Séminaire MaMuX
Mathématiques, Musiques et Relations avec d'autres disciplines

Cyclicité des tempéraments, Groupes de symétrie et Théorie des noeuds

Franck Jedrzejewski

franck@arthaud.saclay.cea.fr

1 - Positions - Tempéraments
2 - Systèmes acoustiques
3 - Groupes de symétrie
4 - Entrelacs, noeuds et tresses
5 - Conclusions et perspectives

Tempéraments et Systèmes acoustiques

Ensemble de fréquences choisies dans un intervalle donné

$$\left(\frac{3}{2}\right)^q = 2^p$$

12 quintes = 7 octaves : n'a pas de solution rationnelle

$$\text{Comma pythagoricien} = \frac{\text{12 quintes}}{\text{7 octaves}} = \frac{(3/2)^{12}}{2^7} = \frac{531441}{524288} = 23 \text{ cents}$$

$$\text{Comma syntonique} = \frac{\text{1 tierce pythagoricienne}}{\text{1 tierce naturelle}} = \frac{81/64}{5/4} = \frac{81}{80}$$

= 22 cents

Valeurs en cents = 1200 * ln (f) / ln (2)

Hiérarchie des tempéraments

- Systèmes tempérés et micro-tempérés

Systèmes à n degrés : $X = a^n$ $a = 2^{1/n}$

- Systèmes pythagoriciens

Répétition de la quinte naturelle (3/2) - Répartition du comma pythagoricien

- Systèmes mésotoniques

Quinte diminuée d'une fraction de Cs - Répartition du comma syntonique

- Tempéraments historiques

Différentes partitions

- Systèmes harmoniques

Fondés sur la suite des harmoniques naturels

- Systèmes non-octaviants

Serge Cordier (TEQJ) - Wendy Carlos - Bohlen-Pierce, etc...

- Systèmes "justes"

Harry Partch - Ben Johnston - Ervin Wilson, etc...

Représentations des tempéraments

Langages formels :

Chaque système acoustique est représenté par un mot composé de la concaténation des lettres représentant la valeur de ces intervalles

Exemple : Pour les systèmes mésotoniques
X=(abbab)(ab)(abbab)
a et b deux intervalles à déterminer par deux équations
(X=2 = octave et abbab = tierce Maj =5/4)

Facilite la formalisation informatique,
la reconnaissance des propriétés de symétrie
les problèmes liés à la transposition

X=(abbab)(ab)(abbab)

Présentation de groupes :

Chaque système acoustique est le repliement d'un spectre de fréquences déterminé par des générateurs et des relations caractérisant les plis

Exemple : Pour les systèmes mésotoniques

$G = \langle a, c^{12n} = d \rangle$ c = 81/80   d = comma pythagoricien

Le groupe est composé de a, a*a, a*a*a, etc... Modulo les relations

Représentation par des tresses :

Voir plus loin ...

Représentations graphiques des tempéraments

Problème de la distance harmonique

- Affinité de Costère

	do	do#	ré	ré#	mi	fa	fa#	sol	sol#	la	la#	si
do	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
mi	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1
sol	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
—	2	1	1	1	1	2	1	2	1	1	0	2

- Concordance

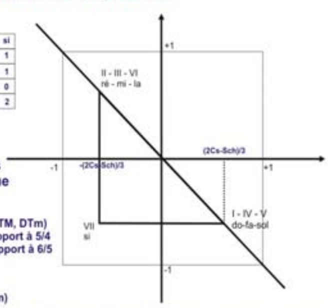
Choisir une distribution
Sommer sur les harmoniques
Tracer la surface ainsi obtenue

- Ecarts relatifs

Placer les degrés dans un diagramme (DTM, DTm)
DTM = écart des Tierces Majeures par rapport à 5/4
DTm = écart des Tierces mineures par rapport à 6/5

