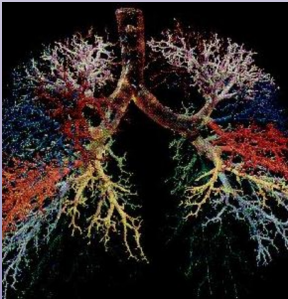


Fractales, entropie et mesures de complexité

Franck Jedrzejewski

CEA Saclay



- 1 Dimensions fractales
- 2 Auto-similarité
- 3 L-systems
- 4 Complexité
- 5 Mouvement brownien
- 6 Mesure du chaos

Introduites par Benoît Mandelbaum en 1974

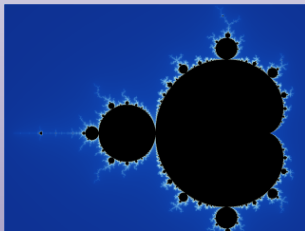
Définies par un processus itératif (homothétie interne)

Trois grandes catégories : Fractales définies par des fonctions itératives, des relations de récurrence ou des processus stochastiques

Courbes ou flocons de Koch :

Mandelbrot's Gingerbread

Zoom dans l'ensemble de Mandelbrot
Points particuliers où on voit
l'autosimilarité (Feigenbaum,
Misiurewicz)

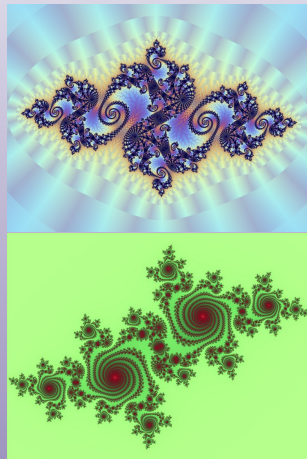
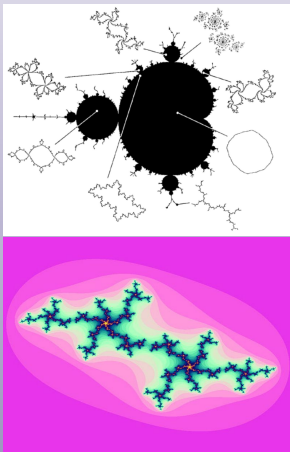


Voir l'animation sur le site Wikipedia

Ensembles de Julia

Obtenus par itération d'une fonction holomorphe, par exemple

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$



Dimension de Hausdorff

Diamètre de U $\text{diam}(U) = \sup\{|x - y|, x, y \in U\}$

Un ε -recouvrement est un recouvrement d'un ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ par des ensembles (U_i) de diamètre au moins $\varepsilon > 0$

La s -mesure de Hausdorff

$$\mathcal{H}_\varepsilon^s(X) = \inf_{\text{diam}(U_i) < \varepsilon} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s : X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \right\}$$
$$\mathcal{H}^s(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon^s(X)$$

Lorsque s augmente, il existe une valeur critique pour laquelle $\mathcal{H}^s(X)$ passe de ∞ à 0, on l'appelle la dimension de Hausdorff.

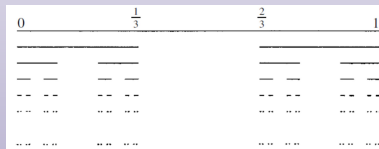
$$\begin{aligned} \dim_H(X) &= \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(X) = 0\} \\ &= \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(X) = \infty\} \end{aligned}$$

Si f est α -höldérienne ($0 < \alpha < 1$)

$$|f(y) - f(x)| \leq c |y - x|^\alpha \quad \text{alors} \quad \dim_H(f(X)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(X)$$

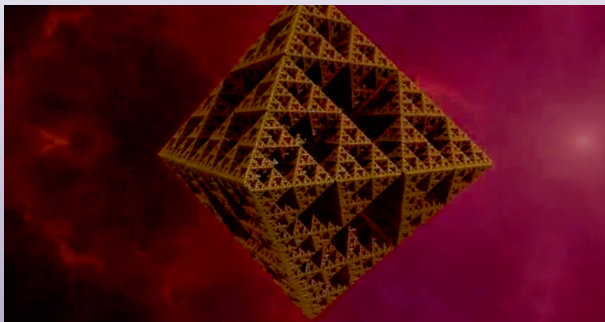
Dimension de Hausdorff – Exemples

- Un ensemble dénombrable est de dimension nulle.
- Dans $\mathbb{R}^n$, la dimension d'un ensemble de mesure de Lebesgue non nulle est n .
- Ensemble de Cantor $s = \ln(2)/\ln(3)$



