Analyse de concepts formels et complexes simpliciaux

Comparaison de deux approches pour l'analyse des relations binaires

Anton Freund

Ludwig-Maximilians-Universität München, Allemagne

5 avril 2013

Terminologie musicale

- Matériel de notes d'une gamme au tempérament égal : modélisé par les nombres entiers $\mathbb{Z}$
- Identification de tons en distance d'octave pour obtenir le groupe cyclique $\mathbb{Z}_n$ ($n = 12$ dans la gamme chromatique)
- Appelons *harmonie* tout sous-ensemble de $\mathbb{Z}_n$. Il en a 2^n, donc 4096 pour $n = 12$.
- Comment classer les 4096 harmonies (pour la composition, l'analyse musicale, etc.) ?

Catalogues classiques par actions de groupe

- Façon classique pour classer les harmonies : action de groupe
- Utilisation essentielle : Identifier les harmonies qui sont des transpositions (sens musical) d'autres
- Formulation mathématique : Action du groupe $\mathbb{Z}_n$ sur l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_n)$ des harmonies par la règle

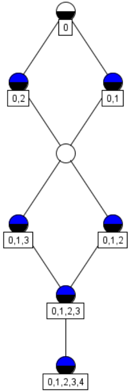
$$(H, i) \mapsto \{n + i \mid n \in H\}$$

- Chaque orbite de cette action est appellée *forme harmonique*. Exemple : Tous les accords majeurs.
- Dans $\mathbb{Z}_{12}$ il y a 352 formes harmoniques (lemme de Burnside)
- Autres actions de groupe possible : D_{12} identifie les accords majeurs et mineurs, etc.

Alternatives aux catalogues traditionels : I - Analyse de concepts formels

Treillis de concepts pour le contenu intervallique dans $\mathbb{Z}_5$:

	1× seconde	2× seconde	3× seconde	4× seconde	5× seconde	1× tierce	2× tierce	3× tierce	4× tierce	5× tierce
$\{0\}$										
$\{0,1\}$	×									
$\{0,2\}$						×				
$\{0,1,2\}$	×	×				×				
$\{0,1,3\}$	×					×	×			
$\{0,1,2,3\}$	×	×	×			×	×	×		
$\{0,1,2,3,4\}$	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

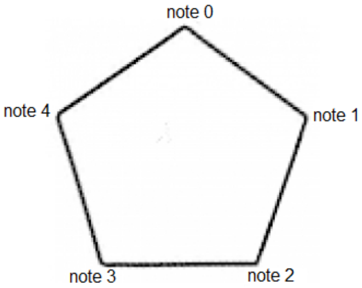


Exemple de : Tobias Schlemmer et Moreno Andreatta, *Using FCA to represent chroma systems*, MCM 2013 conference.

Alternatives aux catalogues traditionels : II - Complexes simpliciaux

Tableau de toutes les harmonies représentant une forme harmonique :

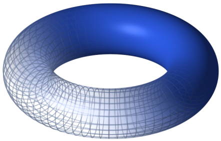
	Transposition 1	Transposition 2	Transposition 3	Transposition 4	Transposition 5
note 0	×				×
note 1	×	×			
note 2		×	×		
note 3			×	×	
note 4				×	×



Ce complexe simplicial a un trou au milieu et est homéomorphe à un cercle.

Un peu de topologie

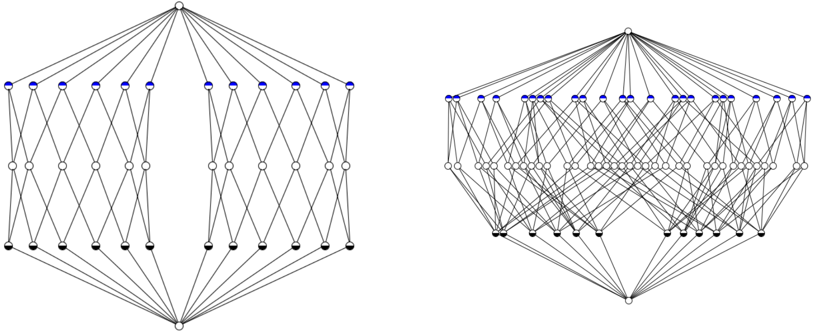
- Espaces *homéomorphes* : bijection bi-contenue entre eux, déformable un en l'autre. Exemple : cercle et ellipse. Mêmes propriétés topologiques.
- Distinguer espaces par invariants : Nombre de composantes connexes, classes de courbes contractiles, trous d'une certaine dimension (nombres de Betti).