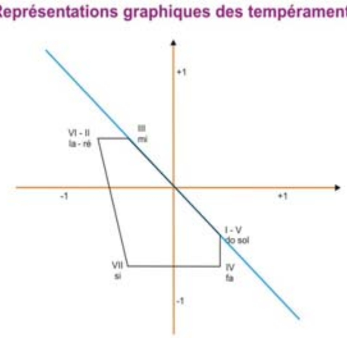
Exemple :

I (do, mi, sol) --> (x1, y1) = (DTM, Dtm)
II (ré, fa, la) --> (x2, y2)



Représentation de Do Majeur en tempérament égal

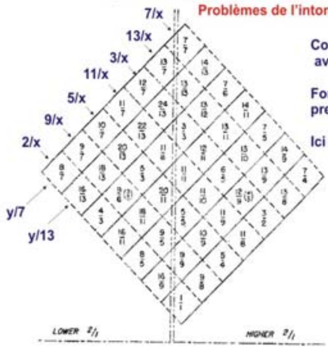
Représentations graphiques des tempéraments



Représentation de Do Majeur en Werckmeister V

Systèmes de Harry Partch : Tonality Diamond

Problèmes de l'intonation juste



Construire un système acoustique avec des fractions simples

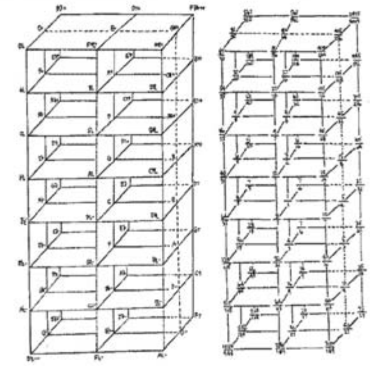
Fondé sur les nombres impairs ou premiers 3, 5, 7, 11, 13, etc.

Ici sur :

2, 3, 5, 7, 9, 11, 13

Réseaux de Ben Johnston

Problèmes de l'intonation juste

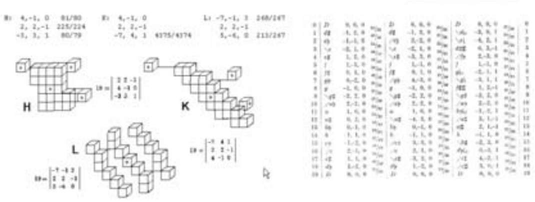


Genres de Euler-Huygens-Fokker

Pavages de l'espace - Blocs de périodicité

Fondé sur des pavages simples
Exemple (3,5,7) : quintes, tierces, septièmes

Echelles à 31 degrés



Facture instrumentale

1892 - Piano achromatique, Behrens-Senegalden
1906 - Projet de clarinette à 1/4 de ton de R. Stein
1915 - Sphérophone de Jorg Mager (1880-1939)
1917 - Harmonium bichromatique de W. Moellendorff réalisé par Straube.
1920 - A. Haba se rend à Berlin rencontre Busoni.
1921 - Piano pneumatique de Pleyel (Wyschnegradsky)
1922 - I. Wyschnegradsky se rend en Allemagne (août 1922 - avril 1923) rencontre Haba, contacte la maison Grotian-Steinweg pour construire un piano en 1/4 de ton. Echec.
1924 - La maison Förster livre un piano à 1/4 de ton à Aloïs Haba.
1924 - Haba commande trois clarinettes à 1/4 de ton à la maison Kohlert installée à Graslitz en Bohême Haba compose les opus 24, 35 et 55.
1926 - M. Sandberg fait réaliser par Straube un harmonium à quarts de ton (5 octaves - 24 touches par oct.)
1927 - I. Wyschnegradsky commande un piano à 1/4 de ton à Förster qui arrive à Paris en avril 1929.
1929 - Harmonium en 1/12 et 1/16 réalisé par Straube pour Sandberg (étendue d'une quarte)
1939 - Förster construit pour Haba un harmonium à 1/6 de ton

Haba commande deux trompettes à 1/4 de ton à la maison Friedrich A. Heckel à Dresde (Op. 56)
Haba commande une guitare à quarts de ton (Op.51, 53, 54 et 63)

