Mathématiques, Musiques et Autres domaines

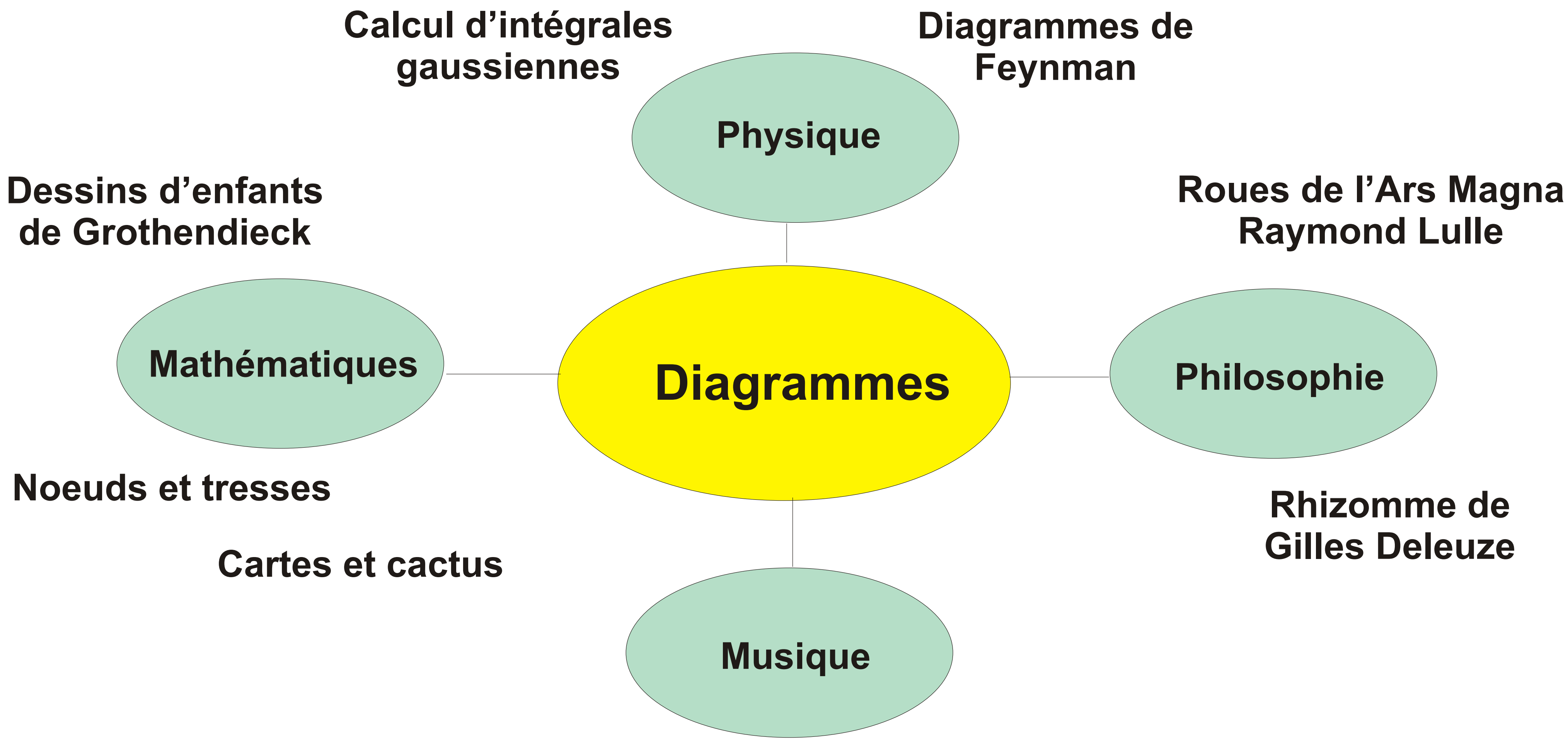
Méthodes diagrammatiques en musique

Franck Jedrzejewski

Franck. Jedrzejewski@Cea.fr

Pensée diagrammatique

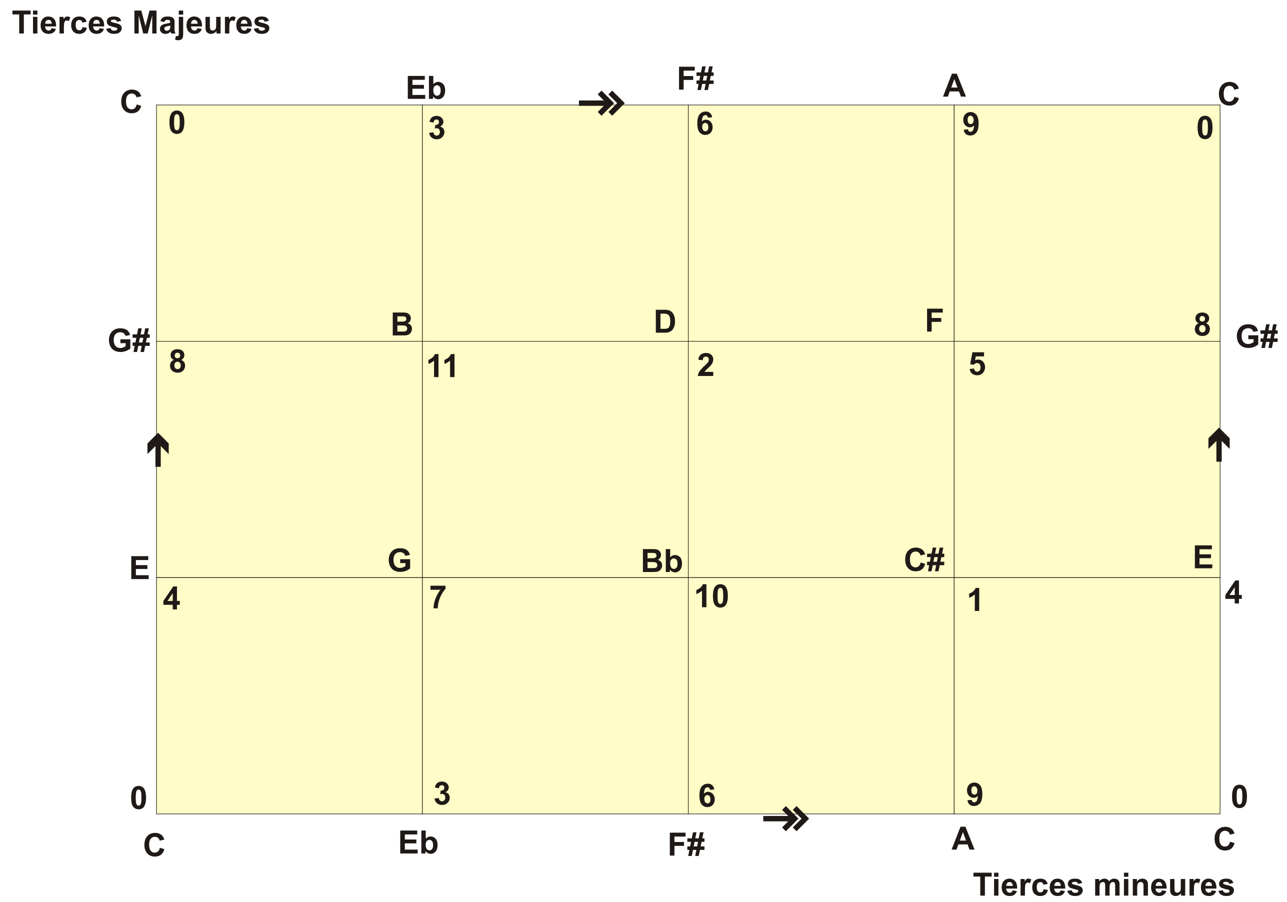
But des méthodes diagrammatiques : offrir par le simple dessin de diagrammes, des calculs ou des résultats pertinents difficilement accessibles autrement

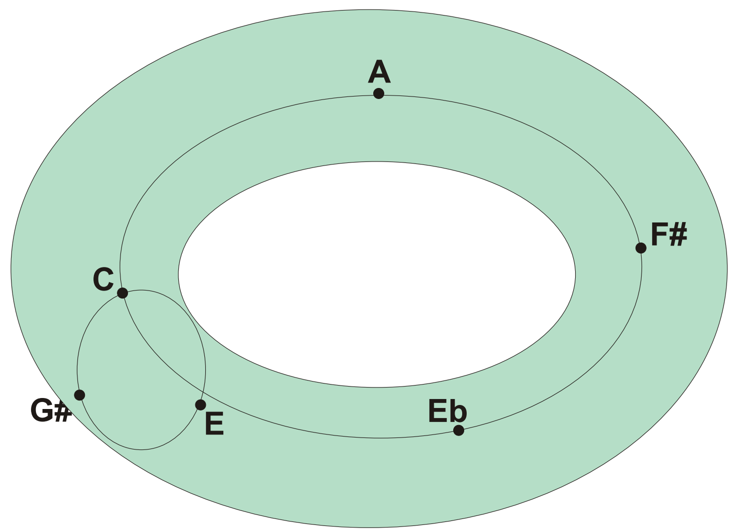


Applications multiples (séries, pavages, tempéraments, rythmes, etc.)

Pavages de tierces

Pavage des tierces (0, 3, 6, 9) x (0, 4, 8) --- Z4 x Z3





Tore

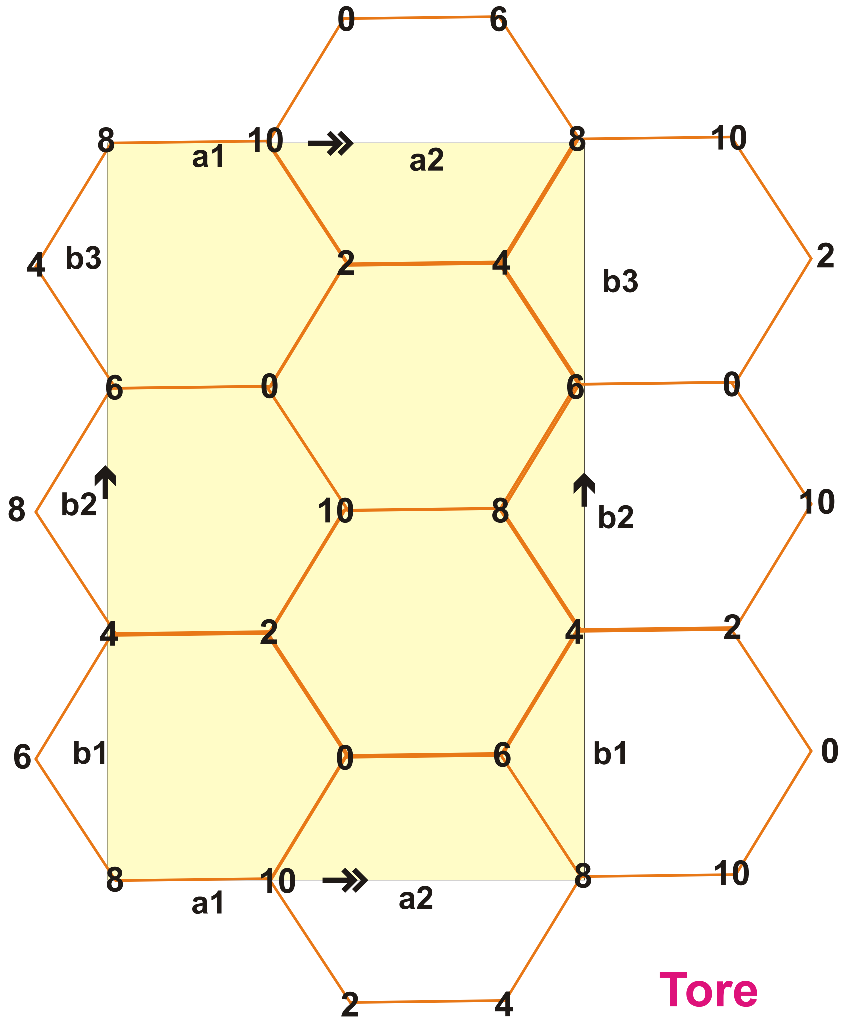
Caractéristique d'Euler Poincaré

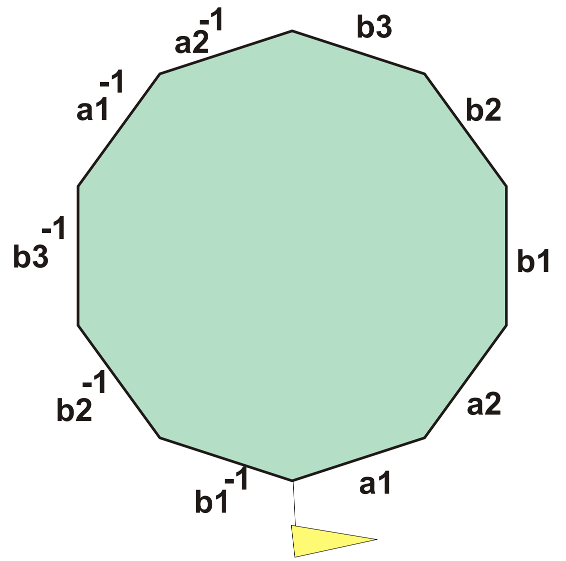
F = 12 S = 12 A = 24

F+S-A = 0 = 2 -2g

Pavages d’accords

Pavage d’un accord (0, 2, 4, 6, 8, 10)
Type de pavage (6,3)





