Jonglages, canons, tresses et pavages

Franck Jedrzejewski

CEA, Saclay (France)

IRCAM, 6 janvier 2012

Sommaire

Historique du jonglage

- Tombe égyptienne 1994-1781 av J.C.
- Plusieurs références : Chinois Lie Zhie (770-476 av JC) jongle avec 7 épées, dans le Talmud, Shimon Ben Gamaliel jongle avec 8 torches enflammées, l'irlandais Cuchulainn au Ve siècle av JC jongle avec 9 pommes, Socrate parle d'une femme qui jongle avec 12 anneaux, etc.
- Bengt Magnusson, Bruce Tiemann, The Physics of Juggling, *Physics Teacher* 27 (1989) 584-589.
- Jonathan D. Stadler, Juggling and Vector Compositions, Discrete Math. 258 (2002), no. 1-3, 179 – 191.
- Burkard Polster, *The Mathematics of Juggling*, Springer-Verlag, 2003.

Hypothèses de la modélisation :

1. Les lancers interviennent à des instants discrets régulièrement espacés en temps.
2. A un instant donné, une seule balle est attrapée et relancée tout de suite. (Pas de multiplexage)
3. Le pattern est périodique. On suppose que le jongleur répète indéfiniment ce pattern. (sans début ni fin)
4. Les lancers se font avec une main aux instants impairs, et avec l'autre main aux instants pairs.

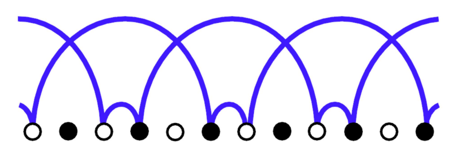
Notation des patterns

Un motif de jonglage est décrit par une fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Une balle lancée au temps t n'est pas relancée avant $f(t)$.

La hauteur d'un lancé est

$$h(t) = f(t) - t$$

Exemples. Le motif 51



$$f(t) = \begin{cases} t+5 & \text{if } t \equiv 0 \bmod 2 \\ t+1 & \text{if } t \equiv 1 \bmod 2 \end{cases}$$

Ensembles jonglables

Si on se donne un ensemble d'entiers $(h_0, h_1, ..., h_{n-1})$, à quelles conditions cet ensemble est-il jonglable ?

Un ensemble $(h_0, h_1, ..., h_{n-1})$ est jonglable si et seulement si

1. La moyenne de l'ensemble est un entier b (b est le nombre de balles nécessaire au jonglage)

$$\frac{1}{n}(h_0 + h_1 + ... + h_{n-1}) = b$$

2. L'ensemble $\{h_i + i \mod n, \ i = 0, ..., n-1\}$ est une permutation de $\overline{n} = \{0, 1, ..., n-1\}$

n est la période du pattern

Exemples. Le pattern 6424 est jonglable, car
$\{6+0, 4+1, 2+2, 4+3\} \mod 4 = \{2, 1, 0, 3\}$

Le pattern 6514 n'est pas jonglable car
$\{6+0, 5+1, 1+2, 4+3\} \mod 4 = \{2, 2, 3, 3\}$

Dénombrement des patterns

Le nombre de patterns jonglable de période $n > 0$ avec exactement b balles à équivalence près est

$$M(n,b) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\left((b+1)^d - b^d\right)$$

où est la fonction de Moebius

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \text{ ou si } n \text{ a un nombre pair de facteurs premiers} \\ -1 & \text{si } n \text{ a un nombre impair de facteurs premiers} \\ 0 & \text{si } n \text{ a des facteurs premiers répétés} \end{cases}$$

Exemple : $\mu(1) = 1, \mu(2) = -1, \mu(3) = -1, \mu(4) = 0$, etc.

Soit deux sous-ensembles $A, B \subset \mathbb{Z}_N$. On dit que le couple (A, B) est un canon si

$$A \oplus B = \mathbb{Z}_N$$

Exemple. $\{0, 2\} \oplus \{0, 1\} = \mathbb{Z}_4$ est un canon.

	0	1	2	3
0	1		1	
1		1		1

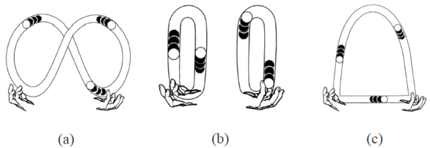


Figure 1: (a) cascade, (b) fountain, (c) shower. Source: [4].