Instruments du Science Museum de Londres

Voice Harmonium de Colin Brown (1875)

Orgue enharmonique de T. Thompson (1876)

Enharmonic harmonium de Bosanquet (1876)

Claviers de Danielou

Orgue de Fokker

Instruments de Harry Partch

Instruments de Harry Partch

Instruments de Ivan Wyschnegradsky

Harpe de Julian Carrillo

Commas de Hellegouarch

Problème de la classification des systèmes acoustiques

Choisir des nombres premiers : exemple {2, 3}
Etudier les approximations de l'unité de $G = < 2, 3 >$

= tous les rapports de la forme $2^p . 3^q$
On choisit p et q de sorte que le rapport soit dans [1, 2]

a (différent de 1) est un comma de Hellegouarch du groupe libre G si

Pour tout b de $G \setminus \{1\}$, $|\log(b)| < |\log(a)|$ entraîne $h(b) > h(a)$

où $h(x/y) = \sup (x,y)$

- Pour $G =< x, y>$, les commas sont les réduites du développement en fractions continues de $\log(y)/\log(x)$
- Le comma est la meilleure approximation de l'unité
- Le groupe quotient G/{a} par un comma est une gamme naturelle (?)

Exemple : <2,3>/{Comma pythagore} = gamme de pythagore à 12 degrés.

Problème : Caractériser les commas de G quelconque

Exemple : Commas de <2,3,5> :

3/2, 4/3, 5/4, 6/5, 9/8, 10/9, 16/15, 24/24, 81/80, 2048/2025, 15625/1552, etc.

Systèmes cycliques (1)

Problème de la classification des systèmes acoustiques

On se fixe un nombre w (e.g. w=3)
On considère la suite :

$$\ldots, \frac{1}{w^3}, \frac{1}{w^2}, \frac{1}{w}, 1, w, w^2, w^3, \ldots$$

Pour la valeur w = 3, on a

. . ., 1/27, 1/9, 1/3, 1, 3, 9, 27, . . .

Les valeurs sont recadrées dans [1, 2] :

. . ., 32/27, 16/9, 4/3, 1, 3/2, 9/8, 27/16, . . .

Puis réordonnées par ordre croissant

Pour chaque n (= nombre de sons) , on obtient un système acoustique différent

Ces systèmes s'emboitent les uns dans les autrescomme des poupées russes

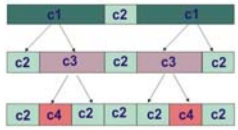
Le plus petit écart intervallique de chaque échelle est un comma

Ces commas contiennent les commas de Hellegouarch

Systèmes cycliques (2)

Cas des échelles pythagoriciennes : w = 3

- Pour {1/3, 1, 3} on a {C(1), F (4/3), G (3/2)}
  L3 = c1 c2 c1
avec c0 = 3/2, c1 = 4/3 et c2 = c0/c1 = 9/8
- Pour {1/9, 1/3, 1, 3, 9 } on a
  L5 = c2 c3 c2 c3 c2
avec c3= c1/c2 = 32/27
- Pour k = 3, n = 2k+1 = 5,
  L7 = c2 c4 c2 c2 c2 c4 c2
avec c4= c3/c2 = 256/243



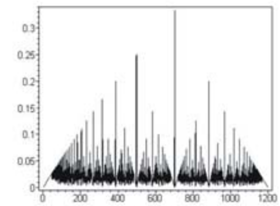
Echelles pythagoriciennes			
3	2 c1	1 c2	c2 = c0/c1 = 9/8 = 204 cents
5	3 c2	2 c3	c3 = c1/c2 = 32/27 = 294 cents
7	5 c2	2 c4	c4 = c3/c2 = 256/243 = 90 cents
12	7 c4	5 c5	c5 = c2/c4 = 2187/2048 = 114 cents
17	12 c4	5 c6	c6 = c5/c4 = $3^{12}/2^{19}$ = 23 cents
29	17 c6	12 c7	c7 = c4/c6 = $2^{27}/3^{17}$ = 67 cents
41	29 c6	12 c8	c8 = c7/c6 = $2^{46}/3^{29}$ = 43 cents
53	41 c6	12 c9	c9 = c8/c6 = $2^{65}/3^{41}$ = 2 cents
65	53 c9	12 c10	c10 = c6/c9 = $3^{53}/2^{84}$ = 3.6 cents