Caractéristique d’Euler Poincaré

F = 6 (n)

S = 12 (2n)

A = 18 (3n)

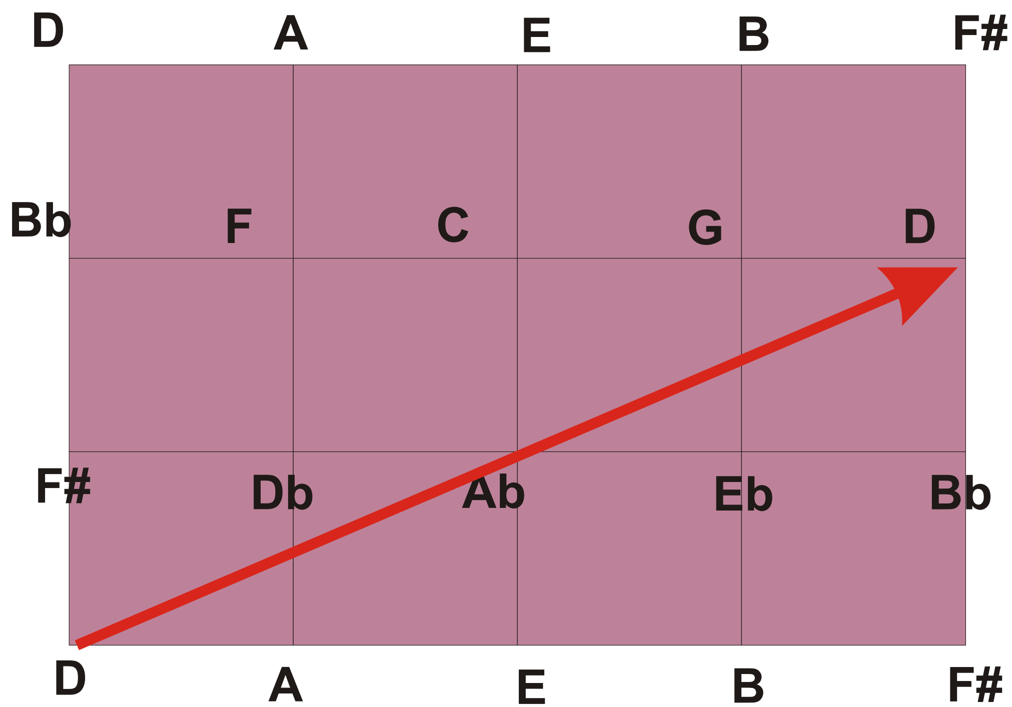
F+S-A = 0 = 2 -2g

Pavages de tempéraments

$$\text{Freq} = 2^r . 3^s . 5^t$$

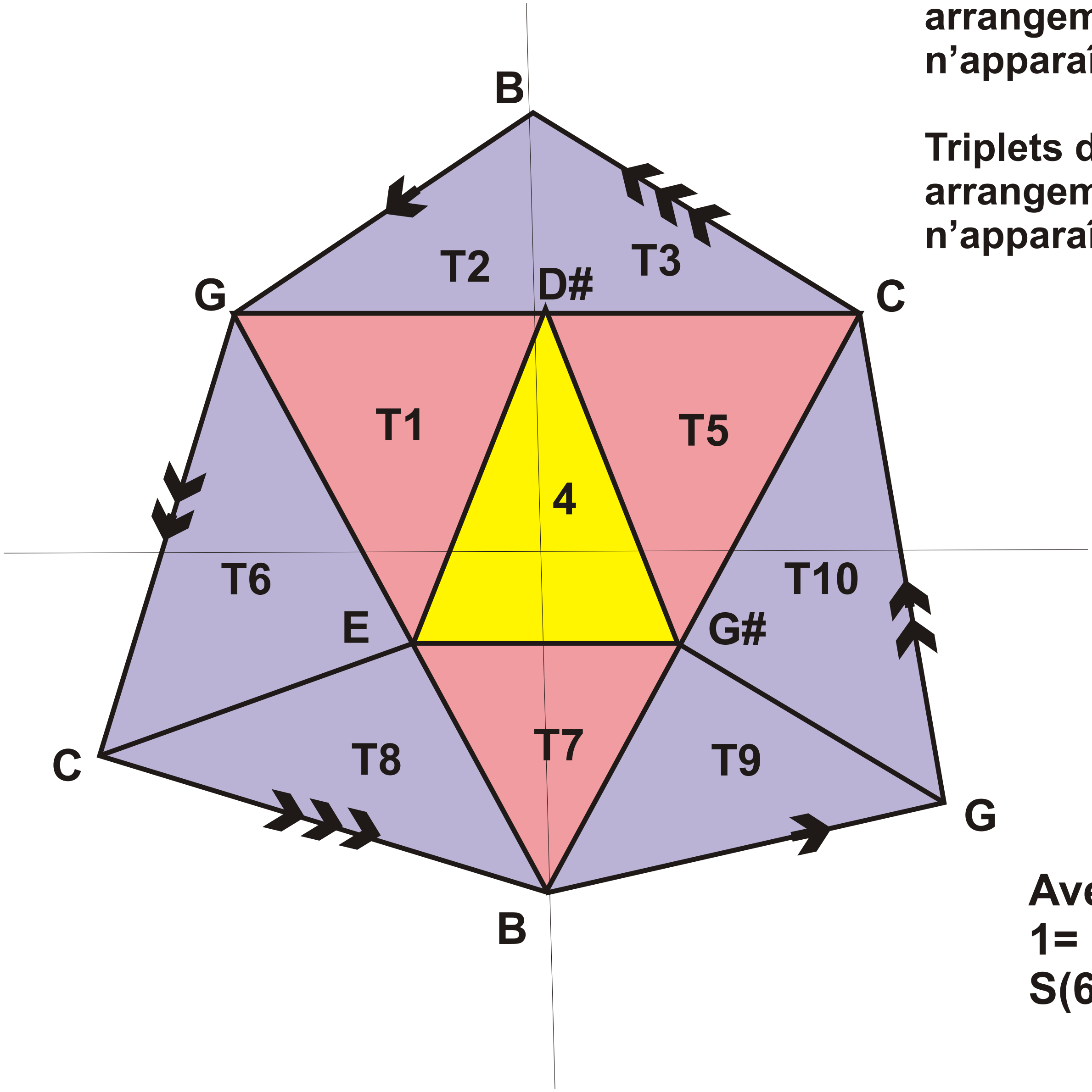
	Freq	r	s	t
C	1	0	0	0
Db	16/15	4	-1	-1
D	9/8	-3	2	0
Eb	6/5	1	1	-1
E	5/4	-2	0	1
F	4/3	2	-1	0
F#	45/32	-5	2	1
G	3/2	-1	1	0
Ab	8/5	3	0	-1
A	5/3	0	-1	1
Bb	16/9	4	-2	0
B	15/8	-3	1	1

Coordonnées = (s, t)



Tore vrillé

Pavages du plan projectif



Triplets de Steiner sur {1, 2, ..., 6} d'ordre 1 = S(6, 3, 1)
arrangement en triplets de sorte que toute paire d'objets n'apparaît que dans un seul triplet

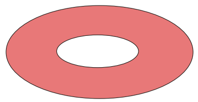
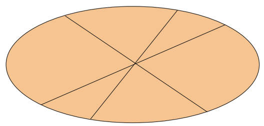
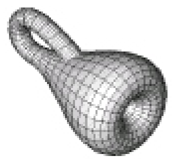
Triplets de Steiner sur {1, 2, ..., 6} d'ordre 2 = S(6, 3, 2)
arrangement en triplets de sorte que toute paire d'objets n'apparaît que dans deux triplets

T1 = 1, 2, 3
T2 = 1, 3, 5
T3 = 1, 5, 6
T4 = 1, 2, 4
T5 = 1, 4, 6
T6 = 2, 3, 6
T7 = 2, 4, 5
T8 = 2, 5, 6
T9 = 3, 4, 5
T10 = 3, 4, 6

Avec la correspondance :
1= D#, 2 = E, 3 = G, 4 = G#, 5 = B, 6 =C
S(6,3,2) est un pavage du plan projectif

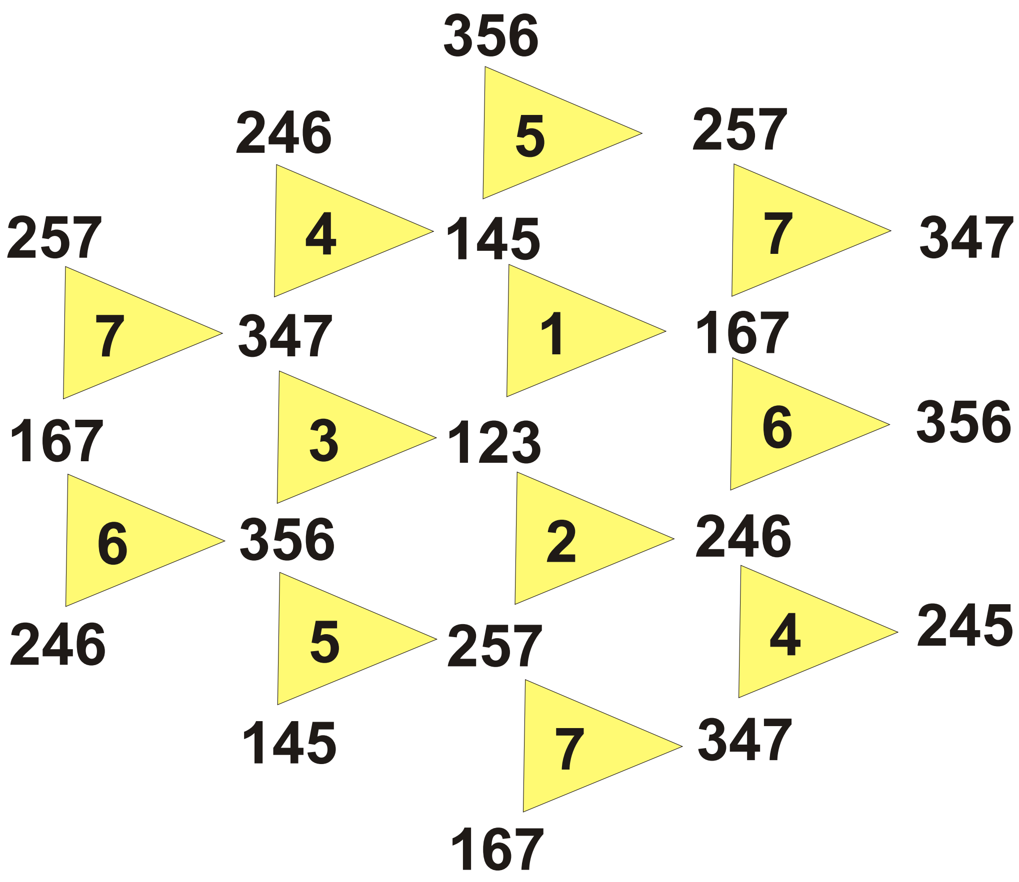
Caractéristique d’Euler-Poincaré

Les pavages ont un invariant : F + S- A

Surfaces		Faces	Sommets	Arêtes	F+S -A
Sphère S2	Tétraèdre sur S2	n+1	n+1	2n	2
Tore		1	1	2	0
Plan projectif (RP)		1	n	n	1
Bouteille de Klein B		1	1	2	0
Tore à g trous (Tg)		1	1	2g	2-2g
Pg = RP # Tg		1	1	2g + 1	1-2g
Bg = B # Tg		1	1	2g+2	-2g

