

**I GOT RHYTHM**

**I DO MATHS**

**EMMANUEL AMIOT**

**PERPIGNAN**

**9 / 1 1 / 2012**

# PARCOURS

- **LE CHARME (DU) DISCRET**
- **GROUPES CYCLIQUES POUR NOTES OU RYTHMES**
- **TUILES ET PAVAGES**
- **CONJECTURES**

# DISCRÈTEMENT

# DISCRÈTEMENT

- ALLURE D'UN SIGNAL SONORE

# DISCRÈTEMENT

## ■ ALLURE D'UN SIGNAL SONORE



# DISCRÈTEMENT

## ■ ALLURE D'UN SIGNAL SONORE



## ■ RÉDUCTION

# DISCRÈTEMENT

## ■ ALLURE D'UN SIGNAL SONORE



## ■ RÉDUCTION



# DISCRÈTEMENT

## ■ ALLURE D'UN SIGNAL SONORE



## ■ RÉDUCTION

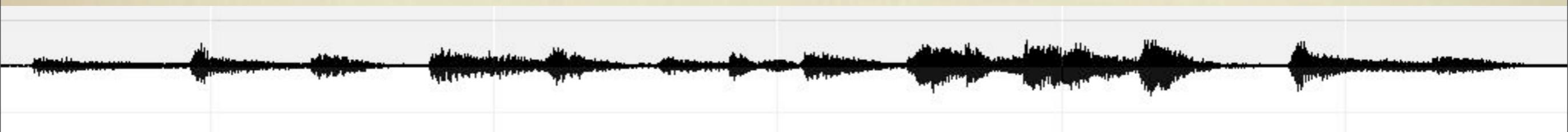


## ■ MODÉLISATION



# DISCRÈTEMENT

## ■ ALLURE D'UN SIGNAL SONORE



## ■ RÉDUCTION



## ■ MODÉLISATION

+ PETIT  
INTERVALLE



# DISCRÈTEMENT

## ■ ALLURE D'UN SIGNAL SONORE



## ■ RÉDUCTION



## ■ MODÉLISATION



# DISCRÈTEMENT

## ■ ALLURE D'UN SIGNAL SONORE



## ■ RÉDUCTION



## ■ MODÉLISATION

+ PETIT  
INTERVALLE



# DISCRÈTEMENT

## ■ ALLURE D'UN SIGNAL SONORE



## ■ RÉDUCTION



## ■ MODÉLISATION

+ PETIT  
INTERVALLE



# DISCRÈTEMENT

# DISCRÈTEMENT

- RYTHME = SUITE CROISSANTE D'ENTIERS.

# DISCRÈTEMENT

- RYTHME = SUITE CROISSANTE D'ENTRIERS.
- RÉPÉTITION: RYTHMES PÉRIODIQUES.

# DISCRÈTEMENT

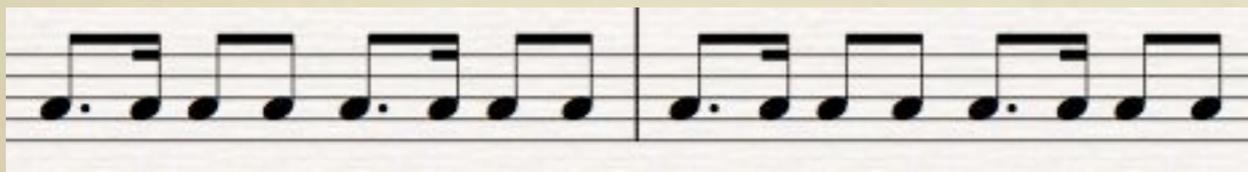
- RYTHME = SUITE CROISSANTE D'ENTRIERS.
- RÉPÉTITION: RYTHMES PÉRIODIQUES.
- RYTHME PÉRIODIQUE = SOUS-ENSEMBLE D'UN GROUPE CYCLIQUE.

# DISCRÈTEMENT

- **RYTHME = SUITE CROISSANTE D'ENTRIERS.**
- **RÉPÉTITION: RYTHMES PÉRIODIQUES.**
- **RYTHME PÉRIODIQUE = SOUS-ENSEMBLE D'UN GROUPE CYCLIQUE.**

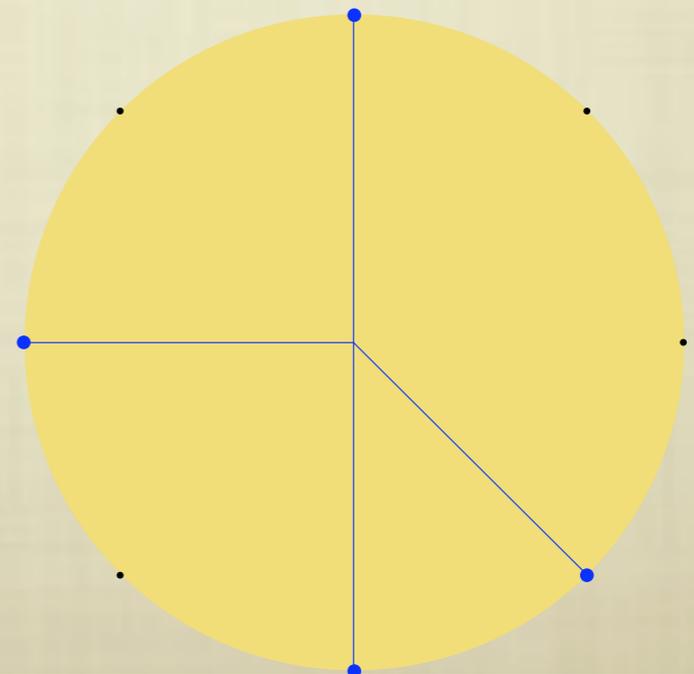
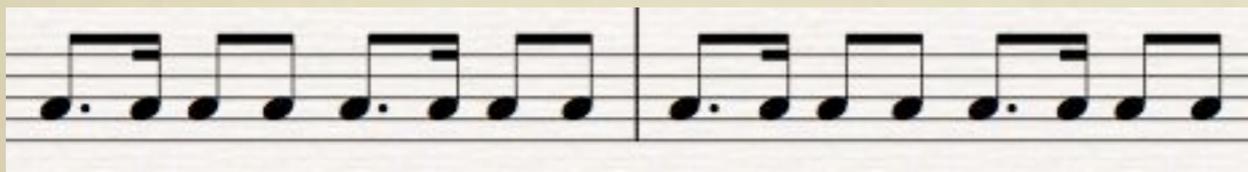
# DISCRÈTEMENT

- RYTHME = SUITE CROISSANTE D'ENTRIERS.
- RÉPÉTITION: RYTHMES PÉRIODIQUES.
- RYTHME PÉRIODIQUE = SOUS-ENSEMBLE D'UN GROUPE CYCLIQUE.



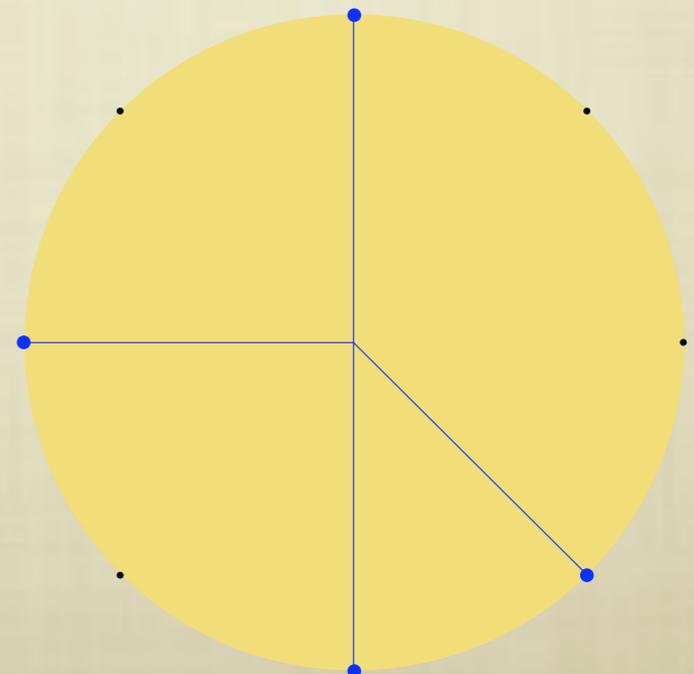
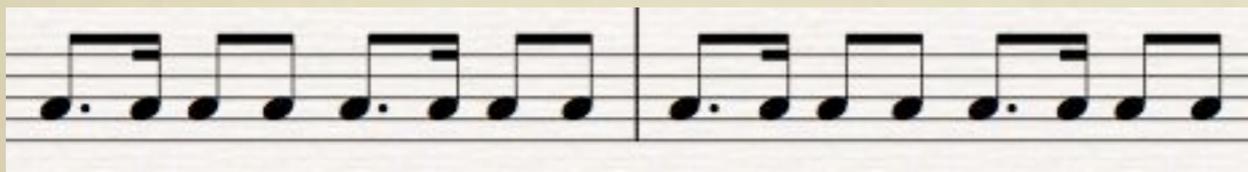
# DISCRÈTEMENT

- RYTHME = SUITE CROISSANTE D'ENTIERS.
- RÉPÉTITION: RYTHMES PÉRIODIQUES.
- RYTHME PÉRIODIQUE = SOUS-ENSEMBLE D'UN GROUPE CYCLIQUE.



# DISCRÈTEMENT

- RYTHME = SUITE CROISSANTE D'ENTIERS.
- RÉPÉTITION: RYTHMES PÉRIODIQUES.
- RYTHME PÉRIODIQUE = SOUS-ENSEMBLE D'UN GROUPE CYCLIQUE.



# DISCRÈTEMENT

# DISCRÈTEMENT

- **GROUPE CYCLIQUE -> STRUCTURE (GROUPE, ANNEAU, MODULE -> ALGÈBRE, ETC...)**

# DISCRÈTEMENT

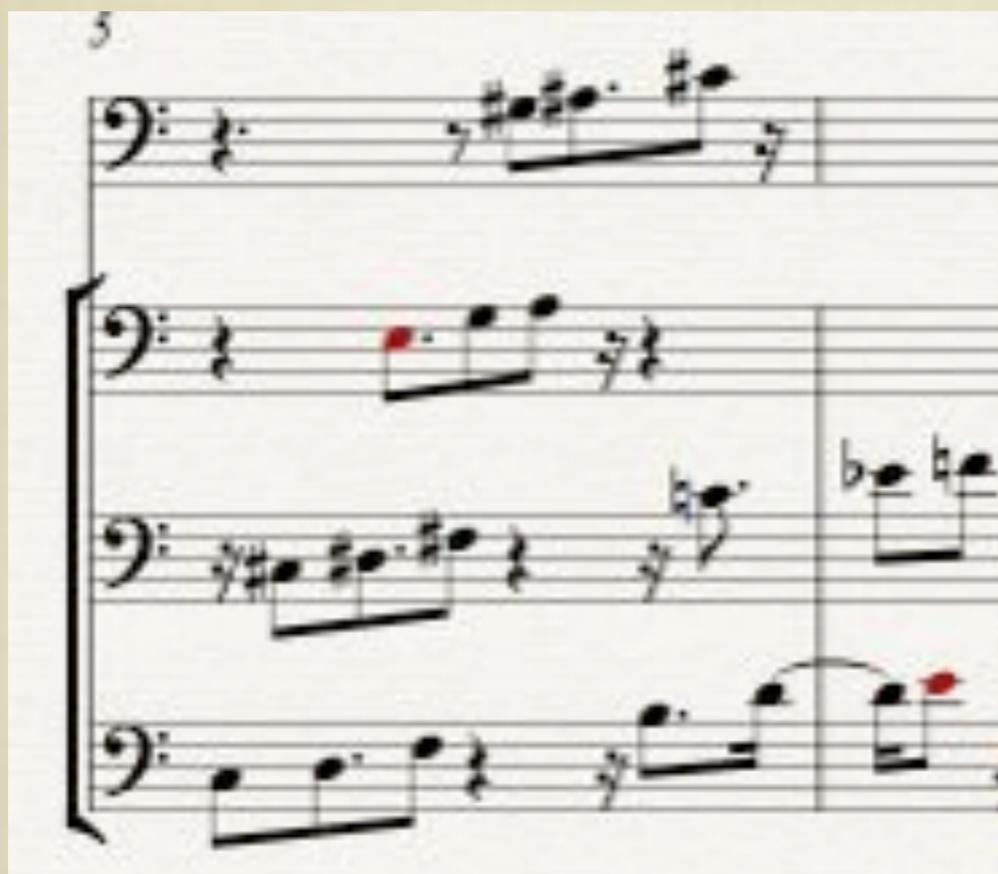
- **GROUPE CYCLIQUE -> STRUCTURE (GROUPE, ANNEAU, MODULE -> ALGÈBRE, ETC...)**
- **RÉPÉTITION -> COMBINATOIRE (FINIE)**