- Rétraction d'un espace à un autre : le resserrer de façon continue. Exemple : boule solide à un point, tube à un cercle.
- Une rétraction préserve beaucoup d'invariants importantes (dont tous ceux cités ci-dessus).

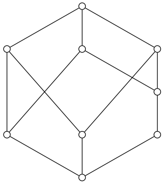
Complexes simpliciaux et treillis associés à un Tonnetz

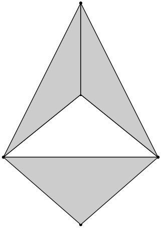
Complexes simpliciaux associés aux Tonnetze C(2,2,8) et C(3,4,5) dans $\mathbb{Z}_{12}$: deux tubes disjoints (gauche) et un tore (droit).



Calcul des complexes simpliciaux : Michael Catanzaro, *Generalized Tonnetze*, Journal of Mathematics and Music, 2011.

	m_1	m_2	m_3	m_4
g_1	×	×		×
g_2	×	×		
g_3	×		×	
g_4		×	×	
g_5			×	

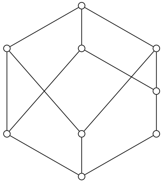


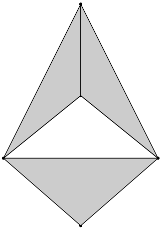


- Simplexes maximaux correspondent aux co-atomes.
- Infima dans le treillis correspondent aux intersections dans le complexe.
- L'atome qui n'est pas un infimum n'est pas reconnaissable dans le complexe : celui ne change pas quand on enlève m_4.
- Le triangle en bas n'est pas reconnaissable dans le treillis : enlever g_5 en fait un segment de droite mais ne change pas le treillis.

- Objectif : pour un tableau de relation binaire $\mathbb{K}$, comparer le treillis de concepts associé $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}$ et le complexe simplicial associé $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}$.
- Plus facile de comparer deux treillis entre eux et deux complexes simpliciaux entre eux.
- Chemin : associer un complexe simplicial $\Delta(\mathcal{B}_{\mathbb{K}})$ au treillis $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}$ et un treillis $\Gamma(\mathcal{S}_{\mathbb{K}})$ au complexe simplicial $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}$.
- Ensuite, comparer les treillis $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}$ et $\Gamma(\mathcal{S}_{\mathbb{K}})$, et les complexes simpliciaux $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}$ et $\Delta(\mathcal{B}_{\mathbb{K}})$ respectivement.

	m_1	m_2	m_3	m_4
g_1	×	×		×
g_2	×	×		
g_3	×		×	
g_4		×	×	
g_5			×	

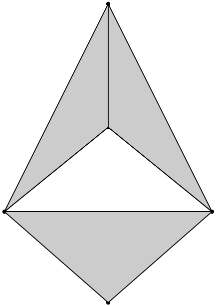


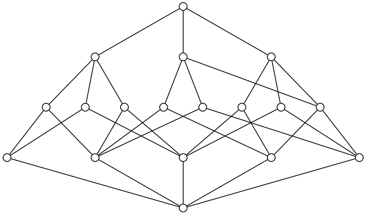


Associer un treillis à un complexe simplicial

Définition

Soit $\mathcal{S}$ un complexe simplicial. Son treillis associé, nommé $\Gamma(S)$ a tous les simplexes comme éléments (nœuds), ordonnés par inclusion. Un élément maximal est ajouté.



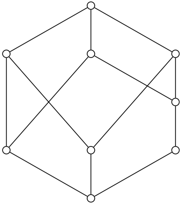


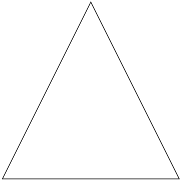
Remarque : la dimension des simplexes peut servir à graduer ce treillis.

Associér un complexe simplicial à un treillis

Définition

Soit L un treillis. Pour le complexe simplicial $\Delta(L)$ associé, on prend les atomes de L comme sommets. Un ensemble d'atomes constitue un simplexe s'il a un supremum différent de l'élément maximal.





On aura le résultat suivant :

Proposition

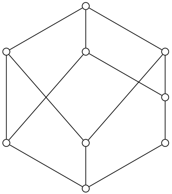
La composition $\Delta \circ \Gamma$ est l'identité, tandis que $\Gamma \circ \Delta$ ne l'est pas en général.

