

Séminaire MaMuX

Mathématiques, Musiques et Relations avec d'autres disciplines

Microintervalles et modes à transpositions limitées

Franck Jedrzejewski

frank@arthaud.saclay.cea.fr



- 1 - Espaces micro-tempérés
- 2 - Modes de Messiaen
- 3 - Dénombrement des MTL
- 4 - Modes à TL dans n-Tet
- 5 - Conclusions

Premières expériences microtonales

1892 - Piano achromatique, Behrens-Senegalden
1905 - Zwei Konzerstücke pour Vc et piano, Richard Stein (1882-1942)

1910 - La musique libre (Cavalier Bleu), N. Koubline

1915 - Prélude opus 12/2 à quarts de ton, A. Lourié
Jörg Mager (1880-1939) publie Vierteltonmusik, accompagné d'une oeuvre La fuite des pauvres (Die Flucht des Armen)



Frantisek Kupka
Svoreni, 1911-1920

1917 - Cinq pièces, opus 26 pour harmonium bichromatique de W. Möllendorf (1872-1934)

- Julian Carrillo lance la révolution du Sonido 13

1920 - Deuxième quatuor à cordes en quarts de ton, A. Haba, créé le 28 nov 1922 à la Musikhochschule de Berlin

1920 - Preludio a Colon, J. Carrillo

Concerto Lyra Celtica, Johns Foulds (22 shrutis)

1922 - Dritteltonmusik, F. Busoni (Mélod)

1923 - Association pour la musique microtonale, G. Rimski-Korsakov (1901-1965), petit fils de Nicolas

- A. Haba ouvre une classe de musique microtonale au Conservatoire de Prague

Premières expériences microtonales

1924 - Julian Carrillo, El sonido 13

1925 - Bases du système musical des quarts de ton, publié en Russie par Georges Rimski-Korsakov

1927 - Neue Harmonielehre des diatonischen, chromatischen, vierdrittel, sechstel und zwölfteltonsystem, A. Haba

- Concerts de Mordecai Sandberg à Jérusalem (28 mai), Et à Tel Aviv (12 juillet 1927)

- Création du Concertino pour orchestre de J. Carrillo par Léopold Stokowski

1929 - Système musical et clavier à tiers de ton, E. Malherbe

1930 - Die Tondifferenzierung une ihre Bedeutung, M. Sandberg

1931 - Création de l'opéra Matka, opus 35 de Haba, à Munich par Hermann Scherchen

1934 - Music today, John Foulds

1946 - Concert de musique microtonale, Prague (14 mai)

1947 - Opéra Matka, A. Haba, Prague, dir. Karel Ancerl

1955 - Pianos metamorfoseadores, J. Carrillo exposés à Paris, puis à l'exposition universelle de Bruxelles (1958)



Jindrich Styrsky
Venkovsky hrbtlov, 1925

Ivan Wyschnegradsky

Les années russes (1893-1920)

Premières compositions & créations (St Pétersbourg - Yalta)

Expériences mystiques (7 nov 1916-1918)

La conscience cosmique

L'intuition du continuum sonore et l'ultrachromatisme

La journée de Brahms

La famille Wyschnegradsky quitte clandestinement la Russie (9 mars 1920)

Les années expérimentales (1920-1936)

Premières expériences microtonales

Rencontre Oubouze, Koussnetzky, Boris de Schloezer

Séjours à Berlin (25 janv - 10 fév 1922 puis 26 juil 1922 - 4 avr 1923)

Mariage avec Hélène Benoist (23 mai 1922)

Décès de son père (9 mai 1922)

Projet avec A. Gance pour sonoriser Alina

Quatuor Vandelle crée la Fugu n°1925, le deuxième quatuor (1922)

Situation matérielle difficile (1922)

Les années de création (1937-1979)

Premier concert monographique 1937

Rencontre Olivier Messiaen

Concert Le Russe à l'étranger 1938

Diapasons aux 1/124 de ton

Projet de transformation de l'harmonium

Concert de 1945 (Boulez, Nigg, Leroy-D)

Concert de 1977 (Radio France Josta)

Concert de 1978 (Montréal Mather)

Création de la Journée de l'Existence (1979)

Ivan Wyschnegradsky

La loi de la Panosonité

Les versions

Première version en russe (1927 - 1928)

Deuxième version (nov 1935 - 1936)

Troisième version (1962)

Principe panosone

Il n'existe pas d'espace entre les sons, l'échelle sonore est un continuum pur et étire (pénétrée spatiale)

l'opposé au principe naturel : l'espace musical est fortement discontinu (échelles tempérées, et ethnomusicales)

Impensabilité sonore

Le milieu panosone

Trois propriétés : continuité, régularité, inféridé

(1) les sons doivent être disposés de la manière la plus étroite

(2) les sons doivent être disposés régulièrement

(3) le système musical doit avoir le maximum d'étendue

→ introduction des micro-intervalles



La flèche panosone

L'évolution de la musique n'est possible que dans l'opposition du principe panosone au principe naturel. L'opposition n'est pas tonal/rational mais naturel/panosone. Part du continuum (primaire), l'espace musical s'étire dans sa composante tonale, pour de nouveau gagner en densité et renouer avec le continuum (temps cyclique).

