Vers une arithmétique des rythmes ?

Hugues Zuber

Stage réalisé à l'IRCAM
sous la direction de Moreno Andreatta

Mai - Juillet 2005

École Normale Supérieure de Cachan Antenne de Bretagne
Master 1 de Mathématiques
Magistère MMMI
Université de Rennes 1

1 Introduction.

1.1 Présentation du problème.

Le canon est un procédé musical classique qui permet de créer un objet à la fois complexe, potentiellement inattendu, et essentiellement régulier et symétrique, de par sa construction. Ce procédé a été actualisé par certains compositeurs contemporains, et notamment, à l'origine, par Olivier Messiaen. La recherche d'objets musicaux rares que l'on pourrait utiliser comme matériaux précieux pour la construction d'œuvres musicales a mené, entre autres, à l'étude des canons rythmiques. Il s'agit d'une projection du problème des canons, car l'on ne se préoccupe plus de la mélodie ou des instruments, mais seulement du rythme. On prolonge cependant le problème, car l'on se demande si un rythme donné peut être chanté en canon de telle sorte qu'à chaque instant, une voix chante et une seule. Le rythme permet alors de "paver" le temps.
Le compositeur qui a donné un grand élan à cette recherche est Dan Tudor Vuza. Dans ses articles sur les canons rythmiques [6], publiés au début des années 1990, il applique aux rythmes un critère d'irréductibilité développé par Messiaen [1], et tout en spécifiant un cadre d'obtention de ces rythmes particuliers, donne un algorithme pour la construction d'une bonne partie d'entre eux. Depuis, un grand nombre de problèmes, conjectures et démarches ont vécu, péri et ressurgi, dans un travail qui réunit compositeurs, mathématiciens et informaticiens.

1.2 Le problème mathématique.

Il faut maintenant mathématiser le problème ; le formalisme utilisé est relativement intuitif.
On fixe un temps de base, afin de préciser une fois pour toutes le tempo. On modélise alors un rythme par une partie finie de $\mathbb{Z}$: un intervalle de longueur 1 correspond au temps de base choisi. Trouver les canons rythmiques de pavage revient ainsi à trouver les parties de $\mathbb{Z}$ qui pavent $\mathbb{Z}$ par translations, c'est à dire,

1. Je renvoie à la thèse de Moreno Andreatta [3] pour une analyse musicologique de ces méthodes, et au paragraphe 3.2.2 pour une définition de ce critère d'irréductibilité.

Définition 1 *Un canon rythmique est un couple* (R,S) *de parties de* $\mathbb{Z}$*, avec* R *finie, vérifiant :*

$$R \oplus S = \mathbb{Z},$$

où $R \oplus S = \{n \in \mathbb{Z},\ \exists (r,\ s) \in R \times S,\ n = r + s\}$*, avec* $\forall n \in R \oplus S,\ \exists\ !\ (r,\ s) \in R \times S,\ n = r + s$*.*

Tout canon rythmique est périodique au sens suivant :

Théorème 1 *Soit* $R \oplus S = \mathbb{Z}$ *un canon rythmique. Alors il existe* $k \in \mathbb{Z}$*,* $N \in \mathbb{N}$*, et des entiers* $0 = t_1 < t_2 < \ \ldots < t_N$*, tels que* $S = \{t_1,\ \ldots, t_N\} \oplus k\mathbb{Z}$*. On dit que* k *est une période du canon.*

Démonstration : il suffit essentiellement de remarquer que, R étant donné, il n'y a qu'un nombre fini de façons de boucher les trous de R par des translatés de R. En effet, considérons l'un de ces trous. On sait que R pave, donc ce trou est bouché par un translaté de R, autrement dit, l'un des onsets d'un translaté de R (on appelle onset un élément de R, par référence au rythme qu'il symbolise, où les onsets sont les instants où l'on entend quelque chose) se trouve à cette place. Mais R est fini, et le nombre de trous dans R est fini, donc le nombre de façons de remplir R est majoré par $(Card(R))^{\text{nombre de trous}}$. Il faut ensuite retrouver S à partir d'un échantillon, en le reconstruisant à l'aide du lemme suivant.

Lemme 2 *Soit* R *une partie finie de* $\mathbb{Z}$*. Soient* S *et* S' *deux parties de* $\mathbb{Z}$ *telles que* $R \oplus S = \mathbb{Z}$ *et* $R \oplus S' = \mathbb{Z}$*.*
On suppose qu'il existe une partie finie T *de* $S \cap S'$ *telle que* $R \oplus T$ *contienne un intervalle de* $\mathbb{Z}$ *de longueur supérieure ou égale au diamètre de* R*.*
Alors $S = S'$*.*

Démonstration du lemme : supposons $S \neq S'$. Quitte à remplacer S et S' par $-S$ et $-S'$, on peut supposer que $S_\triangle S'$ (la différence symétrique de S et S') contient un élément supérieur à $max(T)$. Soit alors I le plus grand intervalle de $R \oplus (S \cap S')$ qui contienne $R \oplus T$. I a un plus grand élément. Soit $b = max(I) + 1$. Quitte à translater R et à adapter toutes les autres translations, on peut supposer que $min(R) = 0$. b est couvert par un translaté de R selon S, mettons $R \oplus \{t\}$ avec $t \in S$. Alors, par choix de b, $t \notin S'$.

Cependant, si $t < b$, alors le premier onset de $R \oplus \{t\}$ est dans I, puisque T, donc I, est de longueur supérieure au diamètre de R. Ceci est impossible puisque les éléments de I sont déjà couverts par des translations de $S \cap S'$. Donc $t = b$. Mais on pourrait appliquer le même raisonnement à S' et voir que le t' qui couvre b est aussi égal à b. Alors $t = t' = b$, et $t \in S \cap S'$. Contradiction. Donc $S = S'$.

