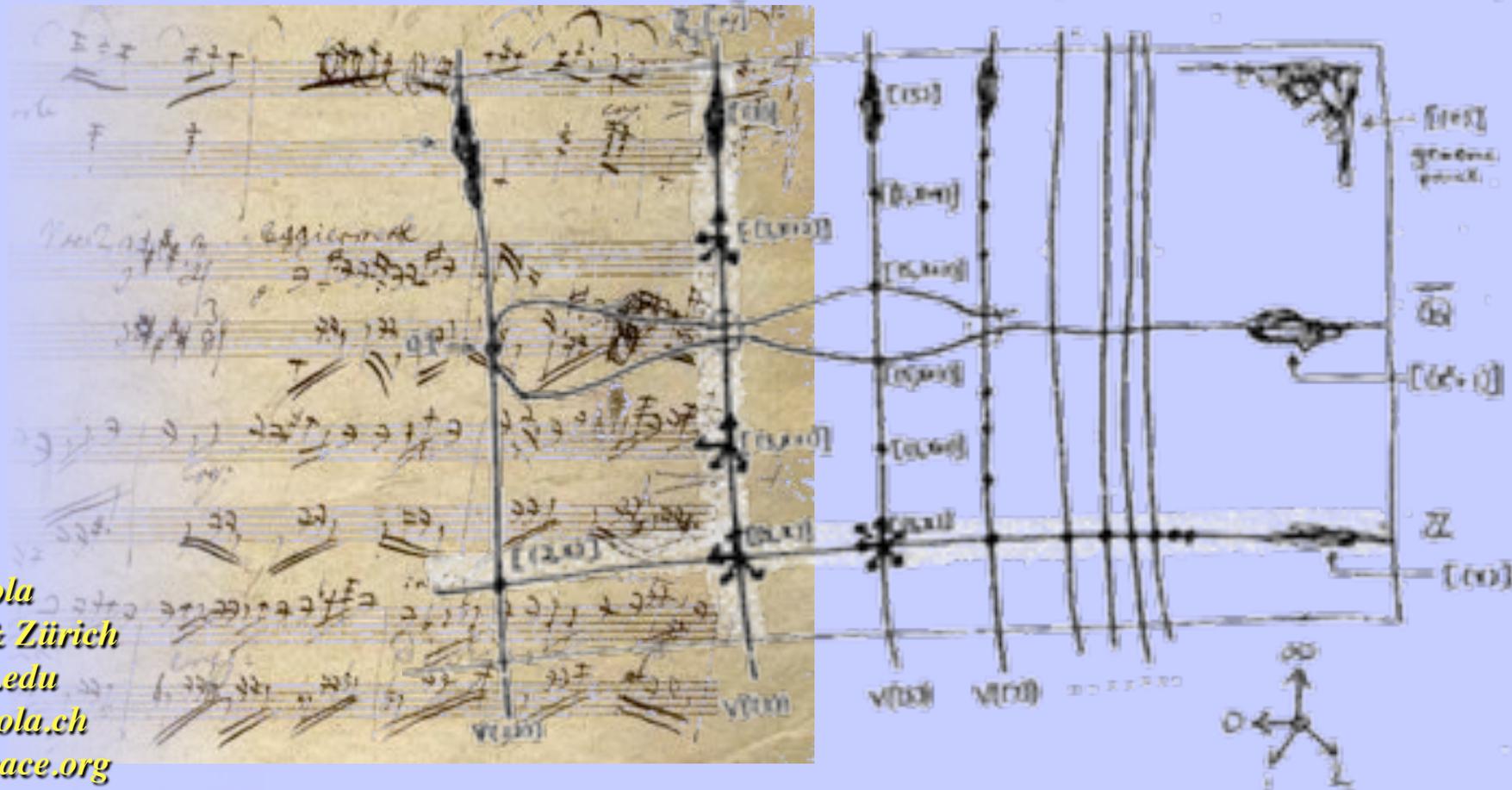




Philosophie de Yoneda, colimites et processus créatif dans l'op. 109 de Beethoven