# DISCRÈTEMENT

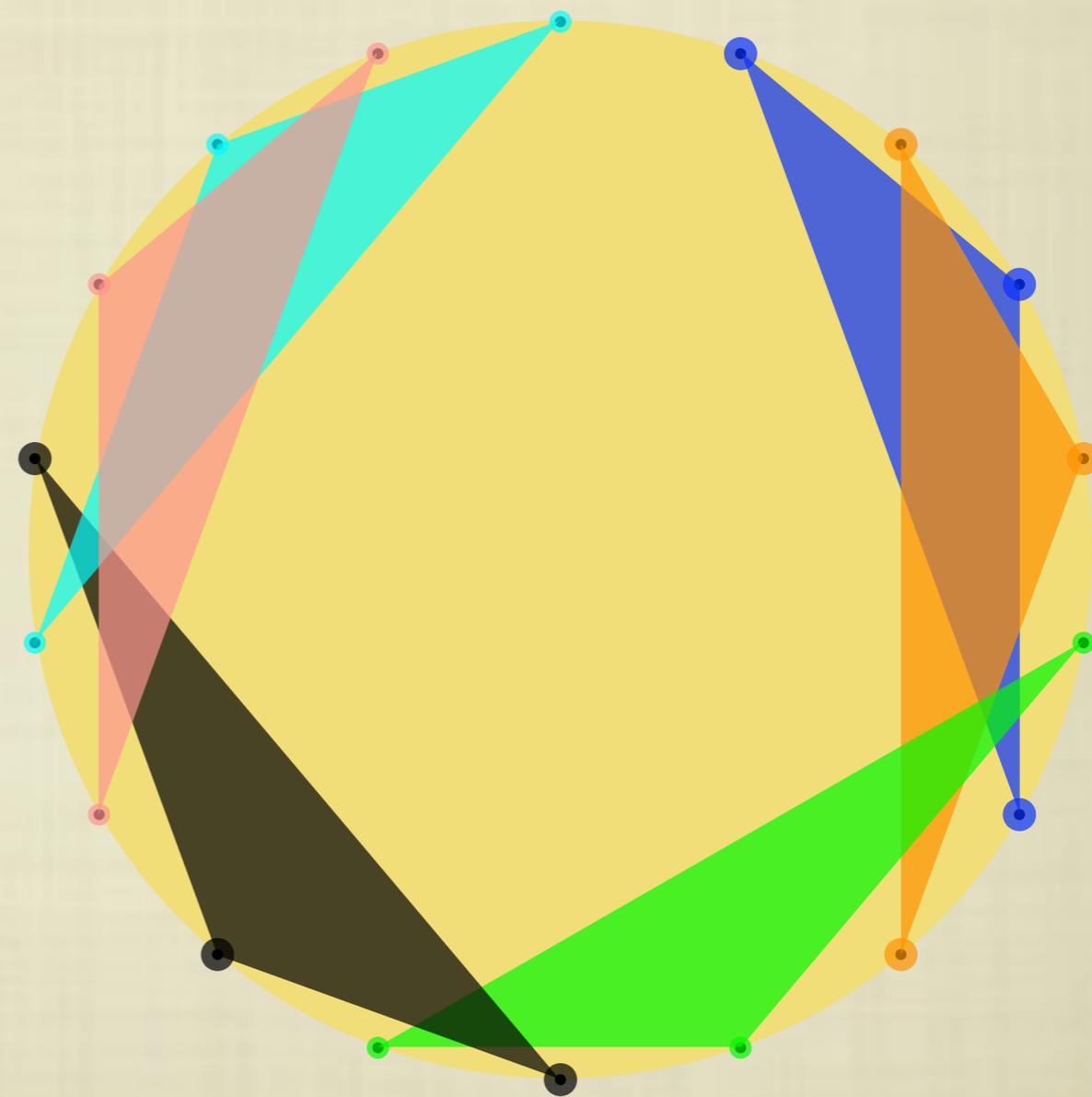
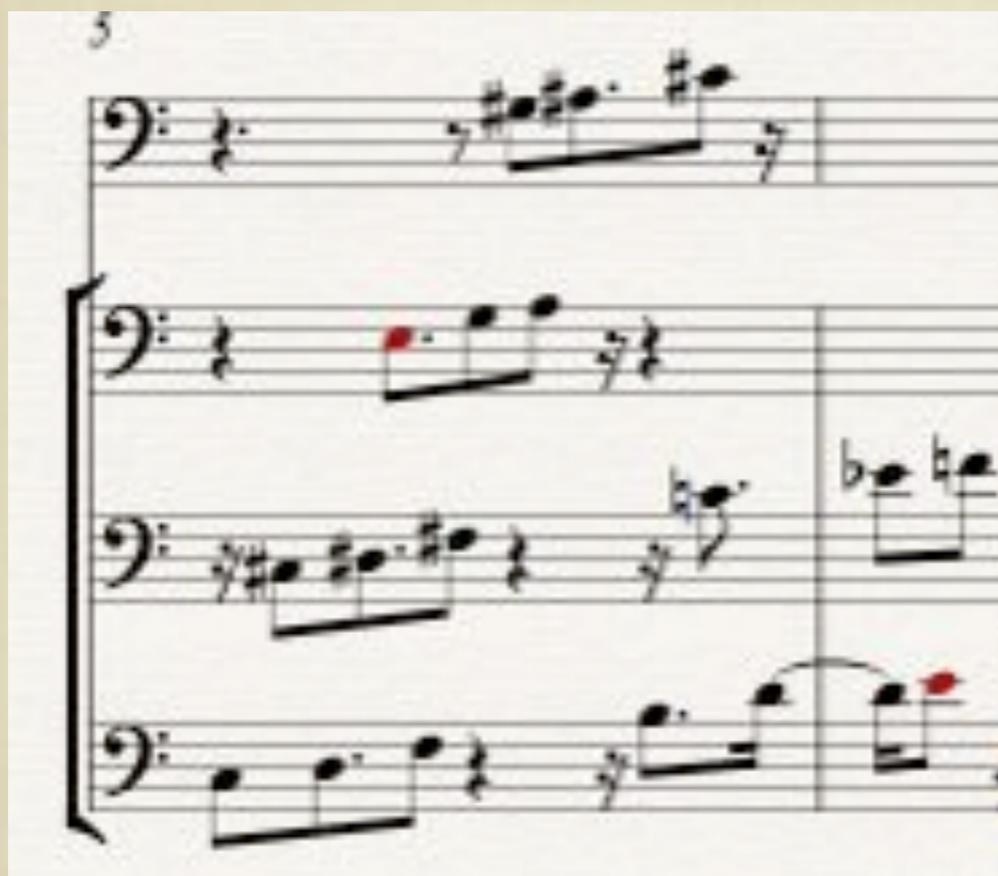
- **GROUPE CYCLIQUE -> STRUCTURE (GROUPE, ANNEAU, MODULE -> ALGÈBRE, ETC...)**
- **RÉPÉTITION -> COMBINATOIRE (FINIE)**
- **GROUPE CYCLIQUE = MODÈLE SURDÉTERMINÉ (NOTAMMENT HAUTEURS À OCTAVE PRÈS = PITCH CLASSES DE LA SET-THEORY)**

# PAVAGES

# PAVAGES



# PAVAGES



# CANONS RYTHMIQUES

# CANONS RYTHMIQUES

- LA RECHERCHE DE VUZA
- LE LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS
- ...ET AVEC CELLE DE FUGLEDE
- LES ALGORITHMES DE MATOLCSI & KOLOUNTZAKIS

# CANONS DE VUZA

## ■ LA RECHERCHE DE VUZA

# CANONS DE VUZA

## ■ LA RECHERCHE DE VUZA

● NOTION DE CANON RYTHMIQUE: RÉDUCTION AUX ENTRÉES

# CANONS DE VUZA

## ■ LA RECHERCHE DE VUZA

- NOTION DE CANON RYTHMIQUE: RÉDUCTION AUX ENTRÉES
- CANON MOSAÏQUE: LES DIVERSES VOIX PAVENT



# CANONS DE VUZA

## ■ LA RECHERCHE DE VUZA

- NOTION DE CANON RYTHMIQUE: RÉDUCTION AUX ENTRÉES
- CANON MOSAÏQUE: LES DIVERSES VOIX PAVENT



# CANONS DE VUZA

## ■ LA RECHERCHE DE VUZA

- NOTION DE CANON RYTHMIQUE: RÉDUCTION AUX ENTRÉES
- CANON MOSAÏQUE: LES DIVERSES VOIX PAVENT



# CANONS DE VUZA

## ■ LA RECHERCHE DE VUZA

- NOTION DE CANON RYTHMIQUE: RÉDUCTION AUX ENTRÉES
- CANON MOSAÏQUE: LES DIVERSES VOIX PAVENT



# CANONS DE VUZA

## ■ LA RECHERCHE DE VUZA

# CANONS DE VUZA

## ■ LA RECHERCHE DE VUZA

● TOUS LES MOTIFS DE PAVENT PAS

# CANONS DE VUZA

## ■ LA RECHERCHE DE VUZA

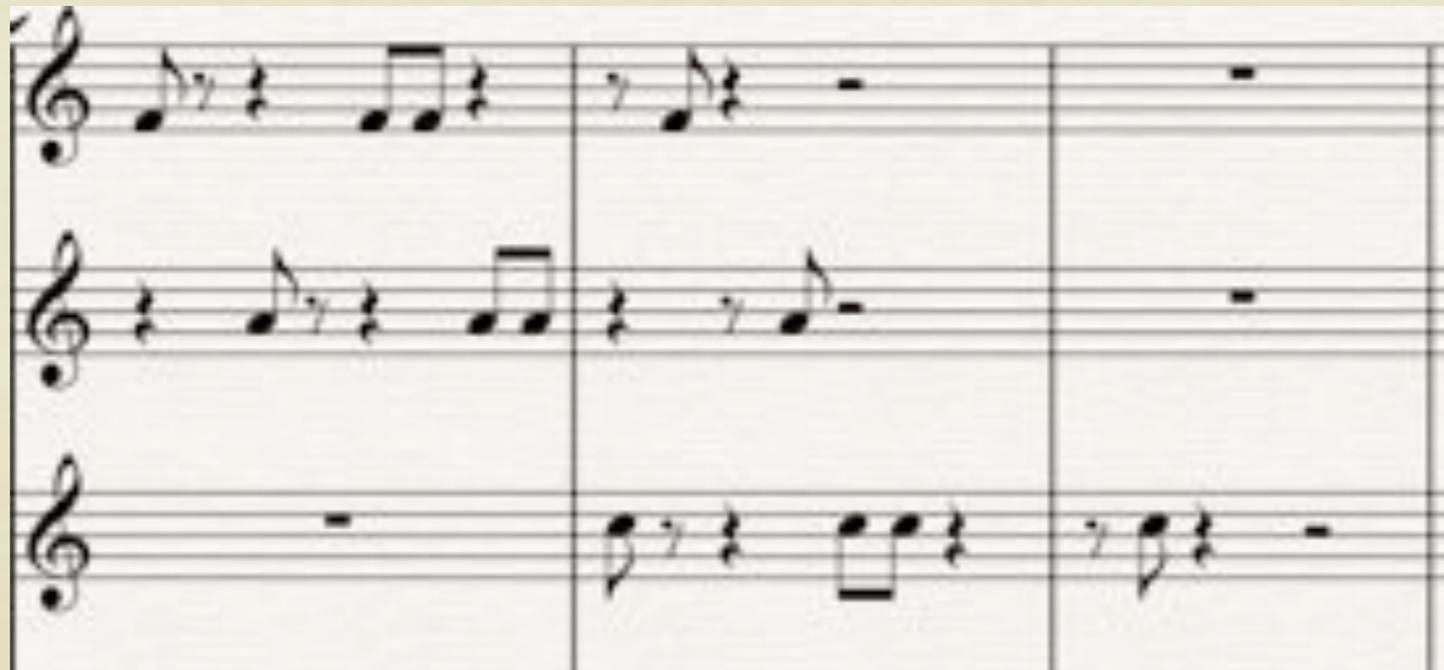
- TOUS LES MOTIFS DE PAVENT PAS
- QUAND ILS PAVENT ILS LE FONT DE FAÇON PÉRIODIQUE



# CANONS DE VUZA

## ■ LA RECHERCHE DE VUZA

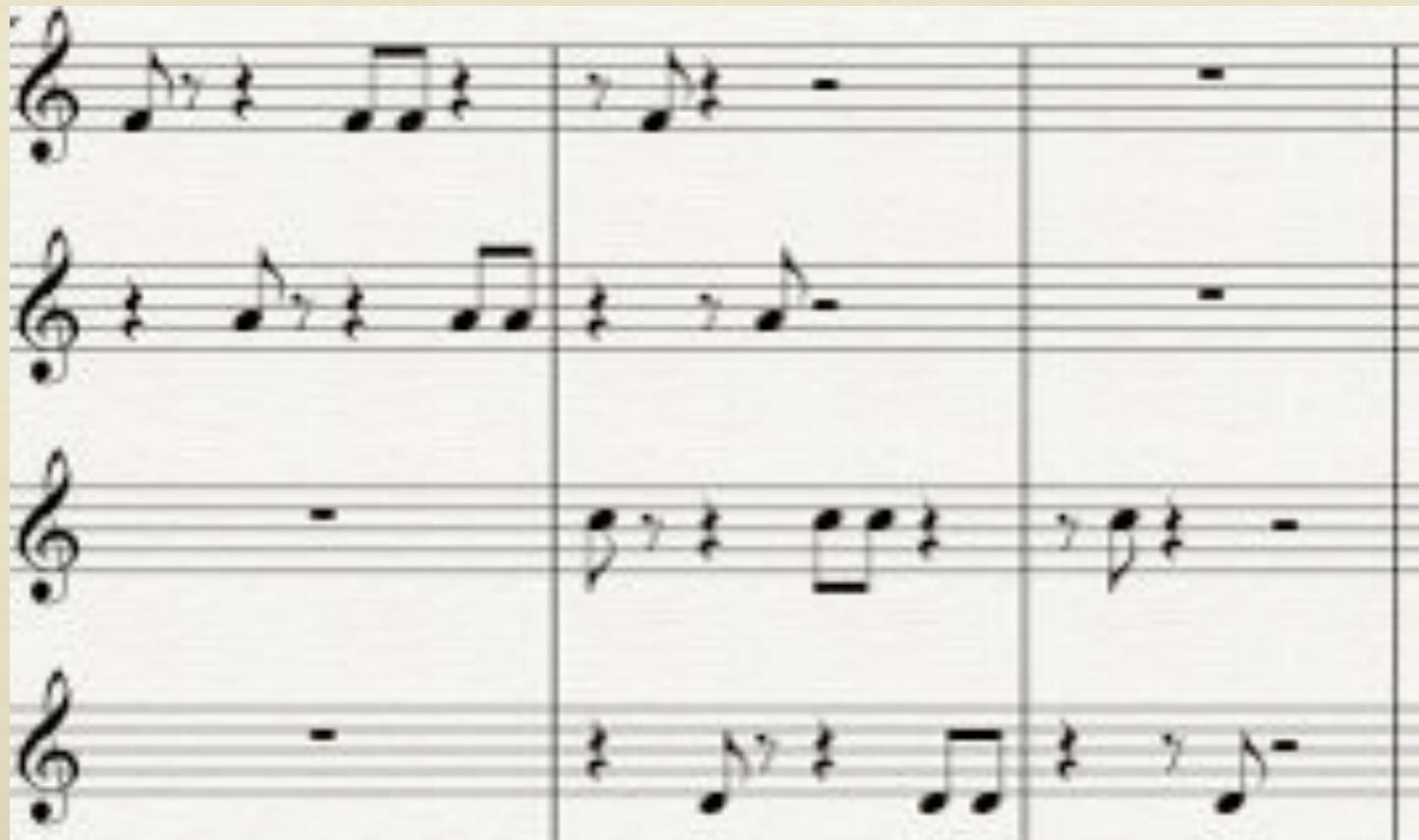
- TOUS LES MOTIFS DE PAVENT PAS
- QUAND ILS PAVENT ILS LE FONT DE FAÇON PÉRIODIQUE