Fin de la démonstration du théorème : chaque translaté de R doit être rempli à l'aide des autres translatés. Comme il n'y a qu'un nombre fini de façons de remplir, et qu'il y a une infinité de translatés, l'une des façons de remplir apparaît une infinité de fois. Soit $T_1 \subset S$ l'une des apparitions de cette façon de remplir. Alors $R \oplus T_1$ contient un intervalle de $\mathbb{Z}$ de longueur supérieure au diamètre de R. Soit T_2 une autre occurrence de cette façon de remplir. Posons $t = min(T_2) - min(T_1)$. En appliquant le lemme à S, $S' = S + t$ et $T = T_2$, on obtient $S = S + t$. On a toujours $0 \in S$, et donc $S = (\{0,1, \ldots, t-1\} \cap S) \oplus t\mathbb{Z}$, ce qu'il fallait montrer.

Dans la suite, et parce que l'on peut toujours se ramener à ce cas par translation, R sera une partie finie de $\mathbb{N}$ qui contient 0, ce qui entraîne que 0 appartient toujours à S.

1.3 Exemples, manipulation de canons.

Voici quelques exemples de canons rythmiques. J'emprunte ici à Emmanuel Amiot [2] sa méthode pour visualiser les canons : sur l'exemple de la figure 1, une ligne représente une voix, une colonne représente un battement (un onset). On remarquera qu'il y a des trous sur les bords : ceci est dû au fait qu'il manque des translatés du rythme, en revanche dans la zone médiane, il ne manque rien.

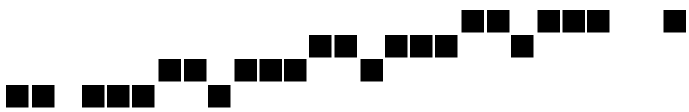

Fig. 1 – *À chaque instant, une voix chante et une seule.*

On peut créer de nouveaux canons rythmiques à partir de ceux déjà connus. Voici quelques exemples de lois de composition sur les rythmes.

- La concaténation en accord avec une période du canon (figure 2) consiste à répéter le rythme au bout d'une période.

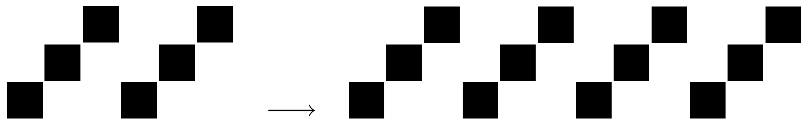

Fig. 2 – *Concaténation.*

- Le "n-bégaiement" (figure 3), proposé par Emmanuel Amiot, consiste à changer l'échelle de temps : un onset peut être entendu comme n onsets joués consécutivement et n fois plus vite, et de même pour les pauses.

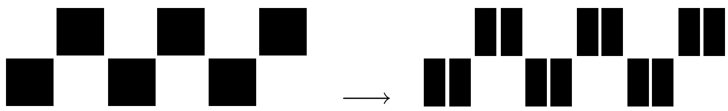

Fig. 3 – *2-bégaiement.*

- L'homothétie (figure 4) est une autre façon de changer l'échelle de temps. Chaque onset est remplacé par un onset n fois plus petit, en complétant par du silence.

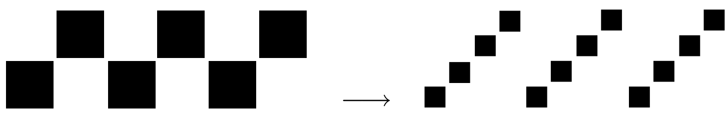

Fig. 4 – *Homothétie de rapport 2.*

- Enfin, une loi généralise les précédentes. Elle a été proposée par Frank Jedrzejewski [5]. Il s'agit d'un produit tensoriel sur les rythmes. Soient R_1 et R_2 deux rythmes. $R_1 \otimes R_2$ est construit de la façon suivante : si, au premier instant, R_1 joue, alors on joue R_2, puis on regarde le deuxième instant pour R_1, s'il joue, alors on joue R_2, sinon on marque une pause de la taille de R_2, et ainsi de suite, le long de R_1.

– Je proposerai au paragraphe 3.1 une loi qui intuitivement se situe entre la concaténation et le produit tensoriel.

1.4 Une façon de calculer avec les canons.

1.4.1 Le principe.

Emmanuel AMIOT a proposé une représentation polynomiale des canons. Voici la définition qu'il donne :

Définition 2 *Le polynôme associé à la partie finie R de $\mathbb{N}$ est*

$$R(X) = \sum_{i \in R} X^i.$$

Un tel polynôme est à coefficients dans $\{0,1\}$, et sera donc appelé polynôme 0-1.

La somme de polynômes 0-1 n'est pas forcément un polynôme 0-1 (et donc le produit non plus). Ceci posera problème par la suite, mais n'est que la traduction d'un problème rencontré sur les rythmes.
La somme de polynômes correspond à la superposition des rythmes, la multiplication par X^k à la translation du rythme de k onsets, et donc la multiplication des polynômes correspond à une superposition de translatés. La figure 5 donne un exemple.