Guerino Mazzola
U Minnesota & Zürich
mazzola@umn.edu
guerino@mazzola.ch
www.encycloSPACE.org



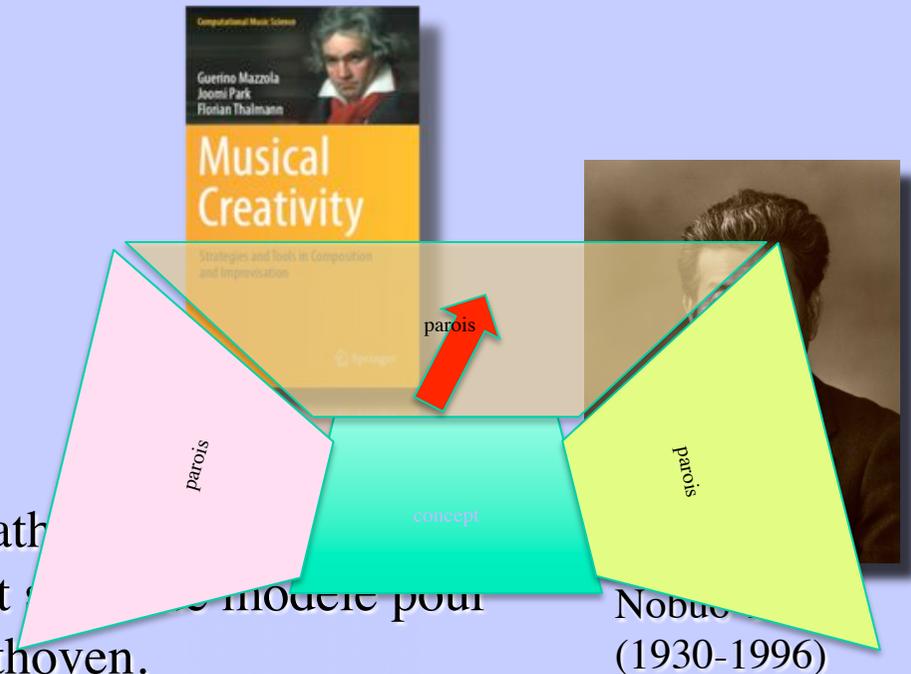
Nous discutons les six variations du 3ème mouvement de la sonate op. 109 de Ludwig van Beethoven en tant que composition créative

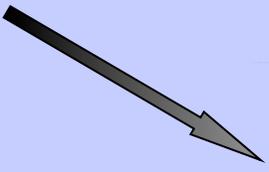
Le plan général est le suivant:

Nous avons décrit le processus créatif dans notre livre récent:

