Università degli Studi di Pisa

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

Canoni ritmici a mosaico

Giulia Fidanza

Relatori

Prof.ssa Francesca Acquistapace

Dott. Moreno Andreatta

Controrelatore

Prof. Paolo Acquistapace

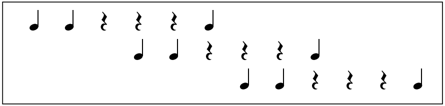
La definizione musicale

Canone ritmico a mosaico

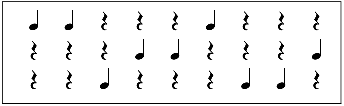
Composizione ritmica e contrappuntistica

1. stesso tema, traslato nel tempo
2. tema ciclico
3. voci complementari

Esempio:



A regime:

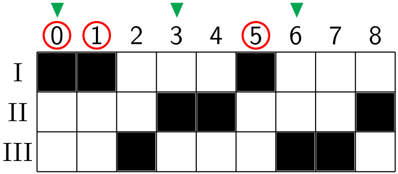


Un primo modello

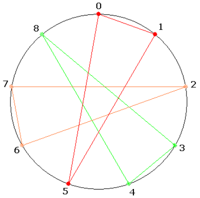
Fattorizzazioni di gruppi ciclici

$$\{0,1,5\} \oplus \{0,3,6\} \equiv \{0,1,\dots,8\} \pmod 9$$

T.U.B.S.



Krenek



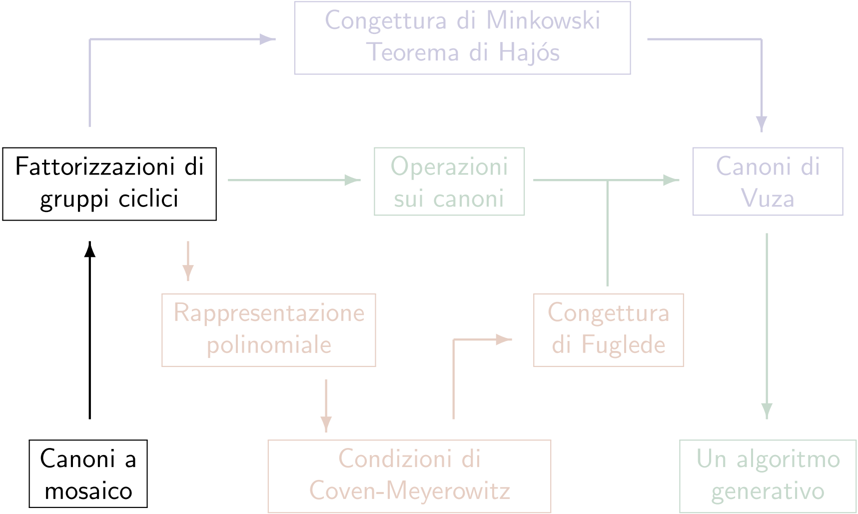
Canone ritmico a mosaico

Fattorizzazione di un gruppo ciclico con due sottoinsiemi:

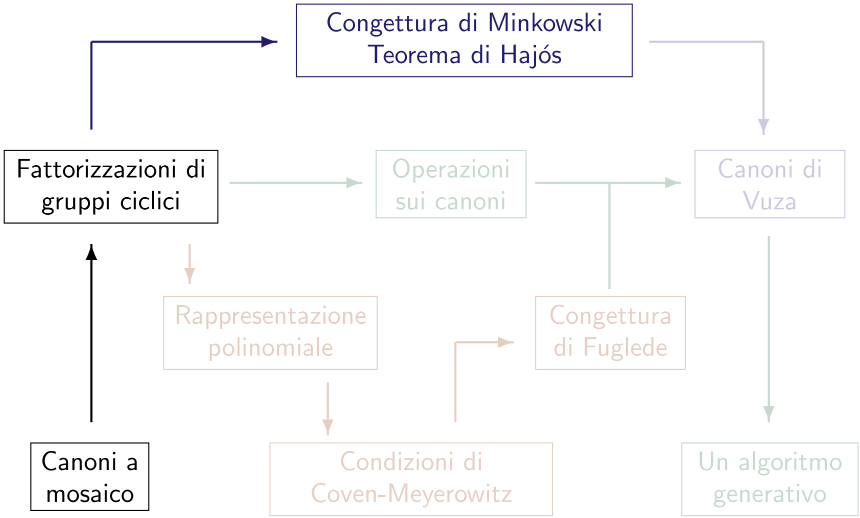
$$A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$A :=$ *ritmo interno*, $B :=$ *ritmo esterno*.

