Mélodies autosimilaires
(*SelfReplicating Melodies*)

Emmanuel Amiot
Ircam, octobre 2006
MaMuX

Mélodies autosimilaires

- *Ancêtres*
- *Définition, construction générale.*
- *Valeurs*
- *Symétries*
- *Généralisation au monoïde*

Mélodies autosimilaires

- *Ancêtres*
- *Définition, construction générale.*
- *Valeurs*
- *Symétries*
- *Généralisation au monoïde*

Mélodies autosimilaires

Ancêtres

Glen Miller,
et même…

Mozart !!!

Mélodies autosimilaires

Futurs ancêtres !

Plusieurs contemporains :

Johnson

Epstein

Feldman

…

… Très bientôt dans Open Music ?

déjà dans Rubato ! …

Mélodies autosimilaires

- *Ancêtres*
- *Définition, construction générale.*
- *Valeurs*
- *Symétries*
- *Généralisation au monoïde*

Mélodies autosimilaires

Définition

Une mélodie (m_k) *où* m_k *désigne la* $k^{\text{ème}}$ *note, périodique de période n, est autosimilaire de rapport a avec décalage b, si on a*

$$\forall k \;\; m_{a \times k + b} = m_k$$

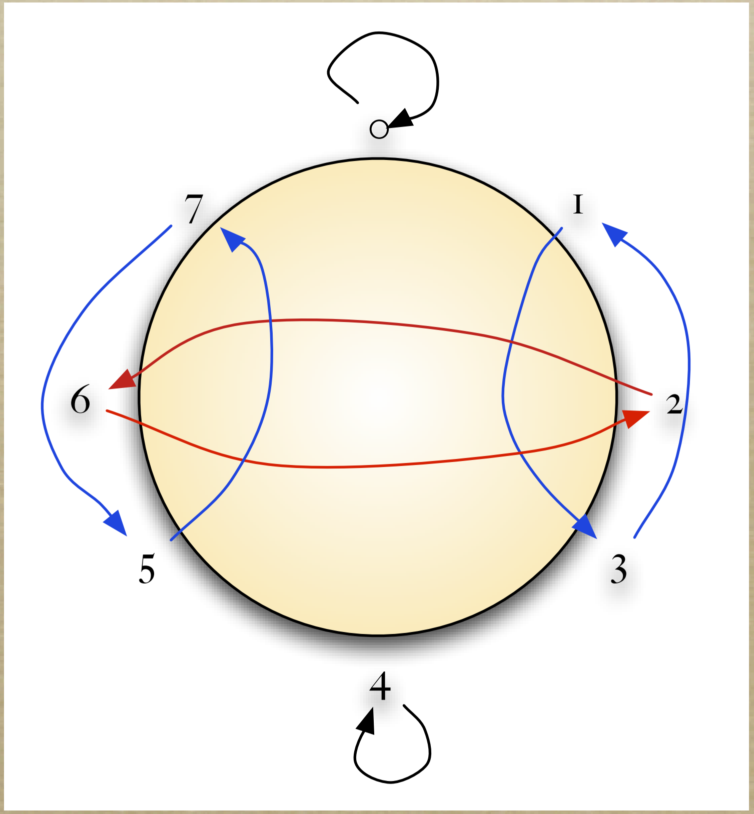
Condition technique : pgcd(a,n) = 1

Mélodies autosimilaires

Construction

On construit une mélodie (m_k) autosimilaire en associant une même note à tous les indices d'une même orbite de l'application

$x \rightarrow a\,x+b \mod n$



Mélodies autosimilaires

Définition

Pour le cas simple $x \to a\,x$, après k itérations on a $\varphi^k(x)=a^k x$; pour $x \to a\,x + b$,

$$\varphi^k(x)=a^k x + b(1+a+a^2+\ldots+a^{k-1})$$

Malheureusement on ne peut simplifier cette somme en général (seulement quand a-1 est inversible)

Mélodies autosimilaires

- *Ancêtres*
- *Définition, construction générale.*
- *Valeurs*
- *Symétries*
- *Généralisation au monoïde*

Mélodies autosimilaires

Nombre d'occurrences d'une note

*Le minimum est de **une** note, évidemment…*
Cela arrive toujours quand b=0 (x=0)
Tom en fait souvent un silence.