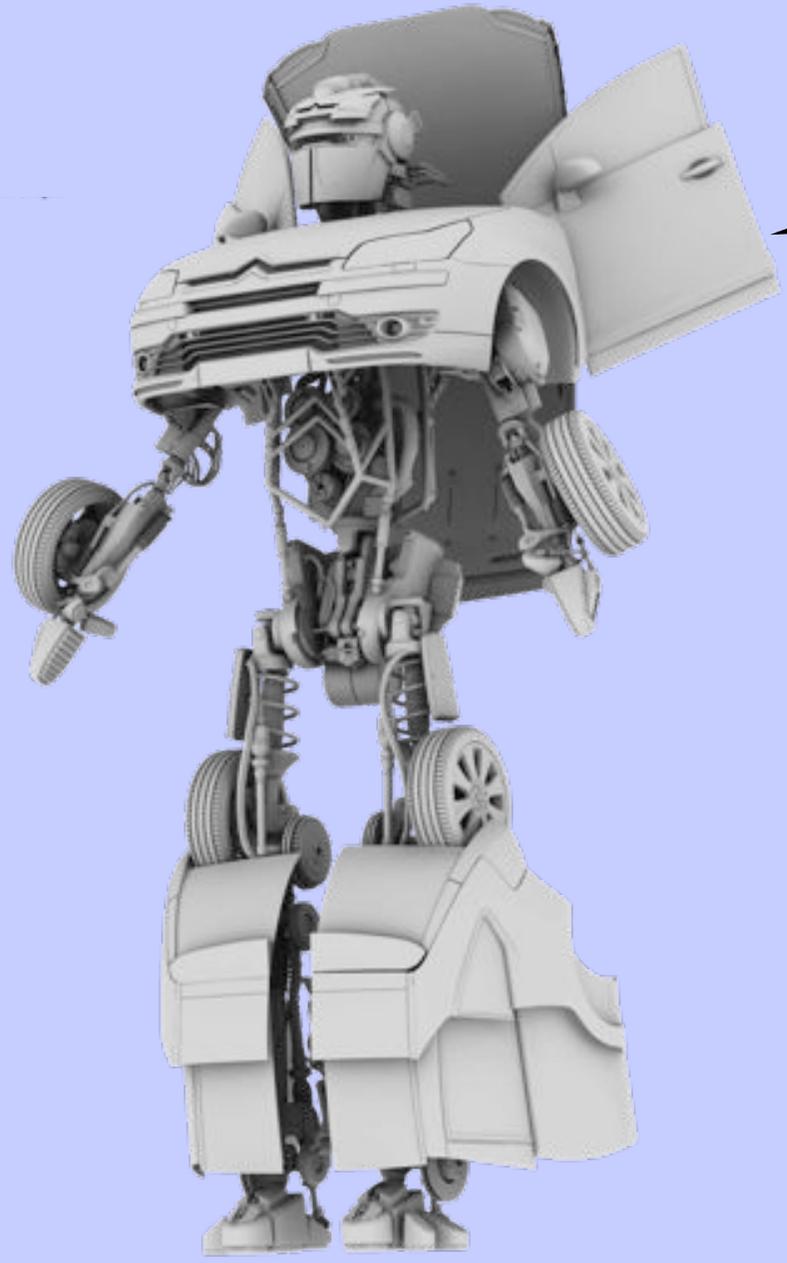
1. Exhiber une question ouverte
2. Définir son contexte
3. Trouver un concept critique X
4. Décrire ses „parois“
5. Ramollir les parois
6. Les étendre
7. Évaluer le concept étendu

On montrera comme un processus mathématique par le fameux **lemme de Yoneda**, peut être un modèle pour Nobuo (1930-1996)