Lecture de l'histoire de la musique - Trois stades :

1) Adoption du tempérament égal (régularité +)

2) Développement du chromatisme avec Liszt et Wagner (continuité +)

3) Libération de l'harmonie Debussy-Ravel-Scriabine

Equivalence des douze sons (Schoenberg)

Approches de Ennes (12) Séries - Micro-intervallité

Alois Haba

- Né le 21 juin 1893 à Vizovice en Moravie
- Elève de V. Novak à partir de 1914
- Perfectionnement auprès de F. Schreker à Vienne (1918-20)
- Première oeuvre en 1/4 de ton (1914) : Quatuor 2, op. 7
- Création du quatuor op 7 par le quatuor Havemann à la Musikhochschule de Berlin
- Publie dans Melos Les bases harmoniques du système à quarts de ton (1922)
- Première oeuvre en 1/6 de ton (1923) : Quatuor 5, op. 15
- Création du quatuor op. 12, troisième quatuor en 1/4 de ton Par le Amar-Hindernith Quartett au Festival International de Salzbourg (1923)
- Piano à quarts de ton de Förster
- Création par Rebner de la Fantaisie pour violon à quarts de ton op. 9a, Frankfurt am Main, 1924
- Création de la Suite pour chœur à 1/4 de ton par Hermann Scherchen, Frankfurt am Main, 1924.
- Création de la troisième fantaisie pour piano à quarts de ton Au Festival International de Musique de Prague, 1925
- Création de la deuxième fantaisie pour piano à quarts de ton Par E. Schulhoff, Frankfurt am Main, 1927
- Publie Nouveau Cours d'harmonie dans les systèmes en Demi, quarts, sixièmes et douzièmes de ton, 1927



Emil FILLA (1914)
Zatisi s Umeleckym mesnickem

Alois Haba

- Festival de Musique International de Musique de Sieme
- Création de la Neuvième Fantaisie Op. 30 pour piano
- Création de la Fantaisie pour alto et piano, Op. 32
- Matka, Opéra en quarts de ton, Opus 35.
- Création par Hermann Scherchen à Munich, 1931.
- Création par Karel Ancerl, à Prague, 1947.
- Festival de Musique International de Musique de Paris, 1937
- Création de la Fantaisie symphonique "Le chemin de la Vie" par Herman Scherchen.
- Création de Duo pour deux violons en 1/6 de ton Op. 49 par H. Wiesmeyer et E. Stein
- Prijd Kralovstvi Tvé (Que ton règne vienne) Opéra en 1/6 de ton, 1938-1942.
- Création du quatuor 6 à 1/4 de ton, Op.70 par le Quatuor Haba, Olmütz, 1951.
- Création de la Suite valaque "Valasska suita" par le Philharmonique Tchéque, K. Ancerl, 1953.
- Création du Dixième quatuor en 1/6 de ton, Op. 80 Par le quatuor Novak, Stockholm, 1957.
- Création du Douzième quatuor à 1/4 de ton, Op. 90 Par le quatuor Novak, Donaueschingen, 1960.
- Création du Seizième quatuor à 1/5 de ton, Op. 87 Par le quatuor Novak, Prague, 1967.



Josef SIMA
Ostrov I, 1931

Alois Haba

QUARTETTO D'ARCHI No XIV

ALFONSO BUSCA (1906)

Violon I
Violon II
Viola
Violoncelle

Allegro energico

HEINRICH

I.

II.

Alois Haba - Suite pour 4 trombones en quarts de ton, Opus 72, 1958

Harpe de Julian Carrillo



Notations des micro-intervalles



Antonin Prochazka, 1921
Zalisi s kavovou konvicí

Accords	Ensembles
de 1/12 de ton	de 1/12 de ton
de 1/9 de ton	de 1/9 de ton
de 1/4 de ton	de 1/4 de ton
de 1/5 de ton	de 1/5 de ton
de 1/7 de ton	de 1/7 de ton
de 1/12 de ton	de 1/12 de ton
de 1/9 de ton	de 1/9 de ton
de 1/4 de ton	de 1/4 de ton
de 1/5 de ton	de 1/5 de ton
de 1/7 de ton	de 1/7 de ton
de 1/12 de ton	de 1/12 de ton

Tonovij systém
pálňový zhotovený
testinotový
dvanáctinotový

Notations de Alois Haba



TOYEN
Podzim, 1927



Quatrième Fantaisie Op.25 (1926)

