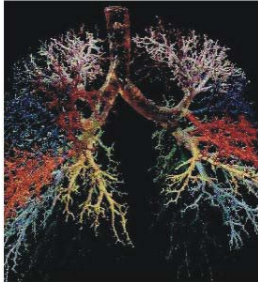


**Séminaire MaMuX**  
**Mathématiques, Musiques et Relations avec d'autres disciplines**

**Outils probabilistes pour l'analyse et  
la composition musicale**

Franck Jedrzejewski

franck@arthaud.saclay.cea.fr



- 1 - Méthodes classiques
- 2 - Transition de phase et Thermodynamique
- 3 - Probabilités non-commutatives
- 4 - EDS et méthodes particulières
- 5 - Conclusions et perspectives

**Généalogie des probabilités**

**Premières approches probabilistes : théorie des jeux**

Jérôme Cardan, Liber de Ludi alea, 1663  
Fra Luca Paccioli, Summa de arithmetica  
Galileo Galilei, Considérations sur le jeu de dés, 1718  
Correspondance Pascal <---> Pierre Fermat  
Christian Huygens De ratiociniis in ludeo aleae, 1657  
Jacques Bernoulli, Ars conjectandini (Loi faible des grands nombres)  
Abraham de Moivre, Doctrine of chances, 1718  
Pierre Simon de Laplace, Théorie analytique des probabilités, 1812



Henri Lebesgue

**L'axiomatisation de Kolmogorov**

Théorie de la  
mesure



Théorie des  
probabilités

**Calcul stochastique**

Modélisation  
du hasard



Interprétation  
probabiliste



Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov

## Lois de probabilités

Mesure positive de masse totale 1

### - Lois discrètes

(Loi binomiale, Polya, Poisson, Géométrique, Hypergéométrique, etc.)

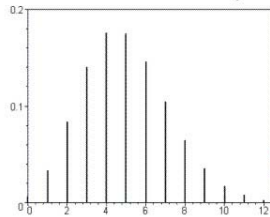
La probabilité est caractérisée par un ensemble de nombres dont la somme vaut 1

### - Lois continues

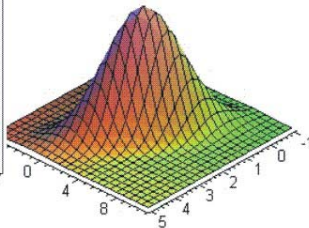
(Lois uniforme, Cauchy, Gaussienne, Gamma, Beta, Fisher, Pareto, Weibull, etc.)

La probabilité est caractérisée par une fonction appelée densité de probabilité dont l'intégrale vaut 1

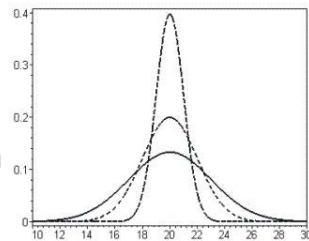
- **Moyenne**  $\mathbb{E}X = \int X d\mathbb{P} = \int x f(x) dx$  - **Variance**  $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \sigma^2$



Loi de Poisson



Loi de Gauss 2D

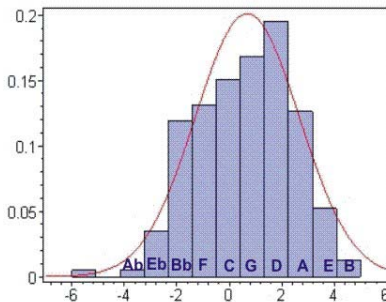


Loi de Gauss

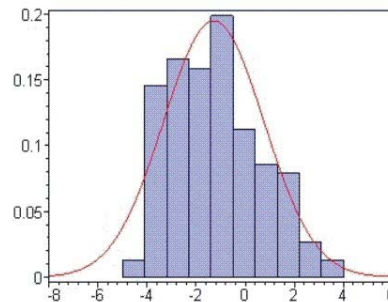
## Histogrammes

Techniques statistiques - Tests d'hypothèses

Exemple : Tonalité des 555 Sonates de Domenico Scarlatti



Tonalités majeures



Tonalités mineures

Calcul de la moyenne 0.9 (entre SolM et Ré M) et de la variance 4.76 (écart type = 2.2)

