Invitation au raisonnement temporel : logiques temporelles et raisonnement qualitatif

Gérard Ligozat
LIMSI, Université Paris-Sud
Orsay, France

Plan de l'exposé

1. Raisonnement temporel : de quoi s'agit-il ?
2. Logique et raisonnement temporel : logiques temporelles
3. Propagation des contraintes : réseaux de contraintes temporelles
4. Algèbre et raisonnement temporel : contraintes et modèles
5. Conclusion

1. Raisonnement temporel : de quoi s'agit-il ?

- Représenter des connaissances relatives à des événements situés dans le temps
- Raisonner : obtenir des connaissances implicites à partir de ce qui est explicitement représenté
- Cohérence - de ce qui est représenté
  -ajout de nouvelles connaissances
- Propriétés du temps (début, fin, linéaire, dense,…) et raisonnement : quelles sont les inférences valides pour un type de temps donné ?
- Variété des types de temps selon les phénomènes modélisés

Trois points de vue

- Logique
- Propagation de contraintes
- Algébrique

Le point de vue logique

Logique — un langage formel

— des principes d'interprétation

et/ou

— un système déductif

Résultats : — ontologie et principes

— excellent pour exprimer propriétés importantes (vivacité, etc.)

— variantes « réifiées »

— mise en œuvre

Le point de vue propagation de contraintes

Satisfaction de contraintes (Allen)

— graphes (réseaux de contraintes)
— langage avec disjonctions limitées
— problème central : cohérence
— algorithmes de propagation disponibles

Problèmes :

— complexité (NP-complétude)
— fragments polynomiaux

Le point de vue algébrique

- Formulation algébrique
  - — formulation algébrique de la logique
  - — algèbres relationnelles
  - — ressources de l'algèbre universelle
- Résultats :
  - — connaissance des modèles
  - — complétude syntaxique des théories associées

    => décidabilité

2. Logique et raisonnement temporel : logiques temporelles

- Un langage
  — basé sur la logique propositionnelle

  var. prop. p, q, r, ...

  p = *le soleil brille*
  q = *il neige*
  r = *il fait chaud*

  connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$

  formules (bien formées)

  $(p \wedge (\neg q) \Rightarrow r)$

- interprétations de la logique propositionnelle
  - atemporelles
  - une interprétation = le choix d'une valeur de vérité pour chaque variable propositionnelle = un « cas de figure »
  - par exemple : p = vrai q = faux

    r = faux

    $(p \wedge (\neg q) \Rightarrow r)$

    => alors la formule est fausse !

    $V : \{p, q, r, ...\} \rightarrow \{\text{vrai}, \text{faux}\}$

- Toute formule a une valeur de vérité bien déterminée (grâce aux règles de calcul habituelles)

- Logique temporelle « à la manière de » Prior
  - — intuition p = le soleil brille ***maintenant***
  - — implicitement, toute formule est évaluée en un indice temporel

F*p* est vraie maintenant s'il existe un indice *futur* où *p* est vraie

P*p* est vraie maintenant s'il existe un indice *passé* où *p* est vraie

G*p* est vraie maintenant si *p* est vraie pour tout indice *futur* (*going to*)

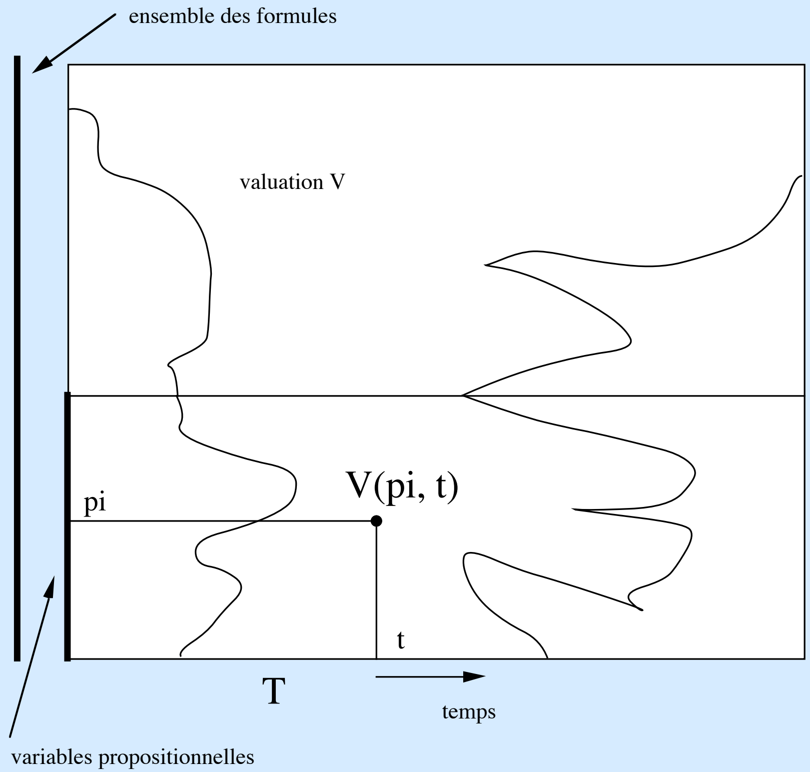
H*p* est vraie maintenant si *p* est vraie pour tout indice *passé* (*has been*)

Le langage : définition formelle

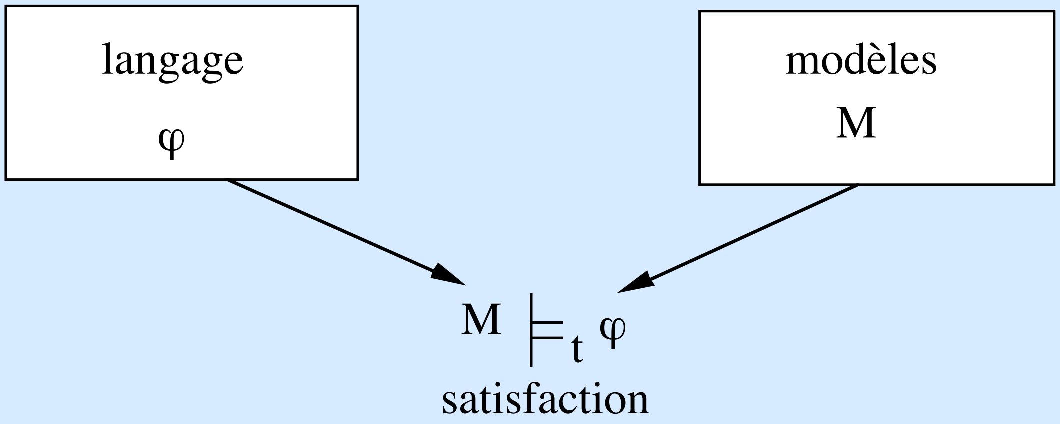
- Toute variable propositionnelle est une formule
- Si φ est une formule, alors $(\neg\ \varphi)$ est une formule
- Si φ et ψ sont des formules, alors $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$ sont des formules
- Si φ est une formule alors $(\boldsymbol{G}\ \varphi)$, $(\boldsymbol{F}\varphi)$, $(\boldsymbol{H}\ \varphi)$ et $(\boldsymbol{P}\ \varphi)$ sont des formules
- Seules les expressions obtenues par l'une des conditions précédentes sont des formules

Sémantique : modèles de Kripke

- modèle de Kripke   M = (T, <, V)



Définition de la satisfaction



- M satisfait p en t ssi $t \in V(p)$
- M satisfait $\neg\ \varphi$ en t ssi on n'a pas M satisfait φ en t
- M satisfait $(\varphi \wedge \psi)$ en t ssi M satisfait φ en t et M satisfait ψ en t
- M satisfait $(\varphi \vee \psi)$ ssi M satisfait φ en t ou M satisfait ψ en t
- M satisfait $(\varphi \Rightarrow \psi)$ ssi M ne satisfait pas φ en t, ou si M satisfait ψ en t
- M satisfait $\boldsymbol{G}\varphi$ en t ssi pour tout $x \in T$ tel que $t < x$, M satisfait φ en x
- M satisfait $\boldsymbol{H}\varphi$ en t ssi pour tout $x \in T$ tel que $t < x$, M satisfait φ en x

Notions logiques

- Formules satisfaisables
- Satisfaction dans un modèle
- Formules valides (dans une classe de modèles)
- Conséquence logique :

  ψ est conséquence logique de φ si, pour toute interprétation où φ est vraie, ψ l'est aussi

Principes valides (relativement à une classe)

- Exemple 1 : les formules du type $\varphi \Rightarrow \boldsymbol{HF}\varphi$
- Exemple 2 : les formules du type $\boldsymbol{G}\varphi \Rightarrow \boldsymbol{GG}\varphi$

  structures temporelles transitives
- Correspondances

formule temporelle	Propriété
$\mathbf{G}\ \varphi \Rightarrow \mathbf{GG}\ \varphi$	transitivité
$\mathbf{P}\ \varphi \Rightarrow \mathbf{GP}\ \varphi$	transitivité
$\mathbf{F}\ \varphi \Rightarrow \mathbf{FF}\ \varphi$	densité
$\mathbf{P}\ \varphi \Rightarrow \mathbf{H}\ (\mathbf{P}\ \varphi \vee \varphi \vee \mathbf{F}\varphi)$	linéarité gauche
$\mathbf{F}\ \varphi \Rightarrow \mathbf{G}\ \varphi$	un successeur au plus