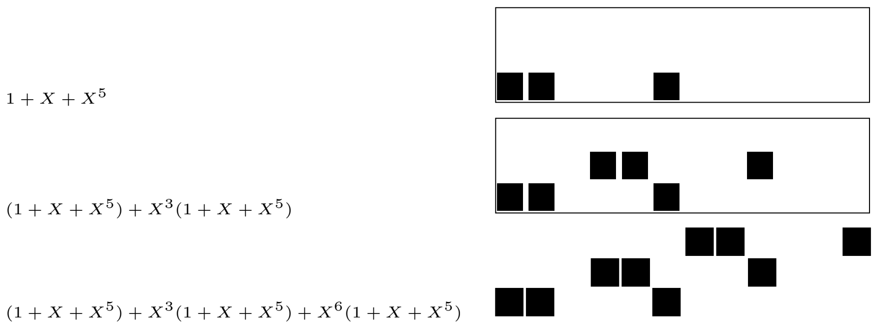

FIG. 5 – *Ou comment faire paver $R = \{0,1,5\}$, mais en termes polynomiaux.*

Les lois de composition sur les rythmes vues précédemment peuvent s'exprimer en termes polynomiaux.
On peut également traduire en termes polynomiaux la condition $R \oplus S = \mathbb{Z}$. On a vu que S s'écrivait sous la forme $B \oplus k\mathbb{Z}$, où B est une partie finie de $\mathbb{Z}$ de la forme $\{0,t_2,\ldots,t_N\}$. Un théorème de DeBruijn montre que la condition $R \oplus (B \oplus k\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ est équivalente à $R \oplus B = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. Alors on peut dire que R pave par translations si et seulement s'il existe un entier k et un polynôme 0-1 B tels que

$$R(X) \times B(X) = 1 + X + \ldots + X^{k-1} \text{ modulo } \left(X^k - 1\right).$$

1.4.2 Prolongement et application : faciliter l'énumération des canons à S régulier.

Nous proposons de manipuler non plus seulement des polynômes mais des séries entières à coefficients dans $\{0,1\}$. La condition $R \oplus (B \oplus k\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ s'écrit alors :

$$R(X) \times B(X) \times \frac{1}{1-X^k} + \tilde{R}(X) = \frac{1}{1-X},$$

où $\tilde{R}(X)$ est un polynôme 0-1 qui représente les trous de $\mathbb{N}$ qu'il reste à boucher, et qui existent parce que l'on a omis la moitié des translations : $B \oplus k(\mathbb{Z}_-)$. On peut même dire un peu plus en précisant que $\tilde{R}(0) = 0$, puisque la translation 0 est, elle, mentionnée dans B. Il existe donc $\hat{R}$ tel que $\tilde{R}(X) = X\hat{R}(X)$.

Les canons dont l'ensemble S associé est de la forme $k\mathbb{Z}$ (on dira alors : S régulier) jouent un rôle particulier, et ce pour plusieurs raisons :

- Tout d'abord on sait que S est de la forme $B \oplus k\mathbb{Z}$, donc le cas $B = \{0\}$ est naturellement remarquable.
- Rachel Hall et Paul Klingsberg, dans leur étude des rythmes assymétriques [4], trouvent un lien direct et inattendu entre ces rythmes et les canons à S régulier.
- Historiquement, le compositeur Olivier Messiaen, qui d'ailleurs a inventé le terme "canon rythmique", s'est servi de canons à S régulier dans plusieurs de ses œuvres.
- Dans l'approche des canons rythmiques que nous allons développer au paragraphe 3.1, où nous étudierons une espace de fonctions, les canons à S régulier correspondront aux fonctions définies sur $\mathbb{Z}$ tout entier.

Tâchons de caractériser les canons à S régulier à l'aide des séries entières 0-1. On a vu que $B = \{0\}$, ce qui se traduit par $B(X) = 1$. Donc il existe un entier k et un polynôme 0-1 $\hat{R}$ tels que

$$R(X)\frac{1}{1-X^k} + X\hat{R}(X) = \frac{1}{1-X}.$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\begin{array}{rcl} R(X) & = & 1 + X + \ \ldots + X^{k-1} + X(X^k - 1)\hat{R}(X) \\ R(X) & = & (1 + X + \ \ldots + X^{k-1})(1 + X(X-1)\hat{R}) \end{array}$$

Il reste à faire bouger $\hat{R}$ dans l'ensemble des polynômes 0-1 pour obtenir tous les rythmes qui pavent régulièrement. Hélas, ceci ne tient que si le résultat est effectivement un rythme, c'est à dire si le résultat est un polynôme 0-1.

Je présente maintenant une vision un peu différente du problème.

2 Tentative pour casser la symétrie du problème.

Jusqu'ici, le rôle joué par R et celui joué par B sont parfaitement symétriques : il suffit de voir écrite la condition de pavage, $R \oplus B = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, pour s'en convaincre. Ceci a ses avantages, mais je voudrais proposer un formalisme qui casse cette symétrie pour en retirer ses propres qualités : redonner à B, ou S, sa nature d'ensemble de translation pourrait permettre, dans une vision adéquate, d'induire structurellement l'aspect direct de la somme, et de résoudre ainsi, par construction même, une moitié du problème.
L'image réciproque par une fonction d'une partition est une partition. Plus précisément, si la partition doit s'effectuer par translations d'une même partie, il paraît raisonnable, déjà de mettre une structure de monoïde, au moins, sur les ensembles de départ et d'arrivée, puis d'utiliser pour fonction une application qui préserve les translations, par exemple un morphisme. Puisque l'on a du mal à paver $\mathbb{Z}$ par translations, on peut alors imaginer de déplacer le problème dans une espace plus facile à paver, ou plutôt pour lequel on connaît une plus grande variété de pavages simples. On pense alors à des pavages de $\mathbb{R}^2$ par des rectangles, des hexagones, et des réunions (pourquoi pas infinies) de rectangles ou d'hexagones.