Rapports superpartiels

Les rapports superpartiels (p+1)/p sont des commas de Hellegouarch

Les microintervalles sont approchés par des rapports superpartiels :

degrés	rapport	cents
10	15/14	120
12	17/16	105
17	25/24	71
18	26/25	68 (1/3 ton)
19	28/27	63
24	35/34	50 (1/4 ton)
31	45/44	39
36	52/51	33 (1/6 ton)
53	77/76	23 (Holder)
54	79/78	22 (1/9 ton)
60	87/86	20 (1/10 ton)
66	95/94	18 (1/11 ton)
72	104/103	17 (1/12 ton)
96	138/137	13 (1/16 ton)



Tracé de 1/n en fonction de la valeur en cents de (n+1)/n pour les valeurs superpartielles approchant 2^(x/1200)

Les premiers rapports sont les intervalles naturels
2/1, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5, 7/6, 8/7, 9/8, etc.

Groupes de symétries d'un système acoustique

Soit T un système acoustique (= ensemble de fréquences)

On décompose T sur une base de nombres premiers

On place les points de T dans l'espace R^d

$$(a,\ b,\ c) \longleftrightarrow 2^a.\ 3^b.\ 5^c$$

On cherche les symétries

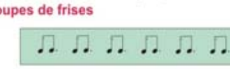
Le groupe de symétrie de la maille cristalline est le groupe de symétrie du tempérament

Groupes de frises (1)

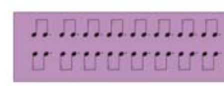
Un groupe de frise est un sous-groupe discret du plan euclidien dont le sous-groupe des translations est indéfiniment cyclique

Il y a exactement sept groupes de frises

G11 = < t >
engendré par la translation t

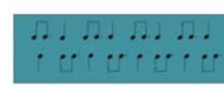


G1m = < t, r | r^2 = 1, t ^r = t >
engendré par la translation t et la réflexion r



Gm1 = < t, r | r^2 = 1, t ^r = t^(-1) >
engendré par la translation t et la réflexion r

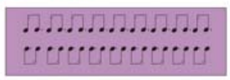
G1g = < t, r | r^2 = t, t ^r = t >
engendré par la translation t de vecteur 2 unité et la symétrie glissante



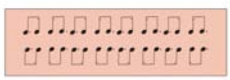
Groupes de frises (2)

Il y a exactement sept groupes de frises

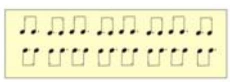
G12 = < t, s, r | s^2 = 1, t ^s = t^(-1) >



Gmm = < t, s, r | s^2 = 1, t ^s = t^(-1),
r^2 = 1, t^r = t, (sr)^2 = 1 >



Gmg = < t, s, r | s^2 = 1, t ^s = t^(-1)
r^2 = t, t^r = t, (sr)^2 = 1 >



Groupes cristallographiques

Un système cristallin est un groupe de transformations qui laissent le réseau invariant.