Conclusions : Emploi rare des tonalités ayant beaucoup de dièses ou de bémols  
Emploi plus rare des tonalités mineures avec dièses qu'avec bémols

## Histogrammes

### Exemple : Compositions pour piano et orchestre

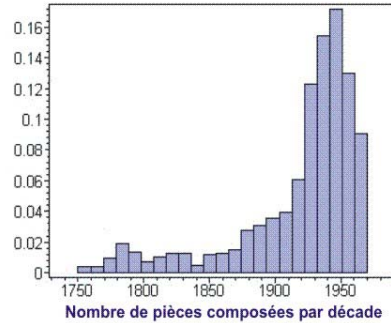
#### Oeuvres renommées

1828 : Chopin, Fantaisie  
 1829 : Chopin, C2  
 1841 : R. Schuman, C.  
 1852 : F. Liszt, Fantaisie hongroise  
 1857 : F. Liszt, C2  
 1868 : Saint Saëns, C2  
 1875 : Tchaïkovski, C1  
 1881 : Tchaïkovski, C2  
 1887 : G. Pierné, C  
 1886 : Saint Saëns, Carnaval  
 1896 : (ed) Chaminade, C  
 1897 : A. Scriabine, C  
 1908 : Liapunov, Rhapsodie sur des thèmes ukrainiens  
 1909 : Liapunov, C2  
 1915 : Falla, Nuits dans les jardins d'Espagne

#### Oeuvres contemporaines

1931 : J. Cras, C	1962 : G. Hugon, C
1950 : H. W. Henze, C1	1963 : A. Tisné, C3
1955 : M. Tippett, C.	1973 : L. Berio, C (2 pianos)
1958 : A. Tisné, C1	1973 : H. W. Henze, Tristan
1960 : A. Schnittke	1980 : G. Ligeti, C
1961 : A. Tisné, C2	1980 : M. Lévinas, C2

#### Corpus de 1200 oeuvres



#### Conclusions

Comment caractériser le climax du genre ?  
 La période "chef d'oeuvre" 1870-1900  
 précède un regain d'intérêt pour le genre ?

## Entropie et information

Nombreuses définitions : Clausius, Shannon, Boltzmann, Rényi, Voiculescu, Stormer, etc.

Pour une variable aléatoire de densité  $f(x)$   $S = -k \int f(x) \log f(x) dx$

Pour une variable aléatoire discrète  $p_1, p_2, \dots$   $S = -k \sum_{i=1}^n p_i \log(p_i)$

$S(p_1, \dots, p_n)$  est max ssi  $p_1 = \dots = p_n = 1/n$

Pour une partition  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$   
 sur un espace de probabilité

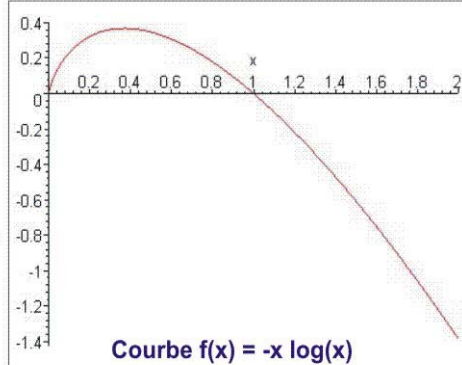
$$S(P) = -k \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \log \mu(A_i)$$

L'entropie topologique

$$h_{top} = \sup_P S(P)$$

### Second Principe de thermodynamique

S est maximale à l'équilibre thermodynamique  
 La production d'entropie  $dS/dt$  est positive  
 L'entropie ne peut que croître



Courbe  $f(x) = -x \log(x)$

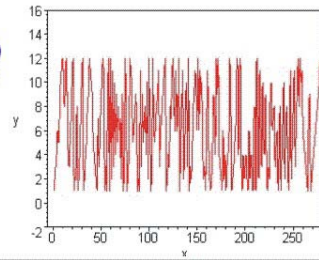


## Processus stochastiques

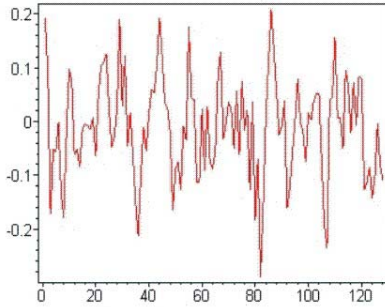
### Exemple : Olivier Messiaen Mode de valeurs et d'intensité