Axiomatiques et complétude

- Exemple : la **logique temporelle minimale**

  Schémas de formules :

  $$\boldsymbol{G}\,(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\boldsymbol{G}\,\varphi \Rightarrow \boldsymbol{G}\psi)$$

  $$\boldsymbol{H}\,(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\boldsymbol{H}\,\varphi \Rightarrow \boldsymbol{H}\,\psi)$$

  $$\varphi \Rightarrow \boldsymbol{GP}\,\varphi$$

  $$\varphi \Rightarrow \boldsymbol{HF}\,\varphi$$

  Règles de déduction :

  — *modus ponens* : si φ et $(\varphi \Rightarrow \psi)$ sont des théorèmes, alors ψ est un théorème

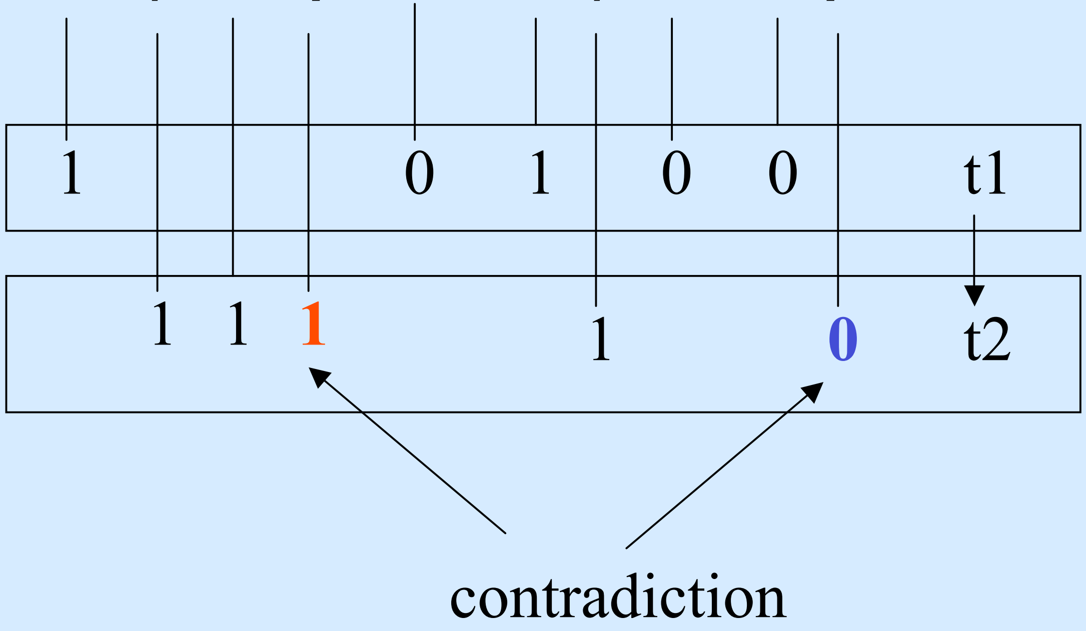
  — généralisation temporelle : si φ est un théorème, alors $\boldsymbol{G}\,\varphi$ et $\boldsymbol{H}\varphi$ également

Raisonner

- Pourquoi les axiomes de la logique temporelle minimales sont-ils valides ?
- Exemple : $\varphi \Rightarrow \boldsymbol{GP}\ \varphi$
  - si faux en *t*, c'est que φ vrai et **GP**φ faux en *t*
  - **GP**φ faux signifie qu'il *existe t' > t* où **P**φ faux
  - **P**φ faux en *t'* veut dire que *pour tout t '' < t'*, donc en particulier en *t,* φ est fausse
  - contradiction !
- Réfutation, à la base des ***méthodes de tableaux***

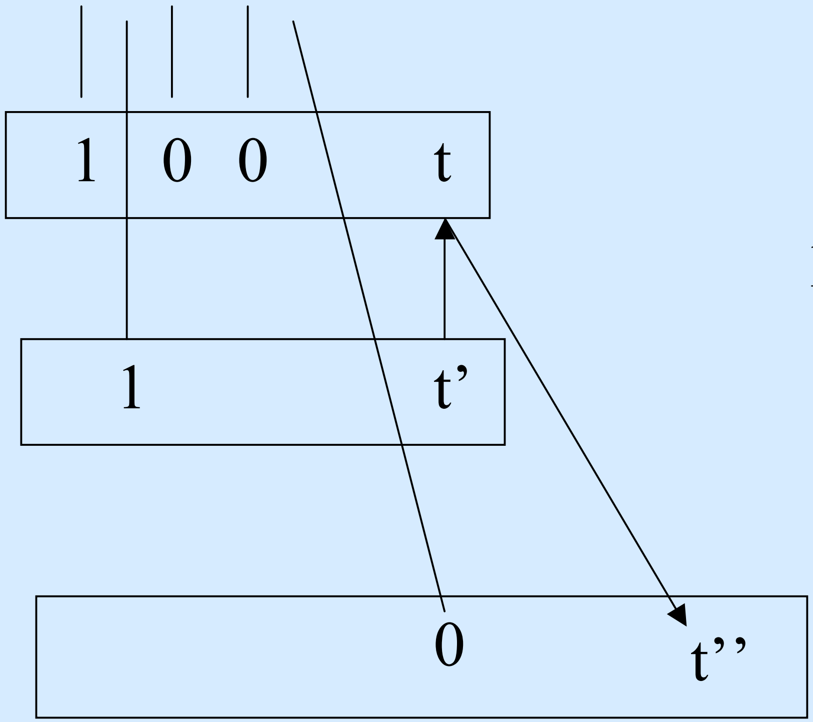
Principe de réfutation

- $\boldsymbol{G}\,(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\boldsymbol{G}\,\varphi \Rightarrow \boldsymbol{G}\,\psi\,)$



Propriétés des modèles

- $\mathbf{P}\,\varphi \Rightarrow \mathbf{G}\,\mathbf{P}\varphi$



contradiction si la précédence est transitive

Extension au langage des prédicats

- $\exists x\ (\mathrm{Phil}(x) \wedge \mathbf{F}\ \mathrm{Roi}(x))$
- $\exists x\ \mathbf{F}\ (\mathrm{Phil}(x) \wedge \mathrm{Roi}(x))$
- $\mathbf{F}\ \exists x\ (\mathrm{Phil}(x) \wedge \mathbf{F}\ \mathrm{Roi}(x))$
- $\mathbf{F}\ \exists x\ (\mathrm{Phil}(x) \wedge \mathrm{Roi}(x))$

- Formule de Barcan :

  $\mathbf{F}\ \exists x\ P(x) \Rightarrow \exists x\ \mathbf{F}\ P(x)$

Logiques de Kamp

- $\boldsymbol{S}(p,q)$: depuis qu'on a eu p, on a q
- $\boldsymbol{U}(p,q)$: jusqu'à ce qu'on ait p, on aura q
- Plus expressive que celle de Prior
  - $\boldsymbol{S}(p, q \vee \neg q) = \boldsymbol{P}\, p$
  - $\boldsymbol{U}(p, q \vee \neg q) = \boldsymbol{F}\, p$
  - mais aussi $\boldsymbol{S}(q \vee \neg q, p) = \boldsymbol{P'}\, p$, etc.
- Thèse de Kamp : complétude pour les ordres totaux continus

Quelques exemples d'axiomes

- $\boldsymbol{H}(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\boldsymbol{S}(p, r) \Rightarrow \boldsymbol{S}(q, r))$
- $\boldsymbol{H}(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\boldsymbol{S}(r, p) \Rightarrow \boldsymbol{S}(r, q))$
- $p \wedge \boldsymbol{S}(q,r) \Rightarrow \boldsymbol{S}(q \wedge \boldsymbol{U}(p,r), r)$
- $\boldsymbol{S}(p,q) \wedge \neg \boldsymbol{S}(p,r) \Rightarrow \boldsymbol{S}(q \wedge \neg r, q)$
- $\boldsymbol{S}(p,q) \Rightarrow \boldsymbol{S}(p, q \wedge \boldsymbol{S}(p, q))$
- $\boldsymbol{S}(q \wedge \boldsymbol{S}(p, q), q) \Rightarrow \boldsymbol{S}(p, q)$
- $\boldsymbol{S}(p, q) \wedge \boldsymbol{S}(r, s) \Rightarrow \boldsymbol{S}(p \wedge r, q \wedge s)$
  $\vee\, \boldsymbol{S}(q \wedge r, q \wedge s) \vee \boldsymbol{S}(p \wedge s, q \wedge s)$