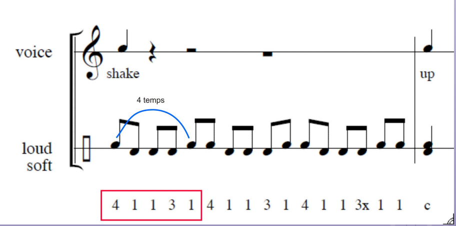
Les jongles classiques sont des canons.

Mise en musique des jongles

Chez Tom Johnson, un jongle A a un intérêt musical si :

1. Le jongle n'est pas une structure musicale connue (structure linéaire, canon, etc.)
2. L'absence de lancé (0) n'est pas toujours un élément de A.
3. Le jongle a principalement une transcription rythmique.
4. Le jongleur s'accompagne avec sa propre voix ou avec des "quilles" sonores.

D'où deux inventions de Tom Johnson : les **jongles parfaits** et les **jongles bien formés**.



Pavages rythmiques parfaits

Les jongles sont des pavages de l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.

Les pavages rythmiques parfaits sont des canons "en augmentation", déjà utilisés par Tom Johnson. Mais non des canons au sens classique.

Exemple. *Tileworks* pour clarinette est construit sur le pavage

1							1							1	$(0, 7, 14)$	$\delta = 7$
			1					1					1		$(3, 8, 13)$	5
	1				1				1						$(1, 5, 9)$	4
		1		1		1									$(2, 4, 6)$	2
										1	1	1			$(10, 11, 12)$	1

Ce pavage correspond au jongle avec 5 balles ($= 75/15$)

7 4 2 5 2 4 11 7 5 7 1 1 13 5 1

Jongles parfaits

Un jongle est **parfait** si toutes les trajectoires des balles sont deux à deux distinctes.

Exemples. Un canon n'est pas un jongle parfait.

Le jongle parfait le plus petit est de période 3 avec 2 balles

$$312 = 3 + 12$$

Une balle effectue un lancé tous les 3 temps, alors que l'autre effectue le pattern 12.

Si A est un jongle parfait avec n balles de période p alors A se décompose en une réunion de sous-patterns $A_1, .., A_n$ dont chacun est un élément d'une partition de p.

$$A = A_1 + ... + A_n$$

Exemples de jongles parfaits

Avec 2 balles, 1 jongle de période 3 :

$$312 = 3 + 12$$

1 jongle de période 4 :

$$4112 = 4 + 112$$

3 jongles de période 5 :

$$\begin{aligned} 51112 &= 5 + 1112 \\ 14113 &= 14 + 113 \\ 22312 &= 23 + 212 \end{aligned}$$

Avec 3 balles, 1 jongle de période 5 :

$$53142 = 5 + 14 + 32$$

10 jongles de période 6 :

$$\begin{aligned} 611415 &= 6 + 15 + 114 \\ 631512 &= 6 + 15 + 312, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Dénombrement des jongles parfaits

Périodes	2 balles	3 balles	4 balles	5 balles
3	1			
4	1			
5	3	1		
6	4	10		
7	9	30		
8	13	96	74	
9	29	289	412	9
10	45	$\vdots$	$\vdots$	532
11	93	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
12	154	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Un **jongle parfait équilibré** est un jongle parfait dont chaque trajectoire de balles a même longueur.

Avec 2 balles, 1 jongle de période 8 :

$$12314113 = 1214 + 3113$$

5 jongles de période 10 :

$$1123151114 = 11215 + 31114 \qquad 1151113124 = 11512 + 11134$$
$$1231224113 = 12124 + 32113 \qquad 1231411223 = 12142 + 31123$$
$$1222314113 = 12214 + 23113$$