# CANONS DE VUZA

## ■ LA RECHERCHE DE VUZA

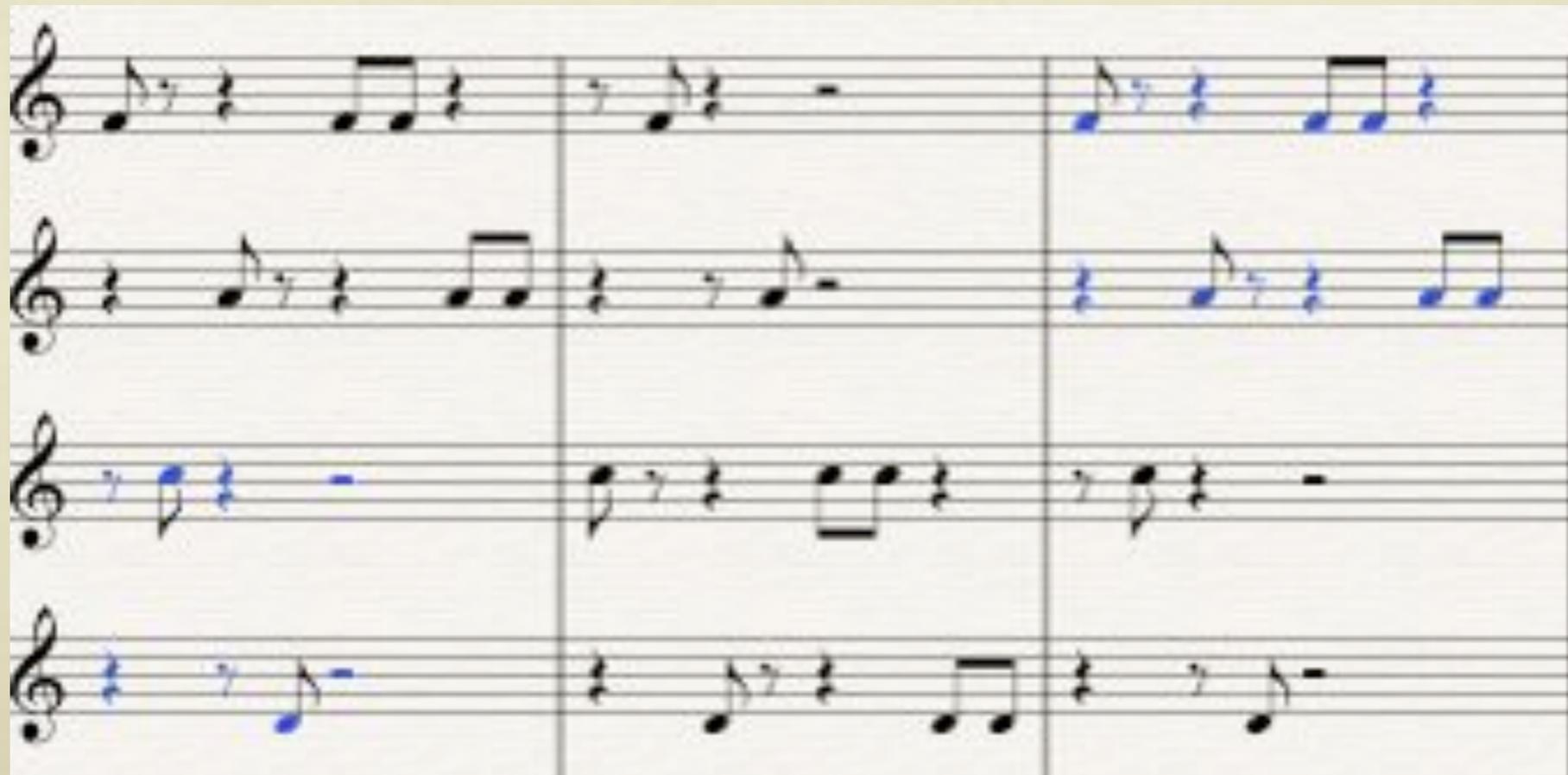
- TOUS LES MOTIFS DE PAVENT PAS
- QUAND ILS PAVENT ILS LE FONT DE FAÇON PÉRIODIQUE



# CANONS DE VUZA

## ■ LA RECHERCHE DE VUZA

- TOUS LES MOTIFS DE PAVENT PAS
- QUAND ILS PAVENT ILS LE FONT DE FAÇON PÉRIODIQUE



# CANONS DE VUZA

- LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS

# CANONS DE VUZA

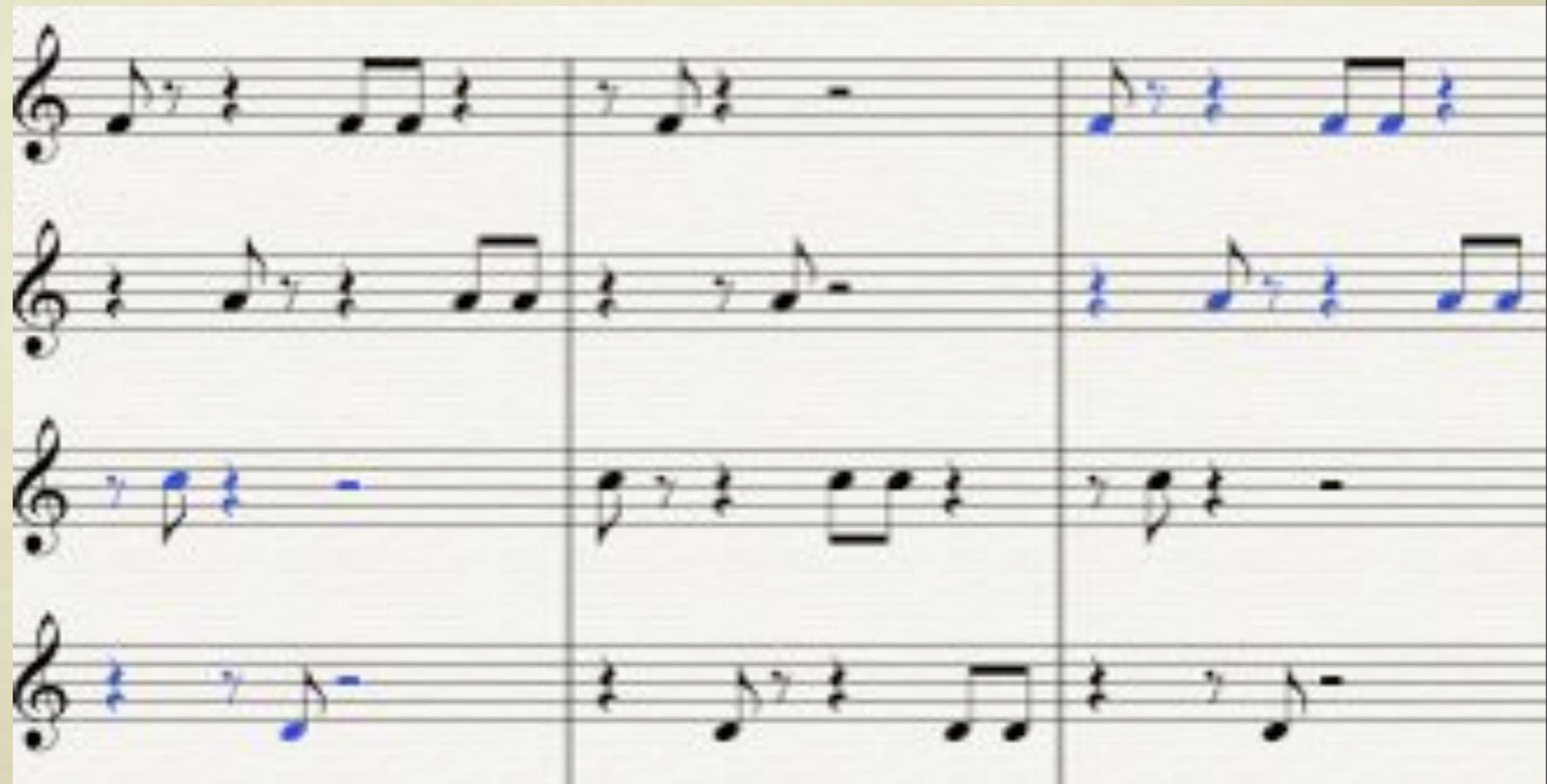
## ■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS

● VUZA CONSTATE QUE SOIT LE MOTIF, SOIT SON «DUAL» (LE MOTIF DES ENTRÉES DU MOTIF) EST PÉRIODIQUE.

# CANONS DE VUZA

## ■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS

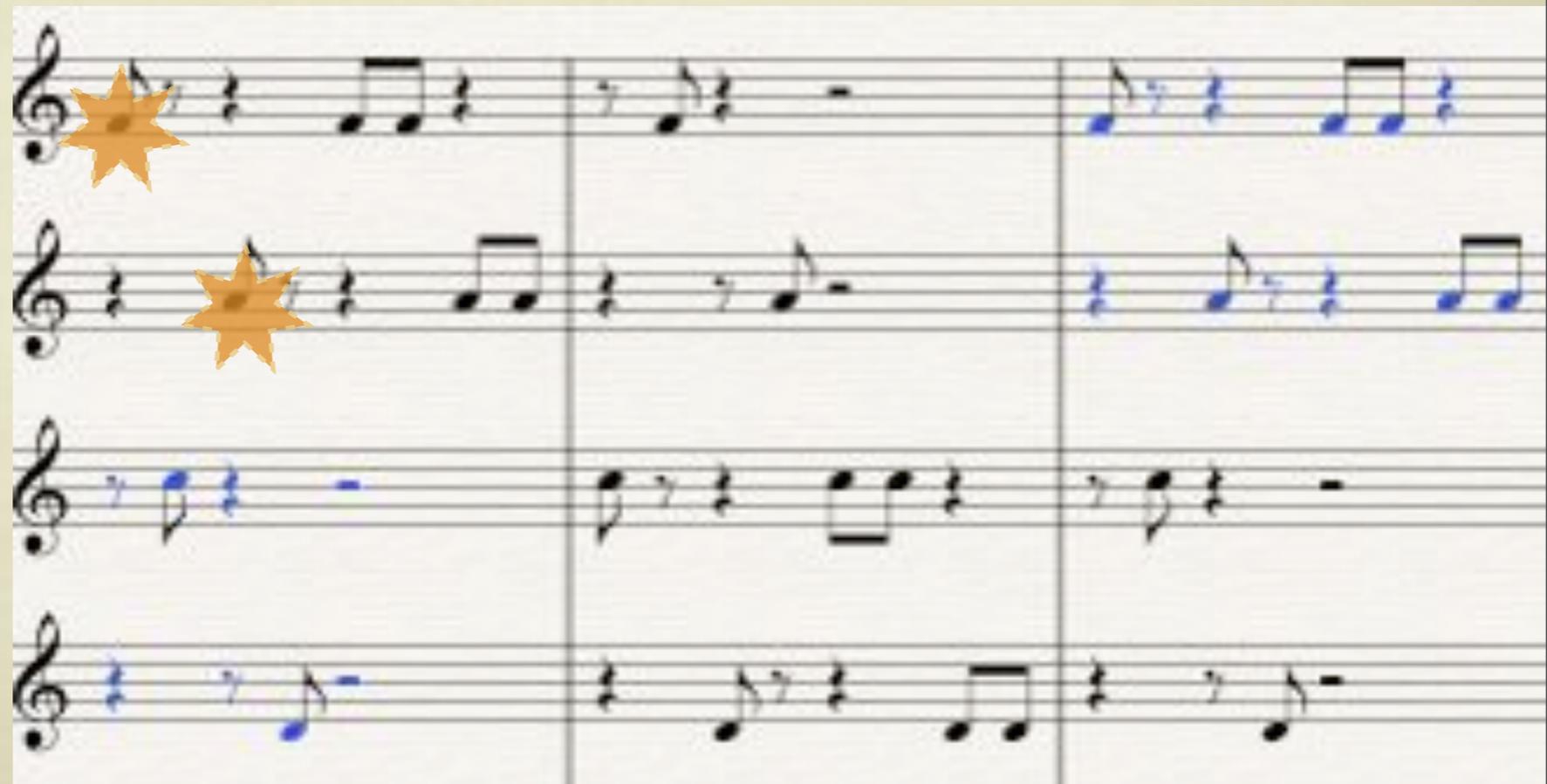
● VUZA CONSTATE QUE SOIT LE MOTIF, SOIT SON «DUAL» (LE MOTIF DES ENTRÉES DU MOTIF) EST PÉRIODIQUE.