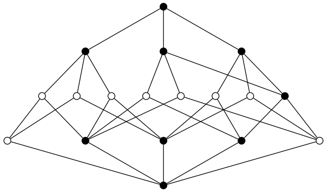
Soit $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}$ le treillis de concepts et $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}$ le complexe simplicial associé à un tableau $\mathbb{K}$. On peut montrer qu'il existe une application $\zeta : \mathcal{B}_{\mathbb{K}} \to \Gamma(\mathcal{S}_{\mathbb{K}})$ telle que :

Proposition

ζ est une immersion d'ordre qui préserve des infima. On a $\zeta(0) = 0$ et $\zeta(1) = 1$ et ζ peut être restreint à une bijection entre les co-atomes des deux treillis.

	m_1	m_2	m_3	m_4
g_1	×	×		×
g_2	×	×		
g_3	×		×	
g_4		×	×	
g_5			×	



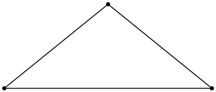


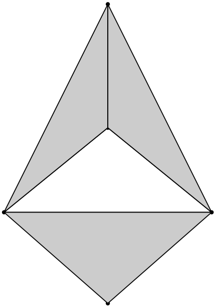
Soit $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}$ le treillis de concepts et $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}$ le complexe simplicial associé à un tableau $\mathbb{K}$. Le théorème suivant est la partie centrale de notre comparaison.

Théorème

Il existe une rétraction du complexe simplicial $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}$ au complexe simplicial $\Delta(\mathcal{B}_{\mathbb{K}})$. En particulier, on peut reconstruire le type d'homotopie de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}$ à partir du treillis $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}$.

	m_1	m_2	m_3	m_4
g_1	×	×		×
g_2	×	×		
g_3	×		×	
g_4		×	×	
g_5			×	

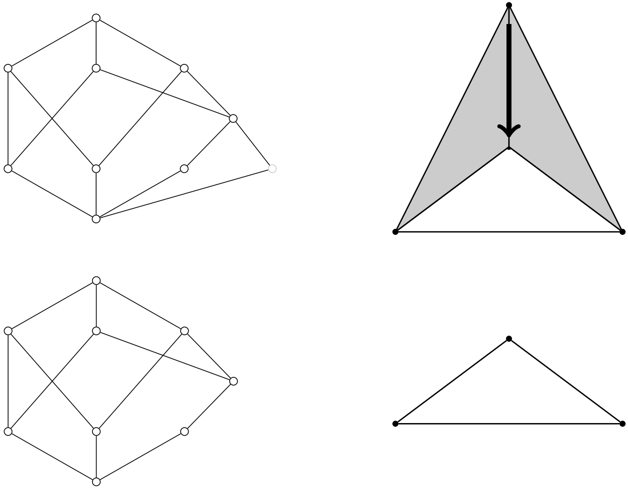




Pour montrer qu'il existe une rétraction de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}$ à $\Delta(\mathcal{B}_{\mathbb{K}})$, il suffit de montrer que les flèches en pointillé dans le diagramme suivant sont des rétractions.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\mathcal{S}_{\mathbb{K}}) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mathrm{red}"] & (\Delta \circ \Gamma)(\mathcal{S}_{\mathbb{K}}) = \mathcal{S}_{\mathbb{K}} \arrow[d, dashed] \\
\Gamma(\mathcal{S}_{\mathbb{K}}) \setminus \{a_1\} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mathrm{red}"] & \Delta(\Gamma(\mathcal{S}_{\mathbb{K}}) \setminus \{a_1\}) \arrow[d, dashed] \\
\Gamma(\mathcal{S}_{\mathbb{K}}) \setminus \{a_1, \dots, a_{n-1}\} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mathrm{red}"] & \Delta(\Gamma(\mathcal{S}_{\mathbb{K}}) \setminus \{a_1, \dots, a_{n-1}\}) \arrow[d, dashed] \\
\Gamma(\mathcal{S}_{\mathbb{K}}) \setminus \{a_1, \dots, a_n\} = \mathcal{B}_{\mathbb{K}} \arrow[r, "\Delta"] & \Delta(\mathcal{B}_{\mathbb{K}})
\end{tikzcd}$$

Une étape de rétraction spécifique



Définition

Un mode à transposition limitée dans $\mathbb{Z}_n$ est une forme harmonique qui est représentée par moins que n harmonies.