- Courbe de Koch $s = \ln(4)/\ln(3)$
- Triangle de Sierpiński $s = \ln(3)/\ln(2)$ – Film de Krzysztof Marczak

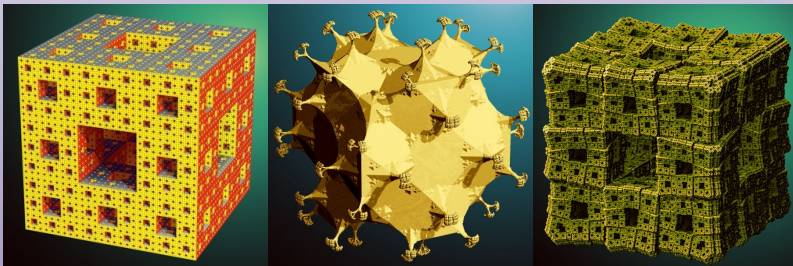




Voir le film sur le site du CNRS

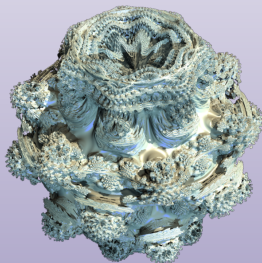
Dimension de Hausdorff – Exemples

- La dimension de Hausdorff d'une fonction est la dimension de son graphe $\{(x, f(x)), 0 \leq x \leq 1\}$. Si f est continument dérivable $\dim_H(f) = 1$. Si f est α -höldérienne, $\dim_H(f) \leq 2 - \alpha$
- Eponge de Menger $s = \ln(20)/\ln(3)$



Le bulbe de Mandelbrot

Mandelbub = Extension de l'ensemble de Mandelbrot à 3 dimensions, obtenu par itérations de $z \rightarrow z^n + c$ (ici $n = 8$) et $s = 3$. Video You Tube "*Aperçu Mandelbulb 3D*"



Video du Bulbe de Mandelbrot sur Youtube

Dimension de Minkowski-Boulignand

Placer X dans un réseau carré de côté ε , et compter le nombre de cases nécessaires pour recouvrir l'ensemble

$$\dim_B(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon}{\log(1/\varepsilon)}$$

N_ε est le plus petit nombre de cubes de côté ε qui recouvre X
ou le plus petit nombre d'ensembles de diamètres au plus ε qui recouvre X

ou le plus grand nombre de boules disjointes de diamètre ε centrées dans X .

Comparé à la dimension de Hausdorff

$$\dim_H(X) \leq \underline{\dim}_B(X) \leq \overline{\dim}_B(X)$$

Pour l'ensemble triadique de Cantor, les deux dimensions coïncident.

Dimension de Minkowski-Boulignand

Exemple Sur $[0,1]$, on considère l'ensemble X des nombres dont les décimales sont nulles entre la 2^{2^n} et la $2^{2^{n+1}} - 1$.

$$\underline{\dim}_B(X) = \frac{1}{3} \quad \overline{\dim}_B(X) = \frac{2}{3}$$

Si $\overline{X}$ est la fermeture de X , alors

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B(\overline{X}) &= \underline{\dim}_B(X) \\ \overline{\dim}_B(\overline{X}) &= \overline{\dim}_B(X) \end{aligned}$$

Exemple : Nombres rationnels. $\mathbb{Q}$ est un ensemble dénombrable donc de dimension de Hausdorff nulle. Sa clôture est $\mathbb{R}$ qui a pour dimension 1.