- (1) Répartition d'un paramètre musical  
(Exemple : Notes codées 1 à 12 dans la première voix)
- (2) Construire la fonction de corrélation du processus

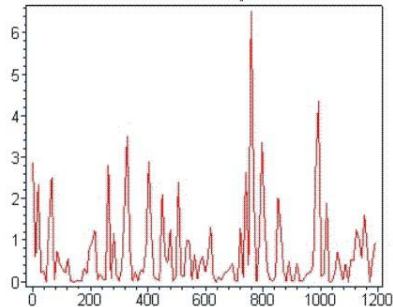
$$C_x(t) = \frac{\sum_{\tau=0}^T (X(\tau) - \mathbb{E}X)(X(t+\tau) - \mathbb{E}X)}{\sum_{\tau=0}^T (X(\tau) - \mathbb{E}X)^2}$$



- (3) Calculer la densité de puissance par FFT



Fonction de corrélation



Transformée de Fourier Rapide (FFT)

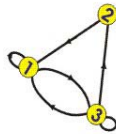
## Chaînes et Processus de Markov

Ne dépend que du dernier instant (pas de toute l'histoire)

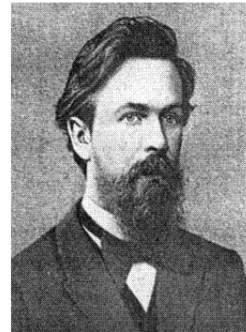
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = k \mid X_n = x_n)$$

### Matrice de transition

$P_{i,j}$  = probabilité de l'état  $j$  sachant que le processus vient de l'état  $i$



$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$



Sous certaines conditions, il existe une mesure invariante

$$\forall y \in E, \quad \sum_{x \in E} \lambda(x) P(x, y) = \lambda(y)$$

$$\frac{\sum_{k=0}^n f(X_k)}{\sum_{k=0}^n g(X_k)} \rightarrow \frac{\int f d\lambda}{\int g d\lambda}$$

L'entropie d'une chaîne de Markov sur un espace d'état discret

$$S = - \sum_{i,j \geq 1} \lambda_i P_{ij} \log P_{ij}$$

## Analyse markovienne

### Exemple : Anton Webern, Mélodie Opus 17/1

L'espace des 12 sons est assimilé à {1, 2, 3, ..., 12}

Calcul de la matrice de transition  $P_{i,j}$

= Probabilité d'obtenir une note  $j$  sachant que la note précédente était une note  $i$

$Q$  = Matrice de transition théorique des (au plus) 48 formes sérielles

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{17} & \frac{7}{34} & \frac{3}{34} & 0 & \frac{1}{17} & \frac{1}{17} & \frac{1}{17} & \frac{3}{34} & \frac{1}{34} & \frac{2}{17} & \frac{2}{17} \\ \frac{3}{28} & 0 & \frac{2}{27} & \frac{1}{14} & 0 & \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{1}{28} & \frac{3}{28} & \frac{3}{28} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{28} & \frac{1}{13} & \frac{2}{13} & \frac{5}{26} & \frac{1}{26} & \frac{1}{26} & \frac{1}{13} & \frac{3}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{2}{27} & \frac{2}{27} & \frac{1}{9} & 0 & \frac{5}{27} & \frac{1}{27} & 0 & \frac{1}{27} & \frac{4}{27} & \frac{5}{27} & \frac{2}{27} & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 25 & 25 & 25 & 25 & 0 & 25 & 25 & 25 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ \frac{1}{28} & 0 & \frac{1}{26} & \frac{3}{26} & \frac{2}{13} & 0 & \frac{5}{26} & \frac{4}{13} & \frac{1}{26} & 0 & \frac{1}{26} & \frac{1}{13} \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{7}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{10} & \frac{1}{30} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{6}{30} & \frac{1}{10} & \frac{1}{30} & 0 \\ \frac{3}{29} & \frac{2}{29} & \frac{3}{29} & \frac{3}{29} & \frac{5}{29} & \frac{2}{29} & \frac{1}{29} & \frac{2}{29} & \frac{6}{29} & 0 & \frac{2}{29} & 0 \\ \frac{5}{33} & \frac{4}{33} & \frac{5}{33} & \frac{5}{33} & \frac{5}{33} & \frac{2}{33} & \frac{1}{33} & \frac{2}{33} & 0 & \frac{2}{33} & \frac{4}{33} & 0 \\ \frac{1}{25} & \frac{2}{25} & \frac{1}{25} & \frac{1}{25} & \frac{1}{25} & \frac{6}{25} & \frac{2}{25} & \frac{1}{25} & \frac{3}{25} & \frac{3}{25} & 0 & \frac{4}{25} \\ 0 & \frac{1}{13} & \frac{1}{13} & \frac{1}{13} & 0 & \frac{5}{26} & \frac{7}{26} & \frac{1}{13} & 0 & 0 & \frac{3}{13} & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{24} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{7}{24} \\ \frac{7}{24} & 0 & \frac{7}{24} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{7}{24} & 0 & \frac{7}{24} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & 0 & \frac{7}{24} & 0 & \frac{7}{24} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{7}{24} & 0 & \frac{7}{24} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{7}{24} & 0 & \frac{7}{24} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{7}{24} & 0 & \frac{7}{24} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 \\ \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{7}{24} & 0 & \frac{7}{24} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{7}{24} & 0 & \frac{7}{24} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{7}{24} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{7}{24} & 0 \\ \frac{7}{24} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{7}{24} & 0 \end{pmatrix}$$