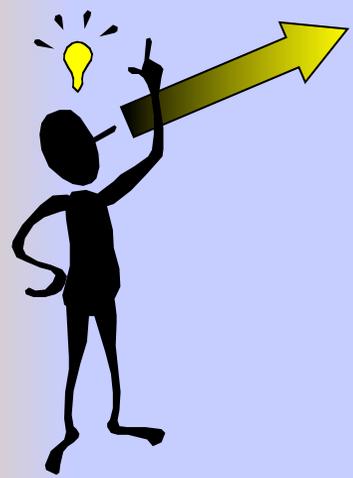




adresse



adresse



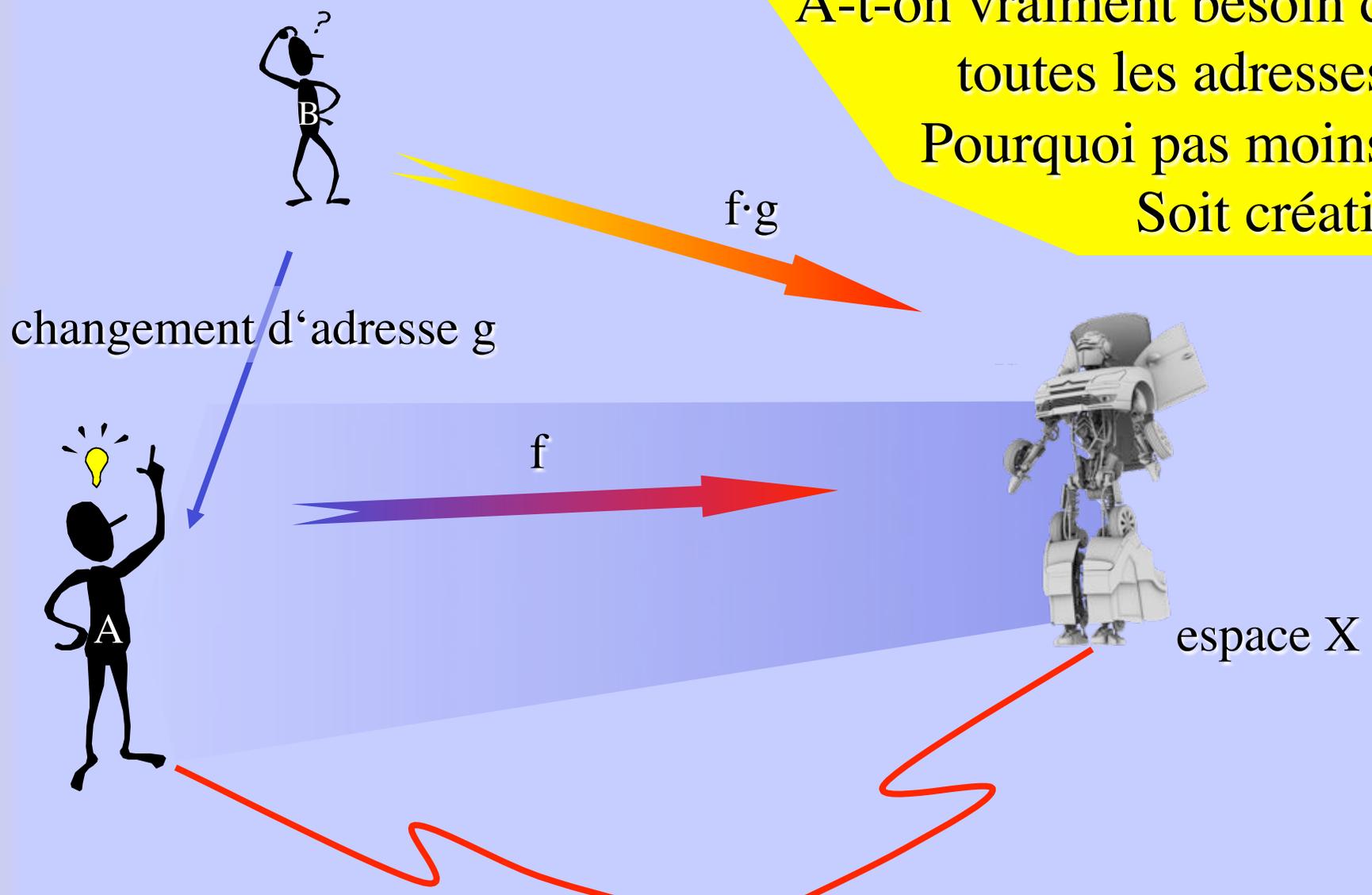
adresse



adresse



A-t-on vraiment besoin de toutes les adresses?
 Pourquoi pas moins?
 Soit créatif!



Lemme: Le système de tous les $A@X$ décrit X complètement

$$A@X = \text{Hom}(A, X)$$



Préambule toposique pour les mathématicien(ne)s:

Le lemme de Yoneda dit que pour toute catégorie \mathcal{C} , le foncteur de Yoneda

$$Y: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{@}} = \text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \mathcal{E}_{\text{ns}}): X \mapsto Y(X) = \text{Hom}(-, X) = \text{@}X$$

est pleinement fidèle.

On peut voir ce lemme dans un cadre un peu plus général:

Comme $\mathcal{C}^{\text{@}}$ est un topos \mathcal{E} , on considère la catégorie Y-image \mathcal{A} de \mathcal{C} dans \mathcal{E} . Alors Yoneda dit que non seulement $Y: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{@}}$ est pleinement fidèle, mais aussi la restriction $F|_{\mathcal{A}}$ des foncteurs F de \mathcal{E} à la sous-catégorie \mathcal{A} de \mathcal{E} . (\mathcal{A} „adresses“)

En effet, pour tout foncteur contravariant F de \mathcal{E} , et pour tout objet représentable $\text{@}X$ de \mathcal{A} , on a $\text{Hom}(\text{@}X, F) = X@F = F(X)$. En d'autres mots: Le foncteur restreint de Yoneda

$$Y_{\mathcal{A}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}^{\text{@}}$$

catégorie \mathcal{A} „créative“

est aussi pleinement fidèle. L'enjeu: **Trouver pour un topos quelconque \mathcal{E} une sous-catégorie \mathcal{A} de \mathcal{E} minimale pour conserver la pleine fidélité** de $Y_{\mathcal{A}}$.