$$\dim_H(\mathbb{Q}) = 0, \quad \dim_B(\mathbb{Q}) = \dim_B(\mathbb{R}) = 1$$

Conjecture de Schroeder (1991). En cas d'autosimilarité stricte,

$$\dim_H(X) = \dim_B(X)$$

Méodies auto-similaires

Pour construire une mélodie auto-similaire, il suffit de choisir une application affine $x \rightarrow ax + b \bmod n$ de $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec a et n premiers entre eux et d'écrire la permutation associée. La décomposition en cycles donne les orbites de la mélodie. Par exemple, la mélodie des *Rational Melodies no 15* de Tom Johnson correspond à la fonction

$$f(x) = 2x \bmod 15$$

qui est associée à la permutation

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \end{pmatrix} \\ &= (1, 2, 4, 8)(3, 6, 12, 9)(5, 10)(7, 14, 13, 11)\end{aligned}$$

Chaque cycle détermine une orbite. Dans notre cas, nous avons cinq orbites (si on compte (0)) notées (a, b, c, d, e)

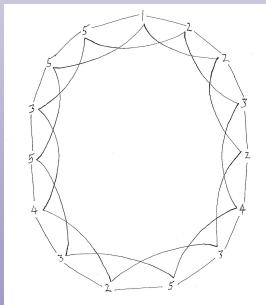
Mélodies auto-similaires

0	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	15
<i>e</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>d</i>

Pour $e = 1, a = 2, b = 3, c = 4$ et $d = 5$, on retrouve les éléments

122324352345355 la,sol,sol,fa,sol,mi,fa, ré,sol,fa,mi,ré,fa,ré,ré

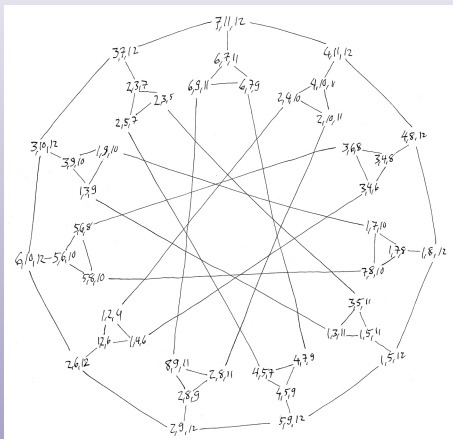
qui se lisent aussi bien sur la courbe intérieure. La mélodie est simplement plus rapide ou plus lente.



Rational Melodies no. 15

Strange Fractal Sequences

Dans le *Trio pour clarinettes*, les 44 blocks du design (12,3,2) sont reliés s'ils ont 2 éléments en commun.



Dans chaque triangle, les notes communes forment la suite A194841

4, 8, 1, 5, 9, 2, 6, 10, 3, 7, 11

Strange Fractal Sequences

La n -ième ligne est la permutation de $(1, 2, \dots, n)$ obtenue en ordonnant les parties entières $\{r\}, \{2r\}, \dots, \{nr\}$, où $r = -\sqrt{3}$.

1			
1	2		
1	2	3	
4	1	2	3

La suite est composée des nombres ainsi obtenus :

$$a(n) = 1, 1, 2, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, \dots$$

On trouve dans la pièce d'autres suites fractales comme la suite A194871

9, 7, 5, 3, 1, 10, 8, 6, 4, 2, 11

obtenue de la même façon pour $r = \sqrt{6}$.

Système de Lindenmayer

Grammaire formelle inventée par le biologiste hongrois Aristid Lindenmayer en 1968.

Alphabet : $A = \{a, b\}$

Constantes : $S = \emptyset$

Axiome de départ : $w = b$

Règles de réécriture : $a \rightarrow b, b \rightarrow ab$

b

ab

bab

$abbab$

$bababbab$

etc.

Problèmes de combinatoire des mots : A l'étape n , combien a-t-on d'occurences de a , de b ? Existe-t-il des sous-mots carrés ww de longueur donnée ? palindromiques ? etc.