On pourrait même envisager d'établir un critère de simplicité pour une partie d'un monoïde (de façon à pouvoir dire très facilement pour une partie simple si elle pave ou non par translations), et de construire une correspondance de Galois au dessus de ce monoïde, afin de trouver un espace dans lequel toute partie est simple, et donc de classer aisément les parties. Ceci permettrait de déplacer le problème du pavage sur un critère différent, donc avec des approches complètement différentes. J'ai tenté d'utiliser un critère de simplicité, basé sur une sorte de mesure d'entropie des rythmes. Il s'agit de compter le nombre de changements onset/silence, silence/onset lors de la lecture du rythme. L'étude de la compatibilité de ce critère avec des lois comme la concaténation ou le produit tensoriel a révélé une certaine cohérence, mais je n'ai pas trouvé de façon de construire un "revêtement" pertinent. Cependant le développement présenté dans les paragraphes suivants permet d'élargir le point de vue, en suggérant notamment d'autres critères de simplicité. Revenons-en aux images réciproques de pavages.
Un problème surgit, qui nuit à la simplicité du procédé de changement d'espace, sans pour autant le détruire complètement. L'image réciproque, même par un morphisme φ, du translaté d'une partie R n'est pas forcément un translaté de $\varphi^{-1}(R)$. Tout va bien si la valeur dont on translate est dans l'image de φ, ce qui n'est presque jamais le cas dans l'exemple $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Souvent l'image réciproque du translaté n'est pas vide. On obtient donc un pavage par "morceaux de tranlatés" dans le cas général, à moins de partir à la recherche de fonctions qui ne sont pas des morphismes, mais qui ont la propriété d'être compatibles aux translations, de la façon qui nous arrange, et au moins pour certaines classes de parties.
Tout d'abord, on dispose de toute une classe de telles fonctions, et ce quel que soit le critère de compatibilité aux pavages : les morphismes surjectifs se comportent très bien, justement parce que toute valeur de translation dans l'espace d'arrivée est dans l'image du morphisme. Dès lors toutes les réductions modulo n sur $\mathbb{Z}$ conviennent. La recherche de fonctions de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ compatibles aux pavages m'a mené à poser les critères suivants de compatibilité :

Définition 3 *Une fonction $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ est dite compatible aux pavages par translations si elle vérifie les deux conditions suivantes :*

1. *Pour toute partie finie R qui pave par translations selon un ensemble S, pour tout $t \in S$, $\varphi^{-1}(R + t)$ est un translaté de $\varphi^{-1}(R)$.*

2. *Pour toute partie finie R qui pave par translations, $\varphi^{-1}(R)$ pave par translations.*

Remarquons que la deuxième condition n'est pas toujours induite par la première. Elle l'est si φ est définie sur $\mathbb{Z}$ tout entier, ce qui n'est pas exigé dans le cas général. Je propose d'étudier un tel ensemble de fonctions sur $\mathbb{Z}$ dans le paragraphe suivant.

3 Un nouvel espace de travail.

3.1 Définition

Soit R un rythme qui pave par translations. Soit S un ensemble de translations correspondant. On fait un choix de période k pour S. Alors on associe à ce choix la fonction suivante, $\varphi_{R,k} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par :

$$\varphi_{R,k}^{-1}(0) = R, \quad \varphi_{R,k}^{-1}(1) = R + k, \quad \dots \quad , \forall i \in \mathbb{Z}, \varphi_{R,k}^{-1}(i) = R + ki.$$

Alors :

Proposition 3 *$\varphi_{R,k}$ est compatible aux pavages par translations.*

Démonstration : soit R' une partie finie de $\mathbb{Z}$ qui pave par translations. On pose $R' = \{a_1, \dots, a_n\}$. Alors par définition,

$$\varphi_{R,k}^{-1}(R') = \bigcup_{i=1}^{n}(ka_i + R),$$

et cette union est disjointe. Soit $t \in \mathbb{Z}$. On a de même

$$\begin{aligned}
\varphi_{R,k}^{-1}(R' + t) &= \bigcup_{i=1}^{n}(k(a_i + t) + R) \\
\varphi_{R,k}^{-1}(R' + t) &= \bigcup_{i=1}^{n}((ka_i + kt) + R) \\
\varphi_{R,k}^{-1}(R' + t) &= kt + \bigcup_{i=1}^{n}(ka_i + R).
\end{aligned}$$

Donc $\varphi_{R,k}^{-1}(R'+t)$ est un translaté de $\varphi_{R,k}^{-1}(R')$, ce qui montre le premier point.
Montrons le deuxième. Comme R' pave par translations, mettons avec S', les $\varphi_{R,k}^{-1}(R'+t)$, où $t \in S'$, permettent de retrouver tous les translatés de R dont la translation est un multiple de k. Comme il s'agit en réalité de paver S (puisque intuitivement $\mathbb{Z}$ est ramené à l'échelle de R), que $S = B \oplus k\mathbb{Z}$, et que l'on a atteint $k\mathbb{Z}$, il suffit d'ajouter les translations de B. Finalement, $\varphi_{R,k}^{-1}(R')$ pave $\mathbb{Z}$ par translations, ce qui achève la démonstration.

La figure 6 représente $\varphi_{\{0,3\},2}$ et $\varphi_{\{0,3\},6}$.