Topographie de l'espace sériel : 2-norme(P-Q) = 0.6485

2-norme = sup des valeurs propres de A. Transpose(A)

Cartographie des oeuvres sérielles

## Musiques markoviennes

### Exemple : Iannis Xenakis, Analogique B

Associe des matrices de transitions à des groupes préalablement constitués

Construction de trames pour

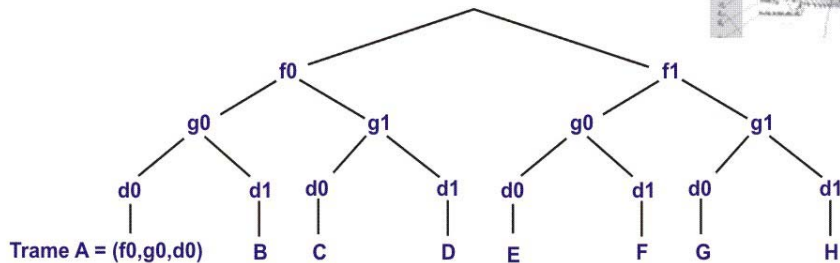
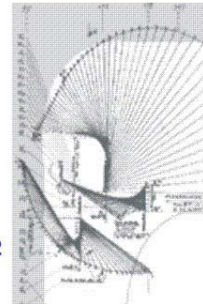
- Deux groupes de plages de fréquences (F)
- Deux groupes de plages d'intensité (G)
- Deux groupes de plages de densités (D)

Chacune de ces trois variables (X et Y) évolue

selon un protocole ayant deux matrices de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

L'entropie des matrices est peu différente :  $H(P)=0.707$  et  $H(Q) = 0.722$



## Modèles thermodynamiques

### Exemple : Modèle d'Ising - Interaction entre proches voisins

Les objets sont placés sur un réseau et interagissent entre proches voisins  $S = +1$  ou  $-1$

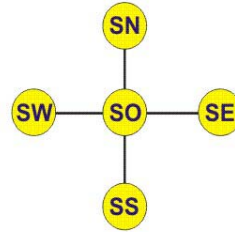
Initialisation :  $S = -1$  partout.

L'interaction entre  $S_i$  et  $S_j$  est modélisée par  $S_i \cdot S_j$

En chaque site  $(i,j)$ , l'énergie est :

$$E(ij) = -R (SN + SW + SS + SE) \cdot SO$$

$$\Delta E(ij) = E'(ij) - E(ij)$$



Les probabilités de transition de la chaîne de Markov

= proba de transition de  $SO$  à  $-SO$  :

$$Q_{ij} = \exp(-b \cdot \Delta E(ij))$$

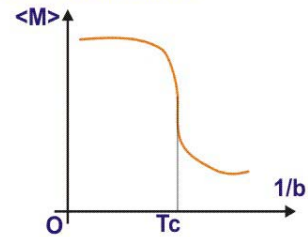
Pour un réseau carré de  $N \times N$  points, l'aimantation

$$M_k = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N S_{i,j}$$

Pour un temps  $T$

$$\langle M \rangle = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T M_k$$

