est la même dans tous les « *Radif* », mais les nombres des « *Gushé* », leurs noms, et leur classement varient d'un « *Radif* » à un autre. Chaque « *Gushé* » a un caractère émotionnel et un nom particuliers. Les *Gushé* se distinguent à la fois par leur origine et par leur « fonction » :

- Certains *Gushé* sont dérivés de la pratique artistique musicale, surtout la pratique des instruments, comme, les « *Daramade* » (ouverture) qui ont essentiellement un rôle d'introduction.
- Les autres sont reconnus par des mélodies caractéristiques. Ces mélodies sont historiques et ont leurs racines dans les musiques *Maghâmi*, folklorique, populaire, dans le théâtre religieux (*Taziyé*), dans les poèmes et les chansons des *Soufis*, dans la musique épique interprétée dans les cafés - spécialement celle qui accompagne le *Shâh-nâmé* (poème épique national de l'Iran écrit par Ferdowsi), dans la musique d'accompagnement du sport traditionnel du *Zurkhané* (littéralement « maison de force » où se pratique un sport d'origine guerrière), etc.

Dans la pratique musicale actuelle de l'Iran, les mélodies sont « flexibles ». Un même air interprété par différents musiciens peut subir des variations considérables. La cause principale de ces variations est à chercher dans la conception particulière de la notion de rythme au sein de cette tradition musicale. L'approche rythmique, dans la musique persane, est issue des règles de la poésie (la prosodie). Le rythme, dans la poésie, est construit par l'articulation de syllabes courtes et longues. Or, lorsqu'un poème est récité, joué ou chanté, les syllabes, tout en conservant leur rapport relatif (courtes ou longues) clairement distincte, sont articulées dans une unité flexible de temps. L'interprète du rythme, contrairement à la musique classique occidentale où le rythme doit se reporter à une échelle fixe et prédéterminée de temps, l'interprétation du rythme dans la musique persane est donc flexible. Cependant de telles variations ne doivent pas êtres considérés comme de l'improvisation, car elles ne dépendent pas uniquement de la fantaisie de l'interprète, mais portent l'empreinte des maîtres et sont conservées dans la mémoire collective au même titre que les poèmes et les contexte historiques où cette musique a évolué.

Dans la musique *Dastgahi*, l'intervalle quarte est l'intervalle le plus important. Le tétracorde (suite de quatre notes conjointes dans laquelle l'intervalle entre la première note et la dernière est une quarte) est dit « *Dang* » en persan. Le caractère de chaque « *Dang* » dépend de sa deuxième et troisième intervalles. Dans le répertoire *Dastgahi* de la musique persane, , l'on utilise seulement 4 *Dang* (tétracordes) qui sont représentés dans la Figure 10. Chaque *Dang* commence par l'une des cordes du luth joué « à vide » (*Motlag*).

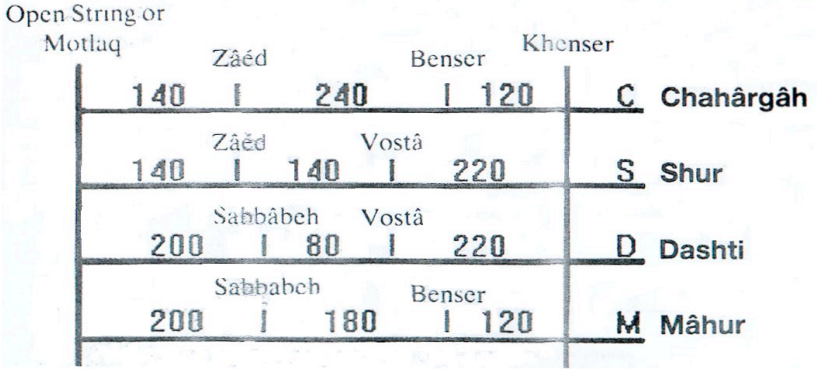


Figure 10[1] : les quatre *Dang* de la musique persane

Mais, quelques fois quand ces *Dang* sont transposés et qu'ils s'interposent, ils doivent êtres tempérés à cause de la limitation imposée par les intervalles fixes. La transposition la plus commune s'effectue lorsque le *Dang* commence sur la frette *Sabbabé*. Le procédé qui consiste à changer légèrement les intervalles est nommé *Oj* (ascendance). Pour l'exemple voir la Figure 11.

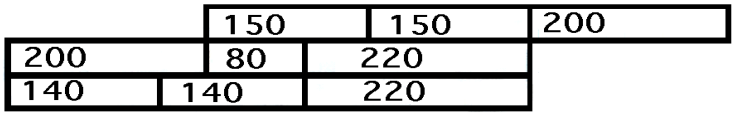


Figure 11 : Tétracorde *Oj* est un *Shur* tempéré

Un tel changement de position, ou pour être précis, un tel mouvement transformationnel modal, est un procédé à la fois très important et très courant dans la plupart des musiques folkloriques persanes. Comme

---

31 Contrairement à la musique classique occidentale, interprète de la musique persane n'est pas contraint de jouer le morceau tel qu'il est écrit, et jouit d'une grande marge de liberté et d'indépendance dans son interprétation.

32 Dans la langue persane, le mot *Âvâz* signifie « chant ».

l'*Oj* est la version tempérée du tétracorde *Shur*, *Shushtari* qui commence également à la position *Sabbabé* se mue en *Tchahargah*.
Il convient ici de présenter l'emplacement des frettes du *Tar* qui est l'instrument principal de la musique *Dastgahi* (voir Figure 12) et dont les *Dang* sont dérivés. Les positions $(30,60,70)_{cent}$ ne sont jamais utilisées en succession immédiate.

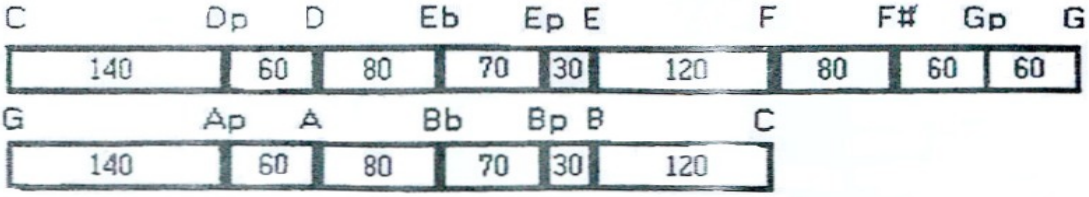


Figure 12 : les frettes actuelles du *Tar* données par Talai

Chaque « *Mayé* »[33] est construit par la succession de deux « *Dang* ». L'octave peut être divisé en deux quartes (4/3) et un ton (9/8) ; ce qui donne trois type de successions de deux *Dang* :

- La succession conjointe : les deux tétracordes se suivent consécutivement, donnant ainsi : soit, 1. tétracorde, tétracorde, ton majeur. Soit, 2. ton majeur, tétracorde, tétracorde. La première suite étant la plus courante dans la musique persane.
- La succession disjointe ou séparée : 1. tétracorde, ton majeur, tétracorde ; comme le *Dang* (tétracorde) de *Oj*. 2. Le ton lui-même peut être décomposé en deux parties, mais je ne connais pas une telle succession de deux *Dang* dans la musique persane *Dastgahi*.

La plupart du temps, l'accent des mélodies dans un « *Mayé* » est sur la note partagée par les deux *Dang* qui est souvent la note initiale du second *Dang*, mais il arrive parfois que ce soit la deuxième note, ou plus rarement la troisième. D'après la théorie d'Ali Naqi Vaziri, dans chaque mode, les notes les plus importantes sont : la note la plus répétée, « *Shahede* », et la note sur laquelle les mélodies se terminent, « *Ist* » (arrêt). La Figure 13 indique les onze *Mayé* données par Dariush Talai.