Instruments du Science Museum de Londres



Voice Harmonium de Colin Brown (1875)



Enharmonic harmonium de Bosanquet (1876)



Orgue enharmonique de T. Thompson (1876)

Facture instrumentale

- 1892 - Piano achromatique, Behrens-Senegalden
 - 1906 - Projet de clarinette à 1/4 de ton de R. Stein
 - 1915 - Sphérophone de Jorg Mager (1880-1939)
 - 1917 - Harmonium bichromatique de W. Moellendorff réalisé par Straube.
 - 1920 - A. Haba se rend à Berlin rencontre Busoni.
 - 1921 - Piano pneumatique de Pleyel (Wyschnegradsky)
 - 1922 - I. Wyschnegradsky se rend en Allemagne (août 1922 - avril 1923) rencontre Haba, contacte la maison Gröbner-Steinweg pour construire un piano en 1/4 de ton. Echec.
 - 1924 - La maison Förster livre un piano à 1/4 de ton à Alois Haba.
 - 1924 - Haba commande trois clarinettes à 1/4 de ton à la maison Kohler installée à Graslitz en Bohême
 - Haba compose les opus 24, 35 et 55.
 - 1926 - M. Sandberg fait réaliser par Straube un harmonium à quarts de ton (5 octaves - 24 touches par oct.)
 - 1927 - I. Wyschnegradsky commande un piano à 1/4 de ton à Förster qui arrive à Paris en avril 1928.
 - 1929 - Harmonium en 1/12 et 1/16 réalisé par Straube pour Sandberg (étendue d'une quarte)
 - 1939 - Förster construit pour Haba un harmonium à 1/6 de ton
- Haba commande deux trompettes à 1/4 de ton à la maison Friedrich A. Heckel à Dresde (Op. 56)
Haba commande une guitare à quarts de ton (Op.51, 53, 54 et 63)



Premières expériences microtonales

- 1 - Arthur Lourié - Prélude op 12/2 pour piano en quarts de ton (1915)
- 2 - Ivan Wyschnegradsky - Chant Nocturne op 11, pour violon et piano (1927)
- 3 - Aloïs Haba - Suite op 24 pour clarinette et piano en quarts de ton (1925)
- 4 - Charles Ives - Trois pièces en quarts de ton (1913-1924)
- 5 - Julian Carrillo - Concertino no. 1 pour violon et orchestre (1963)



Classe de musique microtonale

- Classe créée à Prague en 1923.
- Ljubica Matić (née en 1909 en Serbie)
Prof. de musique au Conservatoire de Belgrade
 - Karel Reiner (1910-1979) pianiste et compositeur
Déporté à Auschwitz et à Dachau
Fantaisie pour piano à quarts de ton, opus 15
Écrit en captivité pour trompette et trombone
Sonatine pour piano à quarts de ton, opus 72
 - Jiri Pauer (né en 1919) pianiste et compositeur
Burlesken pour piano à quarts de ton
 - Miroslav Ponc (né en 1902)
Dorée des cours à Berlin
Trois études pour piano à quarts de ton, opus 6a (1925)
 - Franc Sturm (1912-1943) Compositeur yougoslave
Luftballon suite, pour piano à quarts de ton, opus 3
 - Stawko Oster (1885-1941) Compositeur slovène
Prélude et fugue pour piano à quarts de ton, 1929
Cvetoci bezeg, cantate pour voix d'alto, chœur de femmes et 9 instruments, 1936.
 - Vaclav Dobias (1909-1978) Compositeur tchèque
Suites pour piano à quarts de ton (1939)
Concerto pour violon et orchestre
D. Zakri, N. Kazim, V. Bozinoc, V. Ullmann, K. Ancerl, F.J. Wiesmayer ont suivi les cours de Haba.



Antonín Procházka
Dama se svetru, 1921

Concert du 14 mai 1946 - Prague

- B. Stankova, Quartett für vier Zugposaunen
- Jiri Pauer, Burlesken pour piano à quarts de ton
- Jan Seidel, Alte Frauen, pour récitant et quatuor à cordes sur un texte de Fr. Halas
- Miroslav Ponc, Les Mariés de la Tour Eiffel, suite pour orchestre d'après Jean Cocteau
- Josef Bubak, Quartett für vier Zugposaunen
- Karel Reiner, Fantasie Op 15, pour piano à quarts de ton
- Stepan Lucky, Trois Etudes pour piano à quarts de ton
- Rudolf Fikrle, Duo pour alto et violoncelle
- Alois Haba, Six Fantaisies pour piano à quarts de ton (Opus 25, 26, 28, 29, 30 et 31) par Karel Reiner piano
- Alois Haba, Quatuor à cordes, opus 7