Système de Lindenmayer

Les fractales s'écrivent sous forme de L-système

Ensemble de Cantor : $A = \{a, b\}$, $\omega_0 = a$, $a \rightarrow aba$, $b \rightarrow bbb$

Courbe de Koch (à angles droits) : $A = \{a\}$,

$C = \{\uparrow, \downarrow\}$, $\omega_0 = a$, $a \rightarrow a \uparrow a \downarrow a \downarrow a \uparrow a$

a = un pas à droite, $\uparrow$ = un pas en haut, $\downarrow$ = un pas en bas

Suite de Fibonacci - Algue de Lindenmayer : $A = \{a, b\}$,

$\omega_0 = a$, $a \rightarrow ab$, $b \rightarrow a$



Complexité de la suite u_n = fonction qui à n associe

$h(n)$ = nombre de mots distincts de longueur n dans u

Entropie topologie de u

$$h_{\text{top}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(h(n))}{n}$$

La limite existe car $h(n) \leq 2^n$ pour un alphabet à 2 lettres. Les suites d'entropie nulles sont dites *déterministes*.

Si la suite est périodique (à partir d'un certain rang), les lettres reviennent une infinité de fois avec la même fréquence, donc est prédictible. La complexité est constante à partir d'un certain rang. On a équivalence entre

- La suite est périodique à partir d'un certain rang
- La complexité : $h(n+1) = h(n)$ à partir d'un certain rang

- *Suite de Fibonacci* Règle : $a \rightarrow ab$ et $b \rightarrow a$. La suite n'est pas périodique à partir d'un certain rang.

$$h(n) = n + 1 \text{ pour tout } n.$$

(1) ω est un mot de la suite de Fibonacci $\iff$ le mot renversé $\bar{\omega}$ en est un.

(2) La suite est la superposition de palindromes de longueur F_n ($F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$)

$a \ b \ aa \ bab \ aabaa \ babaabab \ aabaababaabaa \dots$

(3) Si P_n est le n -ième palindrome de longueur F_{n-1} alors

$$P_{n+2} = P_n P_{n-1} P_n$$

- *Suite sturmienne* est une suite telle que deux mots de même longueur ont le même nombre de a (resp. de b) à une unité près. La suite de Fibonacci est un cas particulier d'une suite sturmienne. Une suite est sturmienne si et seulement si sa complexité est $h(n) = n + 1$, pour tout n .
- *Suite de Thue-Morse* est définie par la règle de substitution $a \rightarrow ab$ et $b \rightarrow ba$. On a successivement a , ab , $abba$, etc. La suite n'est pas périodique à partir d'un certain rang.
- *Suite de Champernowne* est une suite obtenue en écrivant, dans l'ordre lexicographique, à la suite les uns des autres tous les mots de longueur 1, puis 2, puis 3, etc.

$a \ b \ aa \ ab \ ba \ bb \ aaa \ aab$

Exemples de suites

La suite de Champernowne est de complexité maximale. Mais comment qualifier d'aléatoire une suite aussi parfaitement prévisible ? En base 10,

$$h_{10} = 0.12345678910111213141516...$$

si on développe la constante de Champernowne en fractions continues, le comportement est très hétérogène : le nombre g en position 19 a 166 chiffres (digits)

$$h_{10} = [0; 8, 9, 1, 149083, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 3, 4, 1, 1, 1, 15, g, 6, 1, ..]$$

$g = 4\ 57540\ 11139\ 10310\ 76483\ 64662\ 82429\ 56118\ 59960\ 39397$
 $10457\ 55500\ 06620\ 04393\ 09026\ 26592\ 56314\ 93795\ 32077\ 47128$
 $65631\ 38641\ 20937\ 55035\ 52094\ 60718\ 30899\ 84575\ 80146\ 98631$
 $48833\ 59214\ 17830\ 10987.$

Moyenne du processus

$$m_X(t) = \mathbb{E} X_t(\omega) = \int_{\Omega} X_t(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} xp(x)dx$$

Variance

$$\sigma_X^2(t) = \mathbb{E} \left(|X_t - \mathbb{E}(X_t)|^2 \right)$$

Fonction de corrélation

$$\begin{aligned} K(s, t) &= \mathbb{E}(X_s - \mathbb{E}(X_s))(\overline{X_t - \mathbb{E}(X_t)}) \\ &= \mathbb{E}(X_s \overline{X_t}) - \mathbb{E}(X_s)\mathbb{E}(\overline{X_t}) \end{aligned}$$