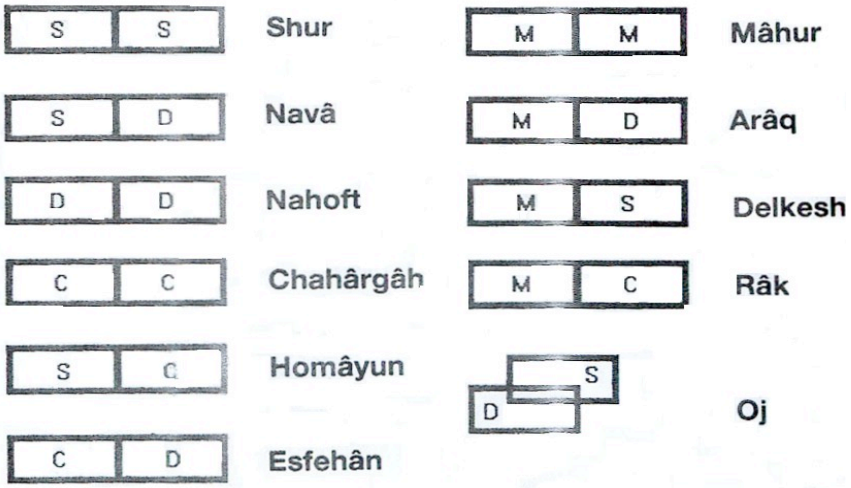


Figure 13 : les arrangements des *Dang* dans les *Mayé*

Lors de l'interprétation, très souvent, les musiciens combinent les *Mayé*. Lorsque deux *Mayé* différents partagent un *Dang*, celui-ci peut être utilisé comme un moyen d'aller de l'un à l'autre ; une sorte de modulation. La structure modale de chaque *Dastgah* et de chaque *Avaz* est en fait une combinaison de différents *Mayé* dans un ordre particulier. Maîtriser l'art de la succession et de la combinaison des *Mayé* est le savoir le plus important dans la musique persane *Dastgahi*. L'art de l'interprétation consiste à puiser dans sa mémoire, des *Gushé* (séquences mélodiques) basés sur des *Mayé* (modes) différents et de les articuler de manière à créer l'atmosphère, les nuances, ou autrement dit les « couleurs » musicales voulues. En d'autres termes, la musique persane est l'art de la progression mélodique. Une terminologie savante telle que mode, progression modale, *Mayé* ou *Dang* et de telles approches analytiques n'existent ni dans l'apprentissage, ni dans l'interprétation des musiciens. Cette science n'est qu'un moyen de comprendre et de modéliser la musique persane.

[33] « *Mayé* » est un espace modale de 7 notes, mais le concept de *Mayé* diffère du concept de mode en occident, c'est pourquoi, j'évite d'utiliser le mot « mode ».

3. La Théorie des ensembles *(Set-theory)* :

Les gammes musicales, ainsi que toutes les constructions rythmiques, sont constituées d'un nombre fini d'éléments. Alors, un système musical peut être traité comme un groupe ayant un nombre fini d'éléments dont la relation entre les éléments peut être modélisé par des opérateurs mathématiques qui nous permettront de trouver tous les objets musicaux correspondant à cette relation. Quand un musicien met deux objets musicaux en succession, dans son esprit, il suit un algorithme qui dépende de la relation musicale de ces deux objets. Donc, en traduisant la relation musicale en relation mathématique par rapport aux opérateurs, on arrive non seulement à trouver les objets et les successions possédant la même caractéristique qui n'existaient pas à priori dans le système musical de départ, mais aussi à établir les classes d'équivalence des objets ayant la même propriété musicale. Ces classes d'équivalence pourront servir à comprendre l'algorithme compositionnel suivi par les musiciens et enfin à modéliser leur musique. Mais, chaque musique impose ses propres opérateurs, car les relations musicales diffèrent d'une musique à une autre. Alors, dans ce chapitre, après avoir présenté quelques notions de base de la théorie des ensembles, je définirai un nouvel opérateur inédit dans l'approche computationelle de la musicologie et qui convient particulièrement à l'analyse de la musique persane.

3.1 : Définition de la notion de « groupe » :

Par définition, un groupe est la donnée d'un ensemble « G » d'éléments et d'une opération binaire « $\bullet$ » vérifiant les quatre axiomes suivants :

-Clôture : $a \bullet b$ appartient à G pour tout *a* et *b* dans G.

-Associativité : $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ pour tout *a, b, c* éléments de G.

-Identité : Il existe un élément *e* dans G tel que $a \bullet e = e \bullet a = a$ pour tout élément *a* dans G.

-l'inverse : Pour tout élément *a* dans G, il existe un élément a^{-1} dans G tel que $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = e$

3.2 : Les groupes cycliques :

Un groupe cyclique de *n* éléments (ordre *n*) est un groupe $(G,\bullet)$ dans lequel il y a (au moins) un élément *g* tel que tout élément de G est égal à $g \bullet g \bullet ... \bullet g$ où la loi de groupe « $\bullet$ » est appliquée un nombre finit de fois. Autrement dit, G est *engendré* par l'élément *g*. Traditionnellement un groupe cyclique d'ordre *n* est représenté par l'ensemble $\{0,1,...,n-1\}$ des entiers (modulo *n*) et il est indiqué avec Z/nZ ou bien Z_n. D'un point de vue géométrique, un groupe cyclique peut-être représenté par un cercle. En général un groupe cyclique d'ordre *n* est engendré par tout entier *d* relativement premier avec *n*.

3.3 : L'action d'un groupe sur un ensemble :

Par définition un groupe $(G,\bullet)$ opère sur un ensemble X s'il existe une application f de $G \times X$ dans X telle que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. $f(a \bullet b, x) = f(a, f(b \bullet x))$ pour tout *a, b* dans G et *x* dans X.
2. $f(e,x) = x$ pour tout *x* dans X, où *e* est l'identité de G.

La première propriété est une sorte de condition de compatibilité entre le concept d'action et la loi de groupe. La deuxième propriété garantie que « l'élément identité » de G opère comme « l'action identique » en laissant fixe tout élément de l'ensemble.

Deux éléments *x, y* dans X sont *conjugués* si l'un est l'image de l'autre sous l'action G sur X, en d'autres termes s'il y a un élément *a* dans G tel que $y = f(a,x)$. La conjugaison est une *relation d'équivalence* (elle est *réflexive, symétrique et transitive*). Les classes d'équivalence sont aussi appelées *orbites*.

3.4 : L'application musicale de ces principes :

Comme nous l'avons vu, dans la musique, le caractère cyclique du groupe se vérifie par l'existence de l'octave : l'addition d'un intervalle octave à un élément ne change pas son identité. Il nous reste à déterminer l'opérateur de groupe, les éléments de groupe, l'ensemble sur lequel le groupe opère, ainsi que l'application f pour nos objectifs musicaux. L'on utilisera deux types d'application :

1. Soit T_k la transposition de *k* fois l'intervalle de base minimal pour une division de l'octave donnée (demi-tons pour tempérament 12 égaux). Pour tout entier *k* relativement premier avec *n*, T_k engendre le groupe cyclique Z/nZ. Par définition, étant donné deux transpositions T_k et T_h on peut définir la loi de composition « $\bullet$ » de deux transposition de la façon suivante : $T_k \bullet T_h = T_{k+h}$ où l'addition *k*+*h* est calculée modulo *n*. Les axiomes qui permettent de définir une structure de groupe sont respectés. Cette opération a deux propriétés ultérieures par rapport à Z/nZ en tant qu'ensemble :
1. $(T_k \bullet T_h)(x) = T_k(T_h(x))$ pour toute transposition T_k, T_h et pour tout élément *x* dans Z/nZ. Autrement dit, transposer un entier de class de hauteur d'abord par *h* (demi-tons par exemple) et après par *k* est équivalent à transposer le même entier par *k*+*h* (modulo *n*).
2. $T_0(x) = T_n(x) = x$ pour tout *x* dans Z/nZ, où T_0 est transposition identique.

On peut conclure que la transposition musicale définit une f d'un groupe Z/nZ sur lui-même au sens mathématique du terme. Maintenant, il convient ici de dresser une liste des différents types (*types*) de représentations :

- *Integer mode* : La représentation par le nombre de chaque point de cette structure dans le cercle.
- *Structure mode*: La représentation par l'intervalle entre les couples successifs de points de cette structure dans le cercle.
- *Pitch mode:* la représentation symbolique traditionnelle dans le tempérament 12 égaux pour ce qui concerne les hauteurs.

Un autre concept qui nous sera utile pour la représentation d'une classe d'équivalence des hauteurs, est celui de la « forme primaire » (*prime form*)[34].