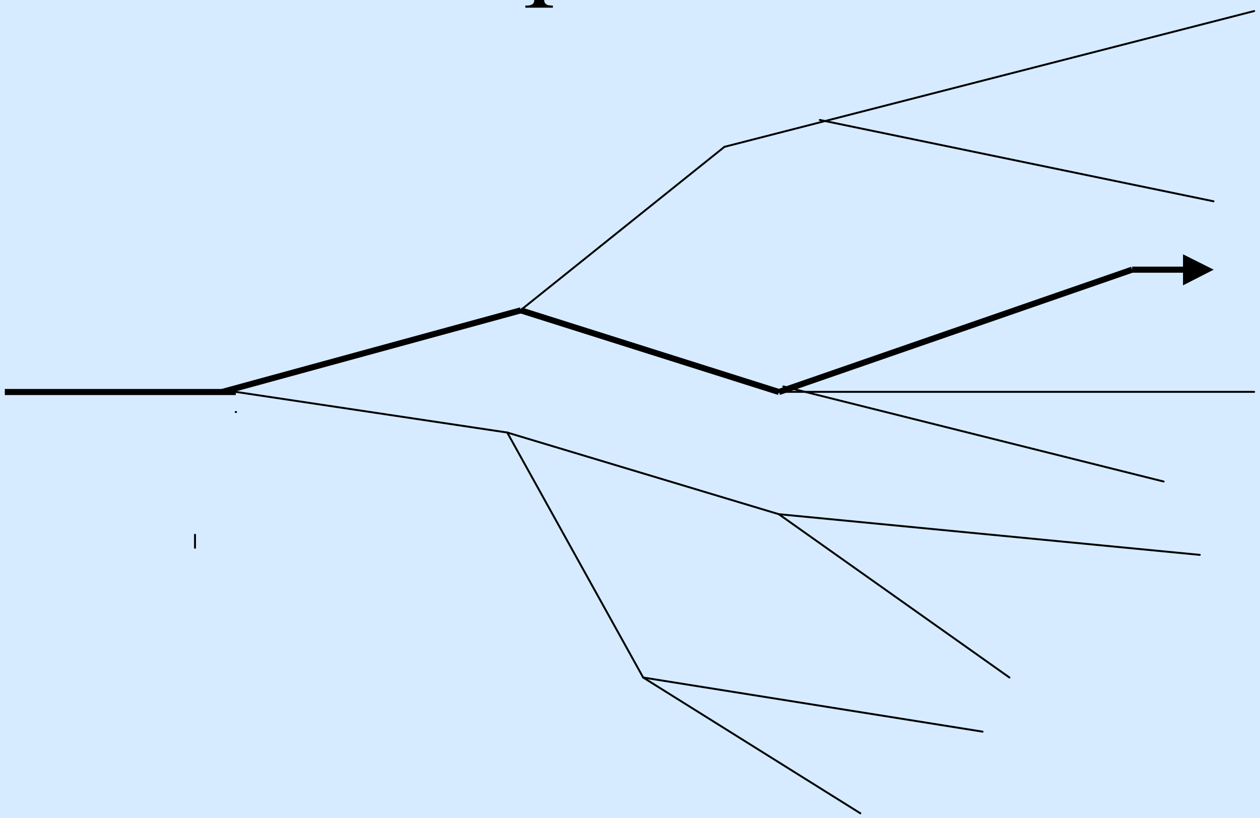
Modèles discrets : l'opérateur *O* (next)

- Suppose un temps discret
- $\boldsymbol{O}p = p$ est vrai à l'instant suivant
- Définissable en termes de ***U*** :
  - $\boldsymbol{U}(p,\ q \wedge \neg\, q) = \boldsymbol{O}\ p$
- Utilisé en particulier pour la logique des programmes : suite d'états

Spécification des programmes

- Vivacité : une propriété désirable *p* se produira
  - $\boldsymbol{F}\ p$
- Sûreté : une propriété indésirable *q* ne se produit jamais
  - $\boldsymbol{G}\ \neg\ q$

Temps ramifié



- Un seul passé, plusieurs futurs
- chronique = sous-ordre total maximal

Logiques des programmes

- CTL (*computation tree logic*, Clarke et Emerson)
  - **EX** (pour un chemin, à l'état suivant)
  - **E** (pour un chemin)
  - **A** (pour tous les chemins)
  - **U** (jusqu'à ce que)
  - Dérivés : **EF** (possible), **AF** (inévitable), **AG**, **AX**, etc.

Logiques temporelles et logique du premier ordre

- Un argument supplémentaire temporel :
  - *naissance(Mozart, 1756)*
- Traduction (t_0 = *maintenant*)
- $\boldsymbol{P}p \rightarrow \exists t\ (\ t < t_0 \wedge P(t))$
- $\boldsymbol{F}p \rightarrow \exists t\ (\ t > t_0 \wedge P(t))$
- $\boldsymbol{G}p \rightarrow \forall t\ (\ t > t_0 \Rightarrow P(t))$
- $\boldsymbol{H}p \rightarrow \forall t\ (\ t < t_0 \Rightarrow P(t))$

Correspondances

- Correspondances
  - propriété d'un cadre temporel (T,R) , p.ex. transitivité
  - validité d'une formule temporelle dans une classe de cadres, p.ex. $\boldsymbol{G}p \Rightarrow \boldsymbol{GG}p$
- Une formule f *correspond* à une propriété : elle est valide dans un cadre ssi ce cadre vérifie la propriété

Correspondances

- Caractérisation (van Benthem) des formules correspondant à une propriété (des cadres) du premier ordre
- Certaines formules correspondent à des propriétés du second ordre :
  - $\boldsymbol{F}p \wedge \boldsymbol{FG} \neg p \Rightarrow \boldsymbol{F}(\boldsymbol{HF}\, p \wedge \boldsymbol{G} \neg p)$
  - $\boldsymbol{P}p \wedge \boldsymbol{PH} \neg p \Rightarrow \boldsymbol{P}(\boldsymbol{GP}\, p \wedge \boldsymbol{H} \neg p)$ *(Dedekind)*
  - $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{H}p \Rightarrow p) \Rightarrow \boldsymbol{H}p$ *(bon ordre)*

Extensions : logiques réifiées

- Problème de l'aspect :
  - *J'ai sauvegardé mon fichier et le courant a sauté* → fichier sauvegardé
  - *Je sauvegardais mon fichier et le courant a sauté* → fichier sauvegardé ?
- Homogénéité des états :
  - *Il faisait beau entre midi et 4 heures* → entre 2h et 3h
  - *J'ai fait Paris-Lyon entre midi et 4 heures* → ?

Une solution (Allen, 1984)

- Etats et événements
  - *HOLDS(dort(Marie), (1h, 4h))*
  - *OCCURS(parcourt(Marie, Paris,Lyon),(1h,4h))*
- Axiomes :
  - $\forall s,i,j\ (HOLDS(s,i)\ et\ j \subset i \Rightarrow HOLDS(s,j))$
  - $\forall e,i,j\ (OCCURS(e,i)\ et\ j \subset i \Rightarrow \neg\ OCCURS(e,j))$

3. Propagation des contraintes : réseaux de contraintes temporelles

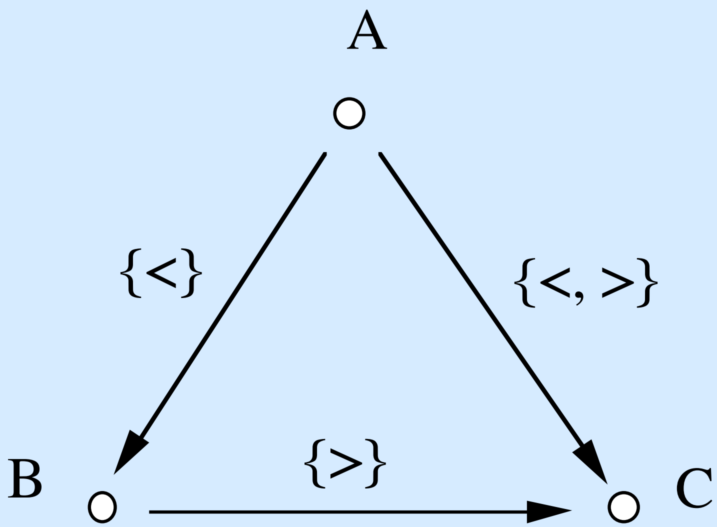
- Connaissances portant sur des événements temporellement situés
- Exprimées en termes de réseaux de contraintes temporelles
- Contraintes représentées par des relations qualitatives
- On veut pouvoir gérer ces connaissances :
  - — cohérence
  - — requêtes
  - — ajout de connaissances
  - — déterminer (un) (tous les) scénario(s)

- Exemple 1 (instants)
  - *Albert est arrivé avant Berthe*
  - *Berthe est arrivée après Charles*
    - cohérence : est-ce possible ?
    - requête : est-il possible que Charles et Albert soient arrivés simultanément ?
    - scénarios : A, C, B ; C, A, B ; A=C, B
    - ajout de connaissance :