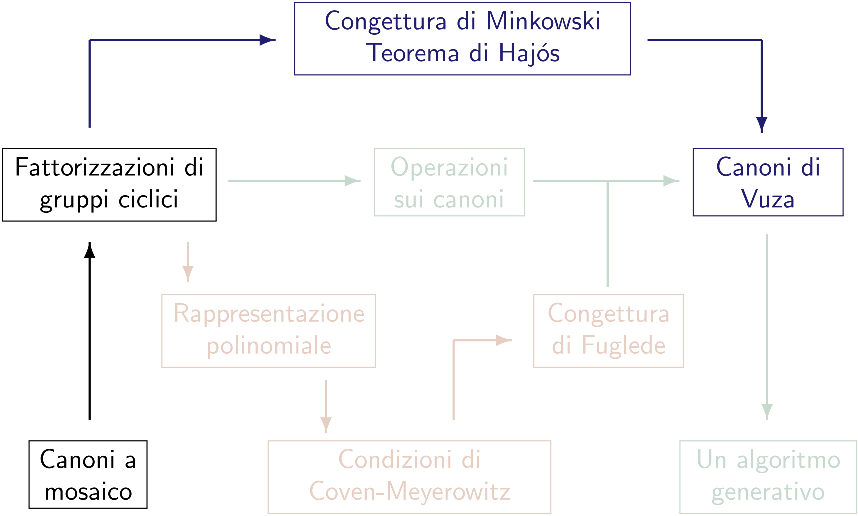
Il percorso


Congettura di Minkowski
Teorema di Hajós
Fattorizzazioni di gruppi ciclici
Operazioni sui canoni
Canoni di Vuza
Rappresentazione polinomiale
Congettura di Fuglede
Canoni a mosaico
Condizioni di Coven-Meyerowitz
Un algoritmo generativo

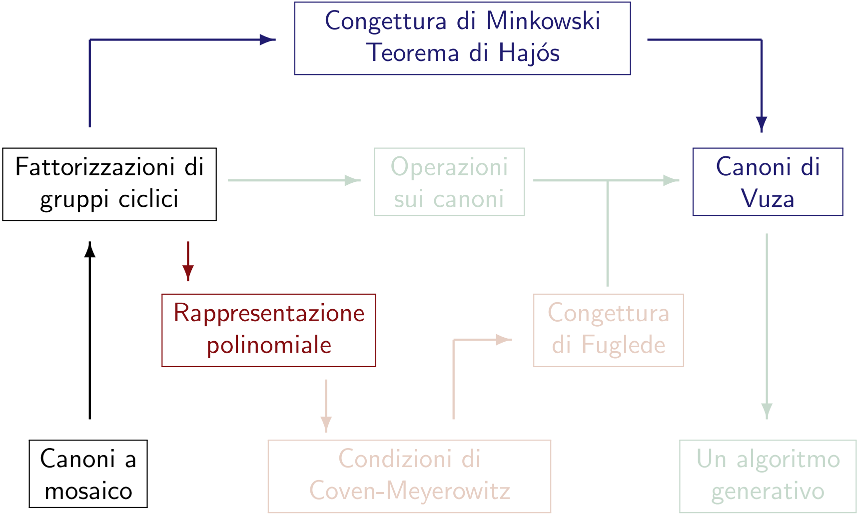
Il percorso


Congettura di Minkowski
Teorema di Hajós
Fattorizzazioni di gruppi ciclici
Operazioni sui canoni
Canoni di Vuza
Rappresentazione polinomiale
Congettura di Fuglede
Canoni a mosaico
Condizioni di Coven-Meyerowitz
Un algoritmo generativo

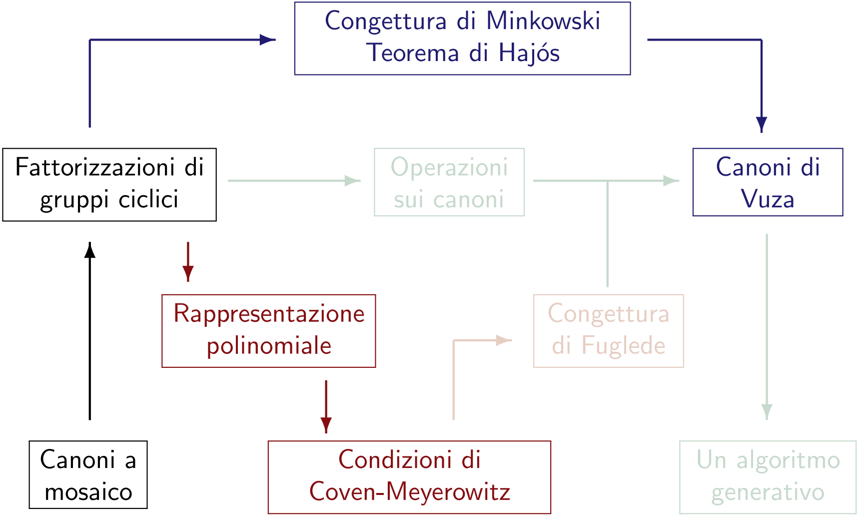
Il percorso


Congettura di Minkowski
Teorema di Hajós
Fattorizzazioni di gruppi ciclici
Operazioni sui canoni
Canoni di Vuza
Rappresentazione polinomiale
Congettura di Fuglede
Canoni a mosaico
Condizioni di Coven-Meyerowitz
Un algoritmo generativo