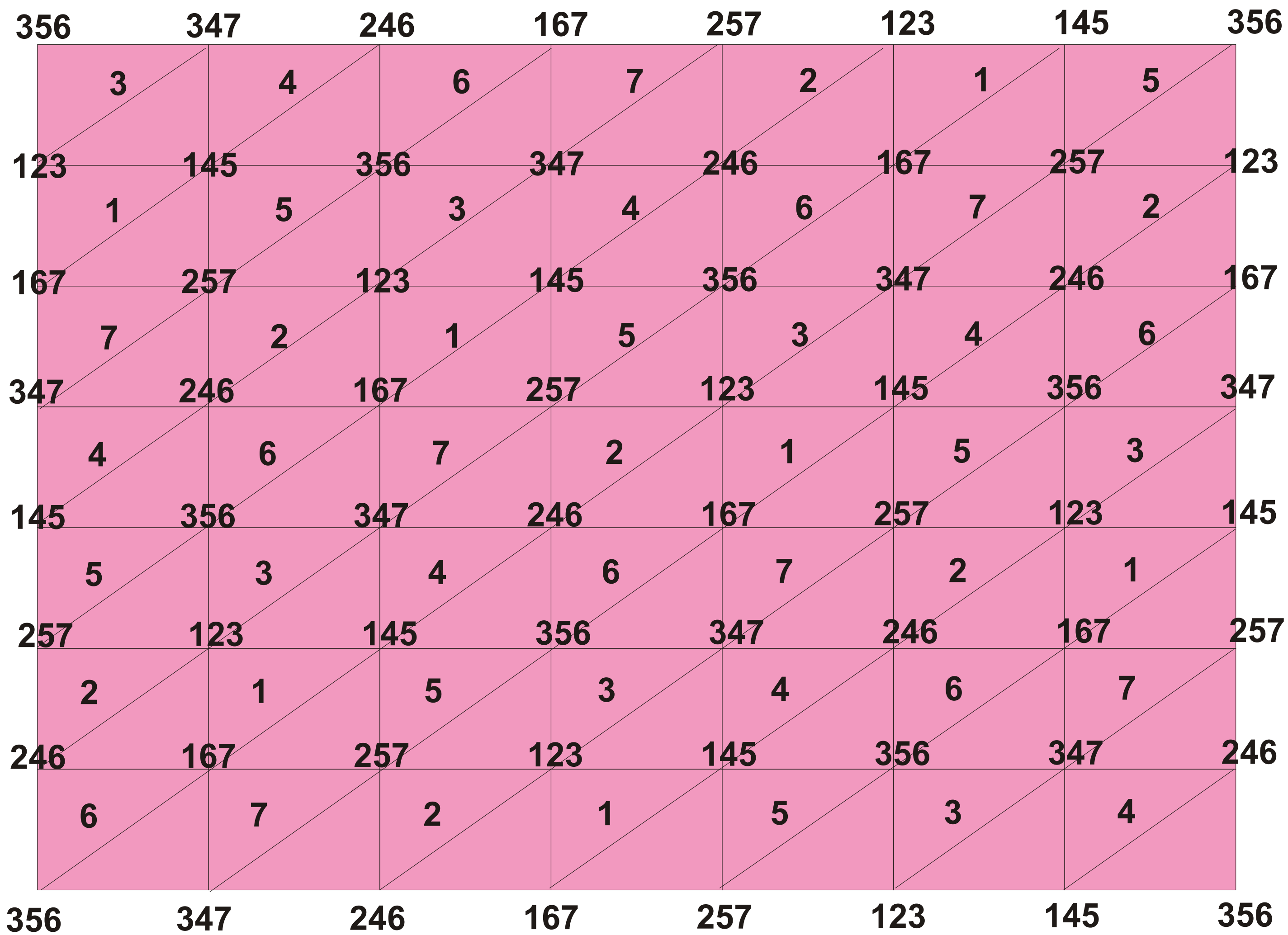
Une question de Tom Johnson

Les enchaînements d'accords de 3 notes prises parmi les notes 1 à 7 ayant une seule note commune pavent le plan
Ce pavage est-il-infini ? Est-ce un pavage de Penrose ?



Pavage des accords de 3 sons

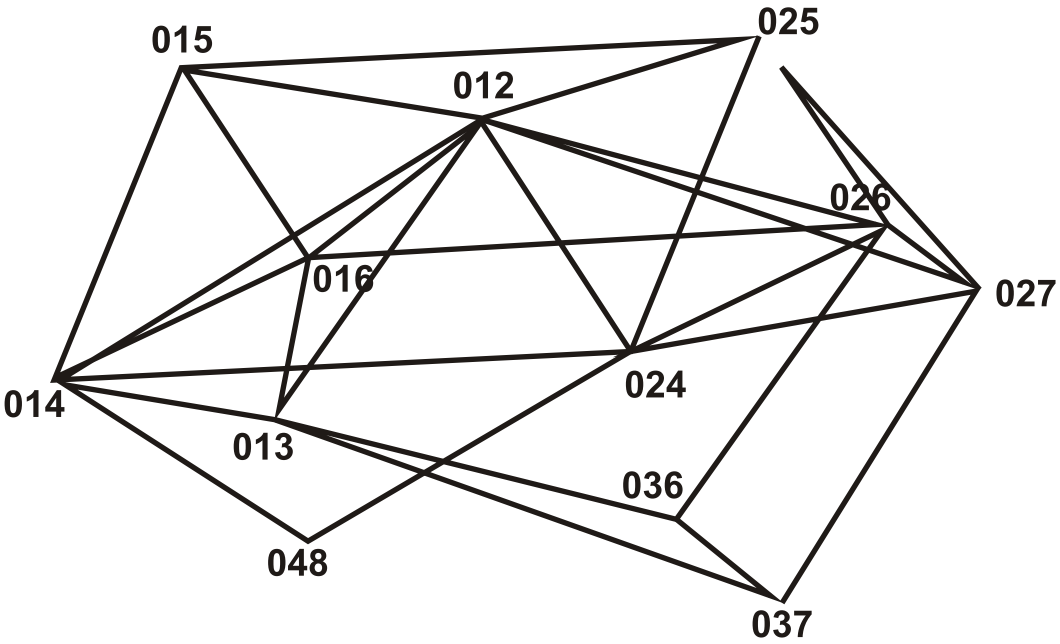
En poursuivant le procédé, c'est un pavage du tore



Euler = S - A + F = 7x7 - 14x7 + 7x7 = 0

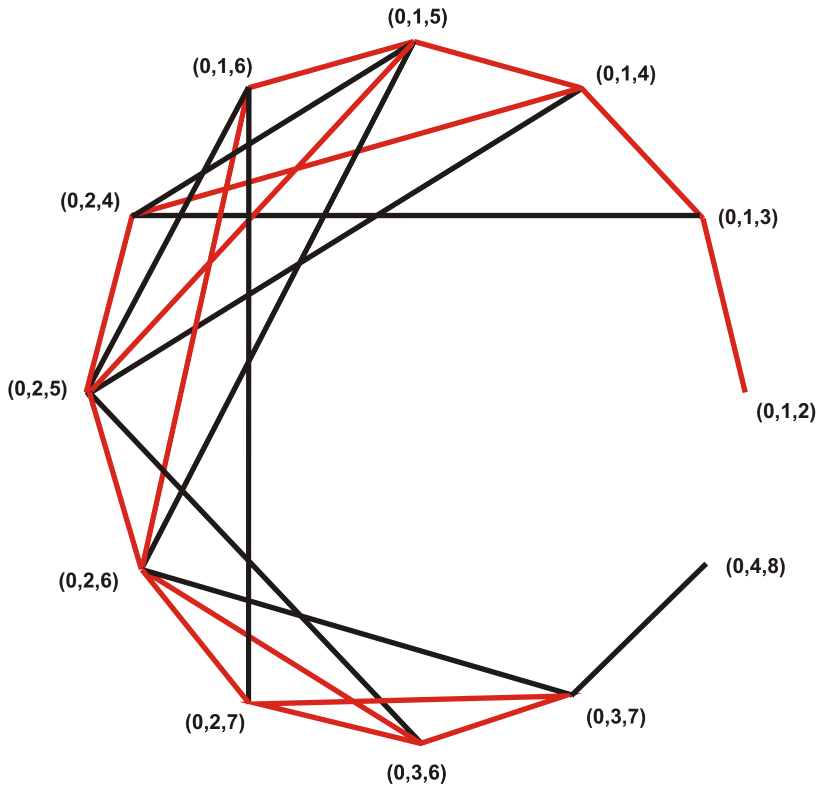
Graphe des 3-chords de Forte

Jonction de deux nombres communs



Graphe non-planaire

Différence d'une unité



Représentation planaire

difficulté de représentations si n élevé

Pavages de Polyominos

Associer des notes ou des rythmes à chaque polyomino

10	6	3	11	7	2	10	7	3	5
3	1	5	9	0	4	5	9	8	1
7	8	4	1	9	7	11	2	6	10
10	5	11	3	10	6	3	11	8	6
2	1	5	8	0	1	6	10	1	5

Accord de 7e : (0, 4, 7, 11, 2)