# CANONS DE VUZA

## ■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS

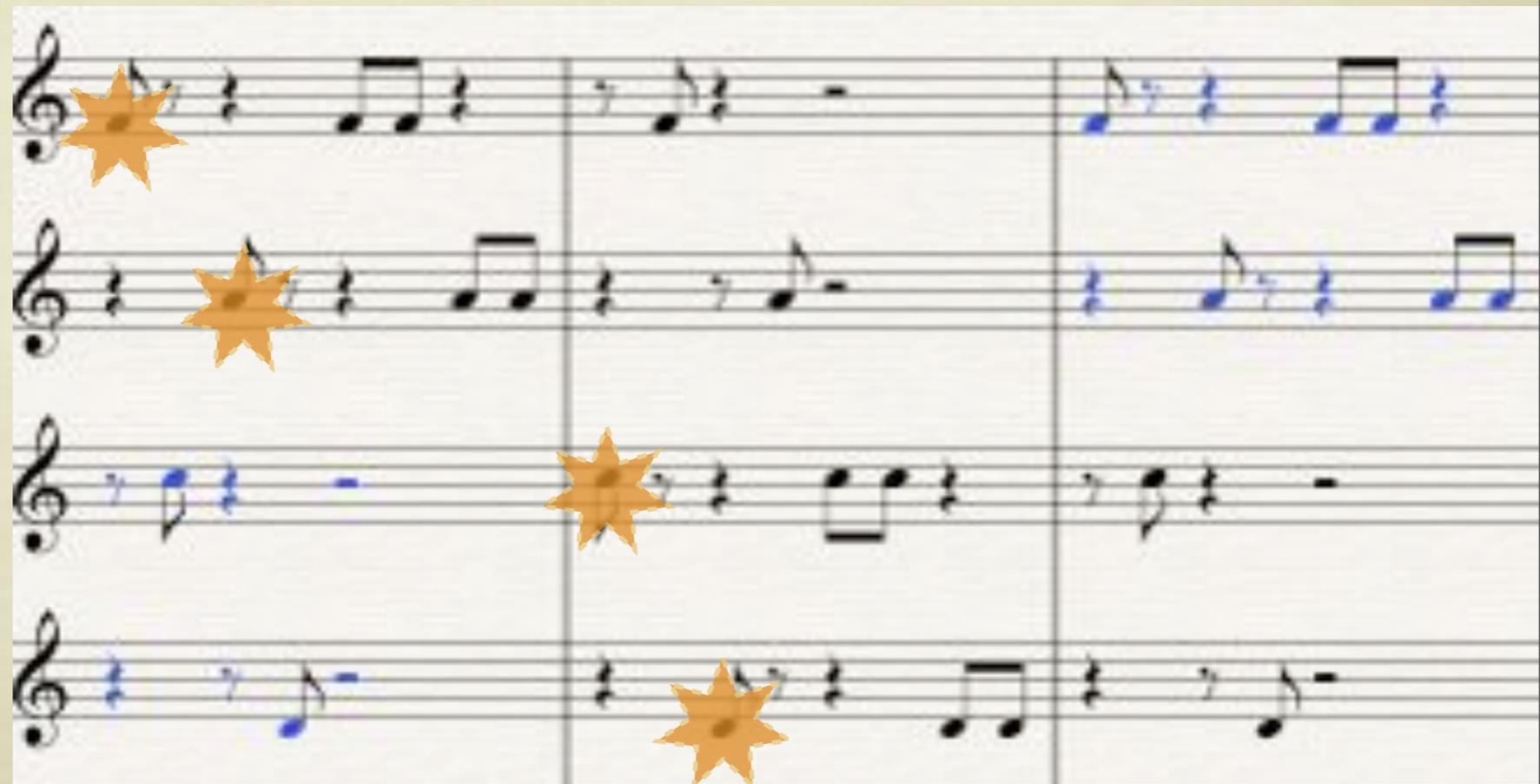
● VUZA CONSTATE QUE SOIT LE MOTIF, SOIT SON «DUAL» (LE MOTIF DES ENTRÉES DU MOTIF) EST PÉRIODIQUE.



# CANONS DE VUZA

## ■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS

● VUZA CONSTATE QUE SOIT LE MOTIF, SOIT SON «DUAL» (LE MOTIF DES ENTRÉES DU MOTIF) EST PÉRIODIQUE.

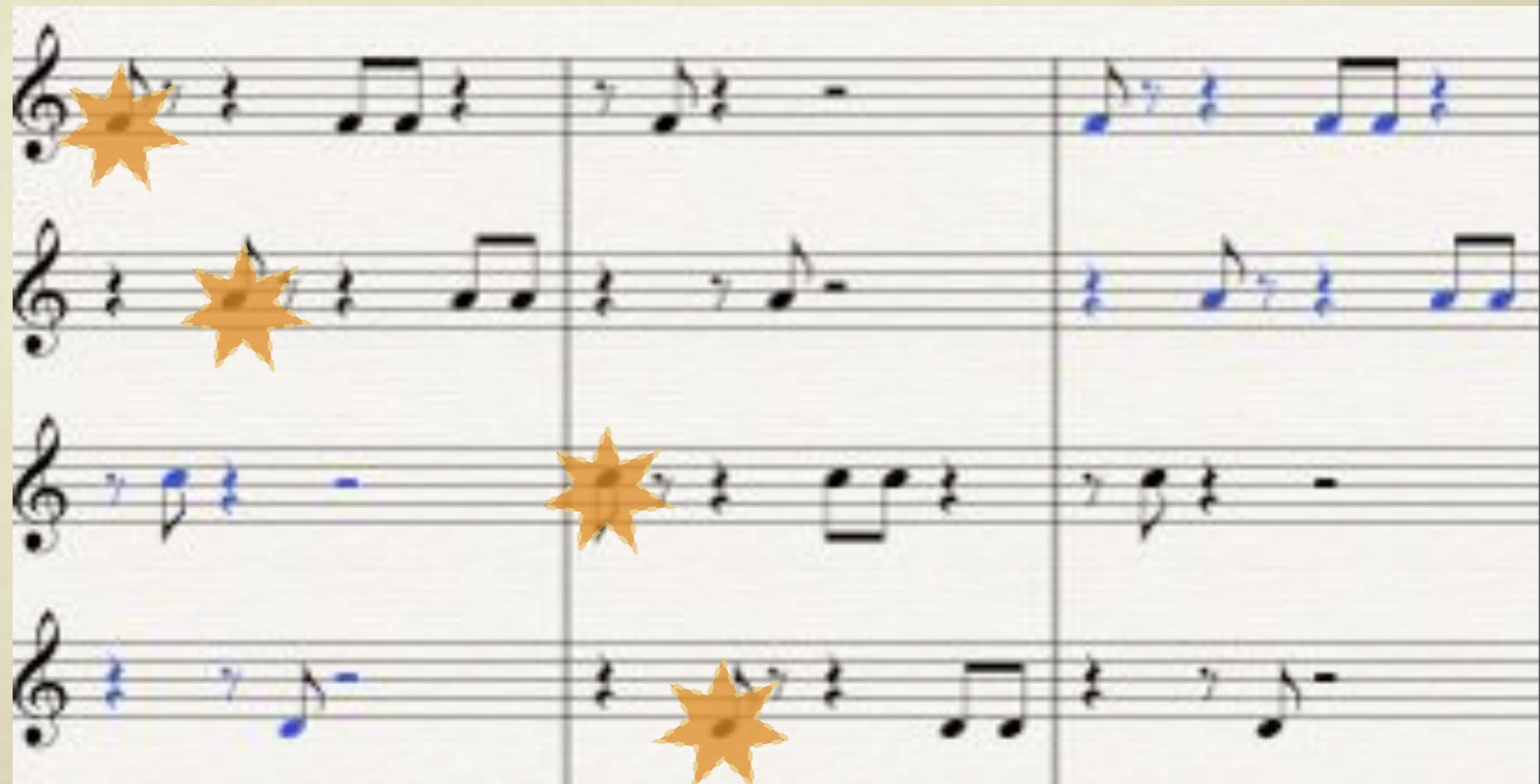


# CANONS DE VUZA

## ■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS

● VUZA CONSTATE QUE SOIT LE MOTIF, SOIT SON «DUAL» (LE MOTIF DES ENTRÉES DU MOTIF) EST PÉRIODIQUE.

● EST-CE  
GÉNÉRAL?...



# CANONS DE VUZA

- LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS

# CANONS DE VUZA

- LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS



# CANONS DE VUZA

## ■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS

● PAR UN TRAVAIL TITANESQUE, VUZA ÉTABLIT NON SEULEMENT QU'IL EXISTE DES CANONS TOTALEMENT NON PÉRIODIQUES («IRRÉDUCTIBLES DE CATÉGORIE MAXIMALE», NOUS DIRONS PLUTÔT «DE VUZA»...) MAIS AUSSI POUR QUELLES PÉRIODES.



# CANONS DE VUZA

## ■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS

- PAR UN TRAVAIL TITANESQUE, VUZA ÉTABLIT NON SEULEMENT QU'IL EXISTE DES CANONS TOTALEMENT NON PÉRIODIQUES («IRRÉDUCTIBLES DE CATÉGORIE MAXIMALE», NOUS DIRONS PLUTÔT «DE VUZA»...) MAIS AUSSI POUR QUELLES PÉRIODES.
- PUBLIÉ DANS PNM EN 90-91.



# CANONS DE VUZA

## ■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS

● PAR UN TRAVAIL TITANESQUE, VUZA ÉTABLIT NON SEULEMENT QU'IL EXISTE DES CANONS TOTALEMENT NON PÉRIODIQUES («IRRÉDUCTIBLES DE CATÉGORIE MAXIMALE», NOUS DIRONS PLUTÔT «DE VUZA»...) MAIS AUSSI POUR QUELLES PÉRIODES.

● PUBLIÉ DANS PNM EN 90-91.

● EN FAIT (DÉCOUVERT PAR M. ANDREATTA) VUZA AVAIT REDÉCOUVERT LA SOLUTION COMPLÈTE D'UNE CONJECTURE DES ANNÉES 50.



# CANONS DE VUZA

## ■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS

● PAR UN TRAVAIL TITANESQUE, VUZA ÉTABLIT NON SEULEMENT QU'IL EXISTE DES CANONS TOTALEMENT NON PÉRIODIQUES («IRRÉDUCTIBLES DE CATÉGORIE MAXIMALE», NOUS DIRONS PLUTÔT «DE VUZA»...) MAIS AUSSI POUR QUELLES PÉRIODES.

● PUBLIÉ DANS PNM EN 90-91.

● EN FAIT (DÉCOUVERT PAR M. ANDREATTA) VUZA AVAIT REDÉCOUVERT LA SOLUTION COMPLÈTE D'UNE CONJECTURE DES ANNÉES 50.

# CANONS DE VUZA

- LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS

# CANONS DE VUZA

## ■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS

● THM: IL EXISTE DES CANONS DE VUZA POUR LES SEULES PÉRIODES N QUI NE SONT PAS DE LA FORME

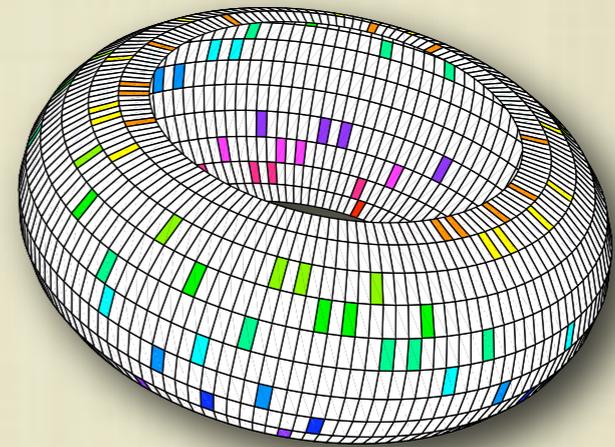
$$n = p^\alpha, p^\alpha q, p^2 q^2, p^2 q r, p q r s$$