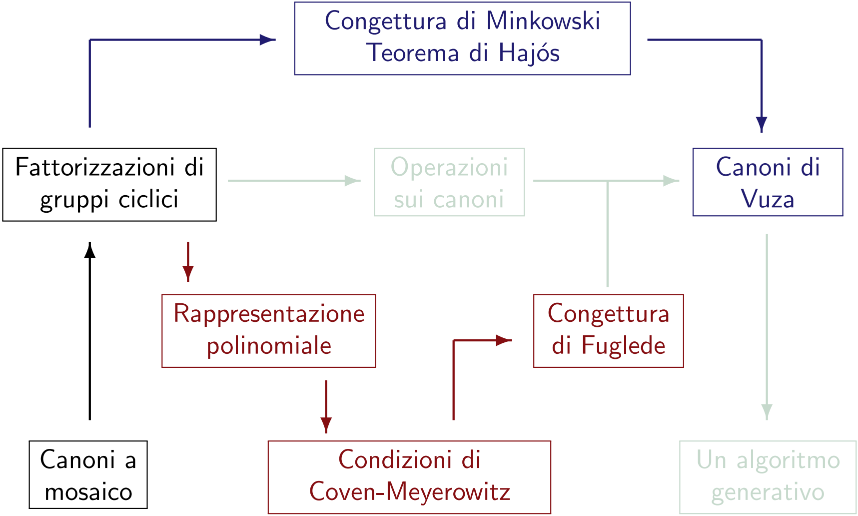
Il percorso


Congettura di Minkowski
Teorema di Hajós
Fattorizzazioni di gruppi ciclici
Operazioni sui canoni
Canoni di Vuza
Rappresentazione polinomiale
Congettura di Fuglede
Canoni a mosaico
Condizioni di Coven-Meyerowitz
Un algoritmo generativo

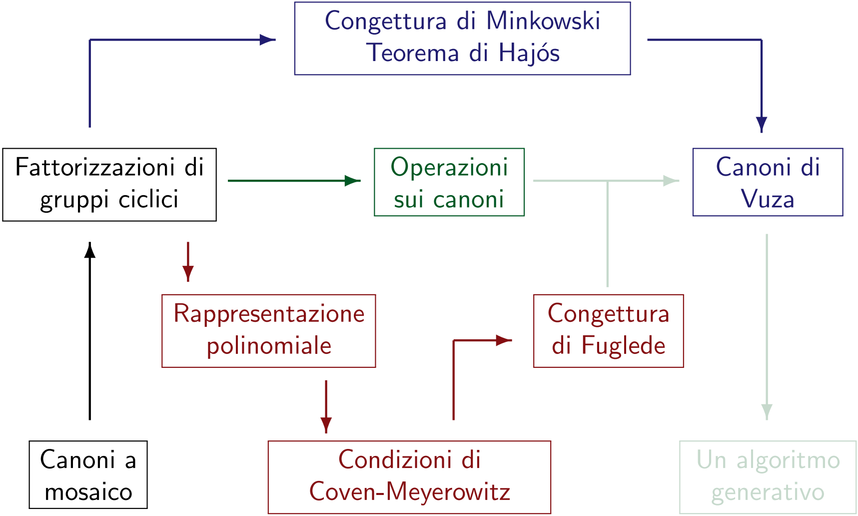
Il percorso


Congettura di Minkowski
Teorema di Hajós
Fattorizzazioni di gruppi ciclici
Operazioni sui canoni
Canoni di Vuza
Rappresentazione polinomiale
Congettura di Fuglede
Canoni a mosaico
Condizioni di Coven-Meyerowitz
Un algoritmo generativo

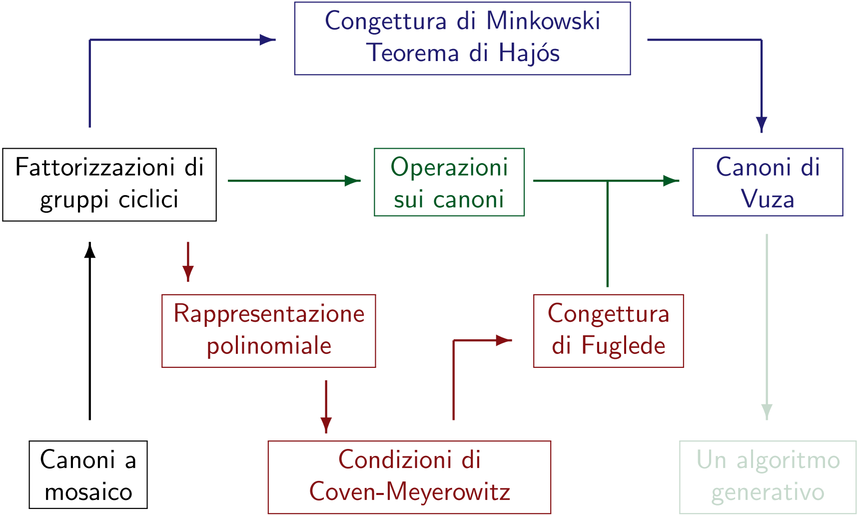
Il percorso


Congettura di Minkowski
Teorema di Hajós
Fattorizzazioni di gruppi ciclici
Operazioni sui canoni
Canoni di Vuza
Rappresentazione polinomiale
Congettura di Fuglede
Canoni a mosaico
Condizioni di Coven-Meyerowitz
Un algoritmo generativo