2. En plus de la transposition chromatique - celle qui partant d'un thème comme « do ré mi » dans l'ensemble do majeur aboutit à « mi fa# sol# », par une transposition de 4 demi-tons - je définis un autre outil que j'appellerai la « Transposition modale »[35], tel qu'en l'appliquant à ce même thème « do ré mi », l'on obtiendrait « mi fa sol », c'est-à-dire un thème qui reste donc dans l'ensemble (ou bien système) de do majeur.

Voici un exemple pour illustrer le fonctionnement de la transposition modale :

Prenons la gamme chromatique, qui est un groupe cyclique engendré par demi-ton, Z_{12}. Supposons l'ensemble « *S* » dans Z_{12}, la gamme de do majeur $\{0,2,4,5,7,9,11\}$ et le sous-ensemble « *V* » de cet ensemble tel que le premier élément de « *V* » est le *j*-ième élément de « *S* », le deuxième élément « *V* » est le *k*-ième de « *S* », et ainsi la suite. Prenons $\{0,2,4\}$, (do ré mi) par exemple. Attribuons un indice, de 0 à 7 à chaque élément de « *S* », de manière à former un groupe cyclique d'ordre 7, Z_7. L'on a donc un ensemble d'indices de « *V* », $I_V = \{0,1,2\}$, dans Z_7. Je définis l'opérateur Tm_i : il ajoute « i » aux éléments de « I_V », $\{2,3,4\}$ pour $i = 2$, et il extrait de « *S* » les éléments correspondants à ces indices, c'est-à-dire, le (*j*+*i*)-ième, (*k*+*i*)-ième,… élément de *S*, $\{4,5,7\}$. Voir Figure 14.

Le cas général :

Imaginons un ensemble $S = \{a_j : a_j \in Z_n\}$ où *j* est l'indice correspondant aux éléments de *S* tels que a_j est *j*-ième de *S* et $\{j\} = Z_h = \{0,1,2,...,h\}$ et $h \le n$. Autrement dit, *S* comporte *h* éléments, (range *h*) dans d'un groupe cyclique d'ordre *n*, Z/nZ. Et un sous-ensemble « *V* » de cet ensemble tel que le premier élément de « *V* » est le *j*-ième élément de *S*, le deuxième élément « *t* » et le *k*-ième de *S*, et ainsi la suite, $V = \{a_j, a_k, ...\}$. Dans l'espace des indices d'élément de « *S* », Z/hZ (on associe au *j*-ième élément de « *S* », l'indice « *j* »), l'ensemble correspondant au « *V* » sera $I_V = \{j,k,...\}$. Je définis l'opérateur Tm_i (ou bien Tm_{a_i}) tel qu'il ajoute « *i* » aux éléments de « I_V », et qu'il extrait les éléments correspondants de ces indices dans « *S* » comme le résultat de l'opération, c'est-à-dire : $Tm_i(t) = \{a_{j+i}\}$ tel que $a_{j+i} \in S$.

Du point de vue de la programmation, cet opérateur ne fonctionne qu'à l'aide de la permutation circulaire des éléments du sous-ensemble. Les états sont les suivantes :

- Il permute « *i* » fois l'ensemble *S*, en appelant le résulte S'.

---

[34] Pour plus de détail, voir « Moreno Anderatta, Carlos Agon : Formalisation algébrique des structures musicales à l'aide de la *Set-Theory*, aspects théorique et analytique », **[S1].**

[35] Dans la tradition occidentale, on les appelle : transposition chromatique et diatonique. Mais ici, j'utilise un terminologie différent seulement pour distinguer la nature musicale de cette opérateur

- Il garde $\{j,k,...\}$ éléments de S', en permutant *j*, *k*,… fois l'ensemble S' et sauvegardant le premier élément du résultat de chaque permutation.
- Il conserve le résultat comme l'opération de Tm_i sur ensemble « *V* » dans l'ensemble maternel *S*.

Notons qu'avec cette application, on ne sort pas de l'ensemble principal *S*. Ainsi, pour arriver à un thème comme « ré mi-b fa », l'on aura besoin d'une « Transposition modale » et d'une transposition chromatique. Par ailleurs, pour calculer *i* en fonction des demi-tons (au sens de l'intervalle de base minimal pour une division de l'octave dans le cas de Z_{12}), il faut calculer l'intervalle du *i*-ième élément de *S* avec l'élément 0 en fonction des demi-tons : a_i. En fin, pour trouver les classes d'équivalence des structures intervalliques, il suffit de calculer les classe d'équivalence de Z_h.

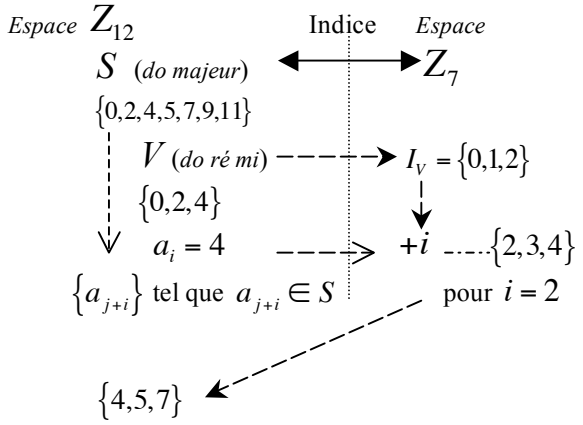
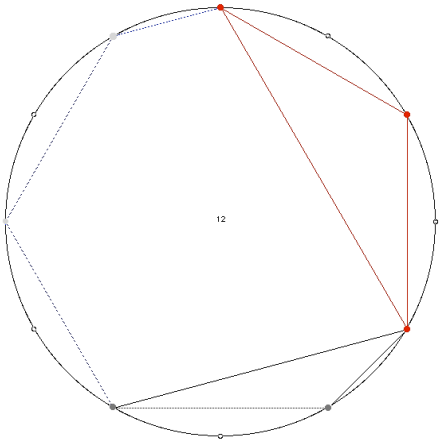


Figure 14 : La « Transposition modale » de « do ré mi » à « mi fa sol ».



4. La formalisation algébrique:

Dans ce chapitre, en mettant en évidence les relations entre la musique persane actuelle et la musique de *Farabi*, je rectifierai certaines des valeurs données par Talai, puis, je présenterai les résultats originaux de mon approche concernant la définition des classes d'équivalence des structures intervalliques de la musique persane actuelle.
Si nous adoptons un point de vue analytique dans le cadre de notre étude, il faut toujours avoir à l'esprit que nous sommes en train de parler de la musique qui est avant tout une affaire d'inspiration. La musique qui, dépassant toute analyse, s'enracine dans la vie des hommes qui l'ont créé, dans leur histoire individuelle et collective, dans leurs sentiments et pensées, dans leurs cultures et mentalités…
Les musiciens placent les frettes, accordent leur instrument et jouent non pas pour suivre une logique de succession d'intervalles, mais pour exprimer ce qu'ils ressentent. La musique persane n'est pas née de la théorie. Au contraire, c'est la réflexion sur la musique, qui a engendré la théorie musicale. Par conséquent, on ne peut étudier toutes les traditions musicales à travers une théorie unique ; autrement dit, l'étude doit s'adapter à son objet particulier et non l'inverse. Pour chaque musique, il faut fonder une méthode spécifique et une approche analytique adaptée aux règles compositionnelles particulières de cette musique. Comme nous l'avons vu plus haut, la musique persane est l'art de composer des gestes mélodico rythmiques que l'on appelle des *Gushé*. À mon avis, les études qui se bornent à la description des modes et des intervalles de cette musique n'ont aucun sens et sont vides d'intérêt. Pour analyser la musique persane, il faut étudier ce qu'elle a de plus spécifique, à savoir les lois compositionnelles qui régissent l'articulation des différents *Gushé*. Dans cette perspective, je tâcherai de déterminer la relation entre les différents *Gushé* à l'aide de la théorie des ensembles (*set theory*). Les *Gushé* étant des gestes mélodico rythmiques, il faut examiner séparément leurs structures intervalliques et leurs structures rythmiques qui les déterminent, en établissant des classes d'équivalences intervalliques et rythmique. Mais, dans le cadre de notre étude, c'est seulement les classes d'équivalences intervalliques qui seront considérées et l'étude des structure rythmique à l'aide de la théorie des ensembles est laissée pour d'un travail à long terme. Avant tout, je m'appliquerai à donner les caractéristiques des structures intervalliques dans la musique persane.