Mikulas Medek
Magnetica Ryba, 1949

Le système tricesimoprimal

- 1946 - Jan van Dijk, 4 Harmonisch-melodische Intonatie Oefeningen, pour quatuor à cordes
- 1948 - Jan van Dijk, 8 stukken pour orgue
- 1949 - Jan van Dijk, Vierstemmige intonatie-oefening pour chœur mixte à cappella
- 1950 - Arie de Klein, Preludium chromaticum pour orgue
- 1951 - Jan van Dijk, Musica per organo trentunisono I
- Arie de Klein, 6 bagatellen op tien toetsen
- Paul Christian van Westering, 6 Inventies pour orgue
- 1952 - Henk Badings, Preludium en fuga pour orgue
- Cinq lieder pour chœur mixte à cappella
- Jan van Dijk, Dentje pour deux chœurs mixtes à cappella
- 1953 - A. Van der Horst, Suite pour orgue, opus 60
- 1954 - Henk Badings, Preludium en fuga no 4 pour orgue
- Suite van kleine stukken pour orgue
- Arie de Klein, Passacaglia
- 1957 - Henk Badings, Reeks van kleine klanstukken pour orgue
- 1958 - Arie de Klein, Kringspigeligen
- Hans Kox, 3 stukken pour violon solo
- 1959 - Hans Kox, Vue des Anges pour baryton et violon
- Alan Ridout, Partita pour violoncelle
- Ivan Wyschnegradsky Etude ultrachromatique, opus 42

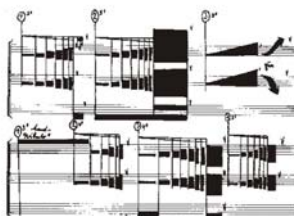
Le système tricesimoprimal

- 1960 - Hans Kox, Passacaglia en koraal pour orgue
- Alan Ridout, Music pour orgue
- 1961 - Jan van Dijk, Concerto pour trombone, violon et violoncelle
- Hans Kox, 4 stukken pour quatuor à cordes
- Alan Ridout, Trio à cordes
- 1962 - E. Frishknecht, Drei Stücke pour orgue
- J. Geraedts, 6 Studies in Euler's toongeslachten, pour flûtes
- Peter Schat, Collages pour orgue
- 1964 - A. de Beer, Sonatine pour orgue
- 1965 - A. Stallaert, Vier lieder pour deux violons
- 1966 - Henk Badings - Quatuor à cordes no 4
- 1972 - Joel Mandelbaum, Four miniatures
- 1984 - Henk Badings, Sonate no. 6 pour deux violons



Le système tricesimoprimal

- 6 - Henk Badings - Reeks van kleine klanstukken (Preludio, 1954)
- 7 - Peter Schat - Collages pour orgue en 31 tet (1962)
- 8 - Ivan Wyschnegradsky - Etude ultrachromatique (1959)



Peter Schat - Clusters pour orgue de Fokker



Orgue de Fokker



De gauche à droite: Mme Dolores Carrillo, Alois Haba, Mme Fokker, Adriaan Fokker, Julian Carrillo, Ivan Wyschnegradsky

Les douzièmes de ton

- 9 - Franz Richter-Herf - Alapa op 9 pour orgue ekmelique (1976)
- 10 - Franz Richter-Herf - Die Stunde des Pan op 7 pour spetuoir à cordes et orgue ekmelique (1975)
- 11 - Ezra Sims - Quintet pour clarinette et quatuor à cordes (1987)
- 12 - Ivan Wyschnegradsky - Arc en ciel op 37 pour 6 pianos (1956)



La musique ekmelique

Franz Richter Herf (1920-1984)



Franz Richter-Herf - Walle der Nacht, opus 2



Notation des douzièmes de ton

L'intonation juste

Harry Partch (1901-1974)

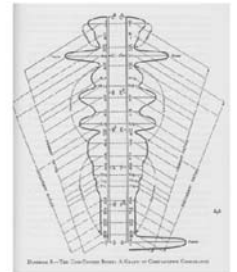
The Long-Departed Lover



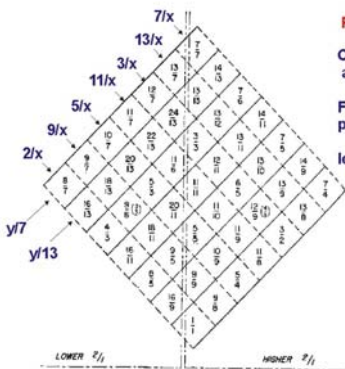
Harry Partch - The long-departed lover Extrait des Six Lyrics by Li Po



Harry Partch - And on the seventh day petals in Petaluma (ms. 22 ss.)



Systèmes de Harry Partch : Tonality Diamond



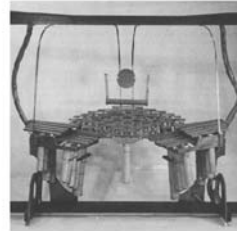
Problèmes de l'intonation juste

Construire un système acoustique avec des fractions simples

Fondé sur les nombres impairs ou premiers 3, 5, 7, 11, 13, etc.