Dans le plan n = 2

Il y a exactement :
- 4 systèmes cristallins (Oblique, rectangle, carré, hexagonal)
- 5 réseaux de Bravais
- 7 groupes de frises (de symétrie)
- 13 sous groupes finis
- 17 groupes cristallographiques

Dans l'espace n = 3

Il y a exactement :
- 7 systèmes cristallins
- 14 réseaux de Bravais
- 32 groupes de symétrie
- 73 sous groupes finis (classes arithmétiques)
- 230 groupes cristallographiques

Tempéraments de Bravais (1)

Groupes de Bravais = Système cristallin + Position des atomes

Systèmes cristallins = Triclinique, monoclinique, orthorombique, tetragonal, trigonal, hexagonal et cubique

Ajout des atomes = sur les sommets (P), centré sur le corps (I), sur chaque face (A, B ou C), centré sur toutes les faces (F), spécialement centré (R)

Monoclinique P
Monoclinique B
Orthorhombique P
Orthorhombique C
Orthorhombique I
Orthorhombique F
Tetragonal P
Tetragonal I

Hexagonal P
Trigonal R
Cubique P
Cubique I
Cubique F

Tempéraments de Bravais (2)

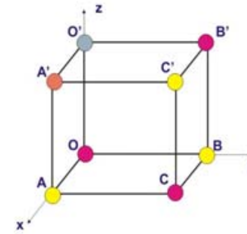
Groupes de Bravais = Système cristallin + Position des atomes

(a,b,c) ----> 3^a. 5^b. 7 ^c

+ recadrage selon 2^p

Cubique P

O = (0,0,0) --- > 1
A = (1,0,0) --- > 3/2 — 702 cents
B = (0,1,0) --- > 5/4 — 386 cents
C = (1,1,0) --- > 15/8 — 1088 cents
O' = (0,0,1) --- > 7/4 — 969 cents
A' = (1,0,1) --- > 21/16 — 471 cents
B' = (0,1,1) --- > 35/32 — 155 cents
C' = (1,1,1) --- > 105/64 — 857 cents



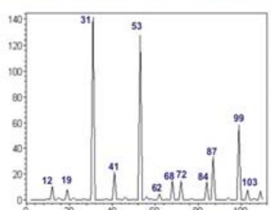
Suites et Tempéraments de Farey

Enveloppe supérieure de l'intonation juste

Suite de Farey = tous les rapports p/q avec p et q < N

Définition récursive : Partir de F1 = {0/1, 1/1}
et ajouter la médiane de chaque couple (p/q, x/y)
(p+x)/(q+y)
F2 = {0/1, 1/2, 1/1}
F3 = {0/1, 1/3, 1/2, 2/3, 1/1}

Tempérament de Farey = Suite de Farey + 1



F8 = {1, 5/4, 4/3, 7/5, 3/2, 8/5, 5/3, 7/4, 2}

```
> Nn:=640:
> for i from 2 to Nn do
>   s:=1200/i;
>   for j from 1 to cardY do
>      rj:=evalf(1200*ln(Y[j][1]/Y[j][2])/ln(2));
>      aj:=round(rj/s);
>      p[i,j]:= 2*abs(rj-aj*s)/s;
>      od:
> R[i]:=1:
> for j from 1 to cardY do R[i]:=R[i]*(-ln(p[i,j])); od:
> od:
> dat:=[seq( [i,R[i]], i=2..110)]:
> pointplot(dat, style=line, axes=boxed);
```

Représentation de F8 - Fonction de Hall

Catégorisations - Schémas topologiques

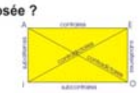
Triangle
(Odgen-Richards,
Groupe Mu, Pierce ...)

Solides platoniciens

Arbres
(Arbre élémental de Lulle)

Roues et échelles
(Raymond Lulle)

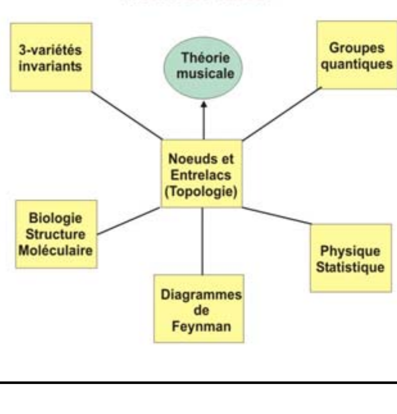
1 - Formes simples (Topologie)
2 - La structure est-elle donnée ou posée ?