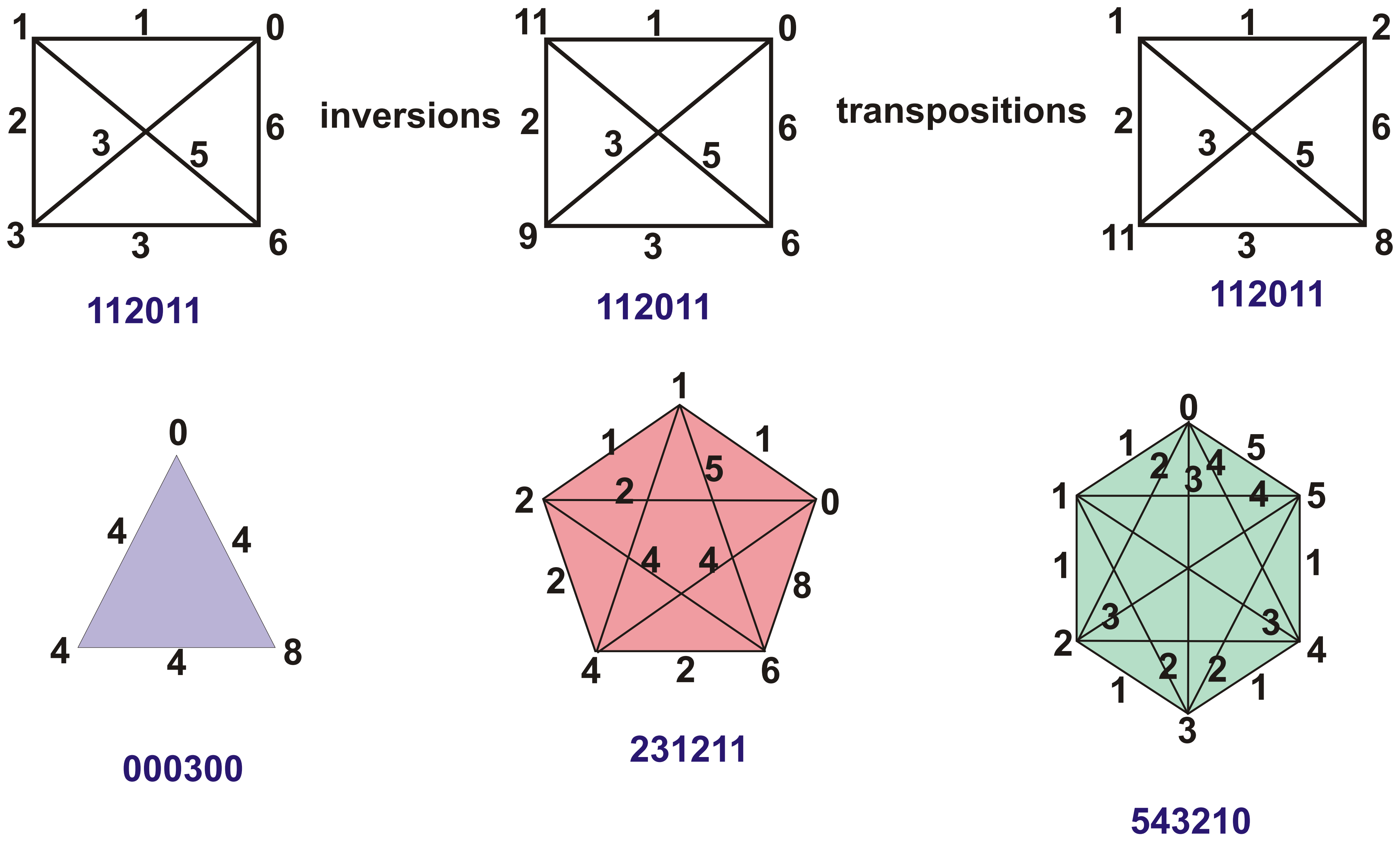
		2	
0	4	7	11

Règles d'évolution

- Translation horiz. ou vert. +1 par case
- Rotation de Pi : + 6 par case
- Rotation de Pi/2 : + 3 par case
- Rotation de - Pi/2 : - 3 par case

Vecteurs intervallaires

Le vecteur intervallaire est invariant sous l'action du groupe dihédral

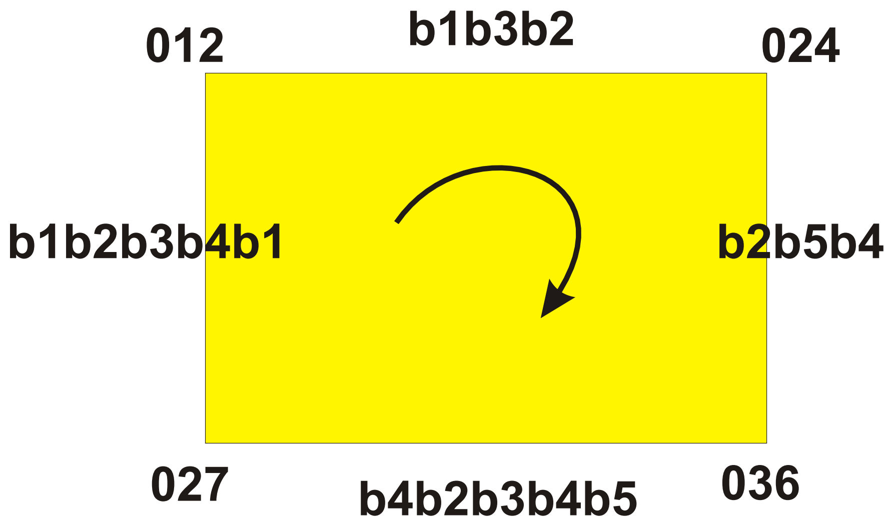


Action du groupe des tresses

L’action de bi sur (x1, ...xn) intervertit xi et x(i+1)

L’action des tresses sur les vecteurs intervallaires des 3-accords correspond aux 3 orbites de la partition de 3 : (3) (2,1) et (1,1,1)

210 000
b2
201 000
b3
200 100
b1
020 100



Accord	Vecteur	
048	000 300	Partition (3)
012	210 000	Partition (2,1)
024	020 100	
027	010 020	
036	002 001	
013	111 000	Partition (1,1,1)
014	101 100	
015	100 110	
016	100 011	
025	011 010	
026	010 101	
037	001 110	

Permutations associées

L'accord 024 a pour vecteur intervallaire 020 100

	020 100	123 456
b4		
	020 010	123 546
b5		
	020 001	123 564
b2		
	002 001	132 564

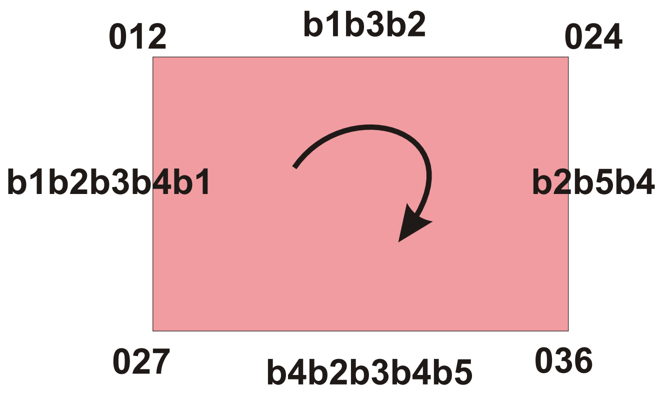
a = b2b5b4 = (1) (2,3) (4, 5, 6)

De même

b = b4b2b3b4b5 = (1, 3, 45,)(2) (6)

c = b1b2b3b4b1 = (1)(2,6, 5, 3) (4)

d = b1b3b2 = (1, 3, 4, 2) (5) (6)



Groupe engendré et sous-groupes de Sylow

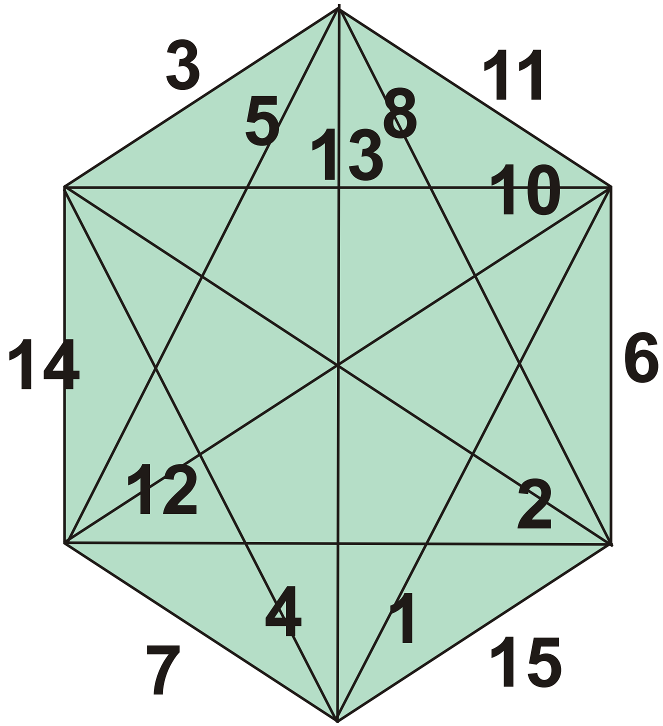
G = permgroup(6, {a,b,c,d})
card(G) = 720 = 2^4.3^2.5

S1 = Sylow (G,2) = permgroup(6, (2,3), (1,6,5,4)(2,3), (4,6)}
card(S1) = 16
S2 = Sylow (G,3) = permgroup(6, (2,5,3), (1,4,6)(2,3,5)}
card(S2) = 9
S3 = Sylow (G,5) = permgroup(6, u=(1,6,4,3,2), u^2, u^3, u^4}
card(S1) = 16

Partitions magiques

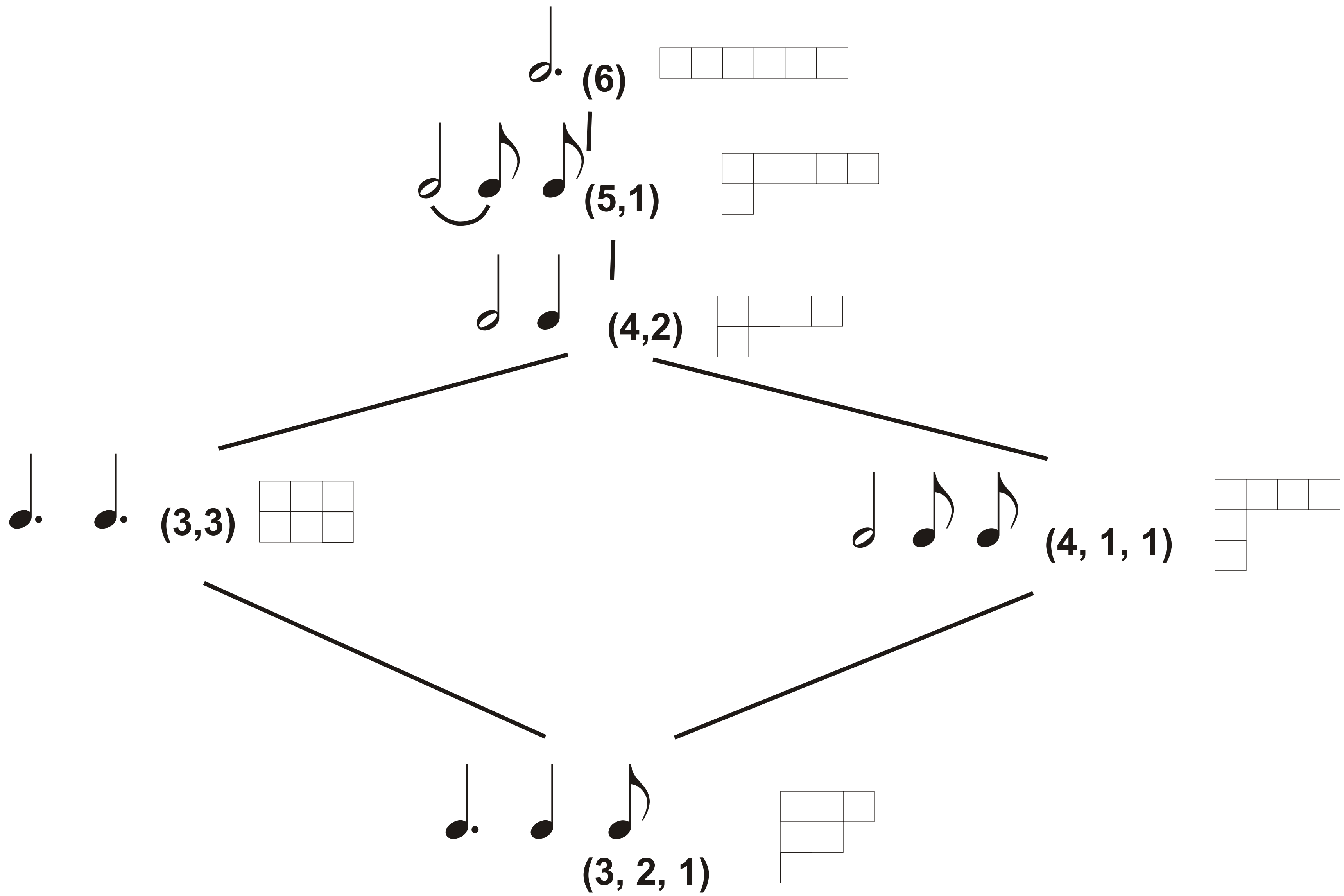
L'étiquettage d'un graphe dont la somme des poids des arêtes est constant est une labellisation dite magique