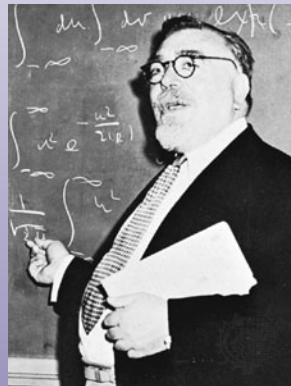
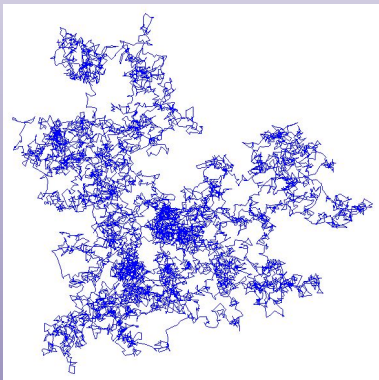
La fonction de corrélation est positive

$$K(t, t) = \sigma_X^2(t) \geq 0$$

Mouvement brownien

Mouvement de pollen observé par le botaniste Robert Brown (1827)
Modélise un bruit aléatoire. Introduit par N. Wiener.
Processus "continu", mais non dérivable.

Jorges Antunes, Mouvement brownien



Processus de Wiener W_t est un brownien standard si (1)

$\mathbb{P}(W_0 = 0) = 1$ (W_t est issu de 0)

(2) Pour tous réels $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les v.a.

$W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

(3) Pour tout t , et pour tout h , $W_{t+h} - W_t$ a une distribution gaussienne de moyenne nulle et de variance h , $\mathcal{N}(0, h)$ (on dit que le brownien est standard).

$$\begin{cases} \mathbb{E}(W_{t+h} - W_t) = 0 \\ \mathbb{E}(W_{t+h} - W_t)^2 = h \end{cases}$$

Rappel : Si X est une v.a. de densité $f(x)$ alors pour $a > 0$,

$$aX \sim \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)$$

Propriétés du mouvement brownien

- W_t est un p.a.i.

$$K(s, t) = \min(s, t)$$

- W_t est un processus de Markov homogène

$$p(x, t - s, B) = \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp \frac{-(y-x)^2}{2(t-s)} dy$$

- Densité de $\Delta W = (W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$

$$f_{\Delta W}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp \frac{-(x_j)^2}{2(t_j - t_{j-1})}$$

- Densité de $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp \sum_{j=1}^n \frac{-(x_j - x_{j-1})^2}{2(t_j - t_{j-1})}$$

- Pour un brownien standard, et pour tout n ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_{t+h} - W_t)^{2n} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2/2h} dx \\ &= 1.3....(2n-1)h^n\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(W_{t+h} - W_t)^2 = h$$

$$\mathbb{E}(W_{t+h} - W_t)^4 = 3h^2$$

- Presque toutes les réalisations du mouvement brownien sont continues (appliquer le théorème de Kolmogorov avec $c = 3$, $p = 4$ et $r = 1$), nulle part différentiables et ont des variations non bornées dans chaque intervalle fini.

$$\frac{W_{t+h} - W_t}{h} \sim \mathcal{N}(0, 1/h)$$

Cette loi diverge quand h tend vers 0 : W_t n'est pas différentiable.

Intégrale stochastique

Donner un sens à l'intégrale

$$\int_a^b dX_t = ?$$

Si $X_t = \text{brownien}$ ("Non dérivable") ?
L'intégrale est un processus aléatoire.



La définition riemanienne

$$\int_a^b f(t, \omega) dW(t, \omega) = l.i.m. \sum_{i=0}^n f(t_i, \omega) (W(t_{i+1}) - W(t_i))$$

conduit à

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{t}{2}$$

soit sous forme différentielle (nouveau calcul différentiel)

$$dW_t^2 = dt + 2W_t dW_t$$

Mouvement brownien fractionnaire

Le mouvement Brownien fractionnaire $B_a(t)$ d'exposant de Hurst $a \in [0, 1]$ est l'unique processus Gaussien centré et continu dont la covariance vaut

$$\mathbb{E}(B_a(s)B_a(t)) = \frac{C}{2} (|s|^{2a} + |t|^{2a} - |s - t|^{2a})$$

où C est une constante positive qui ne dépend que de a . Si $a = 1/2$, on retrouve le Brownien standard.