La valeur moyenne présente une discontinuité :



## Transitions de phase

### Discontinuité de grandeur thermodynamique

Pour chaque site  $s$ , on définit un hamiltonien  $H(s)$  caractérisant l'énergie du système

Une densité de probabilité (mesure de Gibbs) :

$$f(x) = \frac{e^{-\beta H}}{Z}$$

La fonction de partition

$$Z = \int e^{-\beta H(x)} dx \quad Z = \sum_s e^{-\beta H(s)}$$

L'entropie

$$S = -k \int f(x) \log f(x) dx$$

L'énergie interne

$$U = \mathbb{E}H = -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta}$$

L'énergie libre

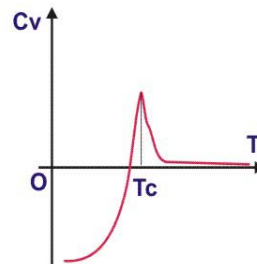
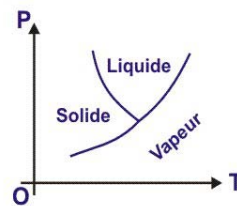
$$F = -kT \log Z = U - TS$$

L'entropie

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = k(\log Z + \beta U) = k\beta H^2 \frac{\partial F}{\partial \beta}$$

La capacité calorifique

$$C_v = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = -k\beta^2 \left( \frac{\partial^2 \log Z}{\partial \beta^2} \right)$$



## Tempéraments de Farey

### Tempérament de Farey = Suite de Farey + 1

Suite de Farey = tous les rapports  $p/q$  avec  $p$  et  $q < N$

Définition réursive : Partir de  $F1 = \{0/1, 1/1\}$   
et ajouter la médiane de chaque couple  $(p/q, x/y)$   
 $(p+x)/(q+y)$

$F2 = \{0/1, 1/2, 1/1\}$   $F3 = \{0/1, 1/3, 1/2, 2/3, 1/1\}$

### Construction d'une fonction de partition

Pour chaque ensemble de Farey  $F_m = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$

On pose  $v(i) = \text{Denom}(x(i)) + \text{Numer}(x(i+1))$

La fonction de partition

Pour les premières valeurs de  $m = 1, 2, 3$

$$Z_m = \sum_{i=1}^{m-1} v_i^{-\beta} \quad Z_1 = 2^{-\beta} \quad Z_2 = 2^{-\beta} + 3^{-\beta} \quad Z_3 = 2^{-\beta} + 3 \cdot 4^{-\beta}$$

L'énergie libre  $F$  présente une transition de phase en  $B = 2$

$$F(\beta) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{-1 \log Z_m(\beta)}{\beta m}$$

### Choix d'une autre distance

Pour la norme  $p$ -adique

$$Z_m = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{p \in \mathcal{F}} |x_i|_p^{-\beta}$$

## Méthodes de Monte Carlo

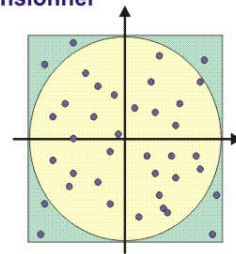
### Simulation de processus aléatoires

E.g. Méthode utilisée dans le modèle d'Ising multidimensionnel

Exemple : Calcul de la surface d'un cercle de rayon 1

Lancer des points tirés au hasard dans  $[0,1] \times [0,1]$   
Compter le nombre de points dans le cercle  
et le nombre d'essais effectués

$$\iint_D dx dy = \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Nb de points dans } D}{n}$$



Applications :

Calcul d'intégrales multiples

Résolution de systèmes linéaires

Construction de processus aléatoires dont la moyenne est solution d'une équation aux dérivées partielles

Problème : Réduction de la variance (Seuil de confiance)

Pour la composition musicale Utilisée par Xenakis

Caractéristique de la méthode simplicité d'emploi



## Probabilités non commutatives

**Trois types de probabilités non commutatives (= probabilités quantiques)**

R. Speicher et M. Schürmann ont montré qu'il n'y a que trois types d'indépendance stochastique

- Cas booléen (W. Von Waldenfels)
- Cas tensoriel (R.L. Hudson et K. Parthasarathy)
- Cas libre (D. Voiculescu)