La somme est 40 (extrait d'une partition de 40)

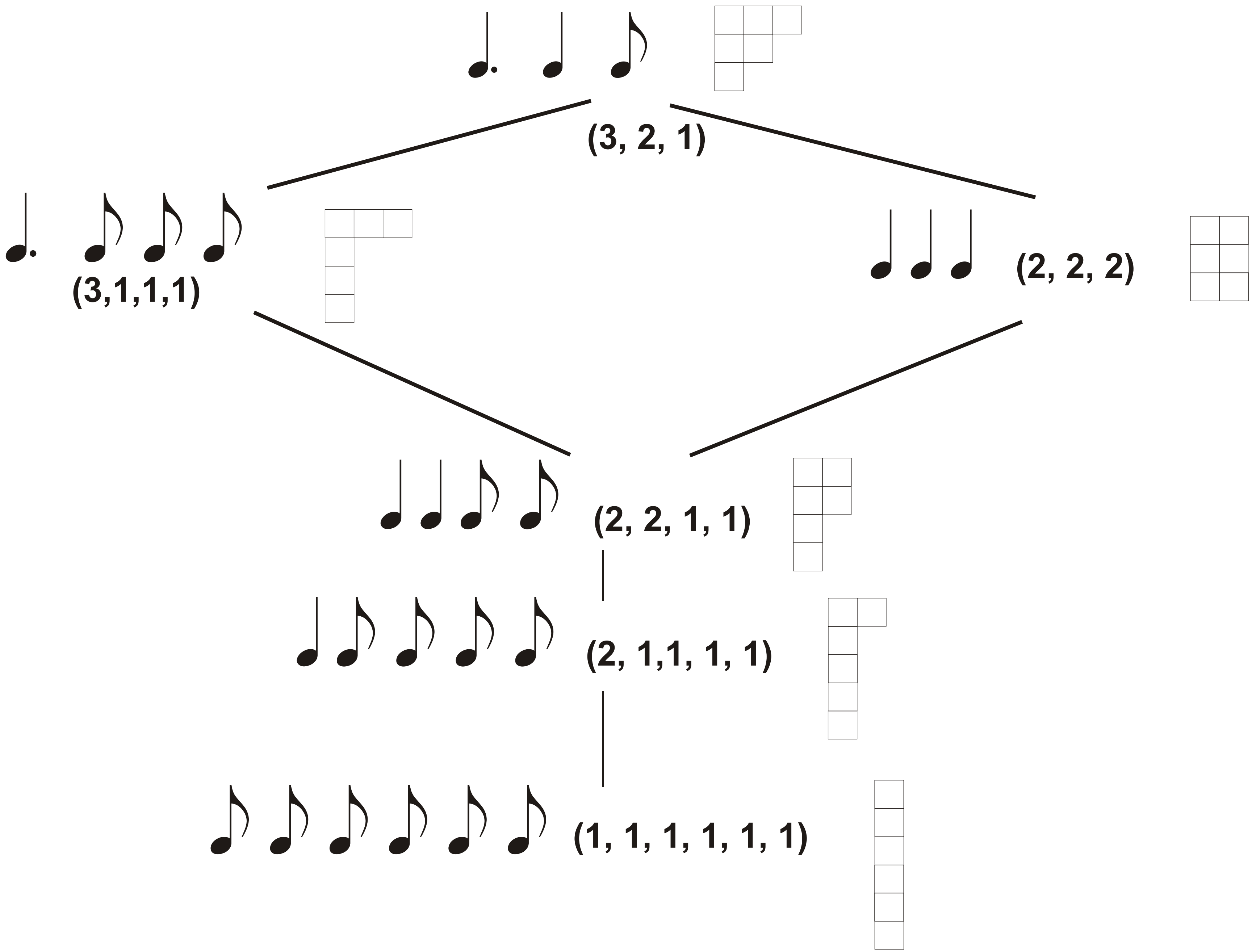


Diagrammes de Young

Parititition de 6 + ordre lexicographique (6) > (5,1) > (4,2) etc.

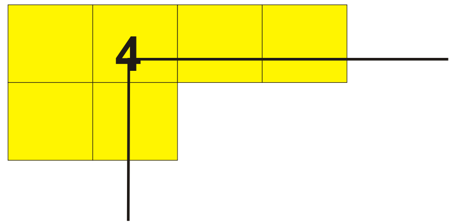


Diagrammes de Young



Diagrammes de Young

Action des permutations



$h_{i,j}$ = nombre de cases dans l'équerre

Tableau standard = les nombres sont disposés en ordre croissants dans les lignes et les colonnes

5	4	2	1
2	1		

Graphe de P = hij est inscrit dans chaque case de P

Degré de la représentation = Nombre de tableaux standards

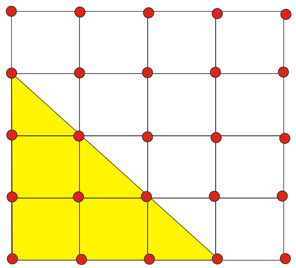
$$= \frac{n\,!}{h\,!}$$

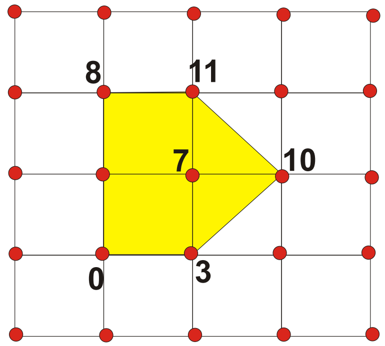
h ! = produit des nombres hij dans la graphe de P