4.1 Les caractéristiques de la structure intervallique :

Une gamme musicale contenant un nombre limité et précis d'intervalle qui se répèteraient dans différente octave n'existe pas dans cette musique. Même, les intervalles du luth, tels qu'ils se jouent aujourd'hui, sont composés de cinq tétracordes recouvrant toute l'étendue sonore de l'instrument, de la note la plus basse à la note la plus haute, sans que jamais deux octaves soient répétées à l'identiques La raison en est que les musiciens n'en ont tout simplement pas besoin de cette régularité. Au cours des siècles, les musiciens, guidés par leur expérience, ont découvert quelles successions mélodiques s'adaptent le mieux à telle ou telle position, et cette position (frette) porte parfois le nom de cette succession mélodique.
Ainsi, une mélodie transposée n'a plus la même caractéristique que la mélodie originale, par exemple, sur le Luth, *Shur* est joué traditionnellement sur « *a*-II » , mais lorsqu'il se joue à l'octave « *s*-IV », il est considéré comme différent et prend le nom d'*Ozzal*, alors que du point de vue mathématique, on les considérera comme des membres d'une même classe d'équivalence. Bien qu'ayant la même structure intervallique, ils se distinguent par leurs caractéristiques musicales (sonores, perceptives, émotionnelles,…), et c'est cette différence qui a été retenue par la tradition musicale. Par ailleurs, lorsque les musiciens jouent une mélodie montante, par exemple dans le *Daramad* (introduction) de *Mahur* ou bien dans celle de *Shur*, pour terminer par la tonique (*Ist*), ils ne montent pas jusqu'à l'octave de cette note. Par contre, ils descendent tout le chemin mélodique vers la note originale. Donc, c'est dans cette perspective du concept de l'octave que j'utilise la représentation dans un cercle et un groupe cyclique par l'addition d'octave, tout en tenant compte du fait que les notes à l'octave n'ont généralement pas le même caractère musical. . A ce sujet, précisons qu'il existe un cas de figure où l'octave est considérée comme identique : lorsqu'un instrument n'a pas les notes nécessaires pour interpréter les parties hautes d'une mélodie, les notes sont transposées une octave plus bas, et ce phénomène entraîne donc un changement de place des *Dang* (tétracordes) dans un *Mayé* (mode, heptacorde). Il est à noter également que l'octave est toujours considérée comme la consonance principale.

Ainsi, je chercherai d'abord les différents types des classes d'équivalence, c'est-à-dire les relations entre deux objets musicaux. Après ce classement, il s'agira de trouver les lois compositionnelles qui déterminent l'articulation de ces objets en comparant au fur et à mesure mes résultats avec la pratique musicale, c'est-à-dire leur interprétation musicale. Un musicien joue successivement deux *Gushé* parce qu'ils lui paraissent proches du point de vue de la perception. Cette proximité qui a une signification du point de vue musical, peut être traduite par une relation mathématique dans laquelle les deux *Gushé* appartiennent à une classe d'équivalence. Il nous faudra donc trouver les lois qui régissent la formation de ces classes d'équivalence, car ce sont elles, qui ont véritablement un sens musical et non les relations entre les structures intervalliques de

deux objets et les classes d'équivalence. Alors, notre objective est de trouver des relations mathématiques et des classes d'équivalence capables de traduire cette proximité musicale. D'un autre côté, il existe des objets qui n'ayant pas la même structure intervallique, possèdent les mêmes caractéristiques musicales, qu'il faudra donc considérer comme appartenant à une même classe d'équivalence ; comme, par exemple le *Dang Oj* qui est la transposition modale de *Shur*, ou bien *Shushtari* qui est la transposition modale de *Tchahargah*.
Pour pouvoir analyser les structures intervalliques, nous supposerons que les frettes de l'instrument, le *Tar* par exemple, sont fixes. Il est temps à présent de nous concentrer sur les intervalles et les rapports fréquentiels de chaque frette en examinant la validité des recherches de Talai.

<u>*Le luth de Farabi, le Tar de Talai*</u> **:** Dariush Talai est un musicien de talent. Son répertoire de Radif est brillant. Cependant, les intervalles qu'il a donnés pour les frettes de Tar (voir la Figure 13) ne sont pas le résultats de recherche scientifique, ni des mesures ; il s'agit d'une approximation formée après des années d'expérience musicale. J'ai cru d'abord que les valeurs de Talai provenaient d'une tradition établie, mais il s'agit vraisemblablement d'un problème de méthode dans l'élaboration de ses calculs. Toujours est-il que les valeurs données par Talai sont problématiques et contradictoires.

- *La valeur de* 140_{cent} **:** pour cette valeur, on peut imaginer deux rapports fréquentiels :

1. $(13/12)$ **:** la second d'Ibn Sina. En choisissant cette valeur, il y aura une contradiction pour la tierce Zalzal qui devrait être $(13/12)\times(9/8)=(39/32)=342_{cent}\cong 68_{\alpha}\neq 350_{cent}$, or Talai donne la valeur 350 pour la troisième frette du *Tar*. Par ailleurs, cette valeur était seulement une hypothèse émise par Ibn Sina et n'a pas eu d'existence attestée dans l'histoire de la pratique musicale[36]. De plus, 12/11 est plus consonant que 13/12 et ainsi que $27/22=70_{\alpha}=11/9$.
Peut-on supposer que la nature de cet intervalle n'est pas fixe comme l'intervalle ton majeur (9/8) et sa valeur est flottante[37] ? Ce qui expliquerait que sa version tempérée $150_{cent}=30_{\alpha}\approx(12/11)$ a la même caractéristique. Remarquons que tel tempérament ne se passe pas pour les intervalles fixes comme (9/8) dans Mahur et Dashti ?

2. $(88/81)$ **:** c'est l'intervalle entre (12/11) et (32/27) également celui entre (27/22) et (4/3). Cet intervalle donc existe donc dans le système de Farabi, et de ce fait, sa valeur est moins sujette à interrogation que l'intervalle précédent. Toutefois, comme nous l'avons vu cet intervalle est touché par le doute émis sur les valeurs de Talai : on ne peut plus considérer cet intervalle comme la deuxième touche, comme Talai l'a fait, et de ce fait l'interprétation des *Dang Tchahargah* et *Shur* à La position 0 (la corde à vide) devient impossible.

- *La valeur de* 380_{cent} **:** Cette valeur correspond au rapport fréquentiel (5/4). *Farabi* a marqué cette valeur dans *Musigi Kabîr*[38]. À la fin du chapitre sur le luth, il propose de placer une frette auxiliaire « *Mojanabe* » à (1/10) de la longueur de la corde jusqu'à la frette « *Sababeh* » afin d'obtenir un intervalle de (10/9). *Farabi* a même conseillé d'utiliser cette frette à la place de « *Bensir* » dans certaine mélodie. Comme on a vu la valeur de $\left[3^{-8}\right]$ qui existait également dans son system est très proche de (5/4). Partant de la remarque de *Farabi* sur le fait que dans chaque mélodie, c'est seulement l'une des tierces qui est utilisée, peut-on croire qu'au cours de plusieurs siècles de pratique musicale, c'est finalement l'intervalle (5/4) qui a été préféré et retenu par les musiciens iraniens? Mais avant de retenir cette hypothèse, l'on doit s'assurer que *Mahur* est joué comme : $(200,180,120)_{cent}$?
Il est impossible de se référer aux valeurs de Talai, car elles ne sont pas le résultats de mesures scientifiques, ils sont que des hypothèses de Talai en tant un musicien. Je crois vivement que $(200,180,120)_{cent}$ si délicat qu'en soit la sonorité, ne sonne pas comme *Mahur*. Je ne crois pas que Talai lui-même joue ces valeurs telles qu'il les a décrites, quand il joue en *Mahur*[39]. Bien d'autres musicologues persans, comme Barkechli ou bien Farhat, posent cette question également, ils font une distinction entre la valeur de $(5/4)=386_{cent}$ et $(81/64)=408_{cent}$. Ces deux existent-elles dans la pratique musicale actuelle ? si oui, dans quel contexte l'un est préférée à l'autre ?
Il existe une autre référence historique pour les deux. Dans *Durrat al-Taj*, *Qutb al-Din Shirazi*[40] (1236-1311) citait les valeurs $\{(9/8),(10/9),(16/15)\}=(204,182,112)_{cent}$ pour le tétracorde « *Rast* » et

---

36 Khayam Neyshabouri donnait une liste de 30 tétracordes et il disait que tous les tétracordes d'Ibn Sina qui sont construits par 7 et 13 sont discordants et n'existent pas dans la pratique musicale persane.