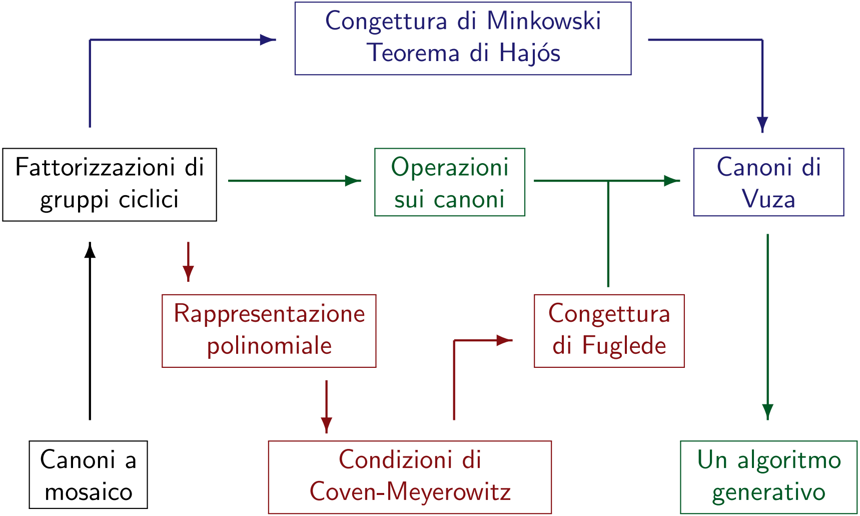
Il percorso


Congettura di Minkowski
Teorema di Hajós
Fattorizzazioni di gruppi ciclici
Operazioni sui canoni
Canoni di Vuza
Rappresentazione polinomiale
Congettura di Fuglede
Canoni a mosaico
Condizioni di Coven-Meyerowitz
Un algoritmo generativo

Il percorso


Congettura di Minkowski
Teorema di Hajós
Fattorizzazioni di gruppi ciclici
Operazioni sui canoni
Canoni di Vuza
Rappresentazione polinomiale
Congettura di Fuglede
Canoni a mosaico
Condizioni di Coven-Meyerowitz
Un algoritmo generativo

Il percorso


Congettura di Minkowski
Teorema di Hajós
Fattorizzazioni di gruppi ciclici
Operazioni sui canoni
Canoni di Vuza
Rappresentazione polinomiale
Congettura di Fuglede
Canoni a mosaico
Condizioni di Coven-Meyerowitz
Un algoritmo generativo

Il problema matematico

Decomposizione dei gruppi abeliani

$$G \text{ gruppo abeliano, } o(G) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$$

$$G = \mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p_2^{\alpha_2}\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/p_n^{\alpha_n}\mathbb{Z}$$

Problema

$A_1, A_2, \dots, A_k \subset G$

$$G \stackrel{?}{=} A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k$$

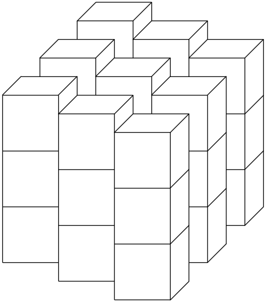
Le origini del problema

La congettura di Minkowski

$(\Omega, T) :=$ *ricoprimento reticolare* di $\mathbb{R}^n$

1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ misurabile
2. $T < (\mathbb{R}^n, +)$ discreto
3. $\bigcup_{t \in T}(\Omega + t) = \mathbb{R}^n$
4. $m\left((\Omega + s) \cap (\Omega + t)\right) = 0$
   $\forall s, t \in T$ distinti

$\Omega :=$*tassello*, $T :=$*reticolo di traslazione*

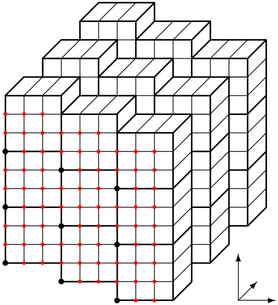


Congettura di Minkowski (1907)

Ogni ricoprimento reticolare a cubi dello spazio euclideo ammette una coppia di cubi che condividono una faccia.

La traduzione algebrica I

Definizioni e risultati



- $([0,1]^n, H)$ ricoprimento reticolare di $\mathbb{R}^n$
- $H < \mathbb{Q}^n$
- Suddivisione dei cubi con gli iperpiani di giacenza delle facce
- $G := \{$vertici di minor coordinate dei parallelepipedi generati dalla suddivisione$\}$
- $H < G$

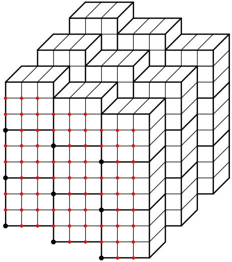
La traduzione algebrica II

Le ipotesi

$\{a_i\}_{i=1}^n$ base di G con $m_i a_i = e_i$, $m_i \in \mathbb{N}^+$

Ogni parallelepipedo appartiene ad un ed un solo cubo:

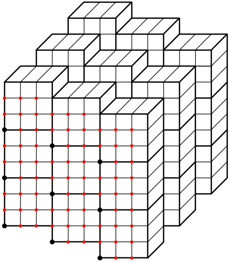
- $\forall\, g \in G\ \exists\, h \in H$ e $\forall i = 1, \dots, n$
  $\exists\, k_i \in \{0, \dots, m_i - 1\}$, tali che
  $$g = h + \sum_{i=1}^{n} k_i a_i$$
- $\forall\, h, h' \in H$, $\forall\, k_i, k_i' \in \{0, \dots, m_i - 1\}$,
  $i = 1, \dots, n$,
  $$h + \sum_{i=1}^{n} k_i a_i = h' + \sum_{i=1}^{n} k_i' a_i \Rightarrow h = h' \text{ e } k_i = k_i'$$



$$A_i := \{\overline{0}, \overline{a_i}, \dots, (m_i - 1)\overline{a_i}\} \subset G/H \quad \longrightarrow \quad \boxed{G/H = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n}$$

La traduzione algebrica III

La tesi



Due cubi condividono una faccia

$\Leftrightarrow$ il reticolo è composto da tubi

$\Leftrightarrow$ $\exists\, i \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $m_i a_i = e_i \in H$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\exists\, i \text{ tale che } m_i \overline{a_i} = \overline{0}\,.}$

Teorema di Hajòs (1941)