      Albert est arrivé avant ou après Charles

      est-ce possible ? scénarios restants ?
- Trois relations de base (temps linéaire) dénotées par <, eq, >
- Connaissance : sous-ensembles de {<, eq, >}

Un réseau de contraintes (instants)



Albert est arrivé avant Berthe

Berthe est arrivée après Charles

Albert est arrivé avant ou après Charles

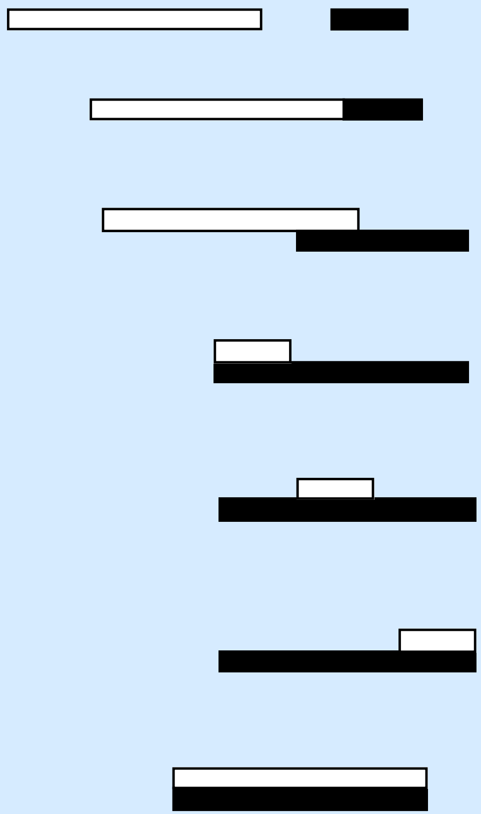
- Exemple 2 (intervalles)
  — séjours représentables par des intervalles
  — données :

  le séjour d'Albert chevauche (débute avant, se termine pendant) celui de Berthe

  les séjours d'Albert et Charles se suivent immédiatement (ordre inconnu)

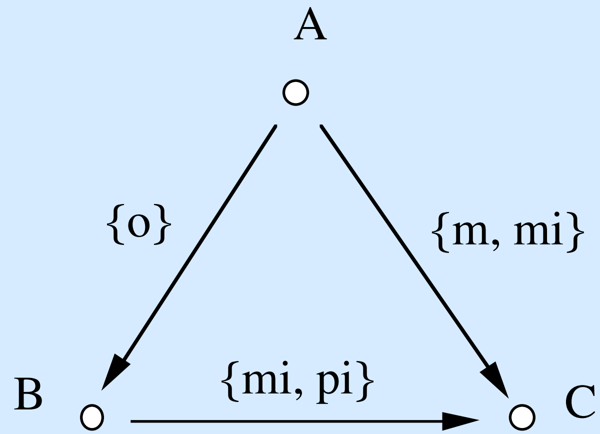
  — est-ce possible ?
  — peut-on rajouter le fait que le séjour de Berthe ait lieu après celui de Charles (immédiatement ou non) ?
  — on a besoin d'un langage : relations d'Allen

Les relations d'Allen



p	**pi**	precedes
m	**mi**	meets
o	**oi**	overlaps
s	**si**	starts
d	**di**	during
f	**fi**	finishes
eq		equals

Représentation sous forme de réseau de contraintes

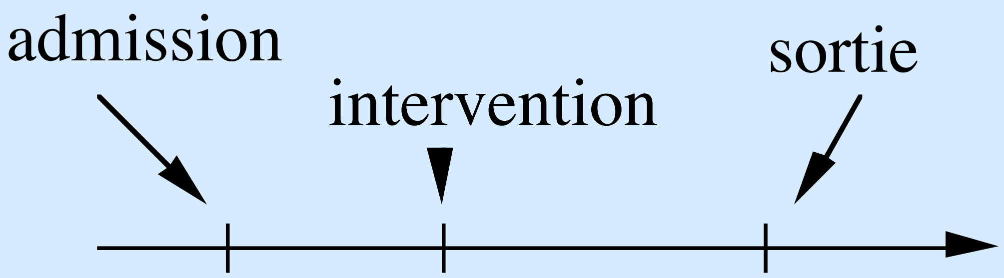


le séjour d'Albert chevauche celui de Berthe

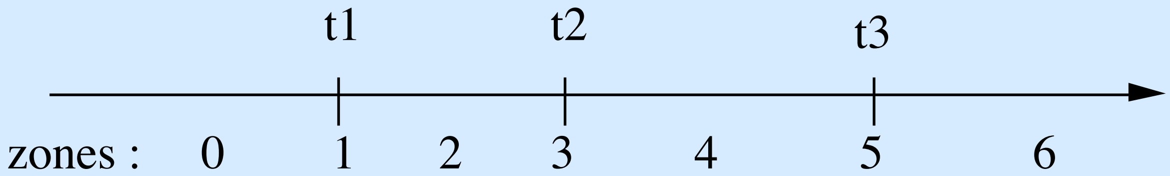
les séjours d'Albert et Charles se suivent immédiatement

le séjour de Berthe a lieu après celui de Charles

- Exemple 3 (3-intervalles)
  - — dossiers médicaux :
    - en termes d'entités ponctuelles
    - en termes d'intervalles (Allen)
    - une solution naturelle : en termes de 3-intervalles



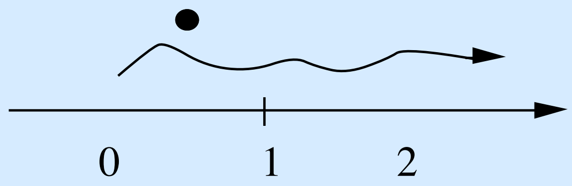
Codage des relations qualitatives entre p-intervalles et q-intervalles

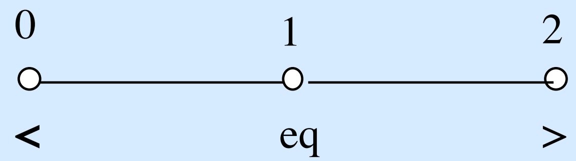


Ensemble des *(p, q)*-relations de base caractérisées comme :

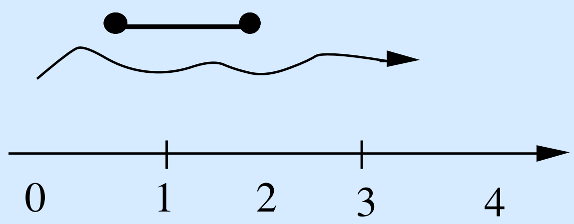
- suites non décroissantes d'entiers entre *0* et *2q*
- un entier impair apparaît une fois au plus