Ici sur :

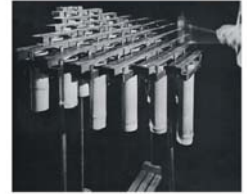
- 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13



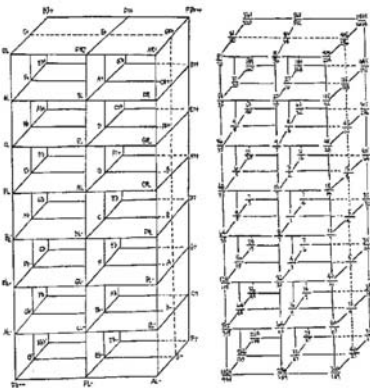
Instruments de Harry Partch



Instruments de Harry Partch



Réseaux de Ben Johnston



Ben Johnston



Ben Johnston - Cinquième quatuor à cordes (mes. 1-4)



Ben Johnston - Neuvième quatuor à cordes (mes. 9-10)



Ben Johnston - Sixième quatuor à cordes (mes. 1-10)

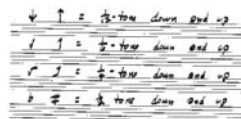


Ben Johnston - Suite for microtonal piano

Ezra Sims



Ezra Sims - Quintet for clarinet & strings, Mov II, mes. 149-162



Ezra Sims - Notation des douzièmes de ton



Ezra Sims - Echelle des douzièmes de ton

Instruments en intonation juste



Guitare en Intonation Juste (Wim Hoogewerf)

Scalatron de Georg Secor

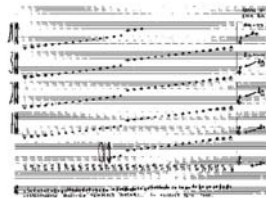


Le scalatron de Georg Secor existe en deux versions : un clavier traditionnel ou un clavier possédant 31 touches par octave. Aaron Copland School of Music at Queens College.

Dean Drummond et le zoomozophone



Dean Drummond - Le zoomozophone et ses tessitures



Dean Drummond - Columbus pour flûte et trois zoomozophones

James Tenney



James Tenney - Echelle fondée sur les 13 premiers harmoniques



James Tenney - Some recent thoughts for Morton Feldman
Extrait des Five textures for String quartet and basse
Echelles et notation des 67 sons employés

L'intonation juste

- 13 - Paul Hindemith - Langsames Stück und Rondo pour Trautonium (Oskar Sala)
- 14 - Harry Partch - And on the seventh day Petals fell in Petaluma (1963)
- 15 - Lou Harrison - Suite pour violon, piano et petit orchestre First Gamelan (Keith Jarrett, piano)
- 16 - Ivor Darreg - 13 tones per octave pour vibraphone (Brian Mc Laren)
- 17 - Ivor Darreg - 36 tones per octave (Brian Mc Laren)
- 18 - Bill Sethares - Turquoise Dabo Girl (Xentonicity)



Claviers de Danielou

Nouvelles investigations microtonales

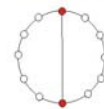
- 19 - Gérard Grisey - Partiels (1975)
- 20 - Alain Louvier - Anneaux de Lumière (1983)
- 21 - Pierre Mariétan - Transmusique II (1987)
- 22 - Jukka Tiensuu - Arsenic and old face (1990)
pour clavecin microtonal et quatuor à cordes
- 23 - James Tenney - Flocking (1993)
- 24 - Alain Bancquart - Solitude du minotaure (1995)
pour piano en 1/16, 2 pianos à 1/4 de ton et 2 violas d'amore
- 25 - Joe Maneri - Trio (1997)

Modes à transpositions limitées

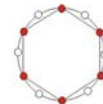
Un mode est à transpositions limitées dans Z_n ssi il a moins de n transpositions

Exemples dans l'espace tempéré ($n = 12$)

Le triton $\{0, 6\}$ de structure $[6, 6]$ n'a que six transpositions



La gamme par tons $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ de structure $[2, 2, 2, 2, 2, 2]$ n'a que 2 transpositions



Dénombrement des modes à transpositions limitées

Dénombrement dans le cas n est premier

Théorème. L'ensemble \mathbb{Z}_n admet un et seul mode à transpositions limitées si et seulement si n est premier.