G un gruppo abeliano finito, $a_1, \ldots, a_n \in G$, $A_i := \{0, a_i, 2a_i, \ldots (m_i - 1)a_i\}$.

$$G = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \Rightarrow \exists\, i \in \{1, \ldots, n\} \textit{ tale che } m_i a_i = 0$$

La domanda di Hajós

Definizione

$A \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *periodico* $\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$, $0 < k < n$, tale che

$$A + k = A$$

Teorema di Hajòs (per canoni)

$A = \{0, a, 2a, \ldots, (n-1)a\}$, $B = \{0, b, 2b, \ldots, (m-1)b\} \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \Rightarrow A \text{ o } B \text{ è periodico}$$

Domanda

$$A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\Longrightarrow} A \text{ o } B \text{ periodico}$$

Canoni di Vuza

e gruppi di Hajós

Definizione

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *di Hajós* $\Leftrightarrow\ \forall A, B \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tali che

- $A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- A o B è periodico

Definizione

$A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *canone di Vuza* $\Leftrightarrow$ A e B non periodici.

$$A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ canone di Vuza } \Leftrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ non Hajós}$$

La risposta

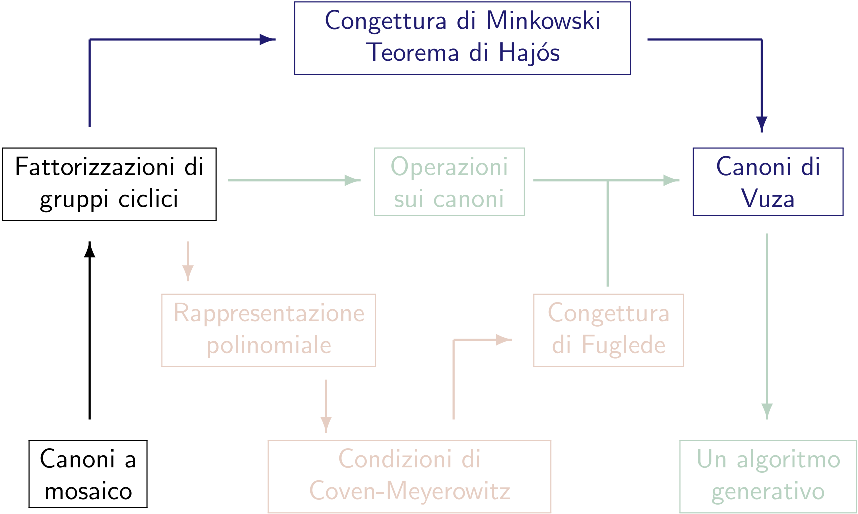
$$\mathcal{V} := \left\{ N \in \mathbb{N} \mid N = nmk \text{ con } \left[\begin{array}{l} 1.\,(n,m) = 1\,, \\ 2.\, n = n_1 n_2\,,\ \ m = m_1 m_2\,, \\ 3.\, n_1, n_2, m_1, m_2, k > 1 \end{array} \right] \right\}$$

$$\mathcal{H} := \{p^\alpha, p^\alpha q, p^2 q^2, pqr, p^2 qr, pqrs \mid \alpha \in \mathbb{N}, p, q, r, s \text{ primi distiniti}\}$$

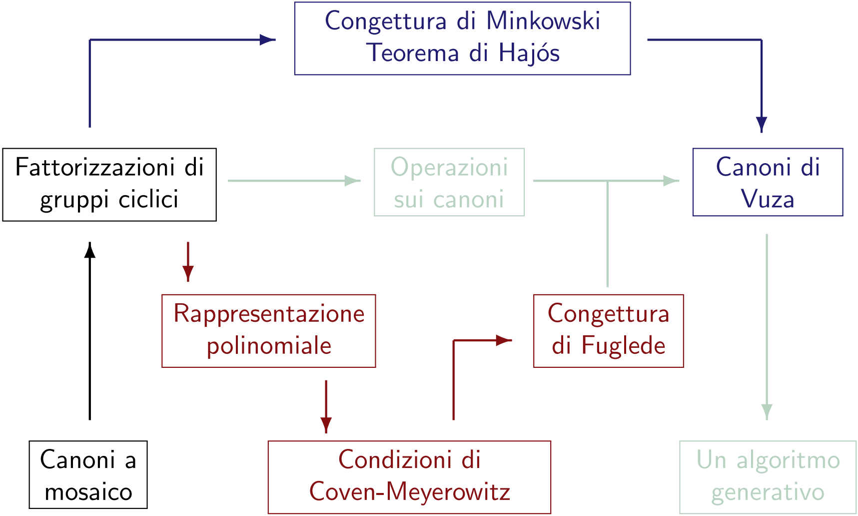
Teorema

1. $\forall\, N \in \mathcal{V}$, *esiste un canone di Vuza* $A \oplus B = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$
   (de Bruijn, 1953 - Vuza, 1991)
2. $\forall\, n \in \mathcal{H}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *è di Hajós*
   (Hajós, Rédei, de Bruijn, Sands, 1941 → 1957)
3. $\mathcal{V} \cup \mathcal{H} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
   (Sands, 1957)

Il percorso


Congettura di Minkowski
Teorema di Hajós
Fattorizzazioni di gruppi ciclici
Operazioni sui canoni
Canoni di Vuza
Rappresentazione polinomiale
Congettura di Fuglede
Canoni a mosaico
Condizioni di Coven-Meyerowitz
Un algoritmo generativo