# CANONS DE VUZA

## ■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS

● THM: IL EXISTE DES CANONS DE VUZA POUR LES SEULES PÉRIODES N QUI NE SONT PAS DE LA FORME

$$n = p^\alpha, p^\alpha q, p^2 q^2, p^2 q r, p q r s$$

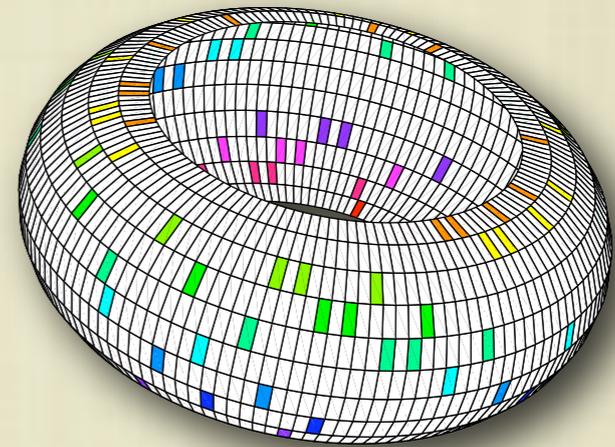


# CANONS DE VUZA

## ■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS

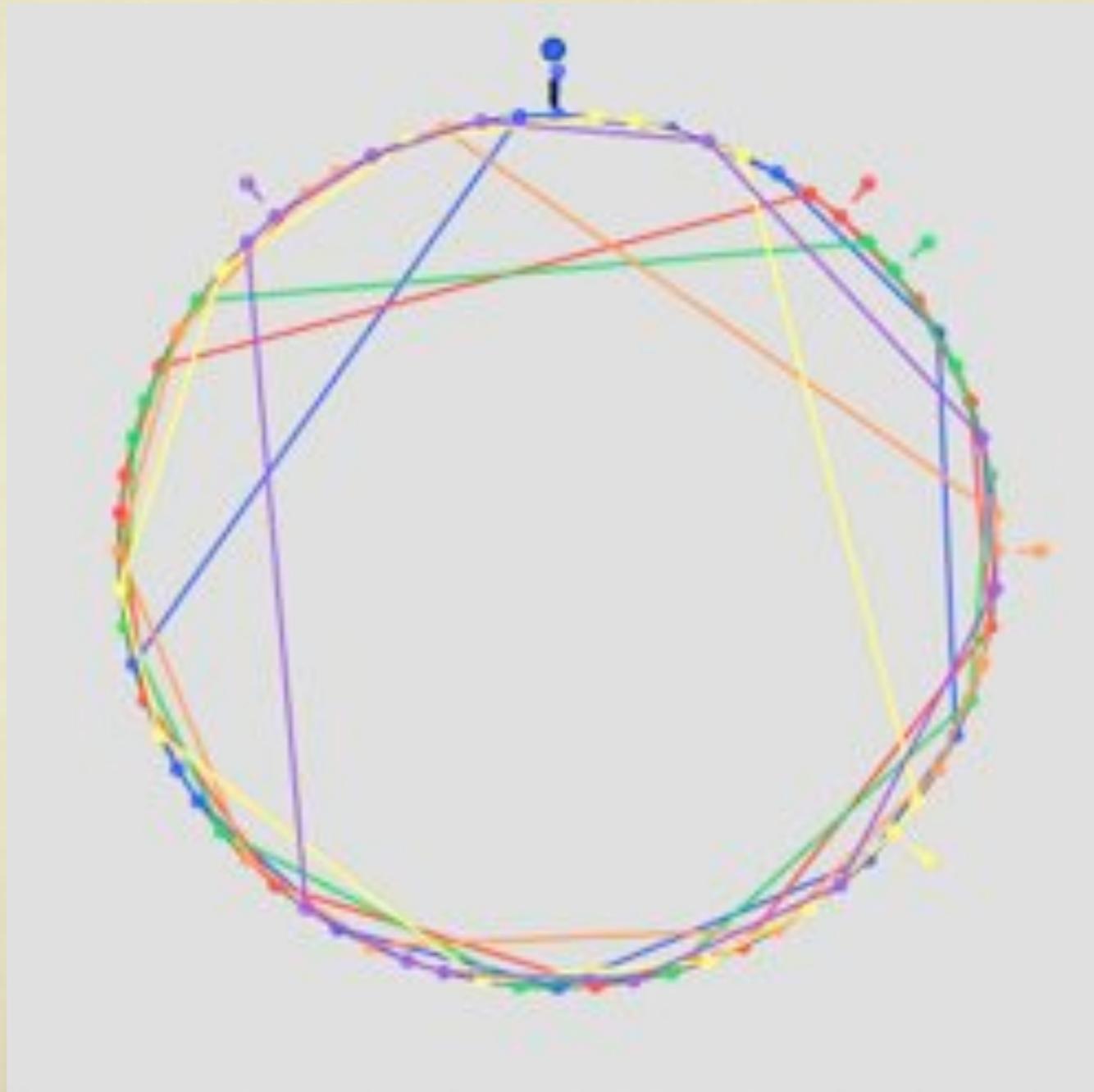
● THM: IL EXISTE DES CANONS DE VUZA POUR LES SEULES PÉRIODES N QUI NE SONT PAS DE LA FORME

$$n = p^\alpha, p^\alpha q, p^2 q^2, p^2 q r, p q r s$$



# CANONS DE VUZA

# CANONS DE VUZA



# CANONS DE VUZA

- LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS

# CANONS DE VUZA

■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS

● TRADUCTION MUSICALE DE LA NOTION DE CANON DE VUZA

# CANONS DE VUZA

■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS

- TRADUCTION MUSICALE DE LA NOTION DE CANON DE VUZA
- «LE CANON RYTHMIQUE TEL QU'ON L'ENTEND»

# CANONS DE VUZA

## ■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS

- TRADUCTION MUSICALE DE LA NOTION DE CANON DE VUZA
- «LE CANON RYTHMIQUE TEL QU'ON L'ENTEND»
- EN EFFET SI LE MOTIF SE RÉPÈTE ALORS ON PERÇOIT LE SOUS-MOTIF

# CANONS DE VUZA

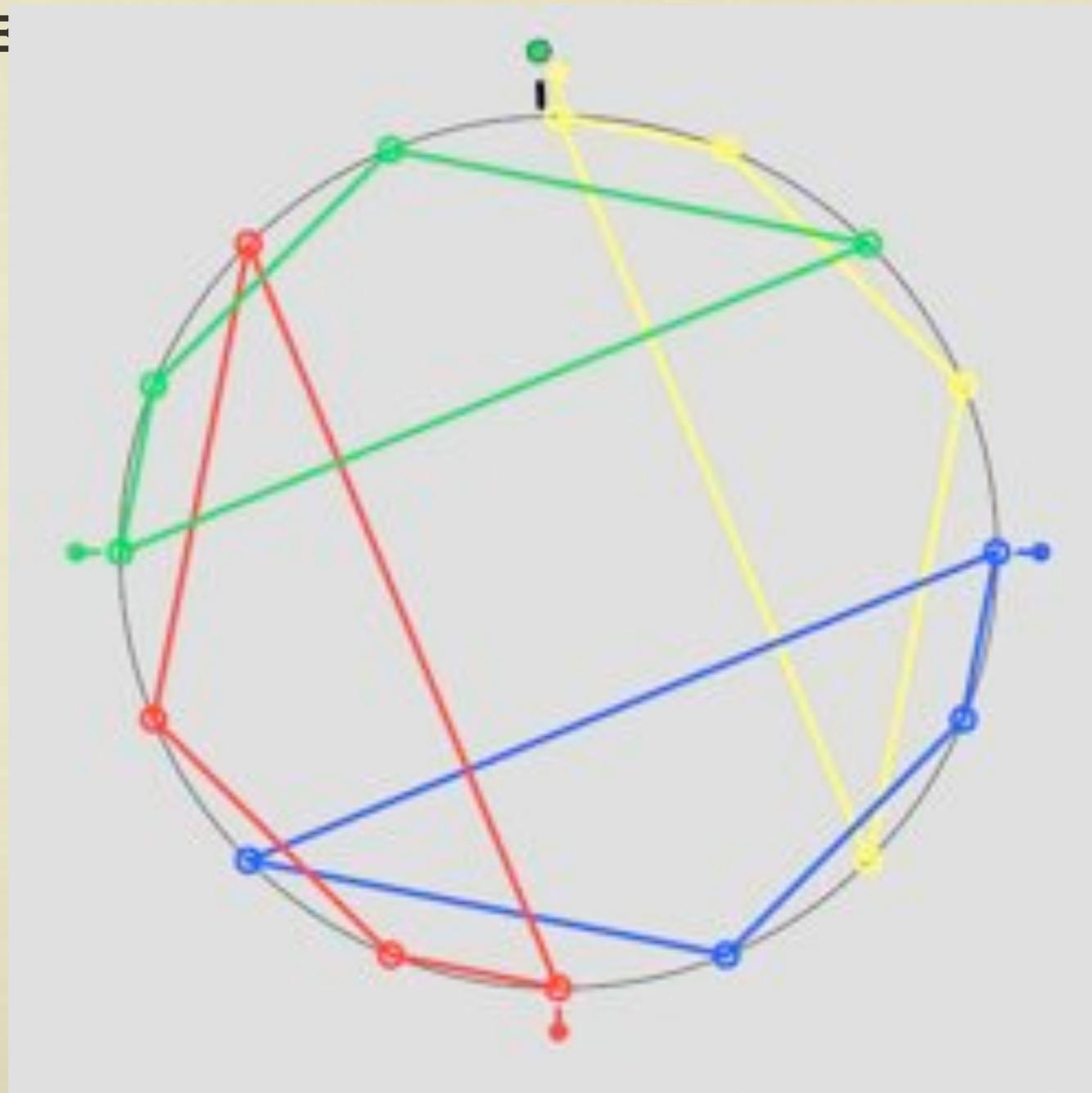
## ■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS

- TRADUCTION MUSICALE DE LA NOTION DE CANON DE VUZA
- «LE CANON RYTHMIQUE TEL QU'ON L'ENTEND»
- EN EFFET SI LE MOTIF SE RÉPÈTE ALORS ON PERÇOIT LE SOUS-MOTIF
- DE MÊME POUR LA SÉQUENCE DES ENTRÉES

# CANONS DE VUZA

■ LIE

IAJOS



# CANONS DE VUZA

- LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS

# CANONS DE VUZA

■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS

● INTÉRÊT MUSICAL: NON RÉPÉTITION

# CANONS DE VUZA

■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE HAJOS

● INTÉRÊT MUSICAL: NON RÉPÉTITION

● INTÉRÊT MATHÉMATIQUE:

**LES CANONS DE VUZA SONT LES ATOMES DONT  
SONT CONSTRUITS LES AUTRES CANONS**

# CANONS DE VUZA

- LIEN AVEC LA CONJECTURE DE FUGLEDE

# CANONS DE VUZA

■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE FUGLEDE

«UN MOTIF PAVE SI ET SEULEMENT SI IL  
EST SPECTRAL»

# CANONS DE VUZA

■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE FUGLEDE

«~~UN MOTIF PARVESS IETS SEULEMENTSS II LL~~  
~~ESTS SPECTRAAL~~»

# CANONS DE VUZA

■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE FUGLEDE

«UN MOTIF PARVESS IETS SEULEMENTSS IILL

ESTS SPECTRAAL»

● CONJECTURE FAMEUSE DANS LE DOMAINE GÉNÉRAL DES  
MOSAÏQUES

# CANONS DE VUZA

■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE FUGLEDE

«~~UN MOT FRAIS IETS SEULEMENT~~ II LL

~~EST SPECTRAL~~»

● CONJECTURE FAMEUSE DANS LE DOMAINE GÉNÉRAL DES MOSAÏQUES

● SEMBLAIT VRAIE...

# CANONS DE VUZA

■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE FUGLEDE

«~~UN MOT FRAIS IETS SEULEMENT~~ IL  
EST SPECTRAL»

- CONJECTURE FAMEUSE DANS LE DOMAINE GÉNÉRAL DES MOSAÏQUES
- SEMBLAIT VRAIE...
- POUR LES CANONS RYTHMIQUES ELLE SE RAMÈNE AU CAS DES CANONS DE VUZA

# CANONS DE VUZA

■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE FUGLEDE

«UN MOTIF PAVÉ EST SEULEMENT SPECTRAL»

- CONJECTURE FAMEUSE DANS LE DOMAINE GÉNÉRAL DES MOSAÏQUES
- SEMBLAIT VRAIE...
- POUR LES CANONS RYTHMIQUES ELLE SE RAMÈNE AU CAS DES CANONS DE VUZA

$$n = p^\alpha, p^\alpha q, p^2 q^2, p^2 q r, p q r s$$

# CANONS DE VUZA

## ■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE FUGLEDE

«~~UN MOT FFAVSS IETS SEULEMENTSS ILL~~  
~~ESTS SPECTRAAL~~»

- CONJECTURE FAMEUSE DANS LE DOMAINE GÉNÉRAL DES MOSAÏQUES
- SEMBLAIT VRAIE...
- POUR LES CANONS RYTHMIQUES ELLE SE RAMÈNE AU CAS DES CANONS DE VUZA

$$n = p^\alpha, p^\alpha q, p^2 q^2, p^2 qr, pqrs$$

From Laba + Coven-Meyerowitz

# CANONS DE VUZA

## ■ LIEN AVEC LA CONJECTURE DE FUGLEDE

«~~UN MOT FFAVSS IETS SEULEMENTSS ILL~~  
~~ESTS SPECTRAAL~~»

- CONJECTURE FAMEUSE DANS LE DOMAINE GÉNÉRAL DES MOSAÏQUES
- SEMBLAIT VRAIE...
- POUR LES CANONS RYTHMIQUES ELLE SE RAMÈNE AU CAS DES CANONS DE VUZA

$$n = p^\alpha, p^\alpha q, p^2 q^2, p^2 qr, pqrs$$

From Laba + Coven-Meyerowitz

New

# CANONS DE VUZA

- LES MUSICOS JOUENT DANS LA COUR DE GAUSS

# CANONS DE VUZA

- LES MUSICOS JOUENT DANS LA COUR DE GAUSS
- CES ARGUMENTS JOUENT POUR D'AUTRES PROBLÈMES MATHÉMATIQUES ARDUS (CONJECTURE  $T_2$ , ETC)

# CANONS DE VUZA

- **LES MUSICOS JOUENT DANS LA COUR DE GAUSS**
- **CES ARGUMENTS JOUENT POUR D'AUTRES PROBLÈMES MATHÉMATIQUES ARDUS (CONJECTURE  $T_2$ , ETC)**
- **LES CANONS DE VUZA GAGNENT UN INTÉRÊT INESPÉRÉ CHEZ LES SPÉCIALISTES DES PAVAGES...**

# CANONS DE VUZA

- **LES MUSICOS JOUENT DANS LA COUR DE GAUSS**
- **CES ARGUMENTS JOUENT POUR D'AUTRES PROBLÈMES MATHÉMATIQUES ARDUS (CONJECTURE  $T_2$ , ETC)**
- **LES CANONS DE VUZA GAGNENT UN INTÉRÊT INESPÉRÉ CHEZ LES SPÉCIALISTES DES PAVAGES...**
- **FOISON DE NOUVEAUX RÉSULTATS ET MÉTHODES**  
**NOTAMMENT LISTE DE TOUS LES CANONS DE VUZA POUR  $N=120$ ,  $144$  PUIS  $168$  ET CONFIRMATION DE FUGLEDE POUR DIVERSES NOUVELLES PÉRIODES.**

# CANONS DE VUZA

- **LES ALGORITHMES DE MATOLCSI & KOLOUNTZAKIS**

# CANONS DE VUZA

■ LES ALGORITHMES DE MATOLCSI & KOLOUNTZAKIS

● MATOLCSI A DÉVELOPPÉ DE NOUVELLES IDÉES POUR RECHERCHER TOUS LES CANONS DE VUZA AYANT CERTAINS INVARIANTS POLYNOMIAUX DONNÉS.