Dénombrement des échelonnements (Thm de Polya)

$$P(x) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) (1 + x^{n/d})^d$$

Exemples dans l'espace tempéré (n=12)

Il y a P(1) = 351 échelonnements :

$$P = z^{12} + z^{11} + 6z^{10} + 19z^9 + 43z^8 + 66z^7 + 80z^6 + 66z^5 + 43z^4 + 19z^3 + 6z^2 + z + 1$$

Parmi ces 351 échelonnements, il n'y a que 16 MTL

Dénombrement des modes à transpositions limitées

Théorème. Soit H l'ensemble des diviseurs de n, strictement inférieurs à n et soit L_n l'ensemble des valeurs $\ell \in H$ telles que $\ell k = 0 \pmod n$. Les nombres $x_{k,\ell}$ d'ensembles à transpositions limitées de k notes à ℓ transpositions vérifient pour chaque ℓ l'équation :

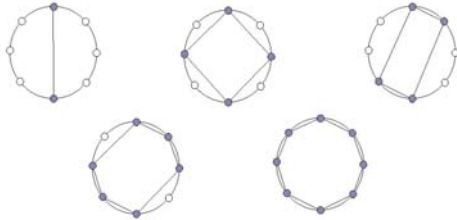
$$e_k - \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} = \sum_{\ell \in L_n} \left(1 - \frac{\ell}{n}\right) x_{k,\ell}$$

où $x_{k,\ell}$ sont des entiers non nuls.

n	ATL	ECH	n	ATL	ECH
3	1	3	14	20	1 181
4	2	5	15	9	2 191
5	1	7	16	35	4 115
6	3	13	17	1	7 711
7	1	19	18	69	14 601
8	5	35	19	1	27 595
9	3	59	20	110	52 487
10	8	107	21	21	99 879
11	1	187	22	188	190 745
12	16	351	23	1	364 723
13	1	631	24	381	699 251

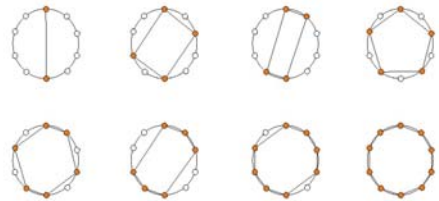
Modes à transpositions limitées dans Z8

Notes	ECH	ATL	Détails
8	1	1	1 à 1 transp.
1, 7	1	0	0
2, 6	4	1	1 à 4 transp.
3, 5	7	0	0
4	16	2	1 (2 tr.), 1 (4 tr.)
Total	35	5	5



Modes à transpositions limitées dans Z10

Notes	ECH	ATL	Détails
10	1	1	1 à 1 transp.
1, 9	1	0	0
2, 8	1	1	1 à 5 transp.
3, 7	12	0	0
4, 6	27	2	2 à 5 transp.
5	25	1	1 à 2 transp.
Total	107	5	8



Modes à transpositions limitées dans Z12

Notes	ECH	ATL	Détails
12	1	1	1 à 1 transp.
1, 11	1	0	0
2, 10	5	1	1 à 6 transp.
3, 9	10	1	1 à 4 transp.
4, 8	31	3	1 (3 tr.), 2 (6 tr.)
5, 7	66	0	0
6	80	5	1 (2 tr.), 1 (4 tr.), 3 (6 tr.)
Total	351	15	16

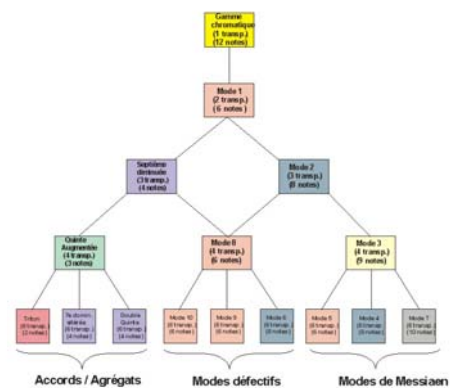
$$3x_{4,3} + 2x_{4,5} = 7$$

$$\begin{cases} x_{4,3} = 1 + 2y_1 \\ x_{4,5} = 2 - 3y_1 \end{cases}$$

$$5x_{6,2} + 4x_{6,4} + 3x_{6,5} = 18$$

$$\begin{cases} x_{6,2} = y_2 \\ x_{6,4} = y_1 + 3y_2 \\ x_{6,5} = 6 - 3y_1 - 4y_2 \end{cases}$$

Transpositions limitées dans l'espace tempéré



Modes à transpositions limitées dans Z18 Cas des tiers de ton

Notes	ECH	ATL	Détails
18	1	1	1 à 1 transp.
1, 17	1	0	0
2, 16	0	1	1 à 9 transp.
3, 15	46	1	1 à 6 transp.
4, 14	172	4	4 à 9 transp.
5, 13	445	0	0
6, 12	1038	12	1 (3), 2 (6), 9 (4)
7, 11	1768	0	0
8, 10	2138	14	14 à 9 transp.
9	2704	4	1 (2), 3 (6)
Total:	14 601	69	69