37 Ali Nagi Vaziri appelait les notes flottantes, « Motegair ».

38 *Musigi Kabîr,* deuxième livre, le livre des instruments, premier discours, le Luth

39 Talai est aussi un instrumentaliste du Tar très renomme.

40 *Chiraz* est une région au sud de l'Iran où *Persépolis* est situé et où les grands poètes, *Hafez* et *Sadi*, sont né.

$\{(9/8),(9/8),(256/243)\} = (204,204,90)_{cent}$ pour « *Ushshaq* ». [41] Malheureusement, cette question n'a pas encore donné lieu à des mesures et des études scientifiques. Dans cet article, Je retiendrai la valeur (81/64) pour le tétracorde de *Mahur*.

D'après les théories de *Farabi*, qui sont les racines de la musique persane, je propose les rapports fréquentiels donnés dans la Figure 15 pour les frettes du *Tar* actuel dans la pratique musicale persane (*Dastgahi*). [42]

Les Frettes ⟶

0	- - - 1	- 2	- - 3	- 4	- 5	- - 6	- 7	- - 8	- 9	- - 10	- 11	- 12	- - 13	- 14	- 15	- - 16	- - - 17	- 18	- - 19	- 20	- 21	- - 22	- - - - 23	- - 24
Rf	12/11	9/8	32/27	27/22	81/64	4/3	243/176	16/11	3/2	128/81	18/11	27/16	16/9	81/44	243/128	2/1	24/11	9/4	64/27	27/11	81/32	8/3	3/1	256/81
cent	150	204	294	354	408	498	558	648	702	792	852	906	996	1056	1110	1200	150+	204+	294+	354+	408+	498+	702+	792+
α	30	41	59	71	82	100	112	130	140	158	170	181	199	211	222	0+	30+	41+	59+	71+	82+	100+	140+	158+
Rfj			13/11	11/9	14/11		11/8	13/9		11/7	13/8			11/6, 24/13										

Figure 15[43] : les valeurs corrigées des frettes du *Tar* persan actuel : Rapport fréquentiel, cent, α et Rapport fréquentiel de la note juste la plus proche.

Le *Tar* a trois cordes dont deux sont toujours accordées à l'intervalle de la quarte (4/3). Mais les seuls intervalles introduits dans notre système musical seront $(128/81)\times(4/3) = 512/243 \cong 90_{cent} + = 18_{\alpha} +$ et $(16/11)\times(4/3) = 64/33 \cong 1147_{cent} = 229_{\alpha}$.

D'après les tableaux des « *Dastgah* » et « *Avaz* »[44] de Dariush Talai, les trois cordes, de la basse vers l'aigu, sont accordées : (Fa, Sol, Do) dans les *Dastgah* de *Shur, Dashti, Bayat-e Kord, Bayat-e Tork, Abu'Ata, Afshari et Segah*, (Re, Sol, Do) dans *Nava, Homayun* et *Bayat-e Esfehan*, (Do, Sol, Do) dans *Tchahargah et Mahur* et enfin (Do, Fa, Do) dans *Rastpanjgah*.

Dans le premier cas, il convient de prendre la deuxième corde comme repère, (1/1). Autrement dit, prenons les trois cordes dans l'ordre (8/9,1/1,4/3), et, dans le deuxième cas, le premier corde comme (1/1), (1/1,4/3,16/9). Les intervalles musicaux qui seront ajoutés au système seront : $(128/81)\times(8/9) = 1024/729 \cong 588_{cent} = 118_{\alpha}$ et $(16/11)\times(8/9) = 128/99 \cong 445_{cent} = 89_{\alpha}$. Mais n'oublions pas que ces intervalles n'existent pas dans les *Dastgah* de *Tchahargah, Mahur* et *Rastpanjgah*. La Figure 16 montre les rapports fréquentiels pour les intervalles des trois corde de *Tar*.

Pour trouver les intervalles comme ceux de la frette 7 dans le système de *Farabi*, il faut prendre la deuxième corde du luth, comme repère. Pour la frette 7, à la place de (243/176), il est également possible d'imaginer la valeur $(1024/729) = 588_{cent} = 118_{cent}$ qui est plus proche de la valeur donnée par Talai et qui existait dans le Tambour, mais je crois que c'est $(243/176) = (9/8)\times(27/22)$ qui a cours dans la pratique musicale d'aujourd'hui.

Les cordes

0	- - - 1	- 2	- - 3	- 4	- 5	- - 6	- 7	- - 8	- 9	- - 10	- 11	- 12	- - 13	- 14	- 15	- - 16	- - - 17	- 18	- - 19	- 20	- 21	- - 22	- - - - 23	- - 24
4/3	16/11	3/2	128/81	18/11	27/16	16/9	81/44	64/33	2/1	512/243	24/11	18/8	64/27	27/11	81/32	8/3	32/11	3/1	256/81	36/11	27/8	32/9	4/1	1024/243
1/1	12/11	9/8	32/27	27/22	81/64	4/3	243/176	16/11	3/2	128/81	18/11	27/16	16/9	81/44	243/128	2/1	24/11	9/4	64/27	27/11	81/32	8/3	3/1	256/81
8/9	32/33	1/1	256/243	12/11	9/8	32/27	27/22	128/99	4/3	1024/729	16/11	3/2	128/81	18/11	27/16	16/9	64/33	2/1	512/243	64/33	18/8	64/27	8/3	2048/729

Figure 16 : les rapports fréquentiels des intervalles du *Tar*.

Un musicien, pour trouver la place exacte des frettes, procède de la manière suivante : Il accorde la 16ieme frette telle que la note en soit l'octave de la corde ouverte. La 6ieme frette est à mi-longueur de la 16ieme et de la corde à vide et il sonne unisson avec la corde à vide suivante (la quarte, 4/3). la note de frette 13 de la corde repère (1/1) est l'unisson avec la frette 6 de cette même corde . En continuant avec cette méthode, tous

41 Pour plus de détail, voir « The Modal System of Arab and Persian Music », O.Wright, Oxford Univerity Press, page 39

42 Dans la Figure 13, les frettes du Tar de Talai, Talai suppose que les intervalles se répètent et il a donc donné seulement les intervalles musicaux existants dans son système.

43 « + » signifie un intervalle à l'octave, les intervalles sélectionnés en gris sont pythagoriciens et « - » dans première ligne représente l'approximation en quarte de ton. Les valeurs pythagoriciennes sont en gris.

44 Voir l'Appendice

les intervalles pythagoriciens (sélectionnée en gris) seront trouvés. Les autres intervalles qui dépendent du nombre impair « 11 » dans le dénominateur, ont leur racine dans les frettes de Zalzal pour lesquelles il faut d'abord trouver la place de la frette (12/11). Comme nous l'avons expliqué plus haut, cette frette peut être trouvée en décomposant l'intervalle ton majeur en quatre parties quasi-égales, simplement en divisant la longueur de la corde entre deux frette qui ont l'intervalle ton majeur (9/8) en quatre parties égales et en plaçant la frette sur la troisième partie. Après avoir trouvé la seconde de Zalzal, (12/11), il suffira de poursuivre cette même méthode (comme dans le cas des intervalles pythagoriciens) pour trouver les autres.

On ne peut pas comprendre et analyser cette musique seulement en dressant la liste des rapports fréquentiels des intervalles et des frettes. Chaque *Gushé* est jouée dans un *Mayé* qui est constitué seulement de 7 intervalles. Il est donc absurde de vouloir comprendre les *Gushé* en se reportant à une échelle complète des intervalles de la musique persane, car chaque *Gushé* constitue un groupe restreint d'intervalles. Il faut donc chercher quels intervalles sont dans chaque *Gushé,* et de quelle manière ils s'articulent : où commencent les *Dang*, où se terminent-ils, « *Ist* », quelles sont les notes importantes de chaque *Gushé* telle que le *Shahed*.. C'est pourquoi les tableaux des *Dastgah* et *Avaz* de Talai pourront nous êtres utiles à décrire cette musique. Ses tableaux sont donnés dans l'appendice.