19 jongles de période 12 :

$$111231611115 = 111216 + 311115 \qquad 111611113125 = 111612 + 111135$$
$$112411611114 = 112116 + 411114 \qquad 113141151114 = 113115 + 141114$$
$$112312251114 = 112125 + 321114 \qquad 112315111224 = 112152 + 311124$$
$$112223151114 = 112215 + 231114 \qquad 112251113124 = 112512 + 211134$$
$$115111312224 = 115122 + 111324 \qquad 115111223124 = 115212 + 111234$$
$$123123151113 = 121215 + 331113 \qquad 123131314113 = 121314 + 313113$$
$$123141131313 = 121413 + 311313 \qquad 123122224113 = 121224 + 322113$$
$$123122411223 = 121242 + 321123 \qquad 123141122223 = 121422 + 311223$$
$$122231224113 = 122124 + 232113 \qquad 122231411223 = 122142 + 231123$$
$$122222314113 = 122214 + 223113$$

Jongles parfaits équilibrés

Avec 3 balles, 12 jongles de période 9

$$
\begin{array}{ll}
117131256 = 117 + 126 + 135 & 117231615 = 117 + 216 + 315 \\
117312264 = 117 + 126 + 324 & 117223164 = 117 + 216 + 234 \\
124613145 = 126 + 135 + 414 & 163141524 = 162 + 315 + 144 \\
123622245 = 126 + 225 + 324 & 162223524 = 162 + 225 + 234 \\
134253144 = 135 + 414 + 234 & 153142344 = 153 + 144 + 324 \\
134252253 = 135 + 225 + 423 & 152242353 = 153 + 225 + 243
\end{array}
$$

Avec 4 balles, 2 jongles de période 8 :

$$
\begin{array}{l}
17342564 = 17 + 26 + 35 + 44 \\
17423645 = 17 + 26 + 35 + 44
\end{array}
$$

Avec 5 balles, 4 jongles de période 10 :

$$
\begin{array}{l}
1934572685 = 19 + 28 + 37 + 46 + 55 \\
1963527845 = 19 + 28 + 37 + 64 + 55 \\
1956238574 = 19 + 28 + 37 + 64 + 55 \\
1952483567 = 19 + 28 + 37 + 46 + 55
\end{array}
$$

Ensembles bien formés - Well-formed sets

Ensemble bien formé P de k notes de N éléments = il existe un intervalle générateur α tel que l'ensemble P soit présentable sous la forme $\alpha j \bmod N$ pour k valeurs de j consécutives.

Exemples. (1) La gamme majeure $P = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$ est bien formée ($\alpha = 5, k = 7, N = 12$). Elle a pour présentation

$$P = \{5j \bmod 12,\ j = -5, .., +1\}$$

ou

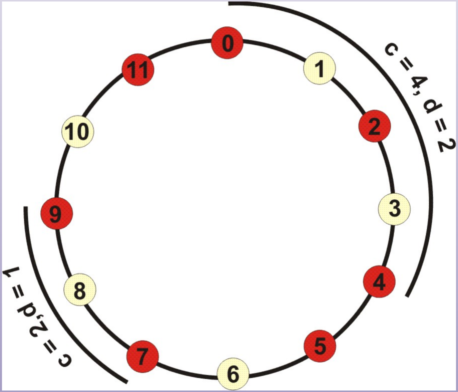
$$11 \xrightarrow{5} 4 \xrightarrow{5} 9 \xrightarrow{5} 2 \xrightarrow{5} 7 \xrightarrow{5} 0 \xrightarrow{5} 5$$

La gamme se construit en prenant une note toutes les p notes (ici $p = 3$), p est appelé le *pas*.

$$\underline{0}, 2, 4, \underline{5}, 7, 9, \underline{11}, 0, 2, \underline{4}, 5, 7, \underline{9}, 11, 0, \underline{2}, 4, 5, \underline{7}, 9, 11, \underline{0}$$

Deux façons de mesurer les distances

Soit u = intervalle minimal entre deux éléments consécutifs
distance c entre deux notes = nombre d'intervalles u
distance d entre deux notes = nombre de notes intermédiaires + 1



Ensembles bien répartis

Ensemble bien réparti (*maximally even*) = pour chaque couple de deux éléments de A (comptés selon le nombre d'éléments intermédiaires, distance d) et pour tous les couples, il n'existe qu'un ou deux types d'intervalles (comptés en nombre d'intervalles de base, distance c). Autrement dit, les éléments de A placés sur le cercle unité sont disposés le plus loin possible les uns des autres.

Exemple. $A = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$ = gamme majeure. On examine pour chaque intervalle de longueur $d = 1, 2$, etc. la distance en intervalles de base. Il ne peut exister au plus que deux types d'intervalles pour être bien réparti.