**Théorème de la limite centrale (Cas commutatif)**

Soit  $X_1, \dots, X_n$  une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi gaussienne d'espérance  $m$  et de variance  $s$  Alors

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \rightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

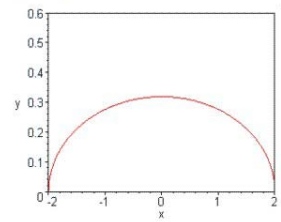
**Théorème de la limite centrale (Cas libre)**

Soit  $X_1, \dots, X_n$  une suite libre centrée réduite de l'espace de probabilité  $(\mathcal{A}, \varphi)$

$$\varphi(X_i) = 0 \quad \varphi(X_i^2) = 1 \quad \sup_k |\varphi(X_i^k)| < \infty$$

Alors  $S_n/\sqrt{n}$  converge vers la loi semi circulaire

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \rightarrow S_2 \quad S_2 \sim \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} \cdot 1_{[-2, +2]}$$



## Matrices aléatoires

Matrice aléatoire = matrice dont les éléments sont des v.a. Indépendantes

Matrice gaussienne = les éléments sont des v.a. gaussiennes

Problème : trouver la loi de distribution des valeurs propres

**Cas des matrices aléatoires gaussiennes symétriques réelles**

Soit  $T$  une matrice aléatoire gaussienne symétrique réelle

$$\mathbb{E}(T_{ij}) = 0 \quad n\mathbb{E}(T_{ij}^2) = \sigma^2$$

Alors la densité moyenne des valeurs propres tend vers la loi semi-circulaire

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sqrt{4\sigma^2 - x^2} \cdot 1_{[-2\sigma, +2\sigma]}$$

En particulier

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{tr} \mathbb{E}(T^k) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-2\sigma}^{+2\sigma} \sqrt{4\sigma^2 - x^2} dx$$

**Entropie libre de Voiculescu**

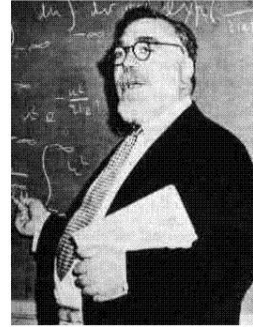
Pour une variable aléatoire  $X$  de densité  $h(x)$

$$\chi(X) = \iint \log |s - t| h(s)h(t) ds dt + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \log(2\pi)$$

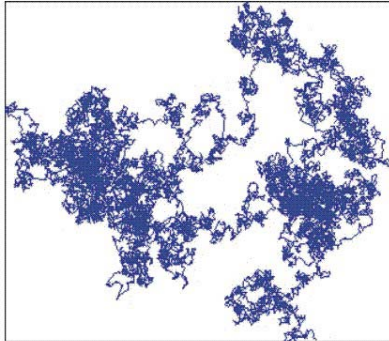
## Mouvement brownien

### Processus de Wiener

- Processus à accroissements indépendants ( $B(t_0)$ ,  $B(t_1)-B(t_0)$ , ...,  $B(t_n)-B(t_{n-1})$ )
- $B(s+t) - B(s)$  suit une loi normale  $N(0,t)$
- $B(t)$  est continue
- $(B(t+h) - B(t)) / h$  tend vers  $N(0, 1/h)$
- $B(t)$  n'est nulle part dérivable
- Si  $B(t)$  est un brownien,  $TB(t/T)$  est un brownien



Norbert Wiener



- $B(t)$  est un processus de Markov de probabilité de transition

$$p(s, x; t, B) = \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right) dy$$

La fonction de corrélation  $K(s,t) = \min(s,t)$   
 ==> Modélisation de bruit blanc

## Intégrale stochastique

Problème : Donner un sens à l'intégrale ( $X_t = B_t$  n'est pas dérivable, mais continue)

$$\int_a^b dX_t = ?$$

L'intégrale est un processus aléatoire

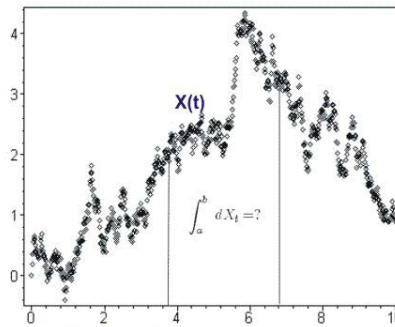
$$\int f(t, w) dW(t, w) = q \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(t_i, w) (W(t_{i+1}) - W(t_i))$$