Autosimilarité du mBf. Bien que pour un aléa fixé ω , les trajectoires $x \rightarrow B_a(x, \omega)$ ne soient pas fractales, nous avons la propriété d'auto-similarité

$$B_a(ct) \stackrel{\mathcal{L}}{=} c^a B_a(t), \quad \forall c > 0$$

La régularité des trajectoires du mBf est entièrement contrôlée par le paramètre de Hurst a . Plus a tend vers 1, plus les trajectoires sont régulières.

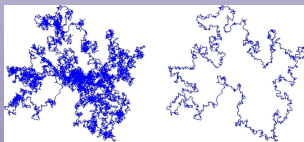
Brownien et dimension de Hausdorff

La variance du mBf est höldérienne

$$\mathbb{E}(|B_a(t) - B_a(s)|^2) = |t - s|^{2a}$$

La dimension de Hausdorff des trajectoires du mBf (i.e. du graphe de $B_a(t)$, $t \in [0, 1]$) $\dim_H(B_a(t)) = 2 - a$

Wendelin Werner (Médaille Fields 2006) a étudié les marches aléatoires auto-évitanes et le mouvement brownien plan. Avec Gregory Lawler et Oded Schramm, il a démontré en 1999 la conjecture de Mandelbrot, selon laquelle la dimension de Hausdorff de l'enveloppe d'un mouvement brownien plan est de $4/3$. c'est aussi la dimension d'un polymère dans le plan (marche auto-évitante), ou le front de percolation ou de corrosion en 2D.



Horacio Vaggione

Compositeur argentin né en 1943, professeur à l'Université de Paris 8 sur un des premiers postes labélisé "informatique musicale" est invité à l'IRCAM de 1982 à 1985 où il compose les premières pièces fractales *Fractal A* (1982) et *Fractal C* (1985) pour bande 16 pistes.

Ainsi Vaggione, un des premiers à introduire les fractals en musique, n'est-il pas dupe des limites musicales de l'importante notion d'autosimilarité, trop conscient qu'il est de la richesse et de la spécificité de la musique. On trouve dans ses textes théoriques des informations très pertinentes sur la notion de complexité, sur la relation entre synthèse et écriture, sur le caractère local, "régional" des ontologies; une critique explicite de la musique stochastique et de la théorie de l'information, qui échouent à articuler plusieurs niveaux; un renouvellement heureux de la notion d'objet. Pour Vaggione, la composition implique des réseaux d'objets – mais il ne s'agit pas d'objets sonores au sens schaefferien, opaques et difficiles à manipuler : il propose une définition dynamique de l'objet qu'on peut transformer et mettre en réseau – une catégorie opératoire, proche de la notion intervenant en informatique dans la programmation objet.

Jean-Claude Risset, *Espaces composables, Essais sur la musique et la pensée musicale d'Horacio Vaggione*.

Paysages fractals

A la vue d'un cristal de roche, J. Monnot se demande comment dire à un martien se qui est produit par l'homme ou produit par la nature (*Le hasard et la nécessité*) ? Que dire du chou romanesco ? ou du paysage fractal ?

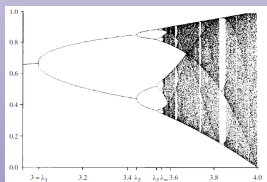
Une surface brownienne est une généralisation du mBf, une fonction f telle que $f(x+h, y+k) - f(x, y)$ suit une loi gaussienne de variance $\sqrt{h^2 + k^2}$. Sa dimension de Hausdorff est $3 - 1/2 = 5/2$.



Suite logistique

$$x_{n+1} = bx_n(1 - x_n)$$

Au bout d'un certain nombre d'itérations la suite se stabilise sur un ensemble de valeurs X_∞ . En faisant varier b , on voit que les orbites deviennent de plus en plus complexes. On trace X_∞ en fonction de b .