# CANONS DE VUZA

## ■ LES ALGORITHMES DE MATOLCSI & KOLOUNTZAKIS

● MATOLCSI A DÉVELOPPÉ DE NOUVELLES IDÉES POUR RECHERCHER TOUS LES CANONS DE VUZA AYANT CERTAINS INVARIANTS POLYNOMIAUX DONNÉS.

● MIHALIS A PROPOSÉ UNE CONSTRUCTION DE L'IRRÉGULARITÉ PAR DÉPLIEMENT DANS DES DIMENSIONS SUPÉRIEURES.

# CANONS DE VUZA

- UN ALGORITHME DE MIHALIS KOLOUNTZAKIS

# CANONS DE VUZA

## ■ UN ALGORITHME DE MIHALIS KOLOUNTZAKIS

\* Une idée simple:  $Z_{a b c} = Z_a \times Z_b \times Z_c$  pour  $a b c$  copremiers.

# CANONS DE VUZA

## ■ UN ALGORITHME DE MIHALIS KOLOUNTZAKIS

- \* Une idée simple:  $Z_{a b c} = Z_a \times Z_b \times Z_c$  pour  $a b c$  copremiers.
- \* Ex  $a = 3 p$ ,  $b = 5 q$ ,  $c = 2$  ( $p, q$  grands, premiers)

# CANONS DE VUZA

## ■ UN ALGORITHME DE MIHALIS KOLOUNTZAKIS

- \* Une idée simple:  $Z_{a b c} = Z_a \times Z_b \times Z_c$  pour  $a b c$  copremiers.
- \* Ex  $a = 3 p$ ,  $b = 5 q$ ,  $c = 2$  ( $p, q$  grands, premiers)
- \* Paver  $Z_a \times Z_b$  avec  $p q$  rectangles  $3 \times 5$

# CANONS DE VUZA

## ■ UN ALGORITHME DE MIHALIS KOLOUNTZAKIS

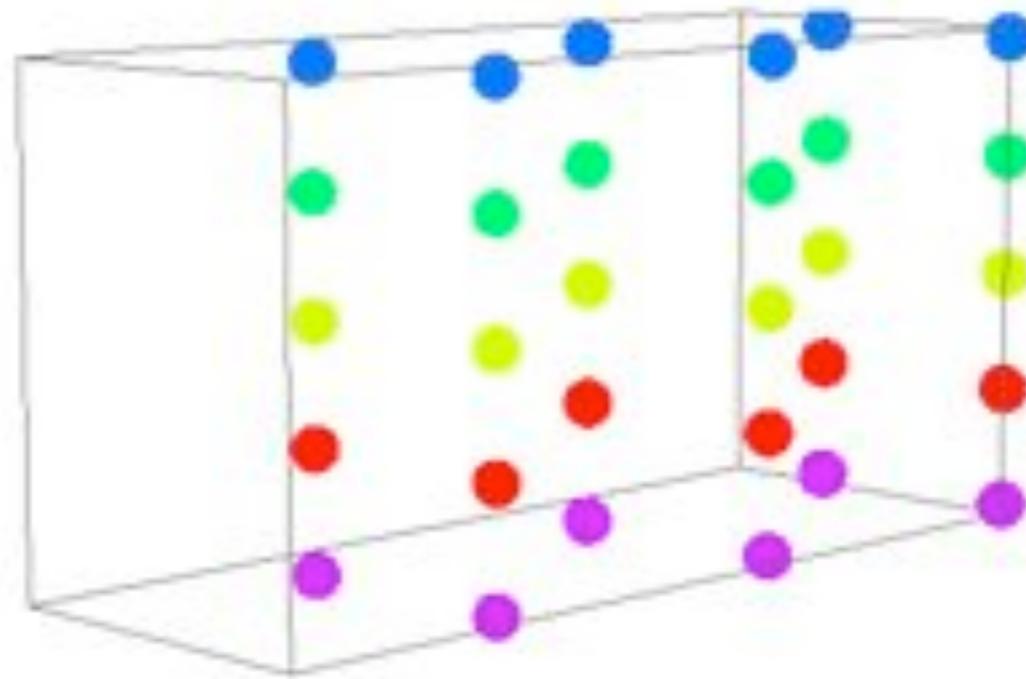
- \* Une idée simple:  $Z_{a b c} = Z_a \times Z_b \times Z_c$  pour  $a b c$  copremiers.
- \* Ex  $a = 3 p$ ,  $b = 5 q$ ,  $c = 2$  ( $p, q$  grands, premiers)
- \* Paver  $Z_a \times Z_b$  avec  $p q$  rectangles  $3 \times 5$
- \* Bouger une ligne dans  $Z_a \times Z_b \times \{0\}$ , une colonne dans  $Z_a \times Z_b \times \{1\}$ : ça devient non périodique

# CANONS DE VUZA

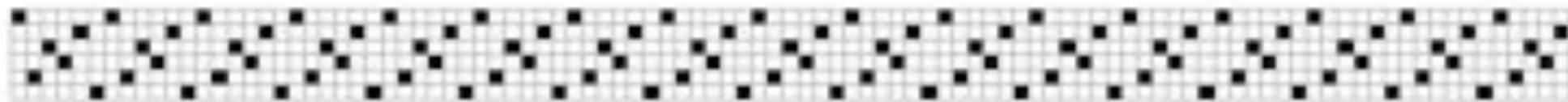
## ■ UN ALGORITHME DE MIHALIS KOLOUNTZAKIS

- \* Une idée simple:  $Z_{a b c} = Z_a \times Z_b \times Z_c$  pour  $a b c$  copremiers.
- \* Ex  $a = 3 p$ ,  $b = 5 q$ ,  $c = 2$  ( $p, q$  grands, premiers)
- \* Paver  $Z_a \times Z_b$  avec  $p q$  rectangles  $3 \times 5$
- \* Bouger une ligne dans  $Z_a \times Z_b \times \{0\}$ , une colonne dans  $Z_a \times Z_b \times \{1\}$ : ça devient non périodique
- \* Aplatir cela comme pavage de  $Z_{a b c}$ : c'est un Vuza !

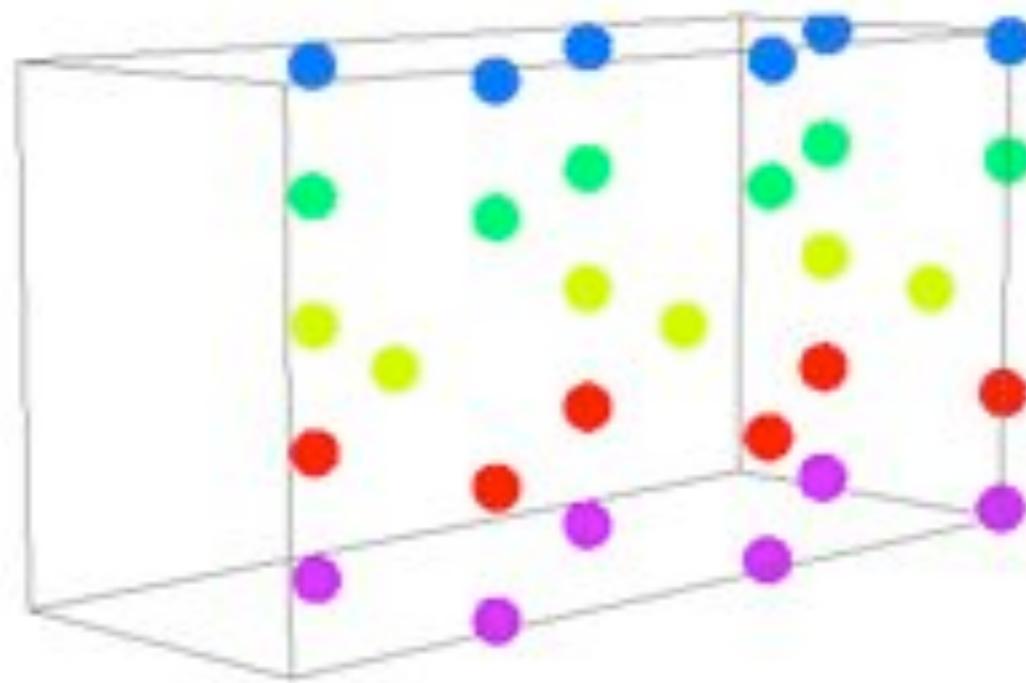
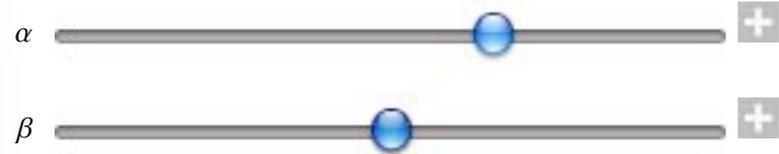
# CANONS DE VUZA



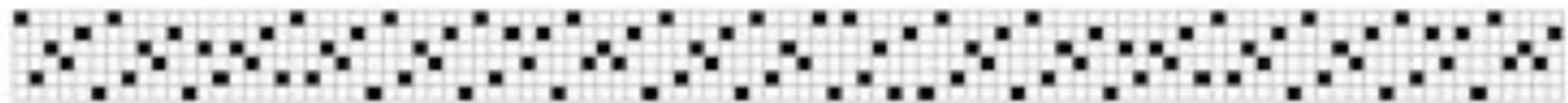
Out[65]=



# CANONS DE VUZA



Out[65]=



# CANONS GALOISIENS

# CANONS GALOISIENS

- LE «PROBLÈME DE JOHNSON»

# CANONS GALOISIENS

- LE «PROBLÈME DE JOHNSON»
- UN EXEMPLE D'ARGUMENT GALOISIEN

# CANONS GALOISIENS

- LE «PROBLÈME DE JOHNSON»
- UN EXEMPLE D'ARGUMENT GALOISIEN
- PREUVE DU «LEMME FONDAMENTAL» DE COVEN & MEYEROWITZ

# CANONS GALOISIENS

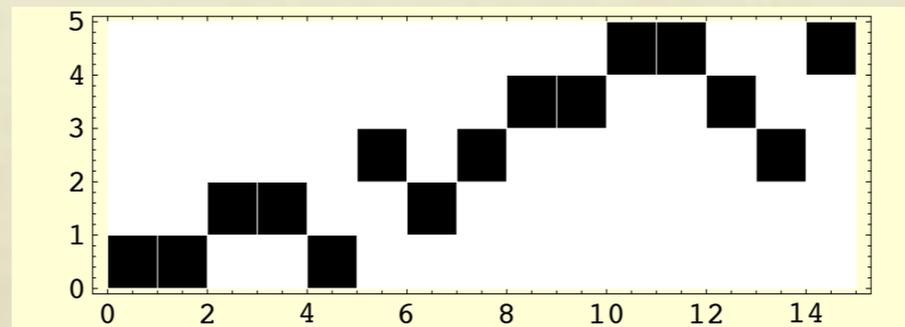
- LE «PROBLÈME DE JOHNSON»
- UN EXEMPLE D'ARGUMENT GALOISIEN
- PREUVE DU «LEMME FONDAMENTAL» DE COVEN & MEYEROWITZ
- LA GÉNÉRALISATION AUX «PERFECT SQUARE TILINGS»

# CANONS GALOISIENS

- LE «PROBLÈME DE JOHNSON»