Pour n premier et $x \to a\,x$, toute orbite (sauf celle de 0) a la même taille, l'ordre de a.

Proposition: le nombre d'occurences d'une note est un <u>diviseur</u> de l'ordre de l'application affine $\varphi: x \to a\,x + b \bmod n$

Mélodies autosimilaires

Nombre d'occurrences d'une note

Théorème:

il existe une note dont le nombre d'occurrences EST ÉGAL À l'ordre de l'application affine

$\varphi: x \to a x + b \bmod n$

Résultat non banal : cf. séries proliférantes de Barraqué.

Une permutation est cyclique sur toute orbite,

son ordre est le ppcm de leurs tailles.

Ici on a une orbite ***dont la taille est multiple de toutes les autres !***

Mélodies autosimilaires

Nombre d'occurrences d'une note

Lemme : calcul de l'ordre r de φ

Soit $\alpha = (a-1) \wedge b$,

r *est le plus petit entier tel que* $\alpha \times (1 + a + \ldots a^{r-1}) \equiv 0$.

Lemme : vers l'élément répété r fois

Il existe un x_0 *tel que* $\dfrac{a-1}{\alpha} x_0 + \dfrac{b}{\alpha}$ *soit inversible (modulo* n*).*

Vient du thm de Dirichlet. Cela $\Rightarrow$ *Théorème.*

Mélodies autosimilaires

Ordre maximal

- *Non-question dans le groupe affine:*
  $\varphi : x \to x+1$ *a une orbite de longueur n, max !*
- *Pour* $x \to a\,x$*, r est un diviseur de* $\phi(n)$
  - *Pour n donné,* $n = 2^f p^c q^d \ldots$ *il existe un a tel que r soit max:*
    $r = pgcd[2^{f-2},(p-1)p^{c-1},(q-1)q^{d-1}\ldots]$

Mélodies autosimilaires

Nombre de notes ≠

Tom a conjecturé que le maximum est égal aux trois quarts de la durée de la mélodie, i.e. $3n/4$, et que cela se produit pour le cas de figure

$$a = 2^p+1, \quad n = 2^{p+1} \ (b=0)$$

On va le prouver en excluant évidemment $\varphi = id$.

Le minimum est de <u>une</u> note ! (métronome)

Mélodies autosimilaires

Points fixes

- *Pour x → a x, 0 est toujours une note isolée. Plus généralement, que dire des points fixes de φ ?…*
- *Il peut y en avoir plusieurs, ou pas du tout.*
- *Ex :* ***sol*** *fa mi fa* ***do*** *ré mi ré … (3x mod 8)* *do* ***do*** *sol sol* ***do*** *do sol… (3x+1 mod 8)*

Mélodies autosimilaires

Points fixes

Proposition :

Il existe d=pgcd(a-1, n) notes isolées à condition que ce nombre divise b, 0 sinon.

Mélodies autosimilaires

Points fixes

<u>Proposition</u> (classification):

Il existe des notes isolées (pts fixes) si et seulement si φ est une homothétie.

Ex: $x \to 3x + 4 \bmod 8$ est en fait une homothétie de rapport 3 et de centre 2 (ou 6)

En pratique, un peu plus d'une φ sur deux.

Mélodies autosimilaires

Points fixes

- *On en déduit enfin le critère des 3/4 : d=pgcd(a-1, n) vaut au maximum n/2.*
- *On en tire aussi une formule pour le nombre d'orbites : c'est le nombre moyen de points fixes de φ^k quand k varie.*

En pratique, mieux vaut calculer les orbites et les compter !

Mélodies autosimilaires

- *Ancêtres*
- *Définition, construction générale.*
- *Valeurs*
- *Symétries*
- *Généralisation au monoïde*

Mélodies autosimilaires

Symétries

- *Certaines mélodies sont palindromiques*
- *Plus généralement, il peut y avoir d'autres rapports que* ***a*** *qui laissent la mélodie invariante. Deux degrés :*
  - ***mélodie*** *invariante (orbites invariantes)*
  - ***structure*** *invariante (orbites échangées)*

Mélodies autosimilaires

Symétries

- *En général, les applications de la forme $x \rightarrow b\,x$ avec $pgcd(b, n)=1$ <u>échangent</u> les notes dans une mélodie engendrée par $x \rightarrow a\,x$, en préservant sa <u>structure</u>.*
- *Les applications de la forme $x \rightarrow b\,x$ qui laissent invariante toute mélodie engendrée par $x \rightarrow a\,x$ sont telles que $b=a^k$.*
    - *Palindrome $\Leftrightarrow$ -1 est une puissance de a.*