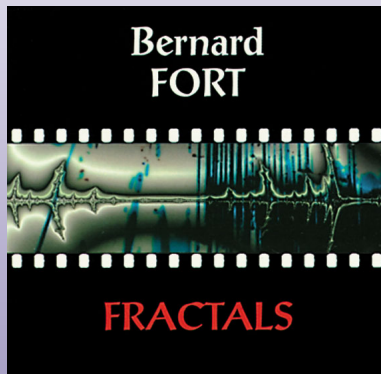
Suite gaussienne

$$x_{n+1} = b - x_n(1 - x_n) + \exp(-ax_n^2)$$

On fait varier b entre -2.5 et 0.6 et a entre 2 et 14.

Bernard Fort

Bernard Fort (né en 1954) compositeur de musique électroacoustique.
Cofondateur du Groupe musiques vivantes de Lyon (GMVL) 1976.
Enseigne à l'École nationale de musique de Villeurbanne depuis 1982.
Prix du Concours International de Bourges en 1993.



B. Fort, Fractals, 1981

Charles Dodge

Charles Dodge (né en 1942) compositeur américain.

Elève de Gunther Schuller.

Cofondateur du Brooklyn College Center for Computer Music (BC-CCM)

Visiting Professor at Dartmouth College 1991-2009

Profile : A Musical Fractal, *Computer Music Journal*, 12 (3) (1998)

10-14. *Computer Music : Synthesis, Composition, and Performance*, Schirmer, 1985.



Charles Dodge, Viola Elegy, 1987

L'autocorrélation est la moyenne temporelle

$$C_X(\tau) = \langle X(t)X(t+\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \overline{X(t)} X(t+\tau)$$

Pour un échantillonnage $(X_1, \dots, X_n)$, l'autocorrélation est estimée pour un processus de moyenne $m = \mathbb{E}(X)$

$$\widehat{C}_X(k) = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (X_t - m)(X_{t+k} - m)}{(n-k) \sum_{t=1}^{n-k} (X_t - m)^2}$$

La densité spectrale de puissance est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation (Théorème de Wiener-Khintchine)

$$S(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau\nu} C_X(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \mathbb{E} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau\nu} X(\tau) d\tau \right|^2$$

Densité spectrale du bruit brownien (la corrélation $\langle W(t)W(t+\tau) \rangle \propto \tau$) :

$$S(\nu) = S_0/\nu^2$$

Densité spectrale du mBf ($\langle X(t)X(t+\tau) \rangle \propto \tau^{2a}$, a paramètre de Hurst) :

$$S(\nu) = S_0/\nu^{2a+1}$$

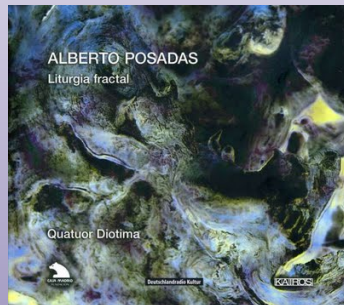
Si on regarde pendant T minutes un signal musical échantillonné à 44100 Hz, on peut calculer sa densité spectrale et donc le paramètre de Hurst (si X_t est assimilé à un mBf). En répétant la mesure sur des fenêtres de T minutes, on construit une courbe $T \rightarrow a(T)$ qui mesure l'évolution fractale d'un passage musical.

Compositeur espagnol "mamuxien"

Utilisation intelligente (esthétique) des procédés mathématiques

Composition utilisant les fractales, bifurcations, L-system :

Glossopoiea, *Liturgia fractal*



Alberto Posadas, Liturgia fractal

The image displays a musical score for four instruments: Violon I, Violon II, Alto, and Violoncelle. The score is written in 4/4 time and features a complex, fractal-like structure. The Violon I part is marked with 'sord.' and 'quasi flaut, sempre senza vibr, sempre'. The Violon II part is marked with 's.t.' and 'quasi flaut, sempre senza vibr, sempre'. The Alto part is marked with 'ebony sord.' and 'quasi flaut, sempre senza vibr, sempre'. The Violoncelle part is marked with 'tonwolf sord.' and 'quasi flaut, sempre senza vibr, sempre'. The score includes dynamic markings such as p , mp , and p , and a 'simile' marking. The notation is dense and intricate, reflecting the fractal nature of the piece.

Alberto Posadas, Liturgia Fractal, etc. (Voir l'exposé de José Luis Besada)