L'application de cette formule conduit à

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{t}{2}$$

Soit sous forme différentielle

$$dW_t^2 = 2W_t dW_t + dt$$



Simulation de mouvement brownien

D'où l'idée de développer un nouveau calcul intégral différentiel

## Formule d'Itô

### Nouveau calcul différentiel

Pour un processus stochastique  $X(t)$  vérifiant

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$$

le processus  $Y(t)=f(t,X(t))$  vérifie

$$df(t, X_t) = \left( \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial t} + a(t, X_t) \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(t, X_t) \frac{\partial^2 f(t, X_t)}{\partial x^2} \right) dt + b(t, X_t) \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} dW_t$$

En particulier

$$df(W_t) = f'(W_t)dW_t + \frac{1}{2} f''(W_t)dt$$

### Equation de Fokker Planck

La densité de probabilité de  $X(t)$  vérifie l'équation de Fokker Planck

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b^2(t, y)\rho)}{\partial y^2} - \frac{\partial (a(t, y)\rho)}{\partial y}$$



## Equations différentielles stochastiques

### Solution probabiliste d'un problème de Dirichlet

Soit  $D$  un domaine régulier borné, l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u$$

avec pour conditions initiales  $u(0, x) = u_0(x)$  sur le bord admet une solution probabiliste unique

$$u(t, x) = \mathbb{E}(x + B_t) = \int_D \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2t}} u_0(y) dy$$

Ce résultat autorise la construction de solution par Monte Carlo

### Equation de physique mathématique bruitée

Equation déterministe

=

Bruit aléatoire

Exemple : Equation de Langevin

$$\frac{dv}{dt} = -av + \xi(t)$$
$$dX_t = -aX_t dt + \sqrt{2D} dW_t$$

## Méthodes particulières stochastiques

Principe : Chercher des solutions d'une EDS en prenant une mesure empirique (somme de dirac)

### Equation de fluide Navier-Stokes

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \nabla w - w \cdot \nabla u - \nu \Delta w = 0$$

Les particules de position  $x_p(t)$ , de volume  $v_p(t)$  contenant une vorticité  $w_p(t)$

$$w(x, t) = \sum w_p(t) \delta(x - x_p(t)) v_p(t)$$

### Equation d'une membrane vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u + \xi(t)$$

- Passage en polaires
- Solutions périodiques
- Détermination des fréquences
- Pour une membrane circulaire par les zéros d'une fonction de Bessel
- Dérive des fréquences sous l'influence du processus aléatoire



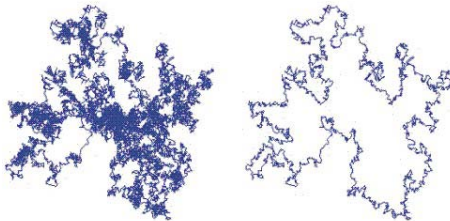
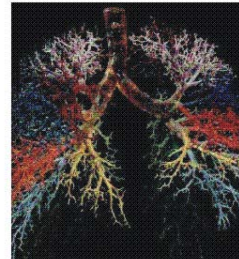
L'inharmonicité est perçue comme une perturbation aléatoire

## Conclusions et Perspectives

### Autres applications des techniques stochastiques

#### Recherche de codons dans une séquence musicale

Utilisation d'algorithmes génétiques  
Exemple : Olivier Messiaen, Mode de valeurs et d'intensité. Codage G = 1-2 voix 1, C= 3-4 voix 1 T = 1-2- 3 voix 2 A = 4-5 voix 3  
GCTTACTGGACGATTGTGGGAGCTTTATGCGTG  
TCGATCGGCT



#### Capacité et dimension de Hausdorff

- Formalisme thermodynamique utilisé dans le calcul de dimension fractale et des capacités
- Modèle reproductif aléatoire e.g. Courbe de Koch + aléa
- Lien avec le calcul de l'évolution entropique
- Fractions continues aléatoires