Finalement, les *Dang* principaux utilisées dans la musique *Dastgahi* seront :

$$M = (9/8),(9/8),(256/243) \cong (204,204,90)_{cent} \approx (41,41,18)_{\alpha},$$

$$S = (12/11),(88/81),(9/8) \cong (150,143,204)_{cent} \approx (30,29,41)_{\alpha},$$

$$C = (12/11),(297/256),(256/243) \cong (150,257,90)_{cent} \approx (30,51,18)_{\alpha},$$

aux quelles il faut ajouter « D » qui est la permutation circulaire de « M » :

$$D = (9/8),(256/243),(9/8) \cong (204,90,204)_{cent} \approx (41,18,41)_{\alpha}.$$

Après examiner le *Radif*, je suis convaincu qu'il y a 9 *Dang* utilisés dont seulement 6 peuvent commencer de la position de la corde à vide du luth (position 0,6,13,19 sur le *Tar*). Mais, Toutes ces *Dang* sont les permutations de « *M* », « *S* » et « *C* ». Ces 6 *Dang* sont « *M* », « *C* », « *D* » et « *S* » avec ses permutations.

Les intervalles plus grands que la quarte (4/3) ne sont jamais utilisés dans les successions mélodiques. Les intervalles utilisés entre deux note d'une mélodie appartiennent à :

$$\{(256/243),(88/81),(12/11),(9/8),(297/256),(32/27),(27/22),(81/64),(4/3)\}.$$

4.2 Les classes d'équivalence des structures intervalliques :

En représentant tous les intervalles des frettes du *Tar* dans un cercle divisé en 240 ou bien 1200 parties égales, $(150,204,294,354,408,498,558,648,702,792,852,906,996,1056,1110)_{cent}$ à quoi s'ajoutent les intervalles produits par la deuxième, $(90,1147)_{cent}$, et la troisième corde, $(445,588)_{cent}$, je remarque vois aucune symétrie interne, et de plus, je n'ai pas trouvé aucune micro structure correspondant à celles proposés par Balzano[45]. Néanmoins, mon approche ne suppose aucune symétrie interne à priori. Du point de vue mathématique, il suffit d'avoir un nombre fini de points arbitraires sur un cercle. Ce qui signifie qu'en changeant les points, l'approche mathématique ne change pas. N'oublions pas que les points que j'ai déterminés, sont sujets à une incertitude musicologique, car, ils ne sont pas le résultat de mesure scientifique[46]

1. *Dang* : D'abord, nous avons besoin de trouver les classes d'équivalence à une transposition près de chaque *Dang* existant dans la musique persane, *M*, *S*, *C* et *D*, ce qui équivaut à de retrouver toutes les positions, frettes et cordes, sur l'instrument *Tar* où ce *Dang* peut commencer. La meilleure façon, c'est de travailler avec les rapports fréquentiels qui sont plus représentatifs du point de vue musicale, mais qui ont moins d'intérêt du point de vue mathématique. Par contre, dans un tempérament (division) en *n* parties égales, la transposition musicale se traduit par une simple opération d'addition.

Si on utilise la division en 240 parties égales, il faudra accepter une marge d'erreur de 1_{α}, le seuil différentiel de deux notes musicales. Car, par exemple, la quarte entre la corde à vide, 0, et la 6ieme frette ou bien entre les frettes 1 et 8, mesure 100_{α}, mais la quarte entre les frettes 2 et 9, 3 et 10, 4 et 11, 5 et 12, 7 et 13 vaut 99_{α}. Cette marge d'erreur a pour l'origine le fait qu'on a divisé le *cent* par 5. Et en acceptant le critère de cette marge dans la comparaison des structures intervallique pour trouver leurs classes d'équivalence, il s'ensuit que $(12/11) = 150_{cent} \approx 30_{\alpha} \cong 29_{\alpha} \approx 143_{cent} = (88/81)$ ce qui implique que $\{(88/81),(12/11),(9/8)\}$ est également un

45 Voir l'appendice

46 Telle que données d'une mesure statistique d'analyse spectrale des intervalles du *Tar*.

Dang Shur (*S*). à priori, cette hypothèse est peut sembler acceptable, mais, il faut chercher la réponse à la question d'équivalence musicale entre (12/11) est (88/81) dans la pratique musicale. Dans cet article, je ne retiens pas cette hypothèse. Donc, je prends la division en 1200 et le critère de 5_{cent} comme le seuil différentiel d'intervalle.

Prenons l'ensemble $Tar = \{0,90,150,204,294,354,408,445,498,558,588,648,702,792,852,906,996,1056,1110,1147\}_{cent}$
Je définis la classe d'équivalence d'une structure intervalique, comme *Dang C*, de la manière suivante $E(C \subset Tar) = \{i : i \in Tar \wedge T_i(C) \subset Tar\}$ où l'opérateur T_i est le même que dans la section **3.5.1**, $T_i(C) = \{[a+i]_{\mathrm{mod}1200} \ni a \in C\}$. Si on veut prendre en compte le seuil différentiel d'intervalle, il devient $T_i^e(C) = \{[a+i+e(a)]_{\mathrm{mod}1200} \ni a \in C \wedge -5 \le e \le 5\}$ où *e* est l'erreur accepté dans le système et il a seulement une valeur pour chaque *a*.
Pour *Tchahargah* $C = \{0,150,408,498\}$, la classe d'équivalence est $E_C = \{0,294,498,702\}$. Ce qui signifie qu'il possible de jouer le *Dang Tchahargah* sur chacune des positions correspondant aux points $\{0,294,498,702\}$ sur le *Tar*. Si l'on accepte le critère d'égalité de (12/11) et (88/81), il s'ajoute $E'_C = \{150,648,1147\}$ qui nous fournit un bon moyen de vérifier cette égalité. Si les places que j'ai données pour les frettes du *Tar* sont correctes et si on trouve quelque part dans la pratique musicale que le *Dang Tchahargah* commence à la position correspondante de 150_{cent}, la première frette, ou bien la position correspondante de 648_{cent}, la huitième frette, on peut confirmer que cette égalité est vraie. Pour ma part, je ne connais pas de *Gushé* dans la musique persane qui commencerait à par cette frette[47].

Pour *Shur* $S = \{0,150,294,498\}$, la classe d'équivalence est $E_S = \{0,204,294,408,498,702,906,996\}$. Avec le critère d'égalité de (12/11) et (88/81), il s'ajoute $E'_C = \{150,354,558,852,1056\}$.

La classe d'équivalence de *Dashti* $D = \{0,204,294,498\}$, est $E_D = \{0,150,204,294,354,498,702,852,906,996\}$. Et enfin pour *Mahur* $M = \{0,204,408,498\}$: $E_M = \{0,90,150,294,498,648,702,792,906,996,1147\}$.

Il convient de noter que pour trouver toutes les *Dang* possibles, il faut chercher les *orbites*[48] de quatre éléments sur le *Tar* par rapport à l'opérateur Tm_i, introduit dans la section **3.5.2**, et puis filtrer les réponses avec le critère intervallique suivante : **1.** l'intervalle entre le premier élément et le quatrième doit être égale à une quarte **2.** l'intervalle entre élément 1 et 2, 2 et 3, 3 et 4, doivent être inférieure à la tierce la plus petite $(32/27) = 294_{cent}$ et supérieure ou égale à un comma $(256/243) = 90_{cent}$. cela signifie qu'il appartient à l'ensemble $\{(256/243),(88/81),(12/11),(9/8),(297/256)\} = (90,143,150,204,257)_{cent}$.