$$5r_{6,3} + 4r_{6,6} + 3r_{6,8} = 40$$

$$\begin{cases} r_{6,3} = r_1 \\ r_{6,6} = 1 + r_1 + 3r_2 \\ r_{6,8} = 12 - 3r_1 - 4r_2 \end{cases}$$

$$4r_{6,2} + 3r_{6,6} = 13$$

$$\begin{cases} r_{6,2} = 1 - 3r_1 \\ r_{6,6} = 3 - 4r_1 \end{cases}$$

Modes à transpositions limitées dans Z24 Cas des quarts de ton

$$5r_{6,4} + 4r_{6,8} + 3r_{6,12} = 71$$

$$\begin{cases} r_{6,4} = r_1 \\ r_{6,8} = 2 + r_1 + 3r_2 \\ r_{6,12} = 21 - 3r_1 - 4r_2 \end{cases}$$

$$7r_{6,3} + 6r_{6,6} - 4r_{6,12} = 179$$

$$\begin{cases} r_{6,3} = 1 - 2r_1 \\ r_{6,6} = r_1 - 2r_2 \\ r_{6,12} = 13 - 3r_1 - 3r_2 \end{cases}$$

$$11r_{12,2} + 10r_{12,4} + 9r_{12,6} + 8r_{12,8} + 6r_{12,12} = 502$$

$$\begin{cases} r_{12,2} = r_1 \\ r_{12,4} = r_2 \\ r_{12,6} = r_1 - 2r_2 \\ r_{12,8} = 2 - 2r_1 + r_2 - 3r_4 \\ r_{12,12} = 91 - 6r_1 - 3r_2 - 3r_3 - 4r_4 \end{cases}$$

Notes	ECH	ATL	Détails
24	1	1	1 à 1 transp.
1, 23	1	0	0
2, 22	12	1	1 à 12 transp.
3, 21	85	1	1 à 8 transp.
4, 20	446	6	1 (6 tr.), 5 (12 tr.)
5, 19	1771	0	0
6, 18	5620	22	1 (4 tr.), 3 (8 tr.), 18 (12 tr.)
7, 17	11 421	0	0
8, 16	30 667	43	1 (3), 2 (6), 40 (12)
9, 15	54 884	7	2 à 8 transp.
10, 14	81 752	66	66 à 12 transp.
11, 13	104 066	0	0
12	112 720	88	1 (2), 2 (4), 8 (8), 75 (12)
Total:	659 251	381	381

Modes à transpositions limitées dans Z30 Cas des cinquièmes de ton

Notes	ECH	ATL	Détails
30	1	1	1 à 1 transp.
1, 29	1	0	0
2, 28	15	1	1 à 15 transp.
3, 27	156	1	1 à 10 transp.
4, 26	917	7	7 à 15 transp.
5, 25	4 751	1	1 à 9 transp.
6, 24	19 811	35	1 (5), 4 (10), 30 (15)
7, 23	67 860	0	0
8, 22	195 140	91	91 à 15 transp.
9, 21	476 913	12	12 à 10 transp.
10, 20	1 031 663	203	1 (3), 2 (6), 200 (15)
11, 19	1 820 510	0	0
12, 18	2 883 259	355	2 (5), 20 (10), 333 (15)
13, 17	2 901 668	0	0
14, 16	4 847 637	429	429 à 15 transp.
15	5 170 604	29	1 (2), 3 (6), 25 (10)
Total	35 792 567	2 300	2 300

Modes à transpositions limitées dans Z36 Cas des sixièmes de ton

Notes	ECH	ATL	Détails
36	1	1	1 à 1 transp.
1, 35	1	0	0
2, 34	18	1	1 à 18 transp.
3, 33	199	1	1 à 12 transp.
4, 32	1641	9	1 (9), 8 (18)
5, 31	13472	0	0
6, 30	54132	51	1 (6), 2 (12), 40 (18)
7, 29	231880	0	0
8, 28	84652	172	4 (9), 168 (18)
9, 27	261 5104	19	1 (4), 18 (12)
10, 26	7029954	476	476 à 18 transp.
11, 25	16689036	0	0
12, 24	34769374	1078	1 (3), 2 (6), 9 (9), 28 (12), 1038 (18)
13, 23	64188600	0	0
14, 22	10543358	1768	1768 à 18 transp.
15, 21	154994001	66	66 à 12 transp.
16, 20	202997670	2138	14 (9), 2424 (18)
17, 19	238819350	0	0
18	252388196	2780	1 (2), 3 (4), 3 (6), 48 (12), 2704 (18)
Total:	1 988 881 839	14839	14839