Mélodies autosimilaires

Symétries

- *Le groupe de toutes les symétries (fixateur) d'une mélodie peut être plus grand que le groupe engendré par* φ *(ex: Alberti, Kientsy)*
- *Réciproquement, on peut fabriquer une mélodie possédant des symétries données, en attribuant une note à chaque orbite du groupe engendré par les symétries voulues.*

Mélodies autosimilaires

Alternate melodies

- *Plus le fixateur d'une mélodie est grand, moins il y a d'* alternate melodies, *i.e.* *d'images distinctes de notre mélodie par tout le groupe affine.*
- *Par exemple Alberti (= american ruler):*
  - *<u>Unique</u> dans le groupe des homothéties !*
  - *Dans Aff_8, 1 seule «variante»:*

    mi do mi sol mi….

Mélodies autosimilaires

Invariance par translations

- *Oui, certaines mélodies SelfRep sont des pavages par translations ! Mais cela ne peut se produire que pour des motifs de 2 notes.*
- *Exemple:*
  7x+3 mod 12: toutes les 6 orbites sont translatées de {0,3}

Mélodies autosimilaires

Invariance par translations

- *Par ailleurs, certaines autres orbites pavent par translations en plus de paver par multiplication.*
- *Exemple:*
  (0 1 3 7 9) pave Z/20 par translations. C'est visiblement une réunion de deux orbites de $x \to 3x \bmod 20$.

Mélodies autosimilaires

Invariance par translations

- *Cela mérite d'être regardé car une application affine mélange généralement bien les nombres (cf. pseudo aléatoire).*
- *Donc une orbite (ou réunion d'),* ***si elle pave****, est un bon candidat pour faire des Vuza canons…*
- *Mais je n'ai pas de résultat théorique !*

Mélodies autosimilaires

- *Ancêtres*
- *Définition, construction générale.*
- *Valeurs*
- *Symétries*
- *Généralisation au monoïde*

Mélodies autosimilaires

Monoïde

- *Que se passe-t-il si on prend une application affine générale (i.e. non bijective) ?*
- ***On va retrouver le lemme de Fitting !***
- *Dans la suite je reviens à des applications homothétiques $x \to a\,x$; qualitativement les résultats restent vrais en général.*

Mélodies autosimilaires

Monoïde

- *La suite (φ^k) est périodique à partir d'un certain rang. Plus précisément, il existe une factorisation n = PQ telle que*

$$a = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k} \ (k \geqslant r) \qquad n = p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r} \times q_{r+1}^{n_{r+1}} \dots = P \times Q,$$

Le théorème chinois $\mathbb{Z}_n \approx \mathbb{Z}_P \times \mathbb{Z}_Q$ *induit une décomposition*
$\varphi \approx (\overline{\varphi}, \widetilde{\varphi})$ *où*
$\overline{\varphi} \in \mathrm{Aff}_P$ *est nilpotente, et*
$\widetilde{\varphi} \in \mathrm{Aff}_Q$ *est un automorphisme.*

Mélodies autosimilaires

Monoïde

- *La suite des itérés ($\varphi^k(x)$) est donc aussi périodique à partir d'un certain rang.*
- *La partie périodique de cette suite d'itérés sera appelée **attracteur** de x.*
- *En faisant varier x, on obtient une partition par les attracteurs A_x de $(n/Q)Z_n = \cup A_x$.*
- *Pratiquement, on laisse tomber ce qui n'est pas multiple de n/Q.*

Mélodies autosimilaires

Mélodies autosimilaires

Monoïde

- *Il marche aussi avec décalage:*

Mélodies autosimilaires

Monoïde

La signification profonde ?

… elle m'a longtemps échappé mais…

*Toute extraction itérée appliquée à une mélodie périodique **quelconque** finit par produire une mélodie auto-similaire !*

Mélodies autosimilaires

- *Ancêtres*
- *Définition, construction générale.*
- *Valeurs*
- *Symétries*
- *Généralisation au monoïde*

Emmanuel Amiot
Ircam, 14 octobre 2006
MaMuX