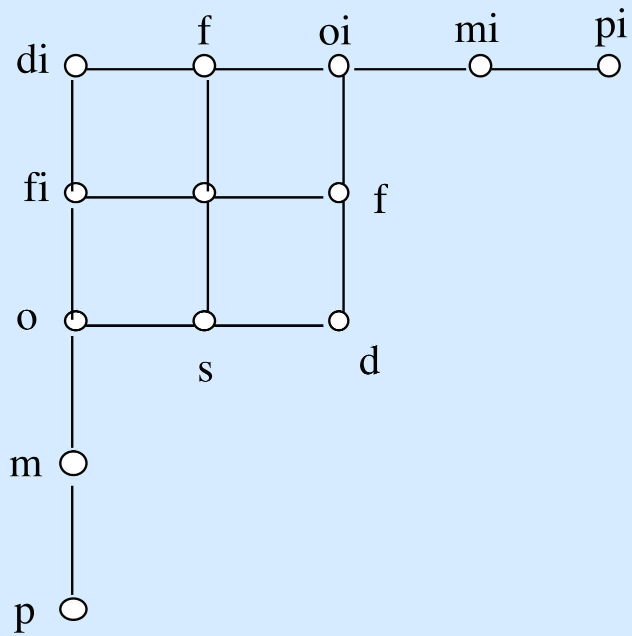
Calcul des instants

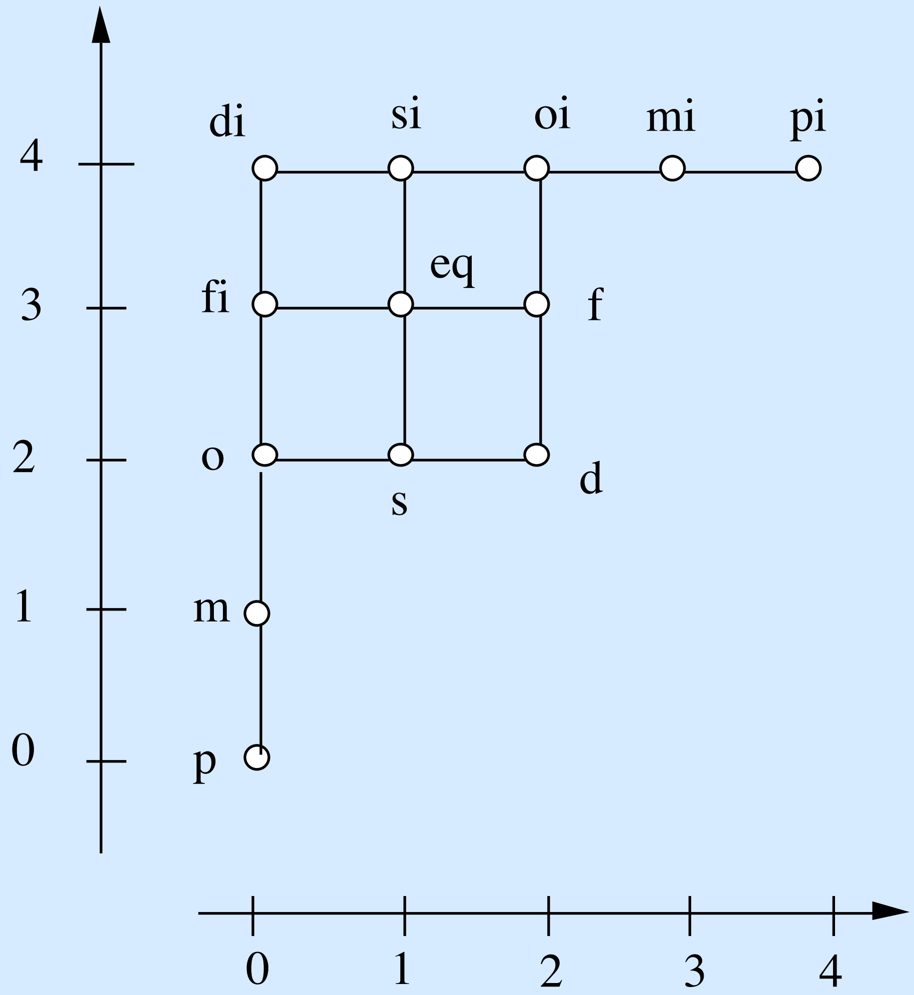




Calcul des intervalles (Allen)

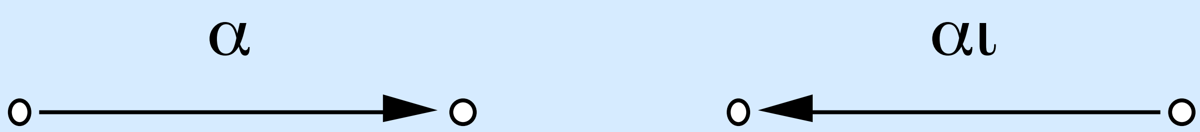




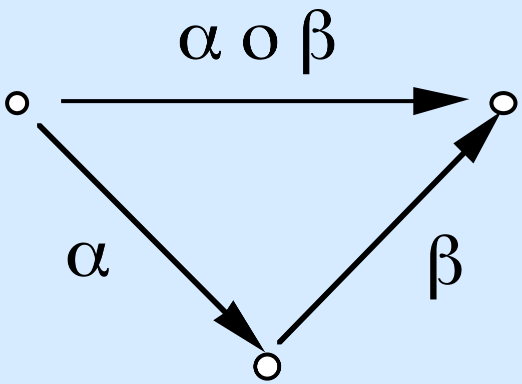

di
si
oi
mi
pi
4
3
2
1
0
eq
fi
f
o
d
s
m
p
0
1
2
3
4

Opérations sur les relations

- Conversion



- Composition



Exemple de composition

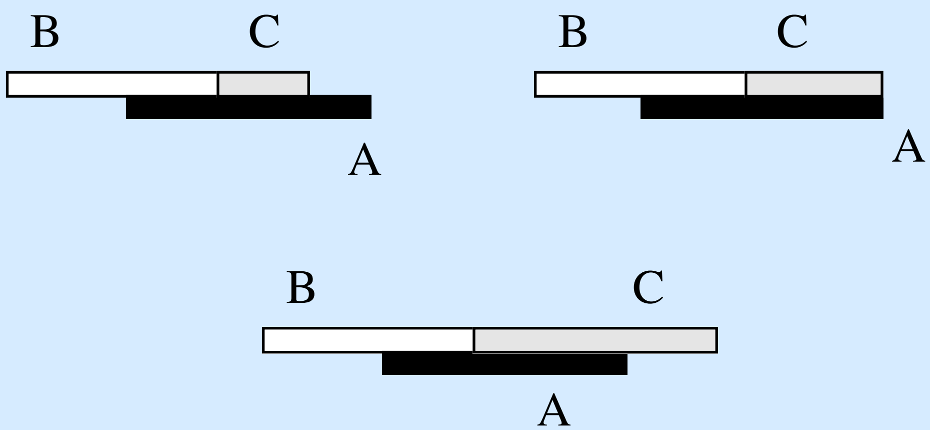
Sachant que : A {oi} B et B {m} C

on en déduit que :

A {o, fi, di} C

Notation : $(oi \circ m) = \{o, fi, di\}$

(composition de oi avec m)



Problèmes de base

- Cohérence : représente-t-on une situation effective ?
- Réseau minimal :

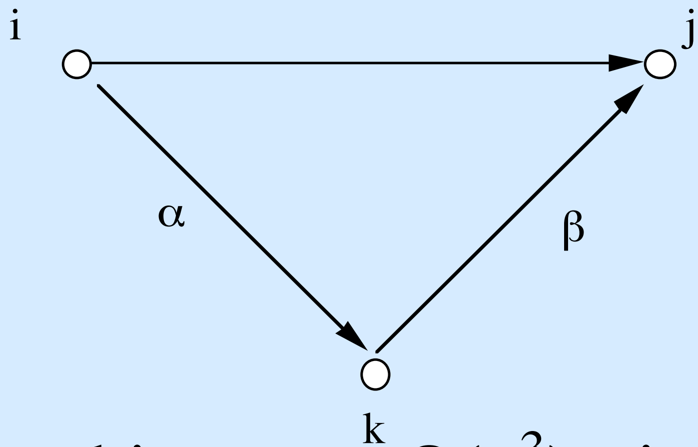
  est-ce que chaque relation de base participe à une solution ?
- Recherche : une ou toutes les solutions
- Modèles : de quoi parle-t-on quand on parle d'une solution ?

Chemin-cohérence

- $\alpha \circ \beta \supseteq \gamma$
- un algorithme naturel :

  pour chaque triangle, remplacer γ

  par $\alpha \circ \beta \cap \gamma$



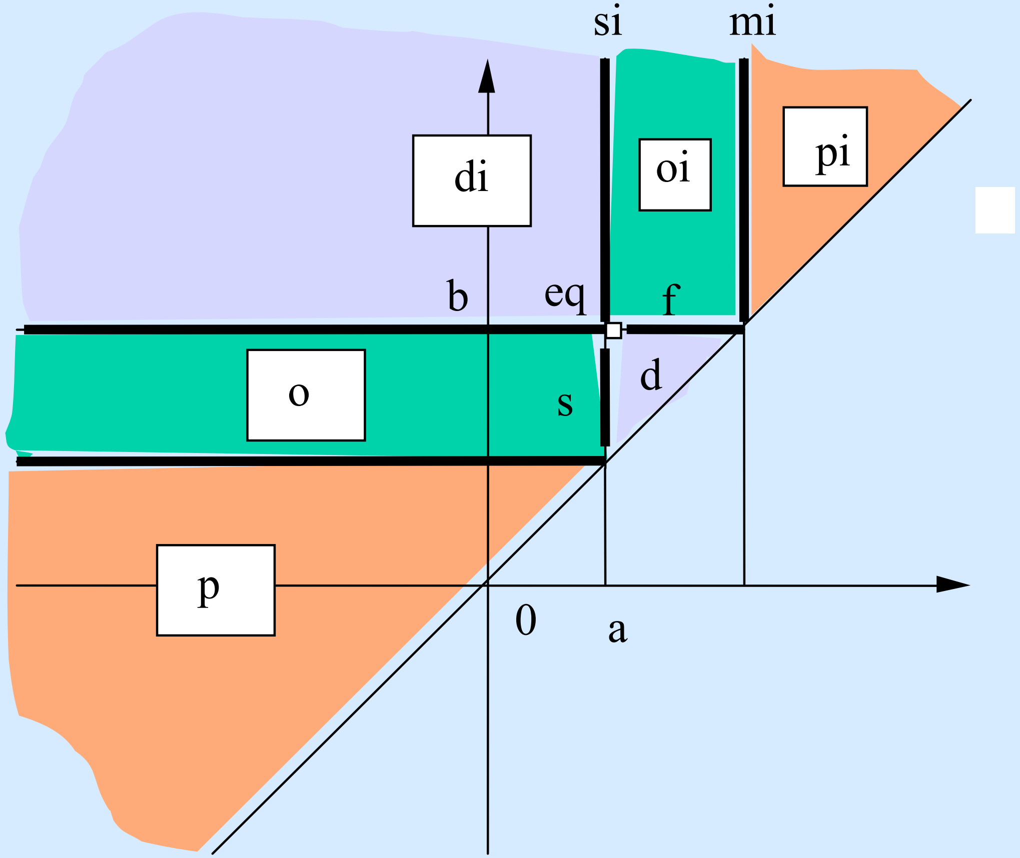
- coût : temps cubique, car $O(n^3)$ triangles

réseau de contraintes	⇔	système d'équations binaires
cohérence globale	⇔	existence de solutions
chemin-cohérence	⇔	condition nécessaire pour la cohérence globale