Il percorso

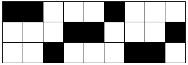

Congettura di Minkowski
Teorema di Hajós
Fattorizzazioni di gruppi ciclici
Operazioni sui canoni
Canoni di Vuza
Rappresentazione polinomiale
Congettura di Fuglede
Canoni a mosaico
Condizioni di Coven-Meyerowitz
Un algoritmo generativo

Un secondo modello

La rappresentazione polinomiale

Definizione

$0 \in A \subset \mathbb{N}$ finito. $A(x) := \sum_{a\in A} x^a$ è *polinomio associato* ad A.



$$\{0,1,5\} \oplus \{0,3,6\} = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$$
$$(1+x+x^5)(1+x^3+x^6) \equiv 1+x+\ldots+x^8 \pmod{x^9-1}$$

$$\boxed{\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \mathbb{Z}/\mathbf{n}\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{A(x)B(x)} \equiv \mathbf{1}+\mathbf{x}+\mathbf{x^2}+\ldots+\mathbf{x^{n-1}} \pmod{\mathbf{x^n}-\mathbf{1}}}$$

$$1+x+\ldots+x^{n-1} = \prod_{d\mid n, d>1} \Phi_d(x)$$

$\Phi_d(x)$:= polinomio minimo delle radici primitive d-esime dell'unità
(*d-esimo polinomio ciclotomico*)

$$d \mid n \text{ e } d > 1 \Rightarrow \Phi_d(x) \mid A(x) \text{ oppure } \Phi_d(x) \mid B(x)$$

Le condizioni di Coven e Meyerowitz

$0 \in A \subset \mathbb{N}$ finito.

- $R_A := \{ d \in \mathbb{N}^+ : \Phi_d(x) \mid A(x)\}$
- $S_A := \{ d \in R_A : d = p^\alpha, p \text{ primo}, \alpha \in \mathbb{N}^+\}$

$$\begin{array}{ll} (T1): & A(1) = \prod_{p^\alpha \in S_A} p \\ (T2): & {p_1}^{a_1}, \dots, p_k^{a_k} \in S_A, \text{ primi distinti} \Rightarrow p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k} \in R_A. \end{array}$$

Teorema di Coven e Meyerowitz (1999)

(1) : A soddisfa (T1) e (T2) $\Rightarrow$ A è un ritmo (di un canone a mosaico);

(2) : A è un ritmo $\Rightarrow$ A soddisfa (T1);

(3) : A è un ritmo e $\mid A \mid = p^\alpha q^\beta \Rightarrow$ A soddisfa (T2).

La condizione (T1)

necessaria ma non sufficiente

1.  $\rightarrow$ 

$$\rightarrow A = \{0, 2, 5, 7, 9, 12, 14\}$$

$$\rightarrow A(x) = 1 + x^2 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{12} + x^{14}$$

Per assurdo: A è un ritmo $\Rightarrow$ (T1)

- $\mid A \mid = A(1) = 7 \Rightarrow \Phi_{7^\alpha}(x) \mid A(x)$
- $\deg \Phi_{7^\alpha}(x) = 6 \cdot 7^{\alpha-1} \Rightarrow \Phi_7(x) \mid A(x) \Rightarrow A(\xi_7) = 0$

$$0 = 3 + 2(\xi_7^2 + \xi_7^{-2}) > 0$$

2.  $\rightarrow A = \{0, 1, 2, 4, 5, 6\} \rightarrow A(x) = \Phi_3(x)\Phi_8(x)$

$$A(1) = 6 = 2 \cdot 3 = \prod_{p^\alpha \in S_A} p$$

La condizione (T2)

un problema aperto

Proposizione

$\mathcal{H} := \{p^\alpha, p^\alpha q, p^2q^2, pqr, p^2qr, pqrs \mid \alpha \in \mathbb{N}, p, q, r, s \text{ primi distiniti}\}$

$$A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \implies A \text{ e } B \text{ verificano (T2).}$$

Domanda

La condizione (T2) è necessaria in tutti i casi?

La congettura di Fuglede

o congettura spettrale

Definizione

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ boreliano è *spettrale in* $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$
$L^2(\Omega)$ ha una base ortogonale della forma $\{e^{2\pi i \langle \lambda_k, x \rangle}\}_{k \in \mathbb{Z}}$

Congettura di Fuglede (1974)

Ω tassella $\mathbb{R}^n$ per traslazioni $\Leftrightarrow$ Ω spettrale in $\mathbb{R}^n$.

Dimostrata per

- spettro e insieme di traslazione reticoli (Fuglede 1974)
- $\Omega = (a, b) \cup (c, d) \subset \mathbb{R}$ (Łaba 2001)
- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ convesso (Iosevich, Katz e Tao 2003)
- $\Omega \subset [0, L] \subset \mathbb{R}$, $m(\Omega) = 1$, $L < 3/2$ (Koluntzakis e Łaba 2004)

Confutata per

- $n \geq 3$ (Tao 2004, Matolcsi 2005, e Koluntzakis e Matolcsi 2006)

La congettura di Fuglede per i canoni a mosaico

$0 \in A \subset \mathbb{N}$ finito. $A + [0,1]$ tassella $\mathbb{R} \Leftrightarrow A$ è un ritmo

Definizione

A è *spettrale in* $\mathbb{N} \Leftrightarrow \exists\, \Gamma \subset [0,1)$ tale che

1. $0 \in \Gamma$,
2. $|\, \Gamma \,| = |\, A \,|$,
3. $\gamma, \mu \in \Gamma$ distinti $\Rightarrow A\left(e^{2\pi i(\gamma-\mu)}\right) = 0$.