$$= \frac{6\,!}{5.\,4.\,2.\,2} = 9$$

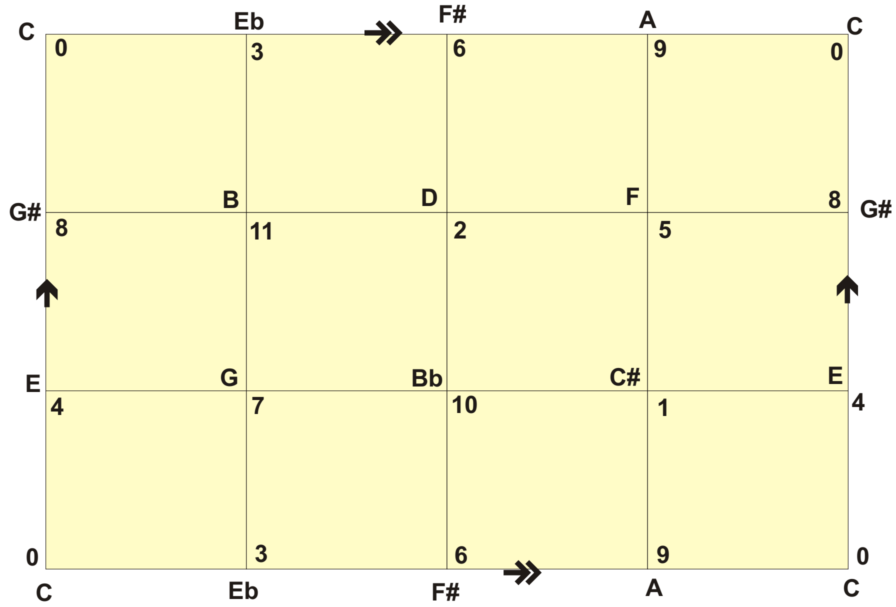
Accords et motifs réflexifs

Dans un réseau de points entiers, polytope qui entoure un point unique





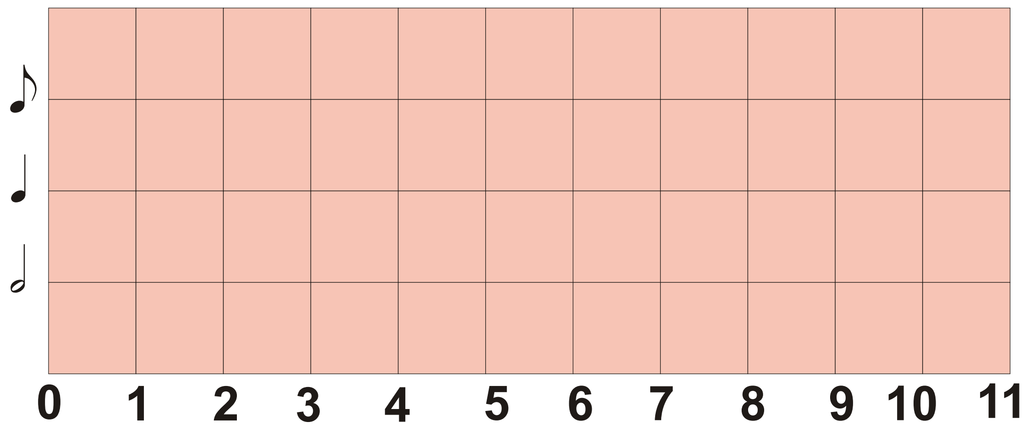
(3, 5, 9, 11) entoure 10 ou 4



Formule de Pick = Volume(P) = Card(P) -card(BordP)/2 -1

16 polytopes si dim = 2

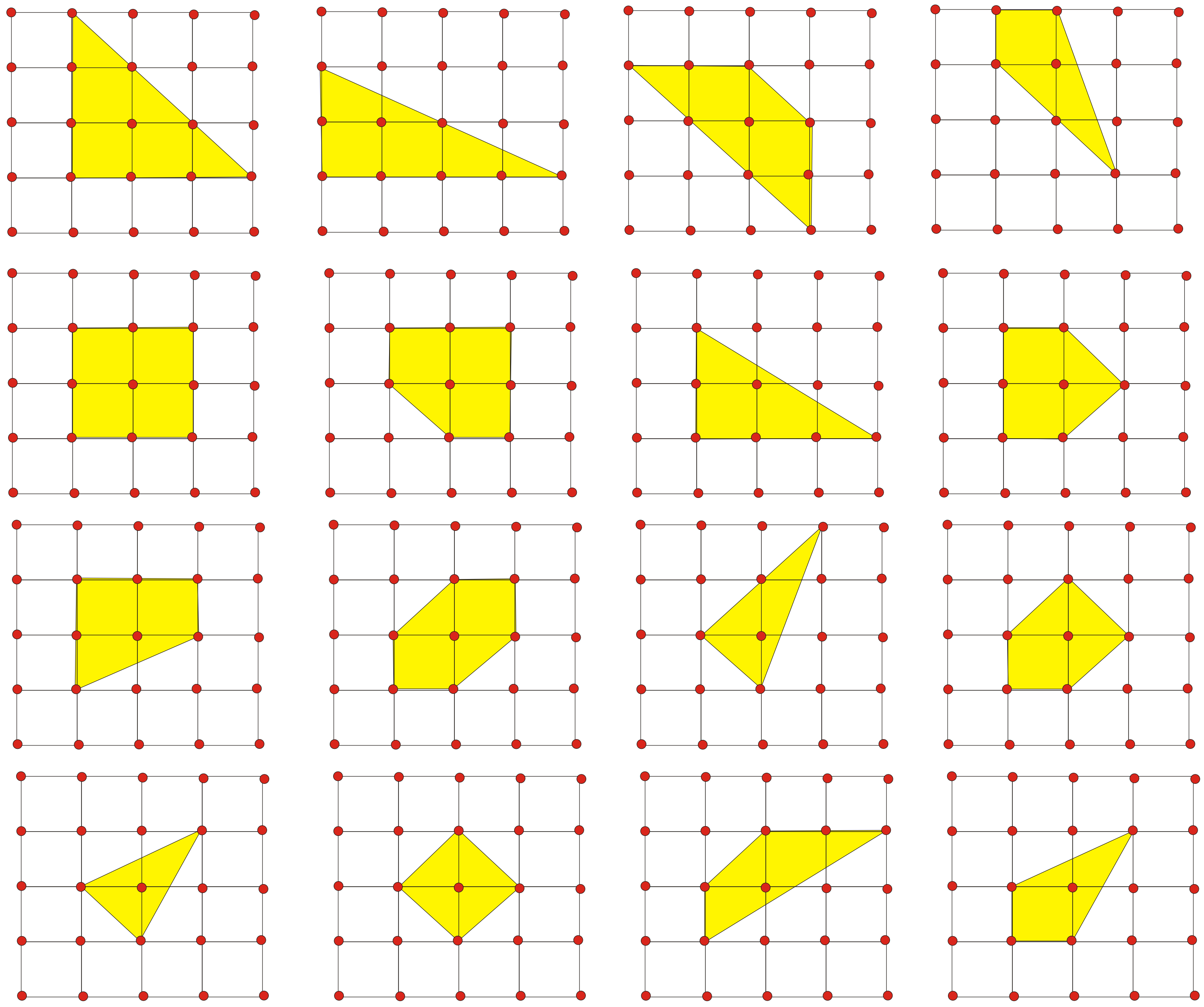
4319 polytopes si dim = 3



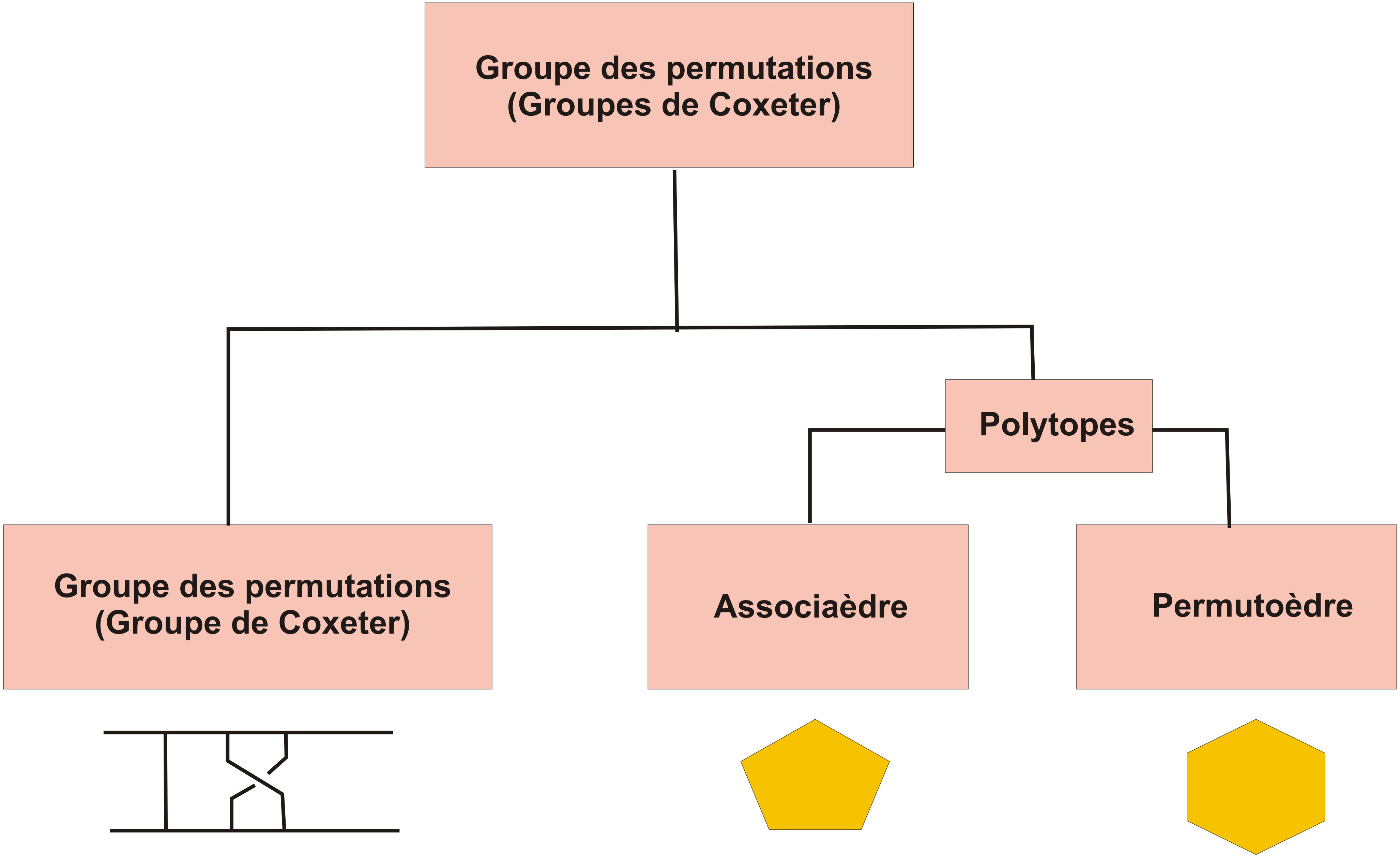
Polynomes d'Ehrhart = P(x)=vol(P).x^2 +card(BordP).x/2 + 1