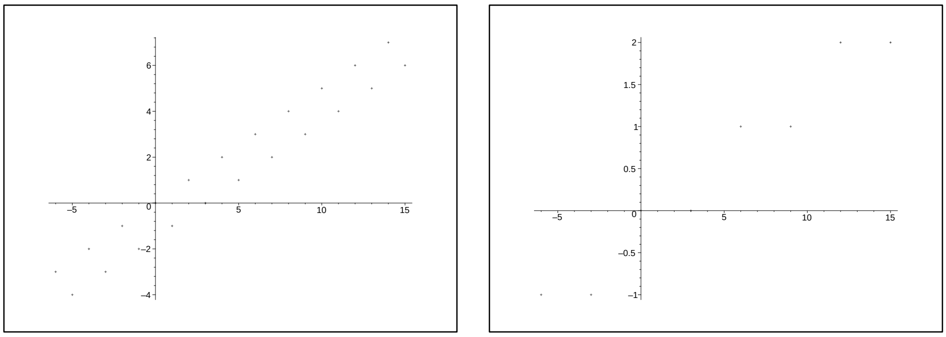

FIG. 6 – *Il y a plusieurs fonctions pour un même rythme, suivant le choix de période.*

Notons E l'ensemble des $\varphi_{r,k}$. Soient φ_1 et φ_2 deux éléments de E. La composée de l'une par l'autre n'est pas forcément définie, mais l'expression $\varphi_1^{-1}\left(\varphi_2^{-1}(0)\right)$, elle, l'est, ce qui donne envie de "forcer" la composition. Notons $r_3 = \varphi_1^{-1}\left(\varphi_2^{-1}(0)\right)$. C'est un rythme qui pave par translations. Si l'on appelle (r_1,k_1) et (r_2,k_2) les caractéristiques de φ_1 et φ_2, alors le produit de φ_1 et φ_2 est l'élément de E $\varphi_2\varphi_1 = \varphi_{r_3,k_1k_2}$, qui correspond à la composée quand celle-ci est définie.

Proposition 4 *E muni de ce produit est un monoïde.*

Démonstration : l'élément neutre est l'identité. Pour vérifier l'associativité, il suffit de savoir retrouver les éléments caractéristiques d'une fonction : le rythme associé est l'image réciproque de $\{0\}$, et la période d'un produit est le produit des périodes.

3.2 Intérêt.

Fondamentalement, la loi présentée ici exprime le fait pour un rythme produit de deux autres d'avoir des régularités internes, plus précisément, d'être la répétition (avec entrelacement éventuel) de l'un suivant le shéma de l'autre. Cette question, attaquée de manière générale, présente un difficulté : quelle échelle minimale faut il choisir pour la répétition, car un rythme répété trop vite disparaît dans sa propre abondance. La loi de E propose un critère, en fixant une limite adaptée à chaque rythme : la période du canon associé.

Naturellement, puisque l'on a la possibilité de détecter des répétitions internes dans un rythme, on cherche ceux qui n'en ont pas, autrement dit les irréductibles pour le produit. Ces canons ont donc une certaine valeur, mais encore faudrait-il qu'ils ne soient pas trop courants, ce qui est testé dans le premier paragraphe suivant.
Il est aussi naturel de situer ces irréductibles par rapport à un critère d'irréductibilité différent et célèbre, celui de Vuza, ce qui est fait dans le deuxième paragraphe.

3.2.1 Canons remarquables.

Je cherche à décomposer les éléments de E en produits d'irréductibles pour ce produit (un élément irréductible de E est un élément qui n'est pas produit de deux autres éléments de E), et donc à identifier ces irréductibles. Une première classe de fonctions est donnée par les rythmes dont le S est un $k\mathbb{Z}$ (tous ne sont pas irréductibles). Une deuxième classe est donnée par les rythmes qui sont une homothétie d'un $\{0, \ldots, n\}$ (tous ne sont pas irréductibles non plus). Je cherche des irréductibles qui ne soient pas simples, c'est à dire qui ne soient pas dans l'une des deux classes précédentes. Les algorithmes présentés dans la section 4 permettent de tracer les graphes des figures 7 et 8, qui présentent l'évolution du nombre de rythmes qui pavent et du nombre de rythmes, parmi les précédents, qui sont irréductibles, en fonction de la taille des rythmes.

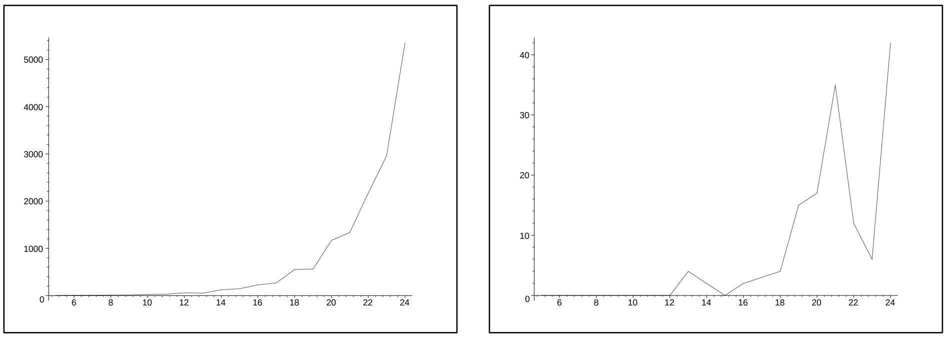

FIG. 7 – *À gauche, le nombre de rythmes qui pavent, à droite, le nombre d'irréductibles non simples. Les graphes suivants (figure 8) permettent de se rendre compte de l'échelle.*