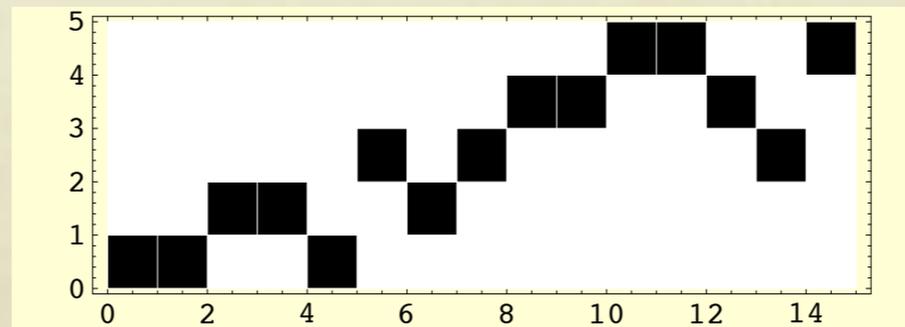
# CANONS GALOISIENS

## ■ LE «PROBLÈME DE JOHNSON»



# CANONS GALOISIENS

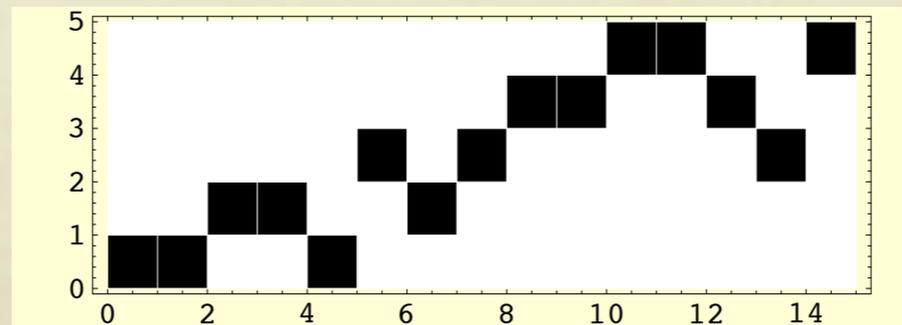
## ■ LE «PROBLÈME DE JOHNSON»



# CANONS GALOISIENS

## ■ LE «PROBLÈME DE JOHNSON»

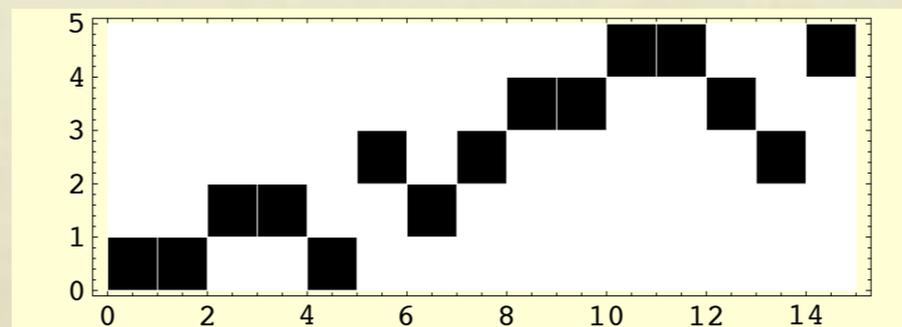
- Mon premier «cas» : le problème de Johnson



# CANONS GALOISIENS

## ■ LE «PROBLÈME DE JOHNSON»

- Mon premier «cas» : le problème de Johnson
- $\{0\ 1\ 4\}$  et ses augmentations ( $\times 2$ ,  $\times 4$ ...) pavent avec une période multiple de 15. La raison ?  
parce que  $F_2[X]/(1+X+X^4) = F_{16} = 15+1\dots$

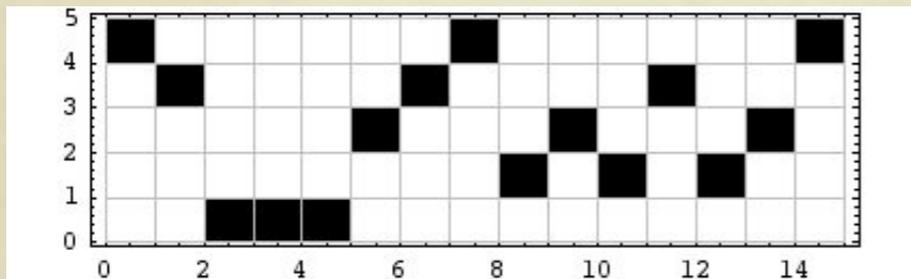


# CANONS GALOISIENS

- UN EXEMPLE SIMPLE D'ARGUMENT GALOISIEN

# CANONS GALOISIENS

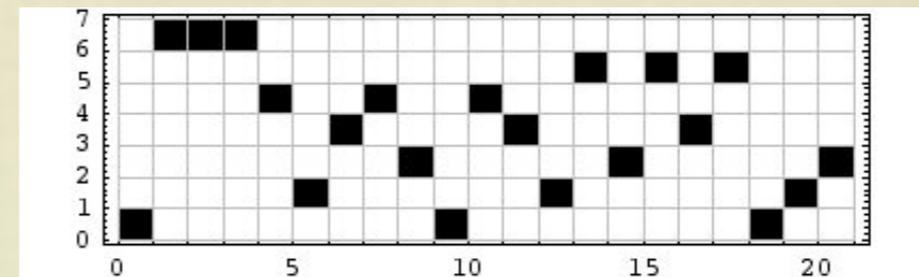
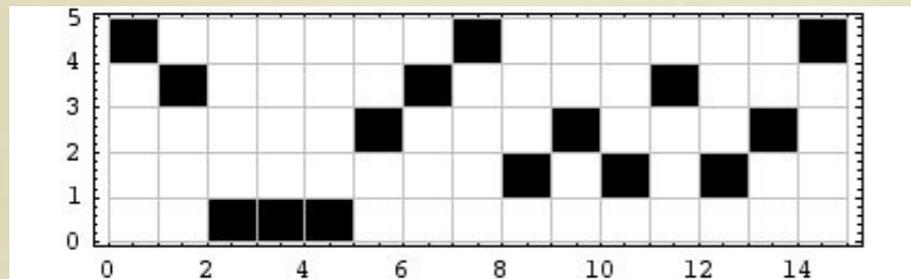
## ■ UN EXEMPLE SIMPLE D'ARGUMENT GALOISIEN





# CANONS GALOISIENS

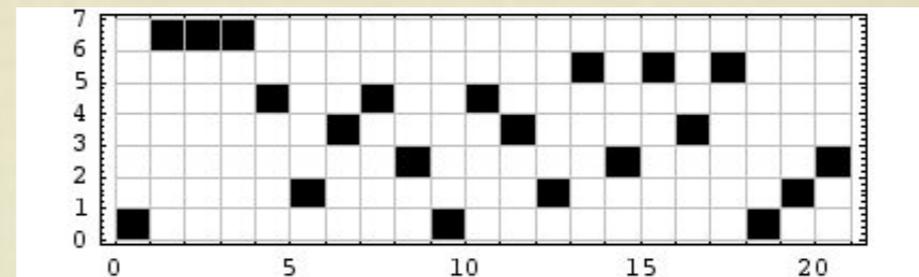
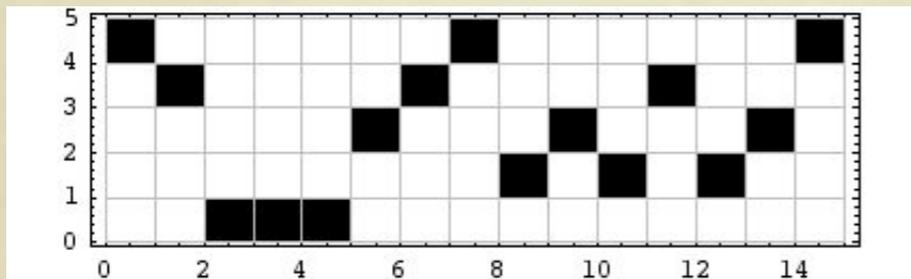
## ■ UN EXEMPLE SIMPLE D'ARGUMENT GALOISIEN



Pourquoi les augmentations  
d'ordre 3,6,9 doivent-elles être  
**TOUTES** présentes — ou aucune ?

# CANONS GALOISIENS

## ■ UN EXEMPLE SIMPLE D'ARGUMENT GALOISIEN

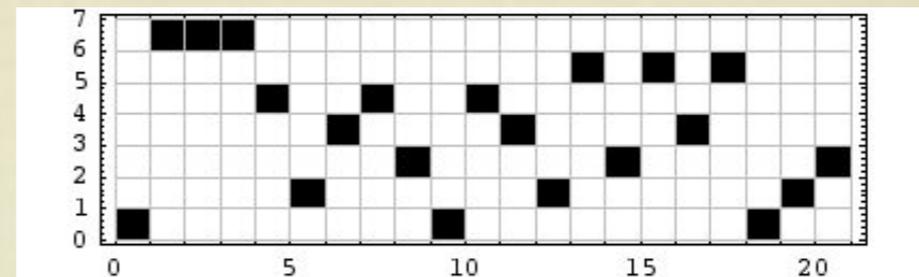
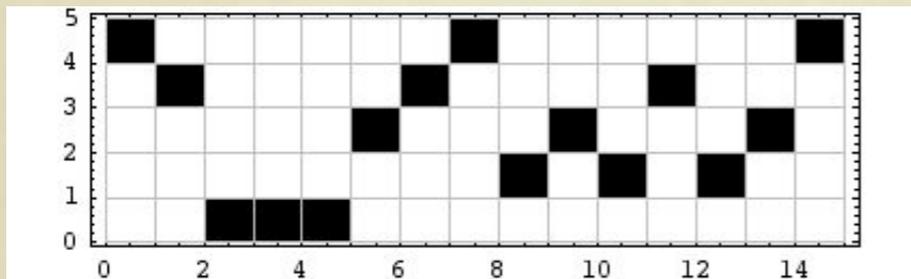


Pourquoi les augmentations  
d'ordre 3,6,9 doivent-elles être  
**TOUTES** présentes — ou aucune ?

On remplace toutes ces notes  
par des polynômes !

# CANONS GALOISIENS

## ■ UN EXEMPLE SIMPLE D'ARGUMENT GALOISIEN



Pourquoi les augmentations  
d'ordre 3,6,9 doivent-elles être  
**TOUTES** présentes — ou aucune ?

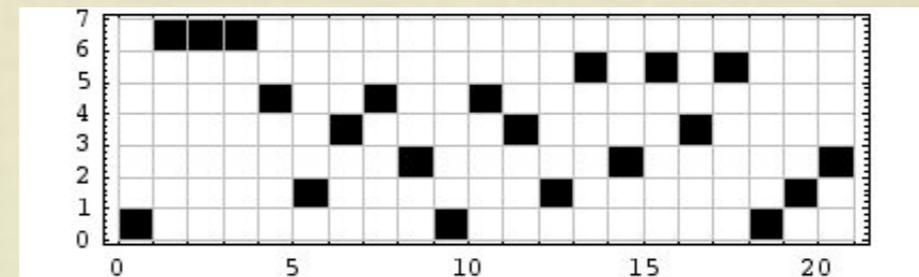
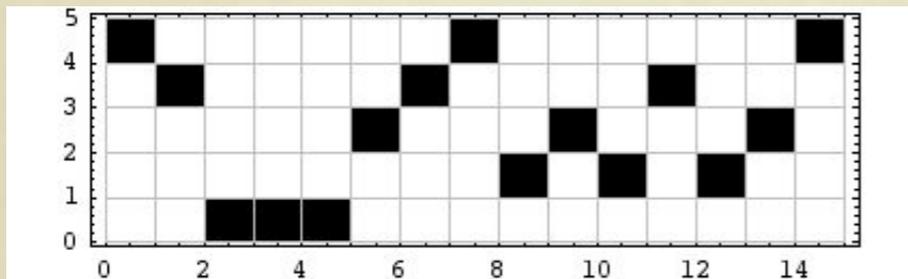
On remplace toutes ces notes  
par des polynômes !

Indication 1: on note

$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$$

# CANONS GALOISIENS

## ■ UN EXEMPLE SIMPLE D'ARGUMENT GALOISIEN



Pourquoi les augmentations  
d'ordre 3,6,9 doivent-elles être  
**TOUTES** présentes — ou aucune ?

On remplace toutes ces notes  
par des polynômes !

Indication 1: on note

$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$$

Indication 2:

$$\Phi_3(j^k) = 0 \text{ sauf si } 3 | k \dots$$

# CANONS GALOISIENS

- «LEMME FONDAMENTAL» DE COVEN - MEYEROWITZ

# CANONS GALOISIENS

■ «LEMME FONDAMENTAL» DE COVEN - MEYEROWITZ

SI LE MOTIF A RÉALISE UN CANON RYTHMIQUE  
(AVEC LE MOTIF DUAL B)  
ALORS IL EN EST DE MÊME DE  $P \hat{A}$ ,  
L'AUGMENTATION DE  $\hat{A}$  PAR LE FACTEUR  $P$   
(PREMIER AVEC LA PÉRIODE)

# CANONS GALOISIENS

■ «LEMME FONDAMENTAL» DE COVEN - MEYEROWITZ

SI LE MOTIF A RÉALISE UN CANON RYTHMIQUE  
(AVEC LE MOTIF DUAL B)

ALORS IL EN EST DE MÊME DE P A,  
L'AUGMENTATION DE A PAR LE FACTEUR P  
(PREMIER AVEC LA PÉRIODE)

$$A(X) B(X) = 1 + X + X^2 + \dots + X^{N-1} \pmod{X^N - 1}$$

# CANONS GALOISIENS

■ «LEMME FONDAMENTAL» DE COVEN - MEYEROWITZ

SI LE MOTIF A RÉALISE UN CANON RYTHMIQUE  
(AVEC LE MOTIF DUAL B)