Pas (d)	*Intervalles (c)*
1	1, 2
2	3, 4
3	5, 6
4	6, 7
5	8, 9
6	10, 11

L'ensemble $A = \{0, 3, 6, 10\}$ n'est pas bien réparti car les couples (0,3), (6,10) et (10,0) ont trois longueurs différentes 3, 4 et 2.

Transformée de Fourier

Si on définit la transformée de l'ensemble A de n éléments comme la transformée de Fourier de l'indicatrice de A

$$\mathcal{F}_A(t) = \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/N}$$

l'ensemble A est bien réparti ssi le nombre $|\mathcal{F}_A(n)|$ est maximal parmi tous les valeurs $|\mathcal{F}_X(n)|$ de tous les ensembles X de cardinal n.

$$\forall X \in \mathbb{Z}_N,\ \mathrm{card} X = n \Longrightarrow\ |\mathcal{F}_X(n)| \leq |\mathcal{F}_A(n)|$$

Le critère d'ensemble bien réparti est invariant par transposition, inversion et complémentation.

Ensembles génériques

Un ensemble est générique (*deep*) si le nombre d'occurences de chaque classe d'intervalle est unique.

Exemple. La gamme majeure est bien répartie et générique (un seul triton dans la gamme, etc.)

Interval class	*Occurences*
1	2
2	5
3	4
4	3
5	6
6	1

Propriété de Myhill

Propriété de Myhill. On dit que A a la propriété de Myhill (PM) si pour chaque intervalle de A (et pour tous les intervalles), il n'existe que deux valeurs possibles en nombre d'intervalles de base.

Exemple. La gamme majeure a la propriété de Myhill. La gamme mineure harmonique $\{0, 2, 3, 5, 7, 8, 11\}$ n'a pas la propriété de Myhill. Pour deux notes consécutives, il existe trois espèces d'intervalles (*si-do, do-ré* et *lab-si*). Elle n'est pas bien répartie.

Theorem

On a les équivalences :

1. *A a la propriété de Myhill*
2. *le nombre de notes n d'une sous-partie P de l'ensemble A transposée sur tous les éléments de A engendre exactement n types d'intervalles (cardinality equals variety)*
3. *Idem mais avec une disposition sur le cercle en quintes (structure implies multiplicity)*

La définition usuelle d'une gamme diatonique est insuffisante :
Une gamme est *diatonique* si elle est bien répartie (*maximally even*) et si on désigne par k le nombre de notes de la gamme et N le nombre de notes de l'univers chromatique alors

$$N = 2(k-1) \quad \text{et} \quad N \equiv 0 \bmod 4$$

C'est pourquoi on introduit une autre notion de diatonicité :
Soit m un entier positif. Une gamme m-**diatonique** est une gamme bien formée non dégénérée de générateur m dont le complément n'a pas deux notes consécutives.
Exemples : $A = \{0, 1, 2, 3, ..., N-2\}$ est une gamme 1-diatonique de $\mathbb{Z}_N$.
$B = \{0, 2, 4, .., 2k\}$ et une gamme 2-diatonique de $\mathbb{Z}_{2k+1}$.
Il n'existe pas de gamme 2-diatonique dans $\mathbb{Z}_{2k}$.

Gammes diatoniques microtonales

Une **gamme diatonique généralisée** A du tempérament égal à N sons ($N \geq 12$) est une gamme m-diatonique qui vérifie la propriété (S) *Il n'existe pas de gamme bien formée non-dégénérée* W *entre* A *et* A^c*, i.e. telle que le cardinal* $|W|$ *vérifie* $|A^c| \leq |W| \leq |A|$
S'il y a plusieurs gammes qui vérifient la propriété S, on prend parmi toutes les gammes possibles celle de générateur $m > 2$ qui minimise la différence $|A| - |A^c|$.

Exemple. Pour $N = 12$, la gamme diatonique usuelle $A =${si, do, ré, mi, fa, sol, la} $\simeq \{0, 1, 3, 5, 6, 8, 10\}$ est une gamme 5-diatonique. Son complémentaire est isomorphe à la gamme de générateur 5, $\{0, 3, 5, 8, 10\}$ qui n'est pas 5-diatonique. Le seul ensemble $\{0, 1, 3, 5, 8, 10\}$ de générateur 5 entre A et A^c n'est pas bien formé. Donc vérifie (S).