Teorema (Jorgensen e Pedersen, 1995)

$A + [0,1]$ *spettrale in* $\mathbb{R} \Leftrightarrow A$ *spettrale in* $\mathbb{N}$

Congettura di Fuglede per canoni a mosaico

A è un ritmo $\Leftrightarrow A$ è spettrale.

Il teorema di Łaba

$0 \in A \subset \mathbb{N}$ finito.

Teorema di Łaba (2007)

A soddisfa (T1) e (T2) $\Rightarrow$ *A è spettrale.*

Corollario (Łaba e Coven-Meyerowitz)

$$(T1) + (T2) \Rightarrow \text{Fuglede}$$

1. $\mid A \mid = p^\alpha q^\beta$ *e A è un ritmo* $\Rightarrow$ *A è spettrale* $\Rightarrow$ *Fuglede*
2. $A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *Hajós* $\Rightarrow$ *A e B spettrali* $\Rightarrow$ *Fuglede*

Punto della situazione

Risultati generali:

- ✓ A è un ritmo $\Rightarrow$ A verifica (T1) (Coven e Meyerowitz)
- ✓ A verifica (T1) e (T2) $\Rightarrow$ A è un ritmo (Coven e Meyerowitz)
- ✓ A verifica (T1) e (T2) $\Rightarrow$ A è spettrale (Łaba)

Casi particolari:

- ✓ $\mid A \mid = p^\alpha q^\beta \Rightarrow A$ soddisfa Fuglede
- ✓ $A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ di Hajós $\Rightarrow$ A e B soddisfano Fuglede

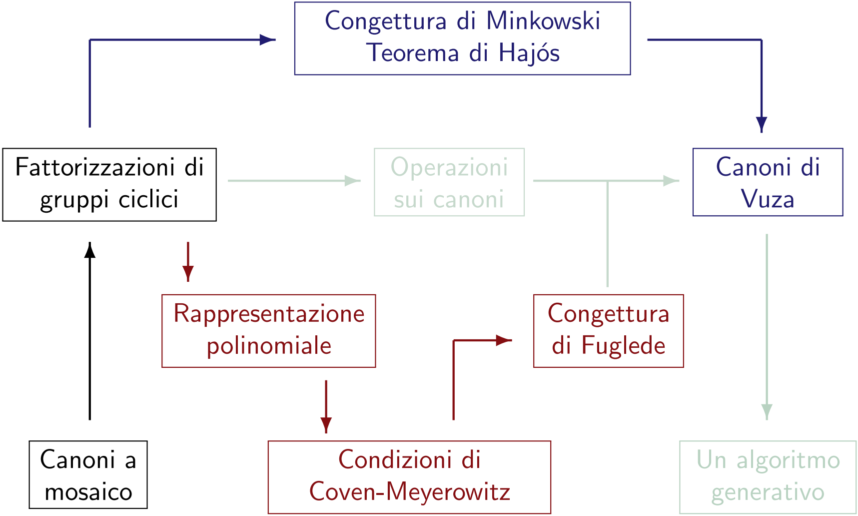
Problemi aperti:

(1) A è un ritmo $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ A verifica T2

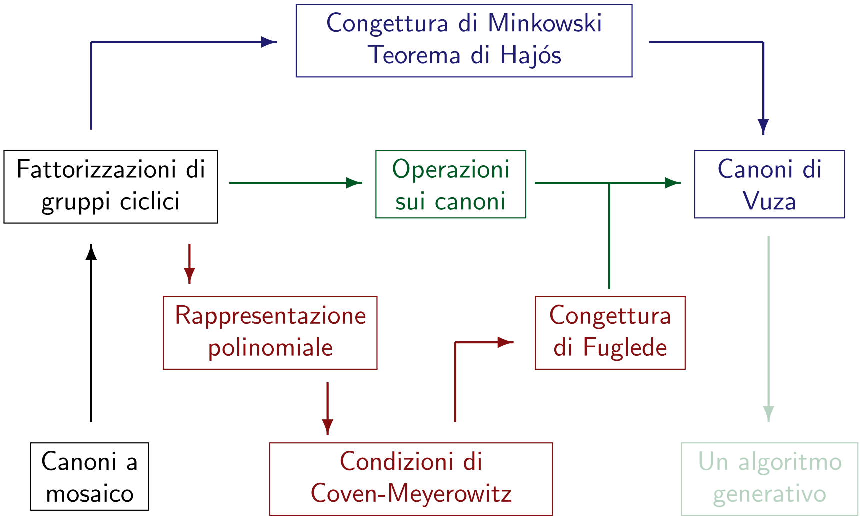
(2) A è spettrale $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ A verifica T2

(3) A è un ritmo $\stackrel{?}{\Leftrightarrow}$ A spettrale (Fuglede)

Il percorso


Congettura di Minkowski
Teorema di Hajós
Fattorizzazioni di gruppi ciclici
Operazioni sui canoni
Canoni di Vuza
Rappresentazione polinomiale
Congettura di Fuglede
Canoni a mosaico
Condizioni di Coven-Meyerowitz
Un algoritmo generativo

Il percorso


Congettura di Minkowski
Teorema di Hajós
Fattorizzazioni di gruppi ciclici
Operazioni sui canoni
Canoni di Vuza
Rappresentazione polinomiale
Congettura di Fuglede
Canoni a mosaico
Condizioni di Coven-Meyerowitz
Un algoritmo generativo