Traitabilité

- Problème : en général, déterminer si un réseau est cohérent est un problème NP-complet (donc très probabement exponentiel)
- Utiliser des algorithmes exponentiels
- Etudier des sous-problèmes polynomiaux
- Calcul d'Allen (et autres) : lié à la topologie des relations

Les relations d'Allen

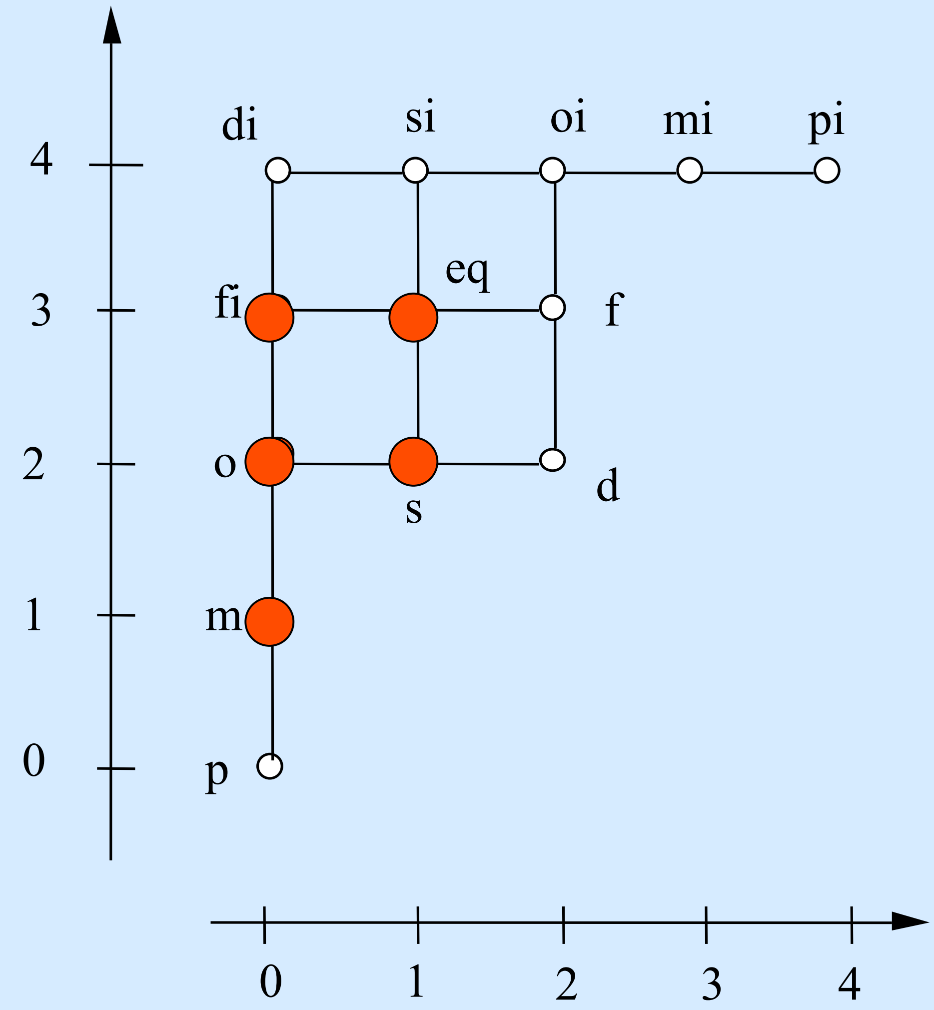


Sous-classes : relations convexes et pré-convexes

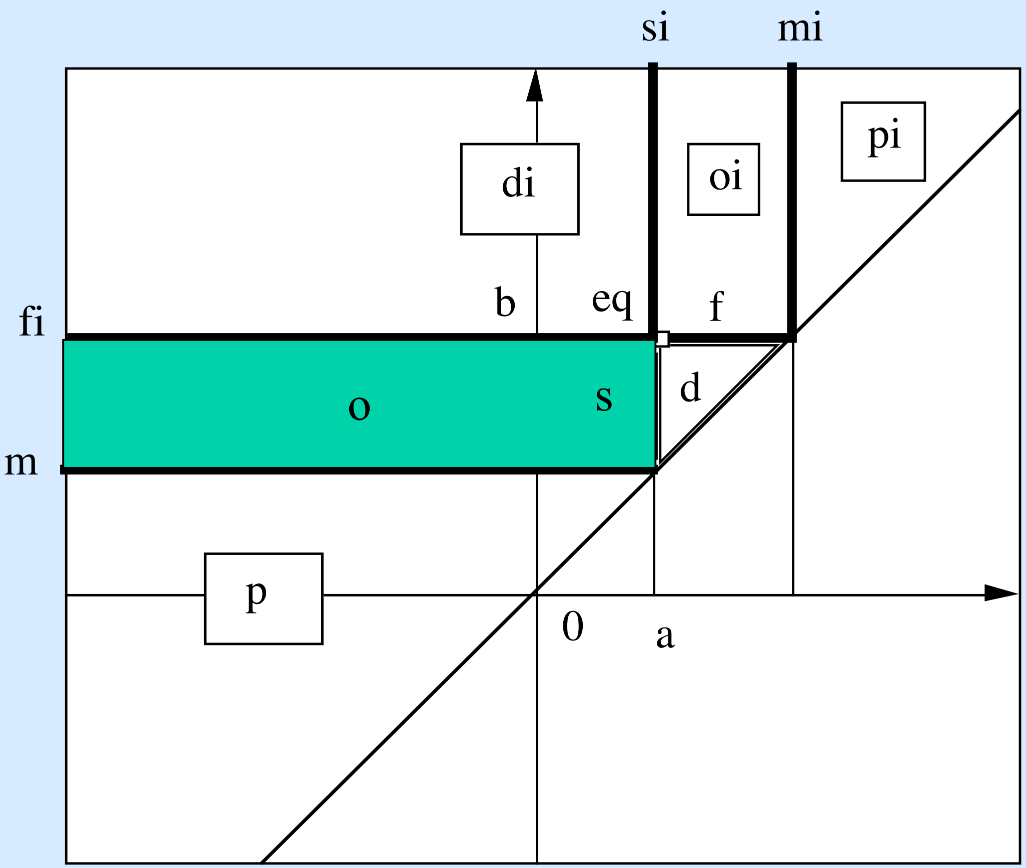
- Structure géométrique des relations (Allen)
- Relations convexes = intervalles dans le treillis

  chemin-cohérence $\Rightarrow$ cohérence globale
- Recherche de classes polynomiales
- Interprétation géométrique des relations

Une relation convexe



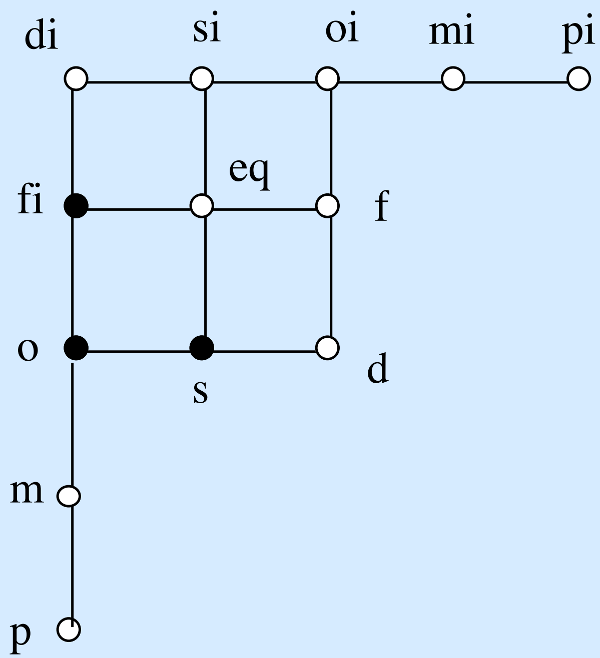
Une relation convexe



Relations préconvexes

- Notion de dimension d’une relation
- Notion de clôture topologique
- Relations pré-convexes : relations dont la clôture topologique est une relation convexe (c'est-à-dire un intervalle du treillis)

Exemple de relation pré-convexe



la relation {o, s, fi} est pré-convexe :

sa clôture topologique est la relation

{m, o, s, fi, eq} = [m, eq]

Chemin-cohérence et pré-convexité

- Résultat central (Nebel & Bürckert; Ligozat):

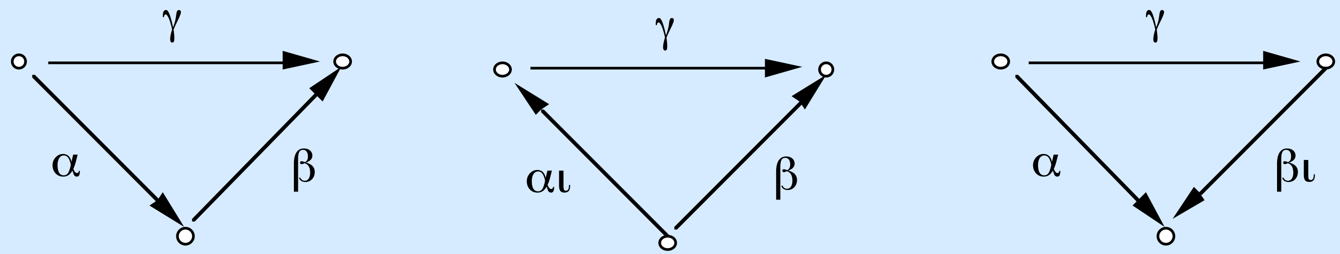
  Si N est un réseau pré-convexe et chemin-cohérent, alors toute relation de base de dimension maximale dans l'étiquetage d'un arc fait partie d'un scénario.