- Autrement dit : c'est une harmonie H telle qu'on ait $H + m = H$ pour un $m \in \mathbb{Z}_n \backslash \{0\}$. On appellera *nombre de transpositions* le plus petit nombre trouvé m.
- Dans $\mathbb{Z}_6$ on a un mode à trois transpositions avec la structure intervallique (1 2 1 2), représenté par exemple par $\{0, 1, 3, 4\}$.

0	×		×
1	×	×	
2		×	×
3	×		×
4	×	×	
5		×	×

Voir : Olivier Messiaen, *Technique de mon langage musical : texte avec exemples musicaux*, Leduc, 1944.

Déterminer la structure topologique d'un mode

Les complexes simpliciaux des tableaux suivants ont le même type d'homotopie.

0	×		×
1	×	×	
2		×	×
3	×		×
4	×	×	
5		×	×

0	×		×
1	×	×	
2		×	×

Preuve : On sait que le treillis de concepts $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}$ ne change pas quand on omet une ligne identique à une autre. Or on a vu qu'on peut déterminer le type d'homotopie à partir de $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}$.

Déterminer la structure topologique d'un mode II

On obtient la proposition suivante.

Proposition

Soit $\mathbb{K}$ un tableau qui représente un mode qui a m transpositions et est maximal. Alors $S_{\mathbb{K}}$ a le même type d'homotopie que la sphère S^{m-2}.

Démonstration.

Comme dans l'exemple il suffit de regarder les m premières lignes. Elles correspondent aux faces d'un $(m-1)$-simplex et le simplexe central manque. Le type d'homotopie est donc bien celui de la sphère S^{m-2}. $\square$

0	×		×
1	×	×	
2		×	×

- Imaginons un tableau avec toutes les harmonies dans $\mathbb{Z}_6$.
- Est-ce qu'on reconnaît le mode de l'exemple ?
- Oui, si on connaît l'ordre des lignes.
- Non, si on n'a aucune information sur l'ordre.
- De quelle information est-ce qu'on a besoin ?
- Approche pour une réponse : calculer les nombres de Betti pour chaque ensemble de harmonies.

0	×		×
1	×	×	
2		×	×
3	×		×
4	×	×	
5		×	×

5	×		×
2	×	×	
3		×	×
0	×		×
4	×	×	
1		×	×

0	×		×
1		×	×
2	×	×	
3		×	×
4	×	×	
5	×		×

Modes possibles après triage par nombres de Betti

0	×		×
1	×	×	
2		×	×
3	×		×
4	×	×	
5		×	×

0	×		×
5		×	×
2		×	×
3	×		×
4	×	×	
1	×	×	

1	×	×	
0	×		×
4	×	×	
3	×		×
2		×	×
5		×	×

1	×	×	
4	×	×	
0	×		×
3	×		×
2		×	×
5		×	×

1	×	×	
4	×	×	
0	×		×
2		×	×
3	×		×
5		×	×

1	×	×	
0	×		×
4	×	×	
2		×	×
3	×		×
5		×	×

0	×		×
1	×	×	
4	×	×	
2		×	×
3	×		×
5		×	×

1	×	×	
4	×	×	
2		×	×
0	×		×
3	×		×
5		×	×

0	×		×
1	×	×	
2		×	×
4	×	×	
3	×		×
5		×	×

1	×	×	
2		×	×
4	×	×	
0	×		×
4	×		×
5		×	×

1	×	×	
2		×	×
0	×		×
4	×	×	
3	×		×
5		×	×

0	×		×
2		×	×
1	×	×	
4	×	×	
3	×		×
5		×	×

2		×	×
1	×	×	
4	×	×	
0	×		×
3	×		×
5		×	×

2		×	×
1	×	×	
0	×		×
4	×	×	
3	×		×
5		×	×

2		×	×
0	×		×
1	×	×	
4	×	×	
3	×		×
5		×	×

Raisonnement sur les tableaux

- On peut reconnaître le mode en considération si on sait qu'il y a l'intervalle 3 entre la première et la quatrième ligne et entre la deuxième et la cinquième ligne : les deux lignes d'un couple sont alors égales. Or cela est le cas uniquement dans le premier tableau.
- Savoir qu'il y a l'intervalle 2 entre chaque ligne et celle de deux lignes en dessous ne suffit pas pour reconnaître le mode : cela est le cas dans les deux premiers tableaux, mais la structure des tableaux est différente.

Merci de votre attention !