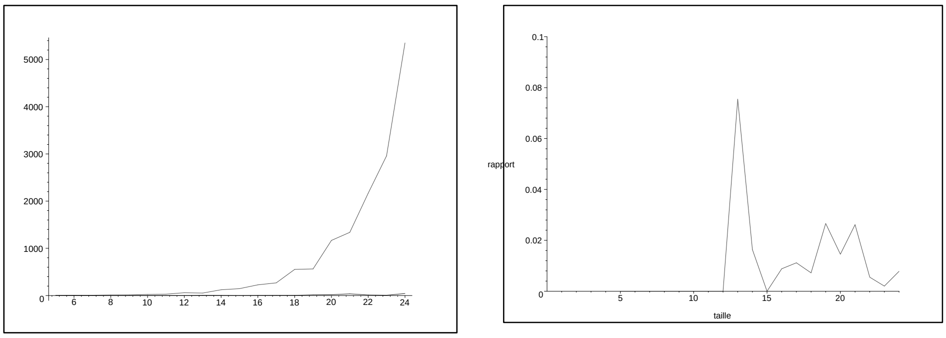

FIG. 8 – *À gauche, une superposition des graphes de la figure 7, à droite, l'évolution du rapport* $\frac{\textit{irréductibles non simples}}{\textit{rythmes qui pavent}}$ *; remarquer qu'on ne dépasse pas 0,08.*

Ces graphes montrent que les irréductibles non simples sont à la fois rares et répartis sur à peu près toutes les tailles.

3.2.2 Situation des canons de VUZA.

Il est temps de situer cette notion d'irréductibilité par rapport à un critère connu : celui des canons de VUZA.

Soit R un rythme qui pave avec la période k. Souvent, il existe un entier $m < k$ tel que

$$R + m = R \text{ modulo } k,$$

ce qui signifiera ici que $R + m$ et R ont même image dans la réduction des entiers modulo k : $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. Ceci s'exprime encore par le fait que $R + m + k\mathbb{Z} = R + k\mathbb{Z}$.
Alors un tel rythme est réductible au sens de VUZA. Quand il ne l'est pas, il est encore possible que son ensemble de translations S le soit, autrement dit, avec les notations habituelles :

$$S = B \oplus k\mathbb{Z} \qquad \text{et} \qquad \exists\, m < k, \quad B + m = B \text{ modulo } k.$$

On pose alors :

Définition 4 *Un canon (R,S) est un canon de* VUZA *si R et S sont irréductibles au sens de* VUZA.

La théorie des groupes de HAJÓS permet de savoir pour quelles périodes il existe des canons de VUZA. Celles-ci sont rares : les premières valeurs de périodes sont 72, 108, 120, 144. On peut maintenant tenter de comparer les deux critères d'irréductibilité, mais :

Proposition 5 *Les deux critères ne sont pas comparables : certains canons de* VUZA *sont irréductibles dans E, d'autres ne le sont pas.*

Cela se teste avec les algorithmes de la section 4, les canons de VUZA de période 72 sont tous irréductibles, mais certains canons de VUZA de période 144 (comme $\{0,2,4,30,32,36,46,66,68,82,110,112\}$) sont réductibles. La proposition suivante explique que l'on ait essayé directement la période 144 :

Proposition 6 *Soit R un rythme qui pave par translations. On suppose que R est irréductible au sens de* VUZA, *et que R est réductible au sens de E,* *avec $R = R_1 \times R_2$ (les périodes, à choisir, sont sous-entendues). Alors R_1 est irréductible au sens de* VUZA.

Démonstration : $R = R_1 \times R_2$ signifie, dans $\mathbb{Z}$, que $R = R_2 \oplus k_2 R_1$, où k_2 est une période de R_2. Si R_1 n'est pas irréductible au sens de VUZA, alors il existe $m < k_1$ (k_1 est la période de R_1) tel que

$$R_1 + m = R_1 \text{ modulo } k_1.$$

Il reste à mettre cette égalité à l'échelle de R_2 et de sa période, ou, intuitivement, à multiplier les termes de cette égalité par R_2 à droite. On obtient :

$$R + k_2 m = R \text{ modulo } k_1 k_2.$$

Donc R n'est pas irréductible au sens de VUZA. Contradiction.

Comme la période d'un produit est le produit des périodes, on a une condition nécessaire de réductibilité d'un canon de VUZA:

Proposition 7 *Soit (R,S) un canon de* VUZA *de période k. Si (R,S) est réductible dans E, alors l'un des diviseurs de k est une période pour laquelle il existe des canons de* VUZA.
En particulier, les canons de VUZA *de périodes 72, 108 ou 120 sont irréductibles dans E, car ces périodes sont minimales en le sens précédent.*

4 Algorithmes et intégration dans OpenMusic.

L'un des buts de ce travail est de mettre à disposition des compositeurs, via le logiciel de l'IRCAM, OpenMusic, des outils liés aux canons rythmiques. J'ai écrit des algorithmes permettant de dire si un rythme donné pave ou non par translations (et dans le cas positif avec quel ensemble S), si un rythme qui pave est simple, irréductible ou non, en précisant dans le cas négatif de quels rythmes il est le produit (j'utilise le produit décrit dans la section précédente). Enfin une dernier algorithme réunit les deux précédents pour donner la liste de tous les rythmes de taille donnée qui pavent, avec toutes les précisions associées. Je donne dans ce paragraphe une description du fonctionnement de ces algorithmes.