Espaces des seizièmes de ton Nombre d'échelonnements = 825 293 359 523 589 782 053 586 451

$$\begin{aligned}
 & 825\ 293\ 359\ 523\ 589\ 782\ 053\ 586\ 451 \\
 & = 1376549275 \cdot 8^0 + 11749921706 \cdot 8^1 + 364651077132 \cdot 8^2 + 1374032747220573 \cdot 8^3 \\
 & + 6504963279902 \cdot 8^4 + 42045029533615 \cdot 8^5 + 680843026321392 \cdot 8^6 + 334032747220573 \cdot 8^7 \\
 & + 60801361621182 \cdot 8^8 + 3243033760010235 \cdot 8^9 + 542779812339384 \cdot 8^{10} + 186506669090881 \cdot 8^{11} \\
 & + 221219619580789820 \cdot 8^{12} + 84178051997898213 \cdot 8^{13} + 27782021833307008 \cdot 8^{14} + 893894846474152417 \cdot 8^{15} \\
 & + 2728289352214607884 \cdot 8^{16} + 79305123290262175183 \cdot 8^{17} + 22383330804606285552 \cdot 8^{18} + 554382852412199326851 \cdot 8^{19} \\
 & + 136635778853641759812 \cdot 8^{20} + 303403010712827262055 \cdot 8^{21} + 754207540338303738821 \cdot 8^{22} \\
 & + 14716610267131820742 \cdot 8^{23} + 3241379965676567187 \cdot 8^{24} + 80010108749136205780 \cdot 8^{25} \\
 & + 121283030907109062112 \cdot 8^{26} + 136052787821288818118 \cdot 8^{27} + 337515181201848848299 \cdot 8^{28} \\
 & + 54174323231583026216 \cdot 8^{29} + 86104778139981001007836 \cdot 8^{30} + 134909012320051019452560 \cdot 8^{31} \\
 & + 1249398120616851083502140 \cdot 8^{32} + 23062078917802084112129428 \cdot 8^{33} + 242344978282721436072402 \cdot 8^{34} \\
 & + 31849541174791336240212 \cdot 8^{35} + 31997808121970609293990 \cdot 8^{36} + 48178123950468189262196 \cdot 8^{37} \\
 & + 55872783276689951673868 \cdot 8^{38} + 67342321781304216691204 \cdot 8^{39} + 5666364612086882738099550 \cdot 8^{40} \\
 & + 670218482610761521217888 \cdot 8^{41} + 6566398121084382718991950 \cdot 8^{42} + 3172431217881924212600024 \cdot 8^{43} \\
 & + 5427780378688881731868 \cdot 8^{44} + 48178037816510817601760 \cdot 8^{45} + 308470819150716636871960 \cdot 8^{46} \\
 & + 31849541174791336240212 \cdot 8^{47} + 242124878037802198978000 \cdot 8^{48} + 178067882878026855209824 \cdot 8^{49} \\
 & + 1249398120616851083502140 \cdot 8^{50} + 84204771392042035097800 \cdot 8^{51} + 54217813628118303262790 \cdot 8^{52} \\
 & + 31575123231583026216 \cdot 8^{53} + 239927518812088910212 \cdot 8^{54} + 12118181803607796062332 \cdot 8^{55} \\
 & + 60801361621182 \cdot 8^{56} + 309183765884720681189 \cdot 8^{57} + 4211180780421391841197 \cdot 8^{58} + 714707801549037888112 \cdot 8^{59} \\
 & + 120140347128782671 \cdot 8^{60} + 1386174240182417612 \cdot 8^{61} + 134267098454862611 \cdot 8^{62} + 21868180840626011108 \cdot 8^{63} \\
 & + 79305123290262175183 \cdot 8^{64} + 2728289352214607884 \cdot 8^{65} + 893894846474152417 \cdot 8^{66} + 277821801811076208 \cdot 8^{67} \\
 & + 84204771392042035097800 \cdot 8^{68} + 134267098454862611 \cdot 8^{69} + 14747580115616544 \cdot 8^{70} \\
 & + 32403178034311 \cdot 8^{71} + 480845124131880 \cdot 8^{72} + 13624862080782 \cdot 8^{73} + 24925681944712 \cdot 8^{74} \\
 & + 4204918958461 \cdot 8^{75} + 6164982070992 \cdot 8^{76} + 98863581412 \cdot 8^{77} + 12749328740 \cdot 8^{78} + 1161880871 \cdot 8^{79} + 318236320 \cdot 8^{80} \\
 & + 12431810 \cdot 8^{81} + 905084 \cdot 8^{82} + 628709 \cdot 8^{83} + 34620 \cdot 8^{84} + 2489 \cdot 8^{85} + 48 \cdot 8^{86} + 2 \cdot 8^{87}
 \end{aligned}$$

Conclusions

Les modes à transpositions limitées de Z_n sont des modes structurants pour l'ensemble des échelonnements

Déterminer l'ensemble des modes à transpositions limitées pour un tempérament quelconque

Existe-t-il une formule générale donnant pour tout n le polynôme dont les coefficients a_i correspondent au nombre de modes à transpositions limitées ?