- Trouver des scénarios:

  1. En temps cubique:
     - choisir un arc, remplacer étiquette par un atome de dim maximale
     - rendre chemin-cohérent (pb. intersection)
     - répéter tant que des étiquettes non atomiques
  2. En temps quadratique (si cohérence globale connue)

4. Le point de vue algébrique

- Algèbres des relations (instants, Allen, n-intervalles)
  - — algèbre de Boole
  - — opérations d'*inversion* et de *composition*
  - — vérifie les axiomes d'une *algèbre relationnelle*
- Exemple: composition, conversion and intersection



$(\alpha \circ \beta) . \gamma = 0$ $(\alpha\iota \circ \gamma) . \beta = 0$ $(\gamma \circ \beta\iota) . \alpha = 0$

Algèbre relationnelle $\mathbf{A} = (A, +, \mathbf{0}, ., \mathbf{1}, \circ, \mathbf{1'}, {}^{\upsilon})$

- algèbre de Boole $(A, +, \mathbf{0}, ., \mathbf{1})$
- inversion $\alpha \rightarrow \alpha^{\upsilon}$ et composition $(\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha \circ \beta)$
- élément distingué $\mathbf{1'}$, tels que :
  - Pour tous α, β, γ, on a : $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$
  - L'élément $\mathbf{1'}$ est un élément neutre pour la composition:
  - Pour tous α, β et γ, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

$(\alpha \circ \beta) \,.\, \gamma = \mathbf{0}$; $(\alpha^{\upsilon} \circ \gamma) \,.\, \beta = \mathbf{0}$; $(\gamma \circ \beta^{\upsilon}) \,.\, \alpha = \mathbf{0}$

- Un modèle = un dessin = un scénario
- Représentations faibles :
  - un ensemble d'entités U
  - pour chaque relation de base, l'ensemble des couples se trouvant dans la relation correspondante
  - axiomes convenables, exprimés par l'algèbre relationnelle
- Faible : $\Phi(\alpha \circ \beta) \quad \supseteq \quad \Phi(\alpha) \circ \Phi(\beta)$
- Forte = représentations

Représentation faible (U, Φ) d'une algèbre relationnelle **A**

- U est un ensemble non vide
- Φ une application de **A** dans l'ensemble des relations binaires sur U

telles que :

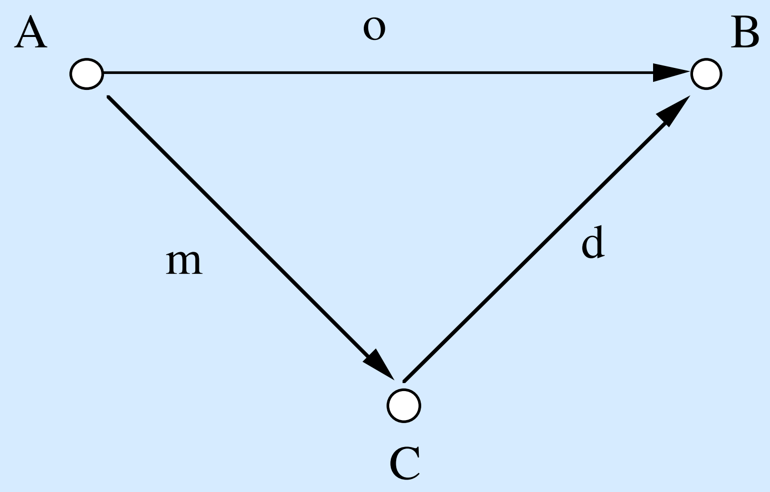
— Φ est un morphisme d'algèbres de Boole

— $\Phi(\mathbf{eq}) = \{(u, u) \mid u \in U\}$

— $\Phi(\alpha^{\upsilon}) = \Phi(\alpha)^{t}$ (relation transposée)

— $\Phi(\alpha \circ \beta) \supseteq \Phi(\alpha) \circ \Phi(\beta)$

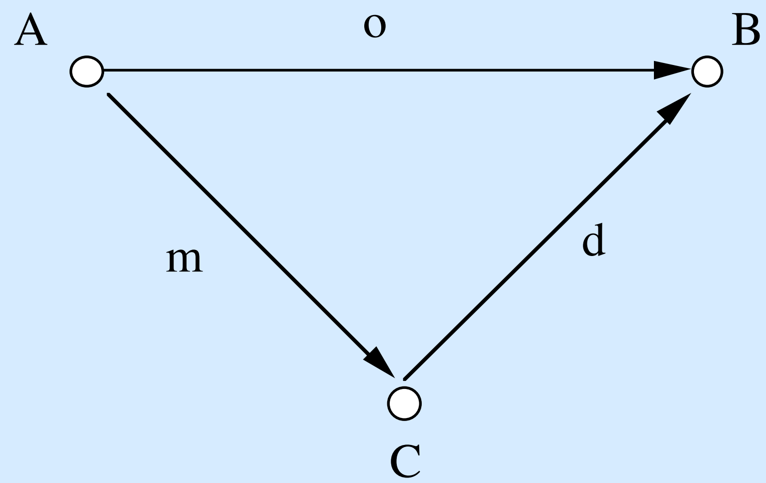
Représentations faibles et réseaux de contraintes (atomiques)

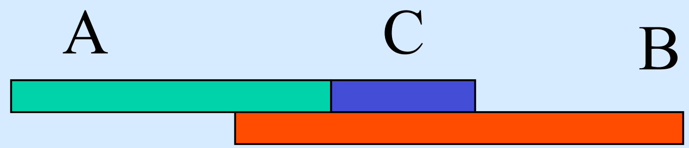


chemin-cohérent car : $m \circ d = \{o, s, d\}$

Représentation faible associée :

$\Phi(o) = \{(A, B)\}$ $\Phi(m) = \{(A, C)\}$ $\Phi(d) = \{(C,B)\}$


A
o
B
m
d
C


A
C
B

Représentations faibles de l'algèbre des points

- Exemple des instants
  - relations de base = { >, =, >}
  - algèbre des points = {0, <, eq , >, ≤, ≥, ≠, **1**}
- Représentation faibles :
  - Si $\Phi(<) = R$, alors $\Phi(>) = R^t$,
  - dans tous les cas, $\Phi(eq) = \Delta$
  - axiomes => R est un ordre total
- Représentation = ordre total dense, non borné

Représentations faibles de l'algèbre d'Allen

- Exemple d'Allen
  - Allen   relations de base = les 13 relations d'Allen
  - algèbre associée : 2^{13} éléments
  - représentation *faible* :   un ensemble U d'intervalles et, pour chacune des 13 relations, l'ensemble des couples correspondants
  - axiomes : exprimés par la table de composition d'Allen

Théorie des catégories

- Objets
- Flèches
- Deux applications Flèches → Objets
  - source et but
- Une flèche identité pour chaque objet
- Composition des flèches
- Axiomes

La catégorie des RF d'une algèbre

- Objets: RF de A
- Que sont les morphismes ?
- Une RF = un ensemble U + une application φ: A → *Parties* (U × U)
- Morphisme de (U, φ) vers (V, ψ) :

  une application h : U → V telle que si (u1,u2) est étiqueté par a, (h(u1), h(u2)) l'est aussi

Cohérence en termes de catégories

- Un réseau de contraintes $\mathcal{N}$ atomique chemin-cohérent est une RF particulière
- Une interprétation $\mathcal{W}$ du calcul est une RF particulière (par exemple, celle du calcul d'Allen en termes d'intervalles réels)
- Un tel réseau $\mathcal{N}$ est *cohérent* ssi il existe un morphisme $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{W}$