4.1 Ce rythme pave-t-il ?

4.1.1 Principe général.

Soit R un rythme. S'il est composé d'une suite d'onsets consécutifs, alors il pave. Dans le cas contraire, il contient des trous. On choisit l'un de ces trous ; à l'usage, mieux vaut le choisir isolé, c'est à dire dans une zone à forte densité d'onsets. On suppose que le rythme pave. Alors ce trou est recouvert pas un onset d'un translaté du rythme. Il reste à savoir lesquels ne sont pas impossibles. Dès lors : si aucun ne convient, le rythme ne pave pas, dans le cas contraire, le rythme pave, la difficulté étant de savoir s'arrêter quand le rythme pave effectivement. Avant de donner un critère pour s'arrêter, le principe consiste à tester récursivement la possibilité pour un onset de boucher un trou. On essaie de le poser sur le trou, et on regarde ce que cela induit entre le reste du rythme et son translaté. S'il n'y a pas de chevauchement, on superpose ces deux rythmes, on trouve un nouveau trou (pour cette superposition), et on recommence, sinon, s'il y a chevauchement, c'est que cet onset ne peut pas convenir, donc on teste un autre onset. Si l'on épuise, à un certain niveau de la récursivité, tous les onsets, c'est que le niveau précédent de récursivité avait choisi un mauvais onset, alors on recommence à partir du niveau précédent avec un autre onset ; si l'on est forcé de revenir au tout premier niveau d'itération, et que, là, l'on épuise tous les onsets, c'est que le rythme ne pave pas.

4.1.2 Comment finir la récurrence ?

Pour savoir s'arrêter dans le cas d'un rythme qui pave, il faut d'abord savoir localiser le choix des trous : on commence par remplir tous les trous dans la zone du rythme initial, puis on fait un test de périodicité du canon, test que je vais décrire après. Si ce test est négatif, c'est que l'on n'a pas encore un vrai canon rythmique. On cherche alors le premier trou qui vient dans la lecture du rythme total (égal à la superposition de tous les translatés calculés jusqu'alors et du rythme de base). On essaie de remplir ce trou, en suivant la même méthode. Si l'on y arrive, on teste la périodicité, et ainsi de suite.

Le test de périodicité repose sur le théorème montré dans l'introduction. Si R pave, il le fait de façon périodique. Comme j'augmente la zone de remplissage des trous de façon minimale tant que le test est négatif, je finirai forcément par intercepter une période, c'est à dire une façon de remplir telle que le début puisse se raccorder à la fin : typiquement, le rythme total est constitué d'une zone centrale où tout un intervalle est rempli, puis de chaque coté un trou limite cet intervalle ; ce trou doit, si l'on a atteint la périodicité, être rempli par l'onset situé à l'extrême opposé (à translation près). Un exemple est donné sur la figure 9.

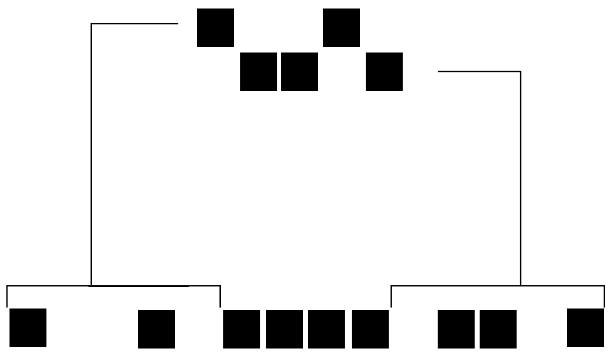

FIG. 9 – *Un test de périodicité positif.*

4.2 Ce rythme est-il irréductible ?

On cherche à écrire le rythme R comme un produit $R_2 \times R_1$, où les périodes de R_1 et R_2 sont sous-entendues. En fait, c'est celle de R_1 qui importe vraiment : elle décrit la distance minimale de répétition de R_1, je l'appellerai k. Une première étape est de se donner un k. Je n'ai pas trouvé mieux que de tester toutes les valeurs allant de 2 à la moitié de la taille de R. On peut affiner si l'on cherche un produit d'applications, et non seulement de fonctions, parce que l'on sait alors que les translatés de R n'attaquent leur rôle que sur des multiples de k, ce qui n'est pas vrai dans le cas général.
Une fois que l'on s'est fixé une valeur de k à tenter, la démarche consiste à dire que l'on voit sur R les k premiers instants de R_1, puisque la translation minimale de R_1 est de k. On a donc une partie de R_1. Pour voir si la translation k est retenue, il suffit de regarder si R a un onset à l'instant correspondant, c'est à dire le numéro $k + 1$. Si c'est le cas, on sait que l'on a à cet endroit une nouvelle copie de R_1, et on peut donc compléter notre connaissance de R_1 : les onsets de R qui ne sont pas encore attribués, et qui

sont compris entre les instants 0 et $2k$ appartiennent aussi à R_1. Au passage, si l'on constate qu'il doit y avoir un translaté de R_1 mais que R_1 et son translaté se chevauchent, c'est que la valeur de k en cours est mauvaise. S'il n'y a pas de translaté, on complète de la même manière notre connaissance de R_1. On recommence en regardant l'instant $2k+1$, et on continue le parcours de R.
Une fois arrivé au bout, si l'on arrive au bout, il y a plusieurs choses à vérifier. D'abord, si la liste des attaques (c'est à dire des instants où les translatés entrent en jeu) est réduite à la translation initiale 0, alors la valeur de k est mauvaise. Ensuite, il faut vérifier que la superposition de R_1 et des translatés nécessaires relevés fait bien le rythme R. Enfin, l'ensemble des translations de R_1 utilisées doit être une partie d'un ensemble S_1 associé à R_1. Pour vérifier cela, on utilise une fonction du programme précédent : on cherche à remplir R (puisque R est égal à une superposition de translatés de R_1) avec R_1 (avec test de périodicité). Si l'on y arrive, c'est que R_1 divise R, et R_2 est donné en regardant la liste des attaques (et en prenant en compte le facteur multiplicatif, égal à k). Si finalement on épuise la liste des valeurs possibles de k, c'est que R est irréductible.