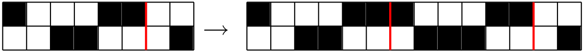
Dualità, concatenazione e collasso

Definizione

$A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

- $B \oplus A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:= *canone duale*
- $(A \oplus \{0, n, 2n, \ldots, (k-1)n\}) \oplus B = \mathbb{Z}/(kn)\mathbb{Z}$:= *k-concatenazione*

$$\{0,4,5\} \oplus \{0,2\} = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \rightarrow \{0,4,5,6,10,11\} \oplus \{0,2\} = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$$



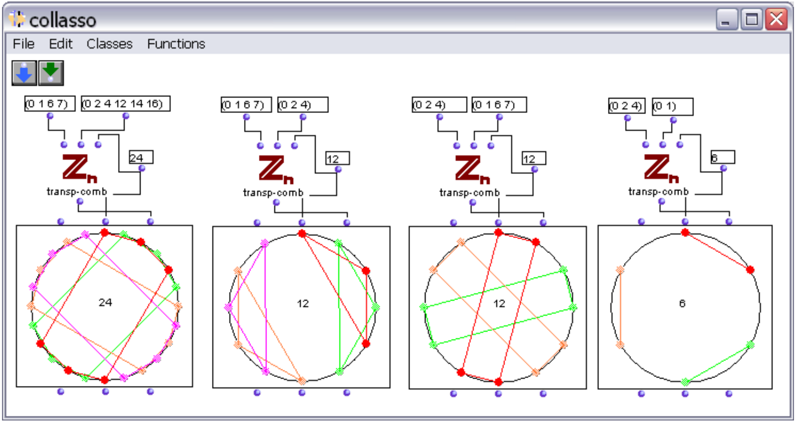
Definizione

C1 e C2 canoni a mosaico.

C1 *collassa* a C2 $\Leftrightarrow$ C1 si ottiene da C2 attraverso concatenazioni e dualità.

Esempio

diagrammi di Krenek con OpenMusic



$$\{0,2,4,12,14,16\} \oplus \{0,1,6,7\} = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \to \{0,1\} \oplus \{0,2,4\} = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

La condizione (T2) ed i canoni di Vuza

- La concatenazione conserva la condizione (T2)
- Ogni canone a mosaico collassa ad un canone di Vuza o al canone banale $\{0\} \oplus \{0\} = \{0\}$

(Amiot, 2004)

quindi

- Se un canone non soddisfa (T2) allora collassa ad un canone di Vuza che non soddisfa (T2)

Conclusione

Risultati generali:

- ✓ A è un ritmo $\Rightarrow$ A verifica (T1) (Coven e Meyerowitz)
- ✓ A verifica (T1) e (T2) $\Rightarrow$ A è un ritmo (Coven e Meyerowitz)
- ✓ A verifica (T1) e (T2) $\Rightarrow$ A è spettrale (Łaba)

Casi particolari:

- ✓ $\mid A \mid = p^\alpha q^\beta \Rightarrow A$ soddisfa Fuglede
- ✓ $A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ di Hajós $\Rightarrow$ A e B soddisfano Fuglede

Problemi aperti:

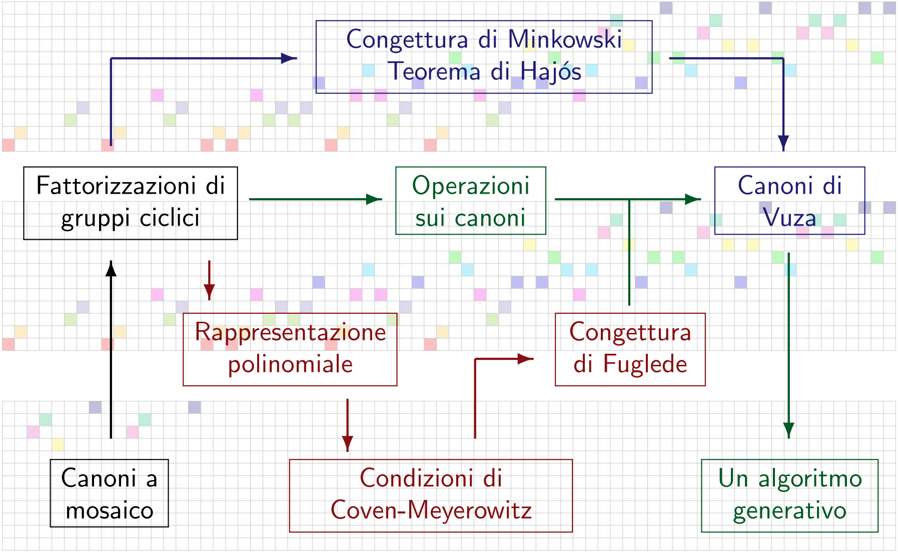
(1) A è un ritmo $\overset{?}{\Rightarrow}$ A verifica T2

(2) A è spettrale $\overset{?}{\Rightarrow}$ A verifica T2

(3) A è un ritmo $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ A spettrale (Fuglede)

$\longrightarrow$ Basta indagare i canoni di Vuza

Il percorso


Congettura di Minkowski
Teorema di Hajós
Fattorizzazioni di gruppi ciclici
Operazioni sui canoni
Canoni di Vuza
Rappresentazione polinomiale
Congettura di Fuglede
Canoni a mosaico
Condizioni di Coven-Meyerowitz
Un algoritmo generativo