2. *Mayé* : Apres quoi, il est nécessaire d'ajouter deux *Dang* à côté de l'un de l'autre pour trouver les *Mayé*. Comme nous avons vu dans la section **2.3,** les *Dang* peuvent se succéder de plusieurs manières pour former une octave complète. En outre, dans la pratique musicale, il existe des situations dans lesquelles la place des *Dang* s'inverse (lorsqu'un instrument n'a pas les notes nécessaires pour interpréter les parties hautes d'une mélodie, les notes sont transposées une octave plus bas). Donc (*Dang, Dang,* ton majeur)=(4/3,4/3,9/8) devient (*Dang,* ton majeur, *Dang*)=(4/3,9/8,4/3) et inversement. Ces deux arrangements possibles des Dang dans une octave ont de ce fait la même structure intervalique ainsi que la même caractéristique musicale, ils sont un seul et même *Mayé*. Parmi les *Mayé* ayant une structure de type (*Dang,* ton majeur, *Dang*) il existe certains qui ont cette structure à l'origine, comme le *Mayé Oj*, et d'autres qui ont pris cette forme simplement à la suite d'une inversion des *Dang* d'un *Mayé* de type (*Dang, Dang,* ton majeur), comme le *Mayé Nava*. Et l'unique moyen de distinguer les uns des autres est de reconnaître les deux notes caractéristiques de chaque *Mayé* : « « *Ist* » et « *Shahed* ». Rappelons que « *Ist* » est la note sur laquelle les mélodies se terminent et c'est également la première note du première *Dang*. « *Shahed* » est la note la plus répétée dans une mélodie et il est la première note du deuxième *Dang*.
Sachant que *Oj* et *Nava* ont la même structure intervallique et que c'est toujours la première note de chaque *Dang* qui est la plus importante[49], je placerai ces deux *Mayé* dans une même classe d'équivalence et je définis le concept *Mayé* généralisé tel qu'il est construit par la succession (*Dang, Dang,* ton majeur)=(4/3,4/3,9/8). Retenons donc que *Oj* et *Nava* constituent le même *Mayé.*

---

47 À mon avis, Même si, ces positions ne sont pas utilisées dans la tradition de la musique *Dastgahi*, elles peuvent servir dans les compositions contemporaines.

48 Les classes d'équivalence,Voir **3.5**

49 Même si parfois *Shahed* est la deuxième note de deuxième *Dang*.

Étant donné que toutes les *Dang* peuvent commencer à des positions correspondant au point $(4/3) = 498_{cent}$, il y aura 16 *Mayé* généralisés possibles dont 10 parmi eux sont marqués par Talai comme existant dans la pratique musicale. Pour trouver les différentes places possibles de chaque *Mayé*, il suffit de suivre la même méthode donnée ci-dessus pour trouver les places des *Dang*, ou bien plus simplement de calculer l'intersection des classes d'équivalence d'un *Dang* avec la transposée à la quarte (l'addition de 498_{cent} à chaque élément) d'un autre, afin de trouver la note *Shahed*. Comme nous l'avons dans la section **2.3**, Le *Dastgah* est la succession des *Gushé* jouées dans les *Mayé*. Par conséquent, la structure modale de chaque *Dastgah* est en fait une combinaison de différents *Mayé* dans un ordre particulier.
Le passage d'un *Mayé* à l'autre s'effectue lorsque deux *Mayé* différents partagent un *Dang*. L'art du musicien réside dans son habileté à rendre la succession et de la combinaison des *Mayé* imperceptible à travers la progression mélodique des *Gushé*.
Ainsi, le passage d'un *Mayé* à l'autre est possible si est seulement l'intersection de deux *Mayé* généralisé contient au moins quatre élément, autrement dit si les *Mayé* ont au moins un *Dang* en commun. Avec ce principe, nous constatons que dans la succession des *Mayé* dans un *Dastgah*, la transposition de quatre (ou bien quinte descendante) d'un *Mayé* est possible.

3. *Les Gushé dans un Mayé* : l'ingéniosité de l'opérateur « Transposition modale » que j'ai défini dans la section **3.5.2** se manifeste clairement en ce qui concerne dans la relation entre différent *Gushé* dans un *Mayé*, car il permet de mettre en évidence la relation musicale entre les *Gushé* d'un *Mayé* qui ont la même structure rythmique (qui appartiennent à une même classe d'équivalence rythmique) et qui sont la « Transposition modale » l'un à l'autre. Par conséquent, pour trouver les classe d'équivalence intervallique, il suffit de calculer, dans un premier, les *Orbites* de Z_7, et dans un second temps, les structures intervalliques des éléments à l'aide de structure intervallique des *Mayé*. Ce qui signifie qu'une fois que les classes d'équivalence des objets par rapport à leurs indices dans le *Mayé* sont trouvées, il reste à extraire les éléments correspondants à ces indices dans le *Mayé* en supposant que les éléments de ce *Mayé* portent des indices de 0 à 6 : $j = \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

4. *Les Gushé de différent Mayé* : Les *Gushé* qui ne sont pas dans un même *Mayé* ou bien dont les *Mayé* ne commencent pas sur un même point, se relient seulement par une transposition. Pour trouver les classes d'équivalence par transposition d'un *Guché* sur le *Tar*, c'est à dire tous les points sur lesquels la structure intervallique de ce *Gushé* peut être joué, il faut suivre la même méthode que pour trouver les classes d'équivalence des *Dang* :
$E(G \subset Tar) = \{i : i \in Tar \wedge T_i^e(G) \subset Tar\}$ où $T_i^e(g) = \{[a + i + e(a)]_{\text{mod}1200} \ni a \in g \wedge -5 \le e \le 5\}$, l'opérateur T_i est celui de section **3.5.1**, mais avec une marge d'erreur moindre du seuil différentiel d'intervalle, 5_{cent}. Il existe un cas particulaire où la Transposition modale d'un *Gushé* dans un *Mayé* équivaut exactement à sa transposition (chromatique). Je l'appellerai cette class d'équivalence, la class d'équivalence de transposition parfaite.

5. *Modulation* : Les *Gushé* qui servent de point de passage entre deux *Mayé* qui partageant un *Dang* sont les *orbites* de *Mayé* ; ils appartiennent seulement à ce *Dang* commun. Rappelons qu'un *Mayé* peut être décomposé en deux *Dang* de telle manière que chaque élément de ce *Mayé* appartient seulement à un de ces *Dang* et tous les éléments de ce *Mayé* sont soit dans le première *Dang*, soit dans le deuxième. Autrement dit, intersection de ce deux *Dang* est vide et leur union résulte le *Mayé.*

6. *Les Gushé et les structures intervalliques* : à partir d'une structure intervallique comme « do ré mi », il est possible d'obtenir diverses mélodies qui soient différentes permutations possibles des éléments de cette structure, telles que « do ré mi », « mi ré do », « do mi ré », « ré mi do », … Donc, les *Gushé* qui partagent les mêmes notes sont reliés par permutation de leurs éléments constitutifs.

Pour conclure, la structure intervallique des *Gushé* peut être analysée à l'aide d'opérations mathématiques, telles que Transposition, Transposition modale, permutation, inclusion, intersection, etc.

4.3 Les classes d'équivalence rythmique :

L'analyse des rythmes dans la musique persane est plus simple. Comme nous l'avons vu dans la section **2.3**, traditionnellement, dans la musique persane, le rythme musical provient des rythmes de la poésie (la prosodie). *Farabi* dans le troisième livre de *Musigi Kabîr* a identifié trois éléments rythmiques aussi bien dans le chant que dans la percussion : fort (accent), doux (bref ou court) et long. Il a également mentionné des

rythmes fondamentaux ou autrement dit élémentaires dont les rythmes plus complexes sont dérivés[50]. Les syllabes courtes et longues sont toujours interprétées dans une unité flexible de temps, tout en conservant leur rapport relatif (courtes ou longues les unes par rapport aux autres). Et c'est seulement dans cette perspective que j'associe le nombre 2 aux syllabes longues (blanc) et 1 aux syllabes courtes (noir). C'est à dire qu'il s'agit seulement de symboles représentant le rapport relatif des syllabes courtes et longues, et ne signifient pas que les syllabes longues (blanc) sont deux fois plus longues que les courtes (noir) ou bien que toutes les syllabes longues (blanc) ont la même longueur temporelle. Je définis la longueur d'une boucle rythmique comme son nombre d'élément. Il faut remarquer que dans la musique persane, il y a un silence avant chaque répétition de la boucle rythmique.
Ces rythmes peuvent donc se représenter dans un cercle divisé en n parties tel que n est égal au nombre des noirs à quoi l'on ajoute deux fois le nombre des blancs ; ce qui permet de les représenter par leur *Integer mode* » comme $(2,2,1,2,2,1,2,2,1,2)$. Ou bien même plus simplement par un suite de successions de N (Noir) et B (Blanc), comme (B,B,N,B,B,N,B,B,N,B).