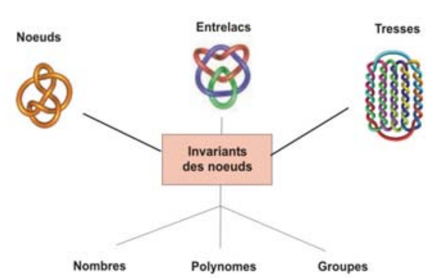
Carré aristotélicien
(Carré sémiotique Greimas)

Théorie des noeuds : il existe des objets qui ne peuvent pas être catégorisés en forme simple

Théorie des noeuds



Invariants des noeuds



Nouvelles topologies des structures musicales

Diagrammes de cordes

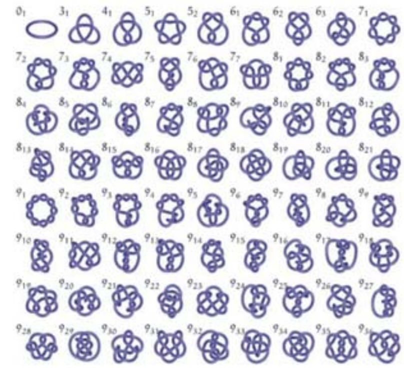
Construire un diagramme de cordes (à n segments)
à partir d'un noeud ayant n points doubles

Noeud singulier

Mots de Gauss
1 2 3 4 5 6 4 1 2 5 6 3

Diagramme de cordes
(Algèbre)

Noeuds Premiers



Classification des noeuds dodécaphoniques

D_1 X = a^6
Mot de Gauss 112233445566
Vecteur de structure 600000
Permutation
(0 1) (2 3) (4 5) (6 7) (8 9) (10 11)

B.A. Zimmermann, Die Soldaten Acte I, intro (ActeIII, sc. 5)

D_{349} X = $afd^{-1}c^2a$
Mot de Gauss 112345662453
Vecteur de structure 200121
Permutation
(0 1) (2 8) (3 11) (4 9) (5 10) (6 7)

Karel Goeyvaerts, Sonate pour deux pianos

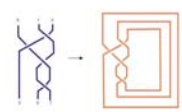
D_{358} X = $ae^{-1}c^{-1}ea$
Mot de Gauss 112345665432
Vecteur de structure 202020
Permutation
(0 1) (2 11) (3 10) (4 9) (5 8) (6 7)

A. Webern, Symphonie de Chambre op. 21
K. Stockhausen, Klavierstück IX

D_{554} X = f^6
Mot de Gauss 123456123456
Vecteur de structure 000006
Permutation
(0 6) (1 7) (2 8) (3 9) (4 10) (5 11)

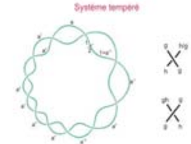
B.A. Zimmermann, Interludes

Tresses et tempéraments

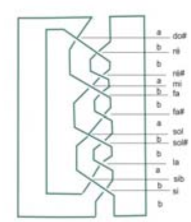


Fermeture de la tresse

Système tempéré



Tempérament de Marpurg H



$$X = (ab^2)^4$$

$$a = \frac{8}{9}2^{1/4} = 96 \ cents$$

$$b = \frac{3}{4}\sqrt{2} = 102 \ cents$$

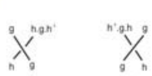
$\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2$

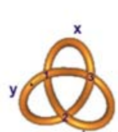
Groupe d'un noeud

Le groupe d'un entrelacs L est le groupe fondamental de la variété complémentaire S³\L