4.3 La liste des rythmes qui pavent.

Il faut évidemment préciser une taille. J'appelle taille le diamètre du rythme évalué. Il s'agit donc de faire défiler les rythmes possibles de taille donnée (là, j'écris les rythmes comme une succession de 0 et 1 : 0 pour un silence, 1 pour un onset, puis j'ajoute 1 en binaire jusqu'à atteindre un rythme trop gros, j'encadre chaque nombre binaire de deux 1 pour obtenir un rythme de taille voulue ; par exemple, si l'on me demande la taille 5, j'énumère 10001, 10011, 10101, 10111, etc...), et de tester, d'abord s'il pave ou non, puis, s'il pave, de regarder sa liste de translatés. Si dans une période les écarts entre translatés sont tous les mêmes, le rythme est jugé simple, sinon je teste l'irréductibilité.
Ce dernier algorithme est forcément limité à des tailles raisonnables (inférieures à 40, voire 30), puisque la seule énumération des rythmes est exponentielle : il y a 2^{n-2} rythmes de taille n.

5 Problèmes ouverts induits par cette approche.

- L'idée de départ a été progressivement perdue de vue. Mais en pratique nous avons trouvé un espace qui joue le rôle de revêtement de l'espace des rythmes qui pavent : celui des fonctions compatibles aux pavages. C'est le critère de simplicité qui manque. Les deux questions suivantes proposent deux points de vue pour essayer de mieux comprendre cet espace, et donc de voir en quoi il est plus simple que le précédent.

- L'espace des fonctions pourrait ne pas être directement une sorte de revêtement de l'espace des rythmes, mais plutôt le fruit d'une extension de $\mathbb{Z}$ lui-même. Imaginons que l'espace des rythmes joue un rôle similaire vis à vis de $\mathbb{Z}$ que $\mathbb{Z}[X]$, alors, selon des critères d'extension à déterminer, l'espace des fonctions serait un $\mathbb{Z}[i][X]$. Il faut retrouver le $\mathbb{Z}[i]$.

- La loi posée sur l'espace de fonctions suggère fortement une multiplication : on répète un rythme selon les occurrences d'un autre, ou encore, on réécrit un rythme, mais à l'échelle d'un autre. J'ai donc cherché si cette multiplication n'avait pas une addition correspondante, afin d'obtenir une structure solide permettant de faire de l'arithmétique. L'un des essais infructueux, pour avoir une chance d'être valable, demande de savoir répondre à la question suivante.

- Étant donné un rythme (qui pave ou non), est-il toujours possible de lui adjoindre une quantité donnée d'onsets supplémentaires pour qu'il pave (ou pour qu'il pave encore s'il pavait déjà) ?

- J'ai donné un espace de fonctions qui étaient compatibles aux pavages par translations, mais une question tout aussi pressante de certains compositeurs concerne ce que l'on appelle les pavages par augmentation. Au lieu de ne s'autoriser que les translations pour déplacer le rythme, on se donne droit également de lui faire subir des homothéties (éventuellement de rapport négatif). Par exemple, le théorème du tricorde de Wild affirme que tout rythme composé de trois onsets pave par translations et rétrogradation (lecture en sens inverse). Y a t-il des fonctions autres que l'identité de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ (ou, éventuellement, à valeurs dans d'autres espaces, conformément au principe général de cet article) telles que l'image réciproque d'une partie qui pave par augmentation soit une partie qui pave par augmentation, et/ou telle que l'image réciproque d'un "augmenté" d'une partie soit un "augmenté" de l'image réciproque ?

Remerciements.

Je remercie Moreno Andreatta pour son attention, sa disponibilité, et ses remarques constructives qui m'ont souvent permis de retrouver une ligne directrice dans mon travail.
Merci également à Carlos Agon pour son aide dans la correction des programmes en Common Lisp destinés à OpenMusic.
Je tiens à remercier Emmanuel Amiot et Franck Jedrzejewski pour être restés un dimanche après-midi lors d'une séance "bonus" de la dernière journée du séminaire MaMuX 2005 pour discuter de mon approche des canons rythmiques, ainsi que Moreno Andreatta pour avoir organisé cette entrevue et y avoir assisté.
Merci enfin à Jizhuang Shih pour sa relecture du rapport et ses conseils pour la précision de certains points ambigus.

Références

[1] Amiot, E., *Why Rhythmic Canons are Interesting*, in : E. Lluis-Puebla, G. Mazzola et T. Noll (eds), *Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory*, EpOs, 190-209, Universität Osnabrück, 2004.

[2] Amiot, E., *Rhythmic canons and Galois theory*, Colloquium on Mathematical Music theory, H. Fripertinger, L. Reich (eds), Grazer Math. Ber. ISSN 1016-7692, Bericht Nr. 347 (2005), 1-25.

[3] Andreatta, M., *Méthodes algébriques en musique et musicologie du XX^{ème} siècle : aspects théoriques, analytiques et compositionnels*, thèse, École des Hautes Études en Sciences Sociales, Paris, 2003.

[4] Hall, R. et Klingsberg, P., *Asymmetric Rhythms and Tiling Canons*, Department of Mathematics and Computer Science, Saint Joseph's University, 5600 City Avenue, Philadelphia, PA 19131, mai 2005.

[5] Jedrzejewski, F., *A simple way to compute Vuza canons*, séminaire MaMuX, janvier 2004, http://www.ircam.fr/equipes/repmus/mamux.

[6] Vuza, D.T., *Supplementary Sets and Regular Complementary Unending Canons*, en quatre parties, dans : *Canons. Persp of New Music*, nos 29(2) pp. 22-49 ; 30(1), pp. 184-207 ; 30(2), pp. 102-125 ; 31(1), pp 270-305, 1991-1992.