Accords et motifs réflexifs

Dans un réseau de points entiers, polytope qui entoure un point unique

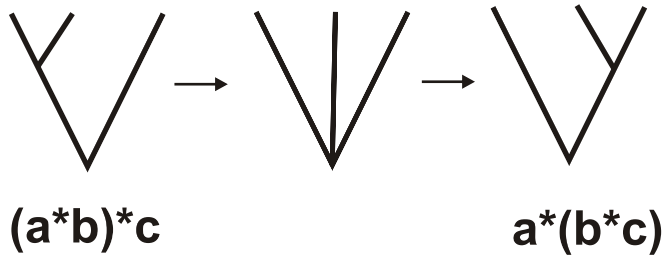


Diagrammes et groupes

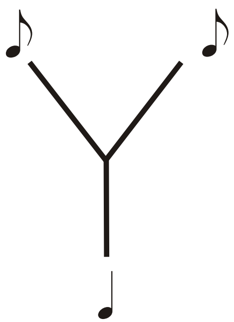


Polytopes de Stasheff

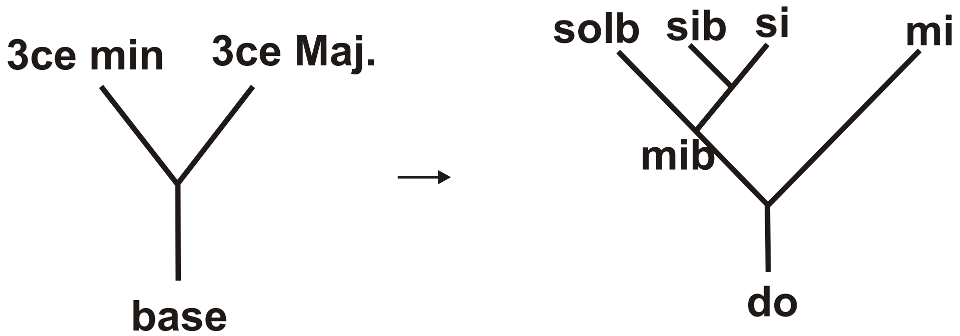
L'associaèdre K4

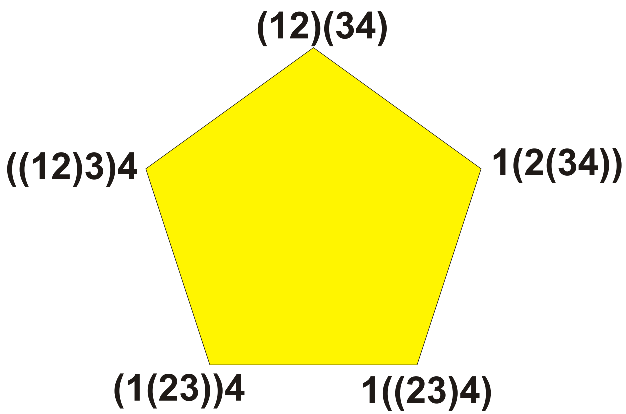


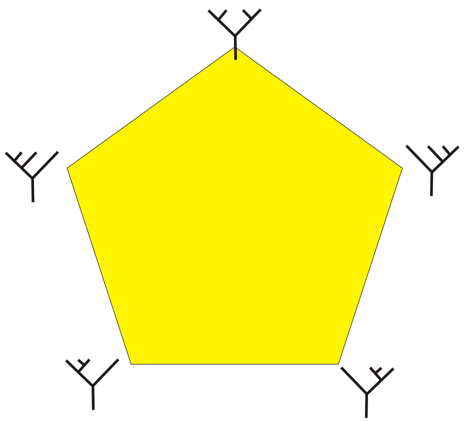
Greffe rythmique

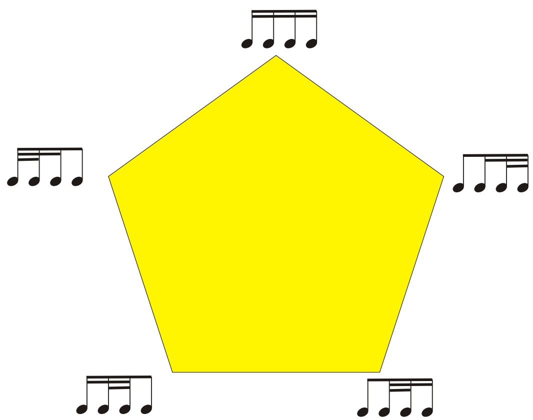


Greffe harmonique

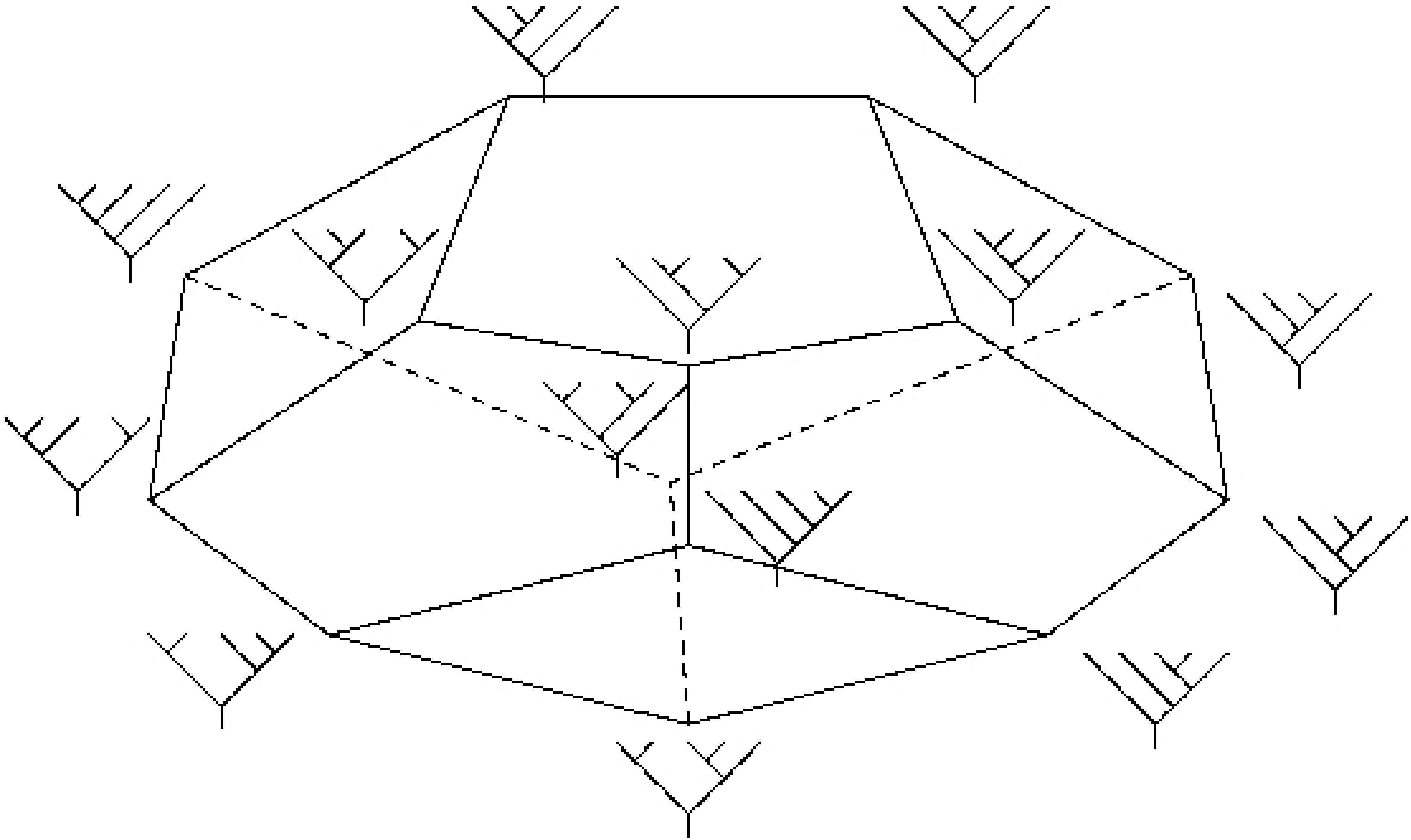




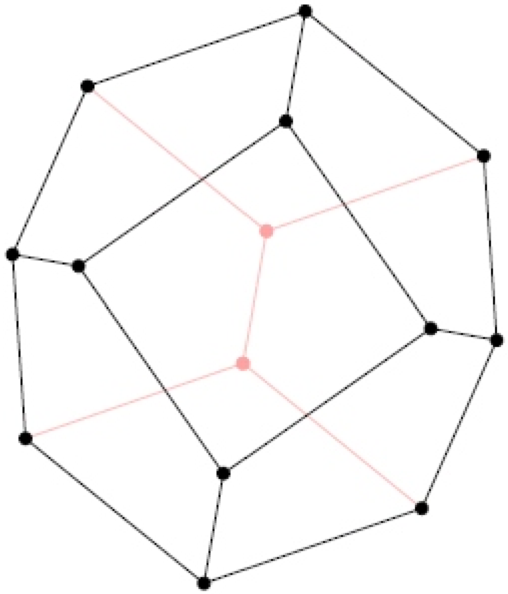




Polytopes de Stasheff



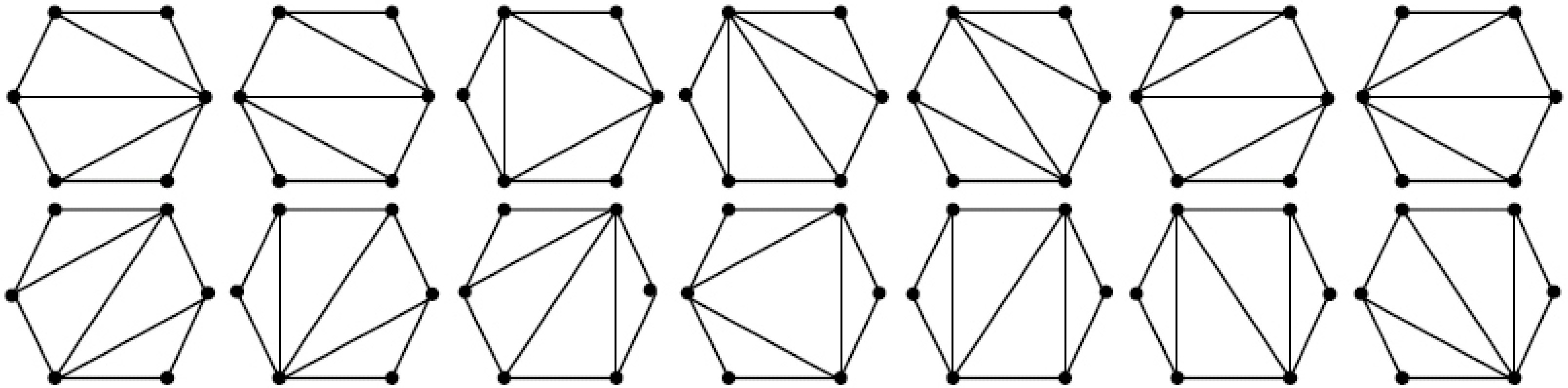
Polytopes de Stasheff



14 parenthésages

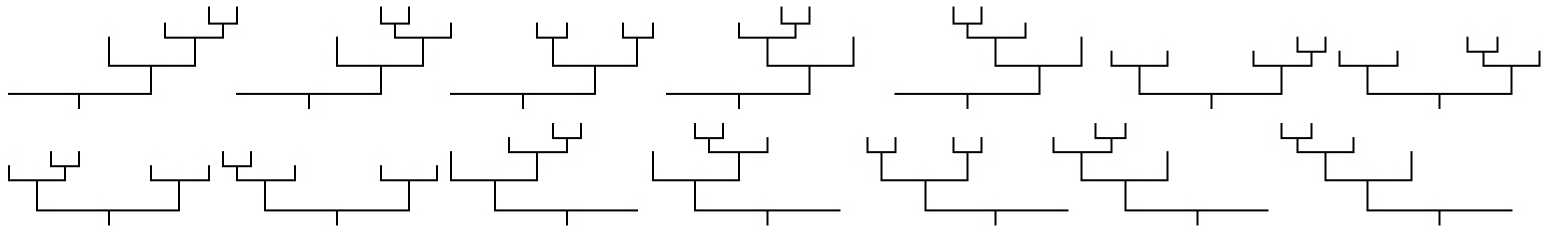
$(1(2(3(45))))$	$(1(2((34)5)))$
$(1((23)(45)))$	$(1((2(34))5))$
$(1(((23)4)5))$	$((12)(3(45)))$
$((12)((34)5))$	$((1(23))(45))$
$((1(2(34)))5)$	$((1((23)4))5)$
$(((12)3)(45))$	$(((12)(34))5)$
$(((1(23))4)5)$	$((((12)3)4)5)$

14 triangulations de l'hexagone

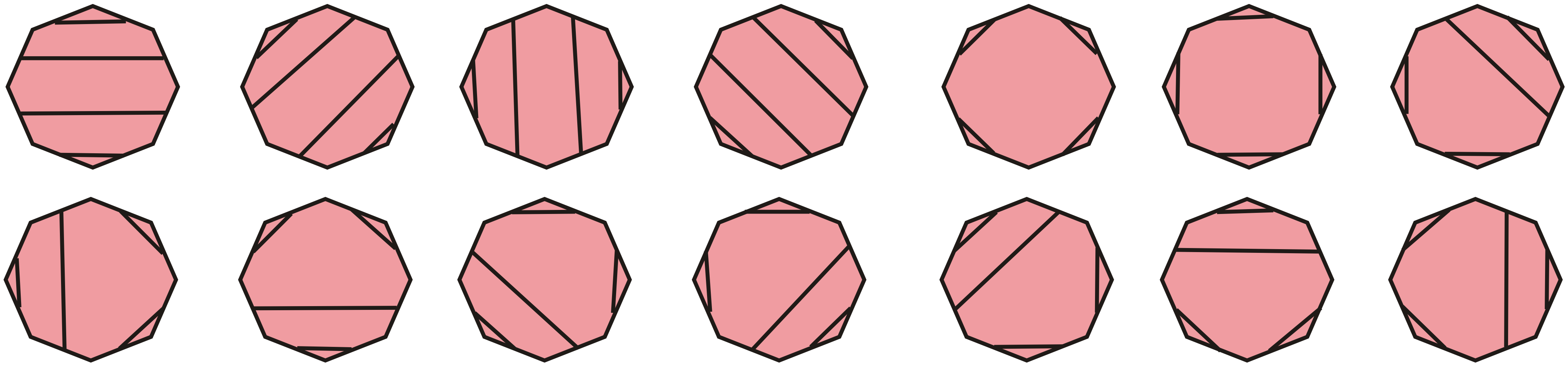


Polytopes de Stasheff

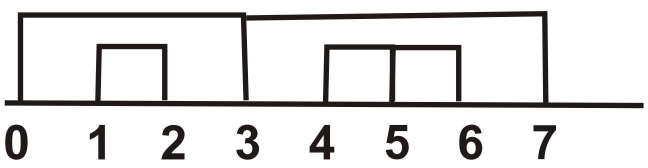
14 arbres binaires



14 façons de recoller un octogone sur la sphère



14 partitions sans croisements



(037)(12)(456)

$$\text{Nb de Catalan} = \frac{(2n)\,!}{(n+1)\,!\; n\,!}$$

Algèbre dendriforme

Une algèbre dendriforme est un espace vectoriel A muni de deux opérations bianires de $A \otimes A \to A$ une opération gauche $x \otimes y \to x \prec y$ et une opération droite $x \otimes y \to x \succ y$ vérifiant les relations

$$\begin{aligned}
(x &\prec & y) \prec z = x \prec (y \prec z + y \succ z) \\
(x &\succ & y) \prec z = x \succ (y \prec z) \\
(x &\succ & (y \succ z) = (x \prec y + x \succ y) \succ z
\end{aligned}$$