Gammes diatoniques microtonales

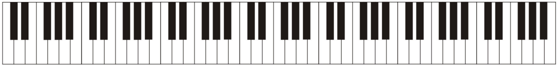
N	Diatonic Scale D	m	$\|D\|$
12^*	$\{0,1,3,5,6,8,10\}$	5	7
13	$\{0,2,4,5,7,9,10,12\}$	5	8
14^*	$\{0,1,3,4,6,7,9,10,12\}$	3	9
15	$\{0,2,4,6,8,10,12,14\}$	2	8
16^*	$\{0,1,3,5,7,8,10,12,14\}$	7	9
17	$\{0,1,3,5,6,8,10,11,13,15\}$	5	10
18^*	$\{0,2,4,5,7,9,10,12,14,15,17\}$	5	11
19	$\{0,2,4,5,7,8,10,12,13,15,16,18\}$	8	12
20^*	$\{0,1,3,5,7,9,10,12,14,16,18\}$	9	11
21	$\{0,1,3,4,6,8,9,11,12,14,16,17,19\}$	8	13
22^*	$\{0,1,3,5,6,8,10,11,13,15,16,18,20\}$	5	13
23	$\{0,1,3,5,7,8,10,12,14,15,17,19,21\}$	7	13
24^*	$\{0,1,3,5,7,9,11,12,14,16,18,20,22\}$	11	13

Gammes diatoniques microtonales

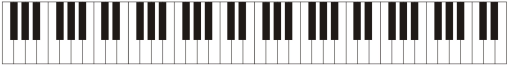
N	Diatonic Scale D	m	$\lvert D\rvert$
24^*	$\{0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 14, 16, 18, 20, 22\}$	11	13
25	$\{0, 2, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15, 17, 18, 20, 22, 24\}$	9	14
26^*	$\{0, 2, 4, 6, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25\}$	7	15
27	$\{0, 1, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 23, 25\}$	5	16
28^*	$\{0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26\}$	13	15
29	$\{0, 1, 3, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27\}$	9	16
30^*	$\{0, 1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 24, 26, 28\}$	7	17
31	$\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 24, 26, 28, 320\}$	11	17
32^*	$\{0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\}$	15	17
33	$\{0, 2, 4, 6, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 28, 30, 32\}$	7	19
34^*	$\{0, 2, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15, 17, 18, 20, 22, 24, 26, 27, 29, 31, 33\}$	9	19
35	$\{0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 23, 25, 27, 29, 31, 33\}$	11	19
36^*	$\{0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34\}$	17	19

Claviers diatonisés

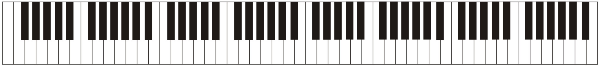
Clavier classique 12 notes/octave :



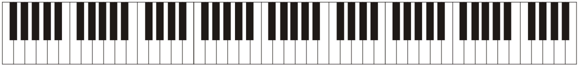
Clavier 19 sons/octave (11 blanches - 8 noires)



Clavier 24 sons/octave (13 blanches - 11 noires) - Quarts de ton - Chromatisme diatonisé

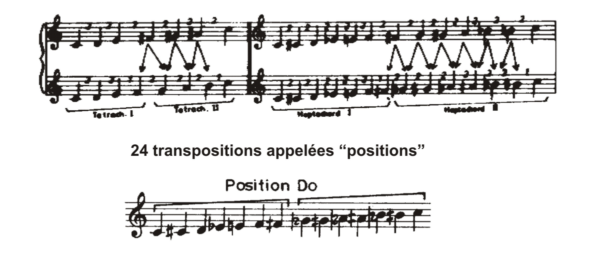


Clavier 31 sons/octave (17 blanches - 14 noires)



Le chromatisme diatonisé

- Inventé par Ivan Wyschnegradsky
- Echelle de 13 sons = gamme diatonique dans l'univers des quarts de ton
- Construite par enchaînement de deux heptacordes



Ivan Wyschnegradsky, Prelude Op 22 no. 4

Chromatisme diatonisé généralisé

La théorie de Wyschnegradsky se généralise à un tempérament égal de N degrés.