$$\boxed{GL = \Pi_1(S^3 \setminus L)}$$

Présentation de Wirtinger





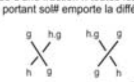
Croisement 1 : $x^{-1}.y.x$
Croisement 2 : $x = y^{-1}.x^{-1}.y.x.y$
Croisement 3 : $y = (x^{-1}.y.x)^{-1}.y^{-1}.x^{-1}.y.x.y.x^{-1}.y.x$
$y = x^{-1}.y^{-1}.x.y.x$
$G = < x, y \ ; \ x. y. x. y^{-1}.x^{-1}.y^{-1} = 1 >$
Ce qui équivaut à
$G = < g, h \mid g^2 = h^3 >$
en posant g = yxy et h = xy
$h^*h^*h = (xy)(xy)(xy) = xyx\ (y^{-1}.y).yxy$
$= xyxy^{-1}.(x^{-1}.x).\ yyxy$
$= xyxy^{-1}.\ x^{-1}.\ (y^{-1}.y).x).\ yyxy$
$= yxyyxy = g^*g$

Exemple : Tempéraments mésotoniques

Tempérament mésotonique au nième de comma

$$Cs = \frac{1 \text{ tierce pythagoricienne}}{1 \text{ tierce naturelle}} = \frac{3^4}{2^4.5} = \frac{81}{80} = \alpha$$

On diminue d'une fraction n toutes les quintes -nCs
La quinte portant sol# emporte la différence

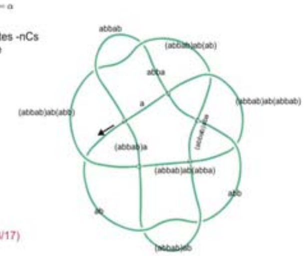


$$X = (abbab)ab(abbab)$$

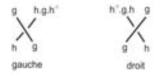
$$a = \frac{3^7}{2^{11}}\alpha^{-7n} \qquad b = \frac{2^8}{3^5}\alpha^{5n}$$

Tempérament anacratique de Romieu (n=3/17)

$$\frac{\Delta Q_M}{\Delta T_M} = \frac{nCs}{(4n-1)Cs} = \frac{-3}{5}$$



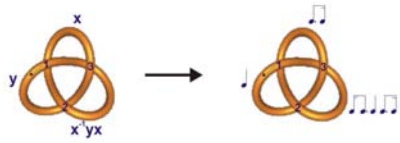
Application des noeuds à des structures rythmiques



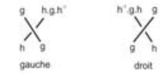
- Définir les lois de croisements
- Définir l'inverse
- Chiffrer le noeud
- Appliquer au groupe du noeud

L'inverse renverse le rythme :

x = ♫ ⟶ x^{-1} = ♫ y = ♩ ⟶ y^{-1} = ♩



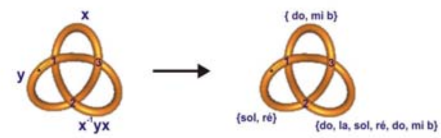
Cas des hauteurs



- Définir les lois de croisements
- Définir l'inverse
- Chiffrer le noeud
- Appliquer au groupe du noeud

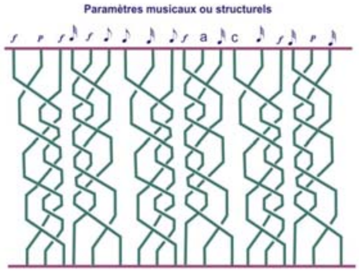
L'inverse renverse les sons :

x = { do, mi b} ⟶ x^{-1} = {do, la} y = {sol, ré} ⟶ y^{-1} = {sol, do}



Planification selon des tresses

Paramètres musicaux ou structurels



Différentes sorties selon les lois de croisement

Conclusions et Perspectives

1 - La classification des tempéraments ou systèmes acoustiques est un problème mathématique difficile, qui est lié à la topologie de la droite réelle.

2 - Les groupes de symétrie des systèmes acoustiques sont des éléments invariants de ces systèmes qui aident à la classification et offrent déjà une cartographie importante.

3 - La classification des noeuds et des diagrammes de cordes permet de topographier les séries dodécaphoniques et (peut être) les systèmes acoustiques, par le biais des invariants des structures nodales.

4 - La théorie des noeuds peut aussi s'employer comme aide à la composition musicale ou à l'analyse musicale.