L'opération

$$x * y = x \prec y + x \succ y$$

est associative

L'élément neutre est noté 1 ($1 \prec 1$ et $1 \succ 1$ ne sont pas définis)

$$1 \prec x = x \succ 1 = 0, \quad x \prec 1 = 1 \succ x = x$$

Algèbre des arbres binaires

Algèbre des arbres binaires planaires enracinés = Algèbre dendriforme

On note x un arbre
xg l'arbre gauche et xd l'arbre droit
v la greffe

A0={ | }

A1= {V}

A2 = {   **}**

A3 = { voir K4}

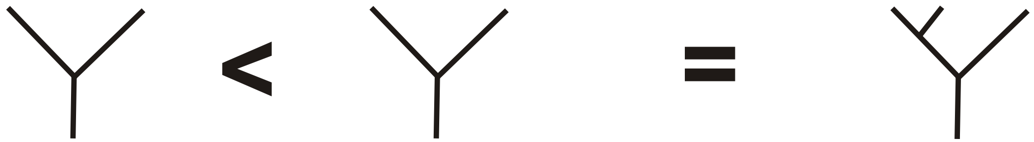
A4 = { 14 éléments }

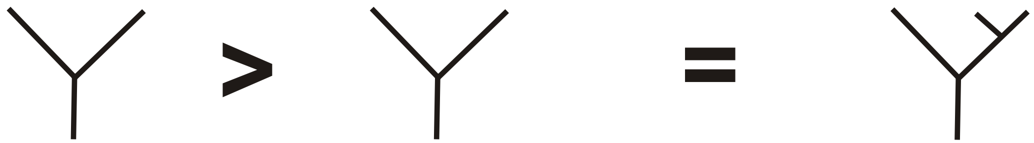
Card An = Nb de Catalan

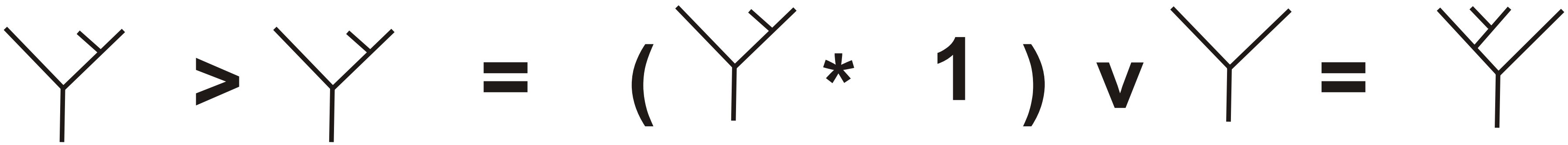
x < y = xg v (xd * y)

x > y = (x * yg) v yd

x * y = x < y + x > y

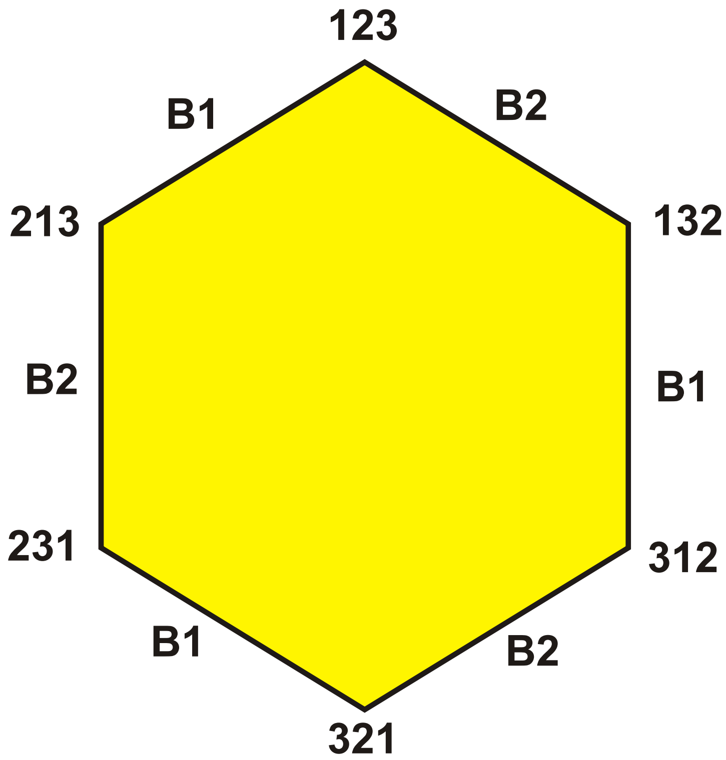


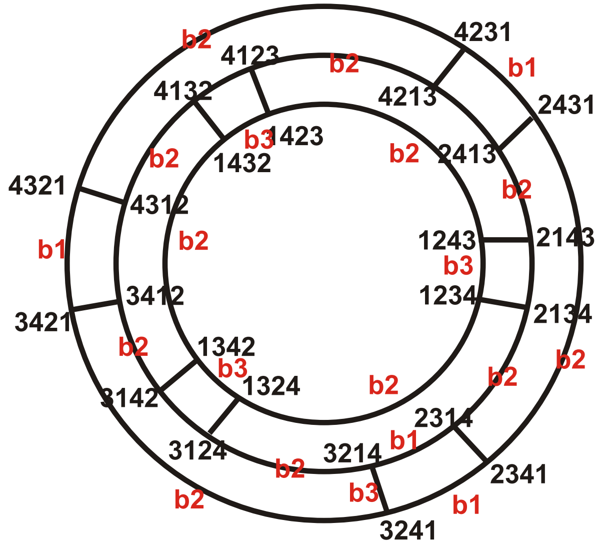


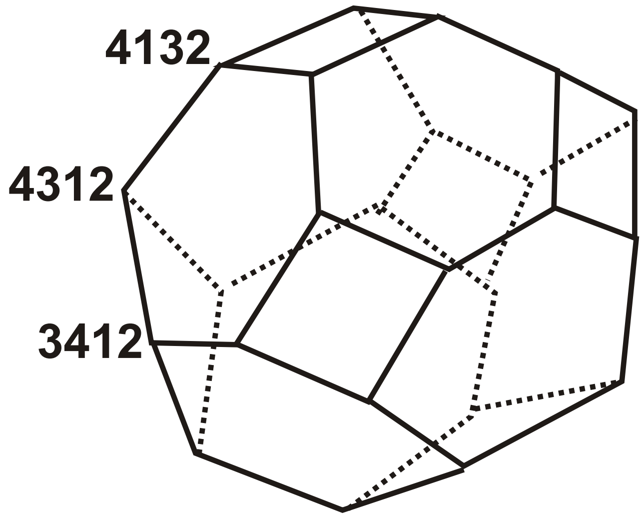


Permutoèdre

Permutoèdre = enveloppe convexe de n ! sommets (s^-1(1), ..., s-1 (n))







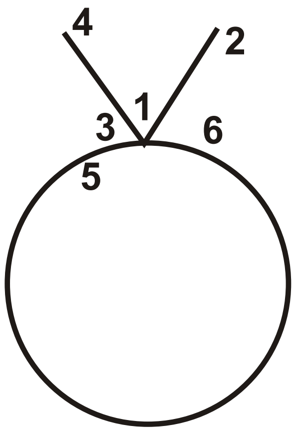
Equation de Yang Baxter
B1B2B1 = B2B1B2

Constellations et Cartes

C = [g1, g2, .., gn] (gi dans Sn groupe des permutation) est une constellation si
G= < g1, ..., gn > agit transitivement sur l'ensemble des n points
g1g2....gn = id
G est appelé groupe cartographique
Passeport de C = [t1, t2, ..., tn] ti = structure des cycles de gi (= partition de n)
Exemple [3^2 1, 2 1^5, 7] est un passeport

Une carte M est un graphe sur une surface X
(1) les sommets sont des points distincts de X
(2) les arêtes sont des courbes sur X qui se coupent aux sommets
(3) Si on découpe X selon le graphe, les faces restantes
sont les composantes connexes homéomorphes à un disque ouvert

Pour une carte : S - A + F = 2 -2g



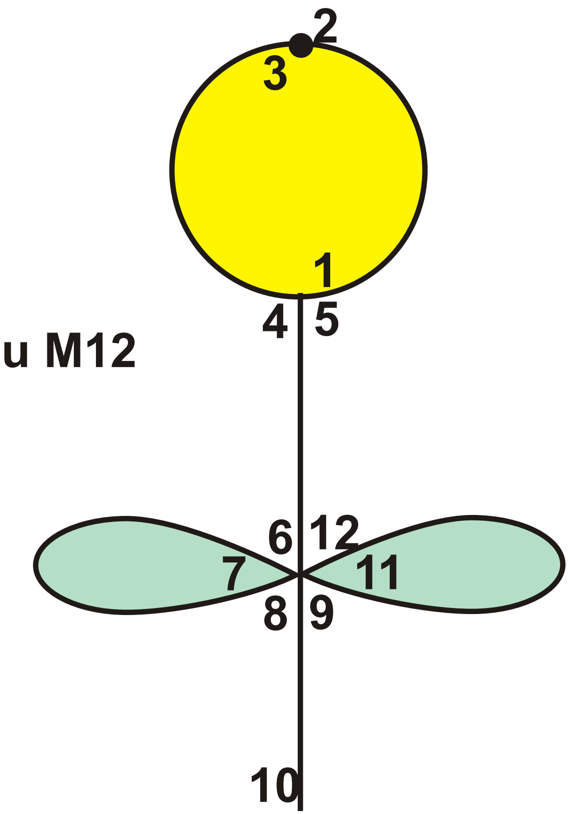
Permutation des sommets :
a = (1, 2) (3,4) (5,6)
Permutation des arêtes :
b = (1,3, 5, 6) (2) (4)
Permutation des faces :
c = a^-1. b ^-1 = (1, 2, 6, 3, 4) (5)

Ile de feu 2 de Messiaen

Ile de feu 2 utilise deux permutations
a = (7 6 8 5 9 4 10 3 11 2 12 1)
b = (6 7 5 8 4 9 3 10 2 11 1 12)

Soit sous forme de cycles
a = (1 7 10 2 6 4 5 9 11 12) (3 8)
b = (1 6 9 2 7 3 5 4 8 10 11) (12)

Les deux permutations engendre le groupe de Mathieu M12
Ordre (M12) = 95 040

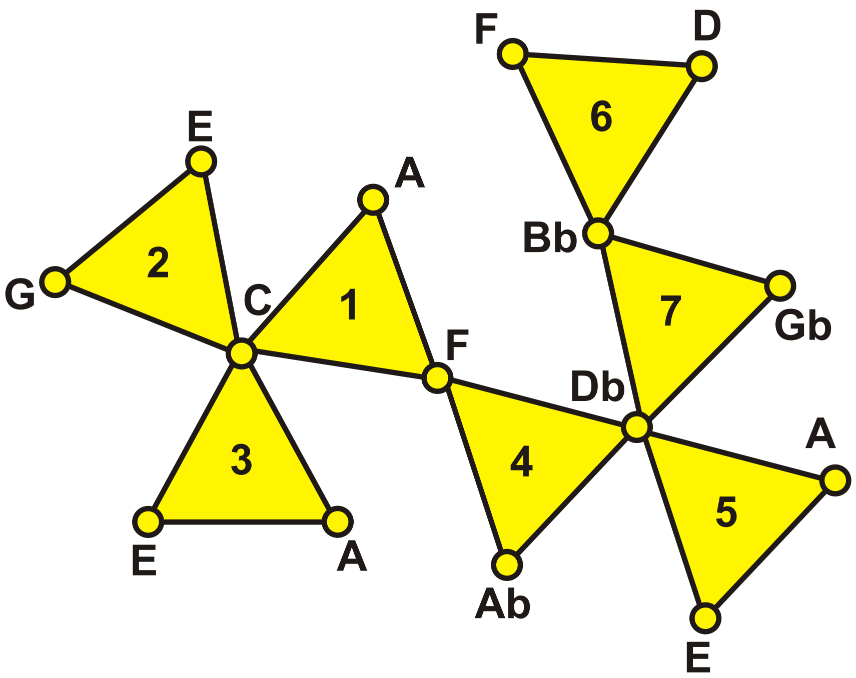


Passeport = [2^6, 2.3.6.1, 1^2. 2.8]
Permutation des sommets :
a = (1, 2) (3, 4) (5, 6) (7, 8) (9, 10) (11, 12)
Permutation des arêtes :
b = (1, 4, 5) (2, 3)(6, 7, 8, 9, 11, 12)
Permutation des faces :
c= a^-1. b^-1 = (1, 3)(2, 5, 12, 9, 10, 8, 6, 4) (7) (11)
Groupe des permutations de 12 engendré par a et b = M12

Cactus

Un cactus est une contellation [g1, ..., gk, b^-1] avec
b = permutation cyclique de (1, 2, ..., n)
g1....gk = b

Cactus d'accords majeurs



g1 = (1, 2, 3) (4, 5, 7) (6)

g2 = (1, 4) (2) (3) (5) (6) (7)

g3 = (1) (2) (3) (4) (5) (6, 7)

---

g1g2g3 = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

Passeport = [3^2 1, 2 1^5, 1^5 2, 7]

Nombre de cactus ayant ce passeport = 49