ALORS IL EN EST DE MÊME DE P A,  
L'AUGMENTATION DE A PAR LE FACTEUR P  
(PREMIER AVEC LA PÉRIODE)

$$A(X) B(X) = 1 + X + X^2 + \dots + X^{N-1} \pmod{X^N - 1}$$



# CANONS GALOISIENS

## ■ «LEMME FONDAMENTAL» DE COVEN - MEYEROWITZ

**SI LE MOTIF A RÉALISE UN CANON RYTHMIQUE  
(AVEC LE MOTIF DUAL B)**

**ALORS IL EN EST DE MÊME DE P A,  
L'AUGMENTATION DE A PAR LE FACTEUR P  
(PREMIER AVEC LA PÉRIODE)**

$$A(X) B(X) = 1 + X + X^2 + \dots + X^{N-1} \pmod{X^N - 1}$$

$\Leftrightarrow$

$$A(X^P) B(X) = 1 + X + X^2 + \dots + X^{N-1} \pmod{X^N - 1}$$

# SUITES DE SKOLEM

# SUITES DE SKOLEM

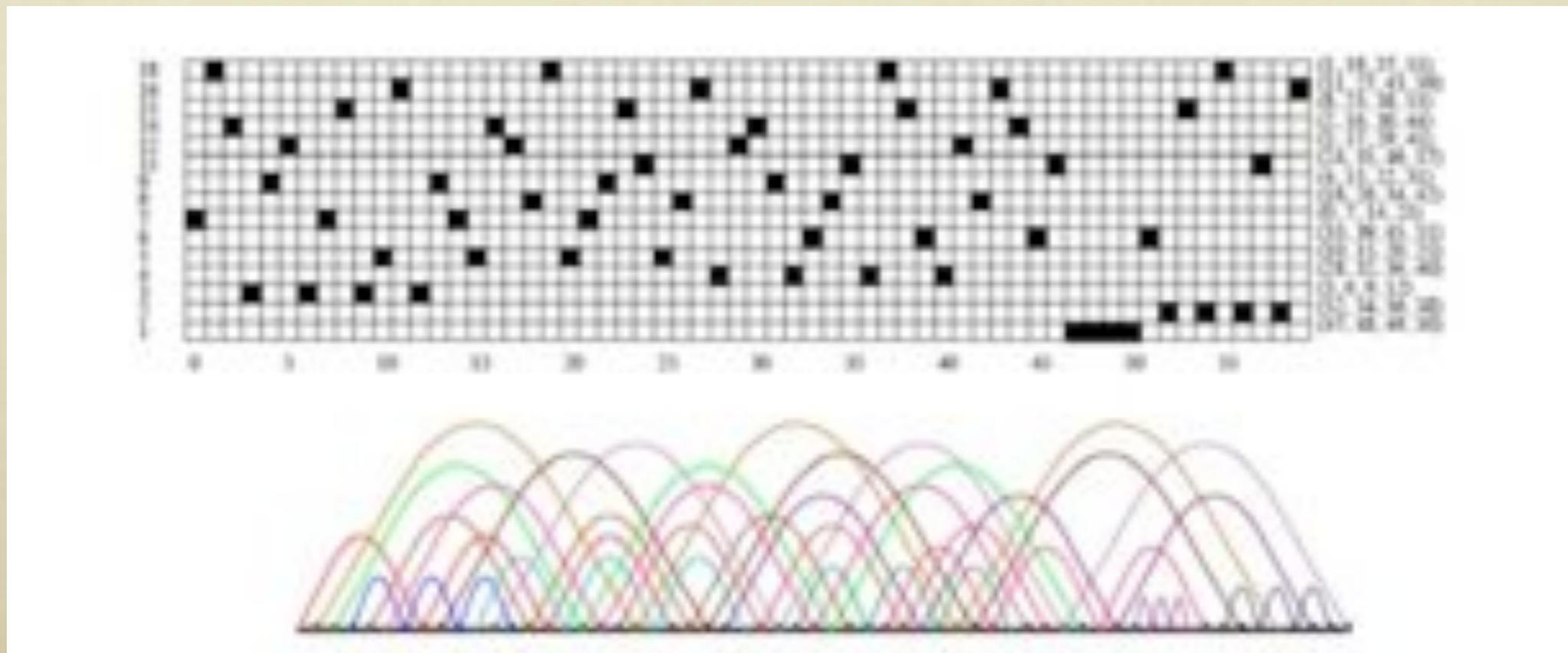
- ORIGINE DU PROBLÈME

# SUITES DE SKOLEM

- ORIGINE DU PROBLÈME
- INTERVENTION DE DAVALAN

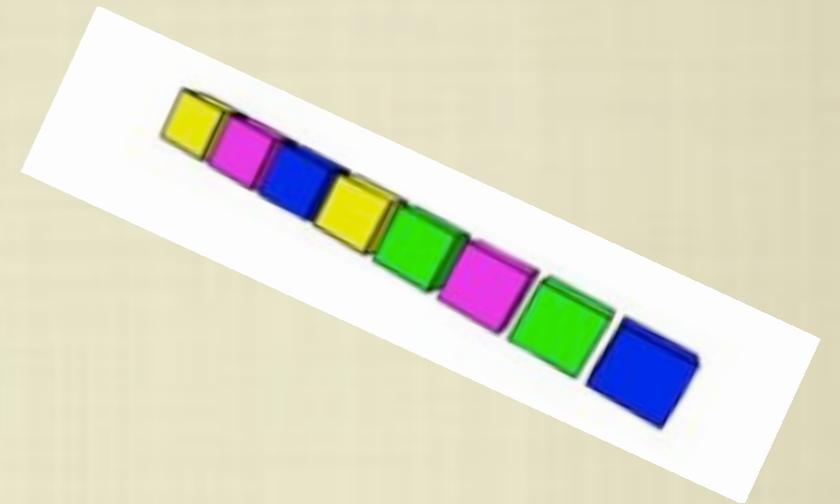
# SUITES DE SKOLEM

- ORIGINE DU PROBLÈME
- INTERVENTION DE DAVALAN



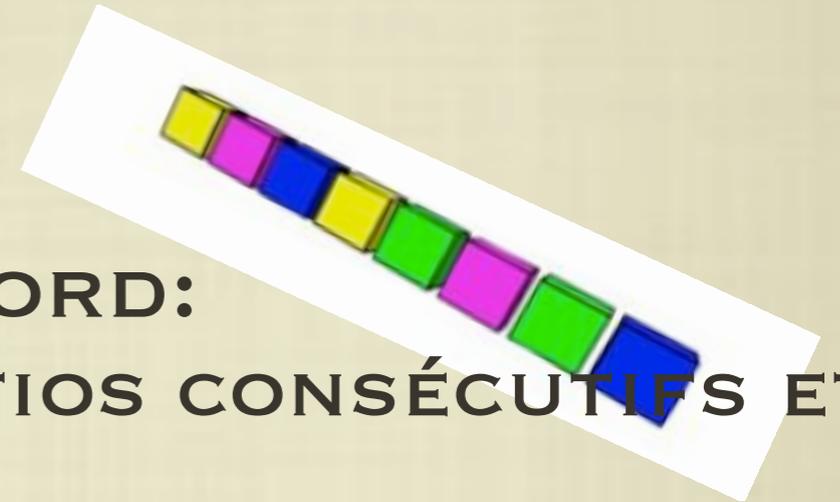
# SUITES DE SKOLEM

# SUITES DE SKOLEM



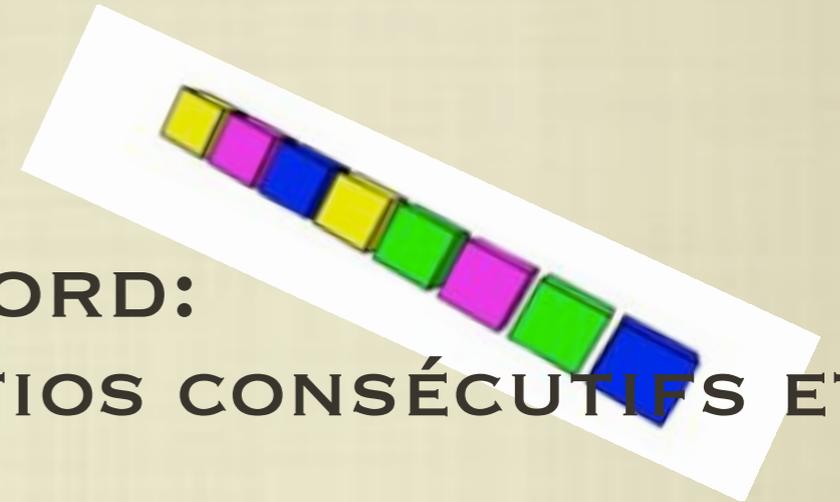
# SUITES DE SKOLEM

- **SUITES DE SKOLEM ET LANGFORD:  
MÊME CHOSE MAIS AVEC DES RATIOS CONSÉCUTIFS ET  
SEULEMENT 2 NOTES.**



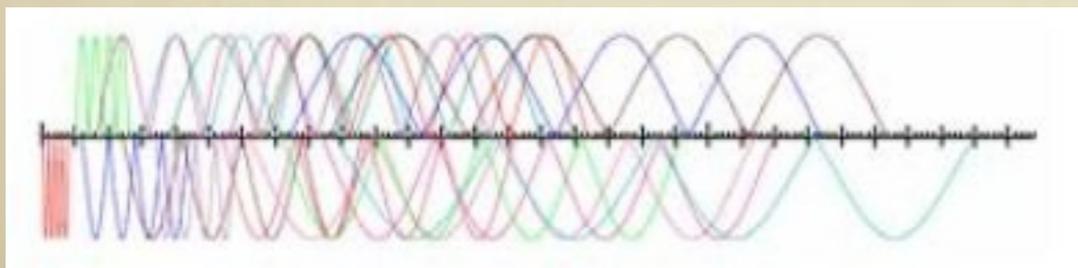
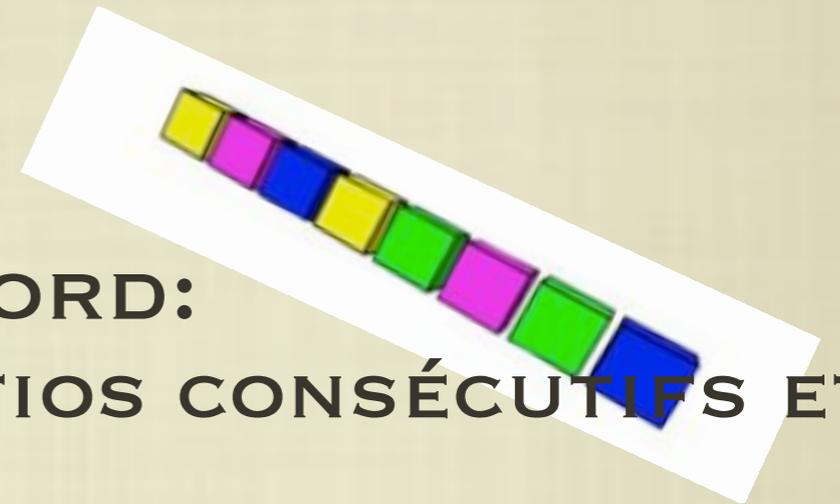
# SUITES DE SKOLEM

- **SUITES DE SKOLEM ET LANGFORD:**  
MÊME CHOSE MAIS AVEC DES RATIOS CONSÉCUTIFS ET SEULEMENT 2 NOTES.
- **NOUVEAUX EFFORTS DE DAVALAN**  
GÉNÉRALISATIONS, LISTES EXHAUSTIVES, NOUVEAUX ALGORITHMES, REPRÉSENTATIONS EN POLYNÔMES OU EN GRAPHES... ET MÊME NOUVELLES TECHNIQUES POUR CANONS RYTHMIQUES!



# SUITES DE SKOLEM

- **SUITES DE SKOLEM ET LANGFORD:**  
MÊME CHOSE MAIS AVEC DES RATIOS CONSÉCUTIFS ET SEULEMENT 2 NOTES.
- **NOUVEAUX EFFORTS DE DAVALAN**  
GÉNÉRALISATIONS, LISTES EXHAUSTIVES, NOUVEAUX ALGORITHMES, REPRÉSENTATIONS EN POLYNÔMES OU EN GRAPHES... ET MÊME NOUVELLES TECHNIQUES POUR CANONS RYTHMIQUES!



UN CANON PARFAIT DE TYPE 5  
MAIS INFINI...

# AUTOSIMILARITÉ

- POUR REMETTRE UN PEU DE HAUTEUR(S)  
DANS L'ÉNUMÉRATION...

# AUTOSIMILARITÉ

- POUR REMETTRE UN PEU DE HAUTEUR(S)  
DANS L'ÉNUMÉRATION...

The image shows a musical score for the song "La vie est si court". It consists of two systems of music. Each system has a vocal line in the treble clef and a piano accompaniment in the bass clef. The lyrics are: "La vie est si court, le mort est si long. La vie est si court, le mort est si long." The melody is simple and repetitive, illustrating the concept of self-similarity in music.

# CONCLUSION ?

# CONCLUSION ?

- **LES PROBLÉMATIQUES MUSICALES OUVRENT DES HORIZONS SCIENTIFIQUES DIFFICILEMENT ABORDABLES AUTREMENT**

# CONCLUSION ?

- **LES PROBLÉMATIQUES MUSICALES OUVRENT DES HORIZONS SCIENTIFIQUES DIFFICILEMENT ABORDABLES AUTREMENT**
- **LE RYTHME, SI SIMPLIFIÉ QU'IL PARAISSE PAR RAPPORT AU TISSU MUSICAL, A UNE DENSITÉ D'INFORMATION SUFFISANTE POUR FAIRE APPEL À TOUTES NOS CAPACITÉS COGNITIVES**

# CONCLUSION ?

- **LES PROBLÉMATIQUES MUSICALES OUVRENT DES HORIZONS SCIENTIFIQUES DIFFICILEMENT ABORDABLES AUTREMENT**
- **LE RYTHME, SI SIMPLIFIÉ QU'IL PARAISSE PAR RAPPORT AU TISSU MUSICAL, A UNE DENSITÉ D'INFORMATION SUFFISANTE POUR FAIRE APPEL À TOUTES NOS CAPACITÉS COGNITIVES**
- **... ET AU DELÀ**