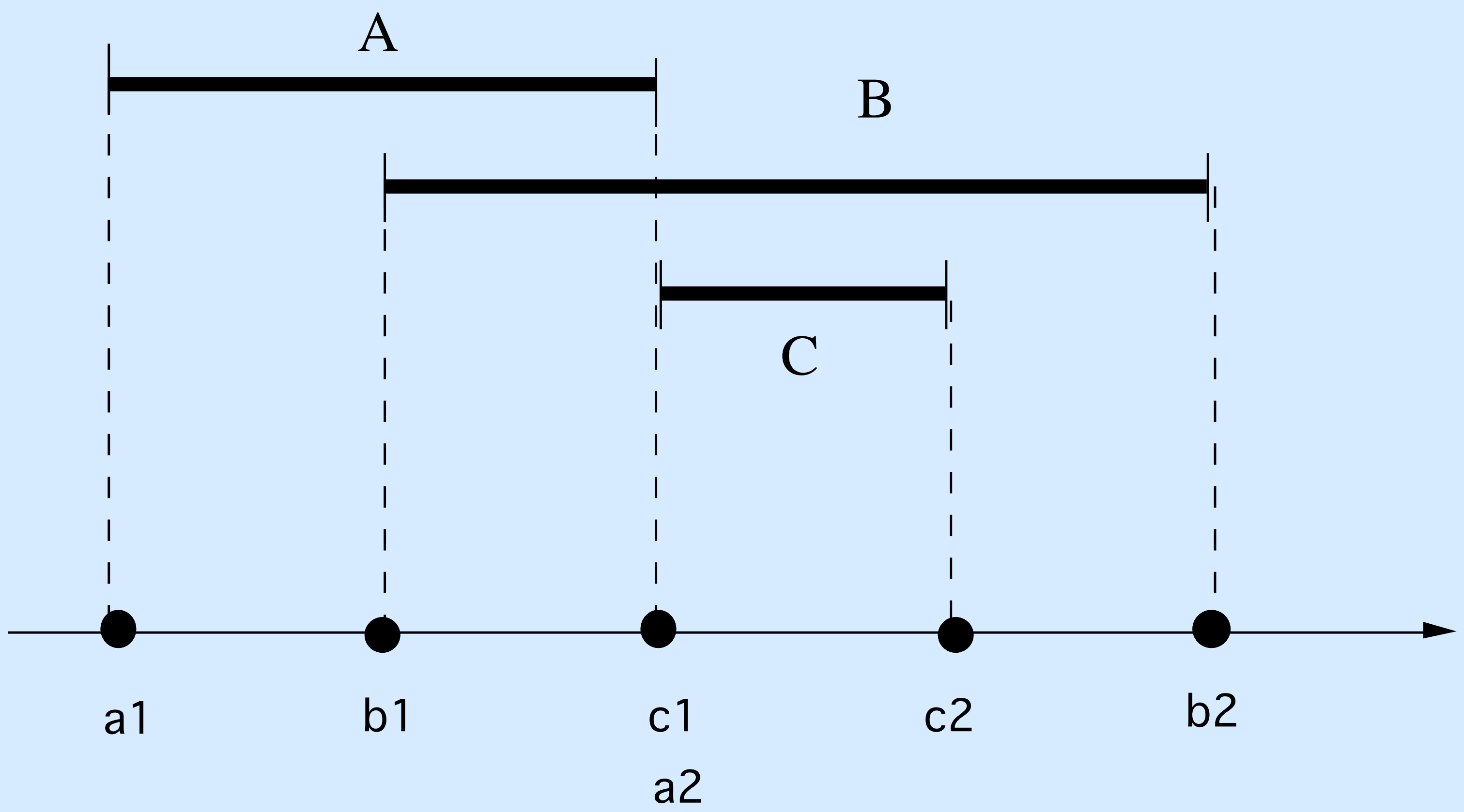
Foncteurs entre catégories

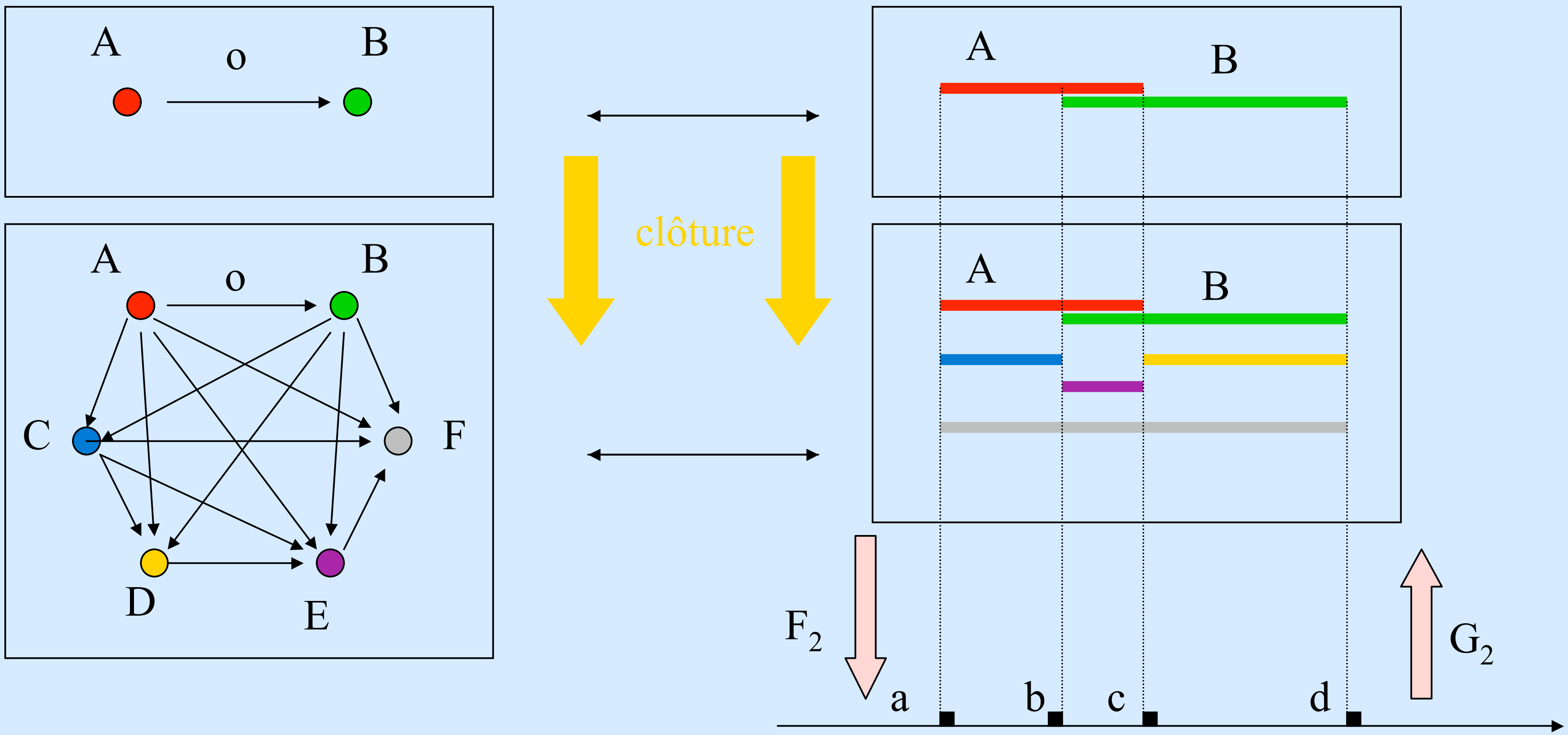
- Première catégorie = celle des RF de l'algèbre des points (les ordres totaux)
- Deuxième catégorie = celle des RF de l'algèbre d'Allen
- Il existe un foncteur naturel G_2 de la première dans la seconde :
  - ordre total → intervalles sur cet ordre

Foncteur dans l'ordre inverse ?

- On peut définir un foncteur F_2
  - F_2 : RF d'Allen → ordres totaux (intuitivement "bornes"))
- Ce foncteur est un adjoint à gauche du foncteur G_2
- Notion de *clôture* d'une RF d'Allen
- *Les RF closes sont équivalentes* à des RF de l'algèbre des points
- Conséquence: *une seule représentation* dénombrable de l'algèbre d'Allen à isomorphisme près

De la représentation faible aux bornes




A
o
B
A
o
B
C
F
D
E
clôture
A
B
A
B
F_2
G_2
a
b
c
d

Applications de la classification des représentations

- Algèbre **A**n des n-intervalles (n ≥ 1)
- *Théorème* Il existe (à isomorphisme près) une seule représentation dénombrable de **A**n , celle qui est associée aux *n*-intervalles sur **Q**
- *n = 1* : théorème de Cantor, *n = 2* (Allen) : Ladkin
- *Corollaire* La théorie du premier ordre associée à **A**n est décidable

5. Conclusion

- Logiques temporelles
  - nombreuses logiques réifiées
  - applications aux programmes, logiques dynamiques, CTL, CTL*
- Propagation de contraintes
  - complexité
  - domaine spatial : direction, topologie (RCC)
  - formalismes spatio-temporels (Nebel, TeRCC-8)
- Algèbres relationnelles, théorie des catégories