Theorem

Soit k un entier $k \geq 2$. L'ensemble

$$W_k = \{0, 1, 3, 5..., 2k+1, 2k+2, 2k+4, ..., 4k+2\}$$

est une gamme diatonique généralisée de $|W_k| = 2k+3$ degrés, dont le générateur est $m = 2k+1$ dans le tempérament égal à N tons, et

$$N = m + |W_k| = 4k + 4$$

L'échelle W_k est une gamme majeure généralisée qui contient l'ensemble à transpositions limitées $\{0, 2k+2\}$

Si on considère les ensembles bien formés modulo 16 de période supérieure à 6, il existe 6 jongles utilisés par Tom Johnson

222212221

4141411

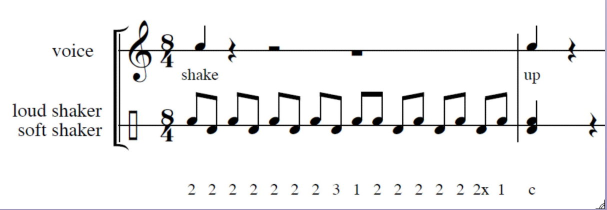
21212121211

3113113111

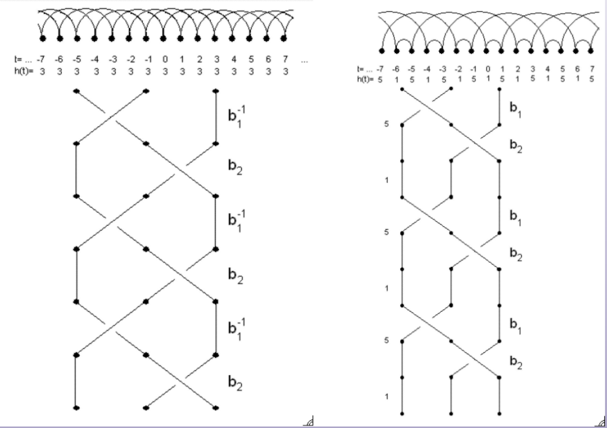
2111211121111

3223222

Exemple. Ces ensembles sont utilisés selon le principe suivant :



Représentation des jongles par des tresses (entrelas à 3 brins)



Cascade 3 $\rightarrow b_1^{-1} b_2 b_1^{-1} b_2 b_1^{-1} b_2$

Pattern 51 $\rightarrow b_1 b_2 b_1 b_2 b_1 b_2$

Tresses et jongles

Le groupe d'Artin des tresses B_n est engendré par les générateurs $b_1, \ldots, b_{n-1}$ satisfaisant les deux relations :

$$\begin{aligned} b_i b_j &= b_j b_i \qquad \text{si } |j-i| \geq 2 \\ b_i b_{i+1} b_i &= b_{i+1} b_i b_{i+1} \end{aligned}$$

Un résultat de S. Devadoss, J. Mugno :

Theorem

Tout entrelacs peut être jonglé.

Exemples.

$$\begin{aligned} 4 &\rightarrow b_1^{-1} b_3 \\ 711 &\rightarrow b_2 b_1 b_2^{-1} b_1^{-1} b_2^{-1} b_1^{-1} b_2^{-1} b_1 b_2 b_1 \\ 5551 &\rightarrow b_2 b_3 b_2^{-1} b_1 b_2^{-1} b_1^{-1} b_3 \end{aligned}$$

Three Notes for Three Jugglers

Utilise des quilles confectionnées par le STEIM d'Amsterdam.

Pièce en cinq parties. Les quilles sont accordées D, G, C (3 quilles de chaque).

Variations sur une 3-cascade.

Section 1 : 333 + 444, 333 + 4450440 puis 334450440, puis 3344404450440

Section 2 : 53444 puis 63344 puis 63353, etc.

In fine : notes de plus en plus longues : donc lancés de plus en plus haut.

Dropping Balls

Créée par Luke Wilson en Finlande en janvier 2011.
La pièce se complexifie par insertion de patterns

333 441 423

qui se transforment progressivement avec adjonction de silence (0).
Le discours musical est ponctué par des cadences :

522 531 522 441 333

La cascade 333 fait office de tonique.
La pièce se termine sur un cycle :

45501

55500 52440

55140 52530

53502