La conclusion:

Ainsi, au cours de la présente recherche, après avoir tenté de montrer les caractéristiques essentielles de la musique persane, et entre toutes, l'art de tisser une mélodie à partir d'objets provenant de la mémoire individuelle et collective, nous nous sommes appliqués à définir les outils mathématiques adaptés à la modélisation de cette musique. Nous avons insisté sur la distinction et les relations entre théorie et pratique musicales, entre analyse algébrique et inspiration créative. Nous avons tâché d'établir des passerelles entre ces deux approches en cherchant à découvrir la signification mathématique de notions musicales qui guident le jeu du musicien, telles que la notion de « proximité musicale ». Cette méthode nous a conduit à l'établissement de classes d'équivalence mélodiques déterminées en même temps par le calcul algébrique et l'observation de la pratique musicale.
Dans cette article, après avoir déterminé les intervalles de la musique persane tout en analysant leurs racines historiques et culturelles, nous avons seulement traité une méthode pour l'analyse des structures intervalliques des *Gushé* et de ce fait l'analyse rythmique reste à venir. Par ailleurs, la comparaison de nos données et résultats d'analyse avec la pratique musicale réelle représentent également les étapes ultérieures de nos recherches.
Tout ce chemin parcouru constitue le premier jalon d'un travail à long terme qui consistera à affiner notre méthode avant d'en élaborer un logiciel d'application qui nous permettra de :

1. Continuer la description de la musique persane du point de vue de la loi de proximité musicale pour recouvrir l'ensemble des constituants (*Gushé*) de cette musique.
2. Découvrir d'autres constituants dans l'espace entre ceux de la musique persane actuelle, en inventant des *Gushé* nouveaux et/ou en restituant des *Gushé* tombés dans l'oubli au cours de l'histoire.

Le remerciement:

Je tien à exprimer toute ma gratitude envers à M. C. Depollier, responsable de la formation de « l'ingénierie mécanique et acoustique » à l'université du Maine, et ainsi qu'envers à M. G. Assayag, responsable de la formation « ATIAM » et l'équipe de recherche en « Représentation musicale » à l'IRCAM, à qui je dois la chance de participer dans ce stage.

Je remercie profondément M. M. Andereata, professeur et chercheur à l'IRCAM, pour tout ce qu'il m'a enseigné dans le cours de « modélisation mathématique pour l'informatique musicale » et qui m'a beaucoup aidé dans la mis en place de mon approche mathématique.

Et un grand merci au M. M. Ayant, professeur et chercheur à l'IRCAM et responsable de mon stage qui m'a fait comprendre le concept de modélisation mathématique dans la musique orientale et m'a montré le chemin à suivre et qui a soigneusement corrigé mon rapport de stage.

[50] Pour plus de détail, voir « R. D'Erlanger: La musique Arabe, Tom II, Extrait de *Musiqi al-Kabir* »

Références :

La consonance et la musique juste :

[J1]. Norman Sohl : An Atlas of Consonance, Seattle Washington, 1986-2002
http://www.sohl.com/sohl/mt/maptone.html
[J2]. J. L. Monzo : Just music, 1998
http://www.musicalonline.com/scholarly_works.htm
[J3]. Harry Partch : Genesis of Music
[J4]. Cris Forster : Just intonation : http://www.chrysalis-foundation.org/just_intonation.htm

La théorie des ensembles (*Set-Theory*) :

[S1]. Moreno Anderatta, Carlos Agon : Formalisation algébrique des structures musicales à l'aide de la *Set-Theory*, aspects théorique et analytique
[S2]. Moreno Anderatta, 2003 : Méthodes algébriques en musique et musicologie du XXe siècle, aspect théorique, analytiques et compositionnelle, thèse de doctorat en EHESS, IRCAM 2003
[S3]. Gerald J. Balzano : The group theoretic description of 12-fold and microtonal pitch systems, Computer Music Journal,

La musique persane :

[M1]. Mondher Ayari, l'écoute des musiques arabes improvisées : Essai de psychologie cognitive de l'audition, l'Harmattan 2003
[M2]. *Musiqi al-Kabir* : Abu Nasr Mohamad Tarkhan Farabi :
- Traduction persane : Dr. Azartash Azarnoosh : Pajouheshgah Alomme Ensani va Motaleate Farhangi, Tehran 1996
- Traduction française : R. D'Erlanger : La musique Arabe, Tom I et II, Extrait de *Musiqi al-Kabir*

[M3]. O. Wright : The Modal system of Arab and Persian music, Oxford University Press 1978.
[M4]. Dariush Talai : Traditional Persian Art Music: The Radif of Mirza Abdullah, Bibliotheca Persica 1997
[M5]. Hormoz Farhat, John Blacking ; The Dastgah Concept in Persian Music, Cambridge University Press 2004
[M6]. Amine Beyhom : Systématique modale, thèse de doctorat en « Musique et musicologie », l'Université Paris IV – Sorbonne

Appendice I

<u>Les propriétés géométriques de la gamme diatonique dans les groupes cycliques d'ordre n=k(k+1), d'après « Balzano »</u> : D'après le théorème d'algèbre de Sylow, Z_{12} est isomorphe au produit direct de deux sous-groupes, Z_3 et Z_4. On peut écrire $Z_{12} \cong Z_3 \times Z_4$. Chaque élément dans $Z_3 \times Z_4$ est décrit par deux nombres $(b,c) : b \in \{0,1,2\}$ et $c \in \{0,1,2,3\}$, à la place d'un seul nombre $a \in \{0,1,2,...,11\}$. La règle de combinaison est $(a,b) \circ (a',b') = (\left[a+a'\right]_{\text{mod } 3}, \left[b+b'\right]_{\text{mod } 4})$, une simple l'adition vectorielle. Cela signifie que les éléments $(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),...,(2,2),(2,3)$ avec la règle de combinaison génèrent une structure qui est isomorphe au Z_{12}. L'isomorphisme est très simple : $(a,b) \leftrightarrow (4a+3b)_{\text{mod } 12}$.
La représentation graphique est également très simple : un axe verticale représente l'axe des tierces majeures (4_{12} génère Z_3), et l'axe horizontal est l'axe des tierces mineures (3_{12} génère Z_4). Chaque point correspond donc aux nombres de tierces majeures et/ou mineures contenues dans cet intervalle. La quinte par exemple qui contient à la fois une tierce majeure et une tierce mineure, sera de ce fait le point $7 \cong (1,1)$.
Les structures les plus compactes et les plus connectées sont les quatre accords principaux. De plus, la gamme diatonique est construite par les accords voisins sur l'axe diagonal. En fait, cet axe diagonal représente le cycle des quintes et l'autre axe diagonal présente le cycle des semi-tons, ce qui peut se traduire par les voisinages harmonique et mélodique. Voir Figure Ap.I.

Balzano a démontré que ces aspects existent si et seulement si le groupe cyclique est de d'ordre $n = k(k+1)$, et décomposé en Z_k et Z_{k+1}. Le système tempéré aux 240 parties égales peut être décomposé en $Z_{15} \times Z_{16}$ qui comportera le système $Z_2 \times Z_3$, $Z_3 \times Z_4$ et $Z_4 \times Z_5$. Il peut être également décomposé en $Z_5 \times Z_6$ (indépendamment de $Z_{15} \times Z_{16}$). L'on arrive donc à retrouver toutes les possibilités de telles caractéristiques symétriques.

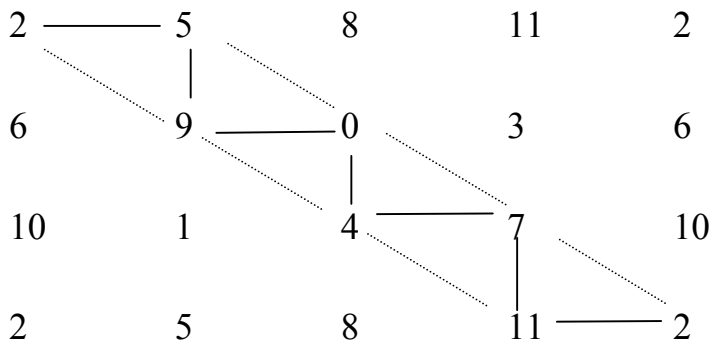


Figure Ap.I : La représentation bidimensionnelle de Z_{12}