Exemples:

1. Géométrie algébrique.

On prend la catégorie \mathcal{Sch} des schémas (pas un topos) et le topos

$$\mathcal{E} = \mathcal{Sch} @$$

On sait que la sous-catégorie $\mathcal{A} = \mathcal{Aff}$ des schémas affines (spectres d'anneaux) est créative.

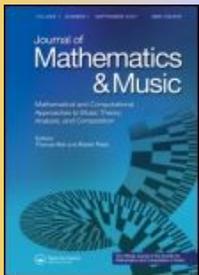
2. Topologie algébrique.

On travaille dans la catégorie \mathcal{Top} des espaces topologiques (pas un topos) et l'on prend le topos

$$\mathcal{E} = \mathcal{Top} @$$

On essaye de comprendre les espaces topologiques X en tant que foncteurs $@X$ en les évaluant sur des petites catégories „assez créatives“, telles que la catégorie \mathcal{R} des simplexes Δ_n . L'algèbre linéaire qu'on applique à ces évaluations engendre l'homologie et cohomologie singulière. (Mayer-Vietoris, colimites de foncteurs représentables...)

La théorie mathématique des hypergestes généralise cette (co)homologie, et s'insère donc canoniquement dans ce contexte de créativité à la Yoneda.





Voici l'interprétation du processus créatif impliqué par le lemme de Yoneda:

1. Exhiber une question ouverte **Comprendre l'espace X**
2. Définir son contexte **La catégorie sous-jacente (quels objets, flèches?)**
3. Trouver un concept critique X **C'est bien X**
4. Décrire ses „parois“ **Parois = tous les $A@X$ „comportement de X vu de A “. Yoneda le garantit, mais tous les A est trop!
*Choisir les adresses caractéristiques A_i
(C'est bien la catégorie créative \mathcal{R} ici!)***
5. Ramollir les parois **Observer le comportement des $A_i@X$ et de leurs relations**
6. Étendre les parois **Appeler \mathcal{D} le système de 5. et recoller le tout (= colimite de \mathcal{D})**
7. Évaluer le concept étendu **Soit $C(\mathcal{D}) \rightarrow X$ la perspective „synthèse“ sur X
Quelle est la nouvelle compréhension de X ?**



Trois exemples:

1. ensembles

1. Dans la théorie des ensembles, comprendre un ensemble X signifie savoir combien d'éléments il contient (cardinalité).

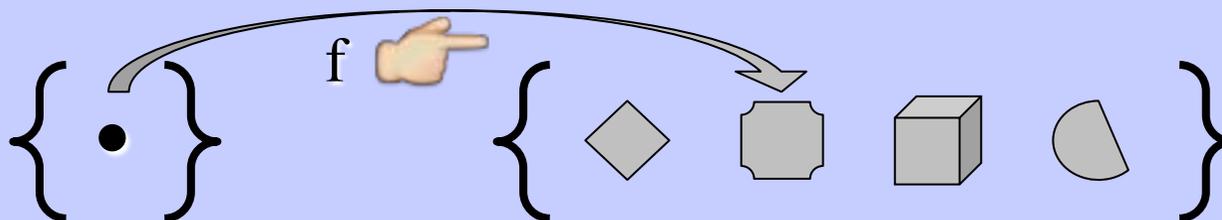
2. La *catégorie sous-jacente des ensembles* (un *topos!*) a les ensembles comme objets et les applications ensemblistes comme flèches.

4. Prendre $A = \{\bullet\}$, on a $A@X = \{f: A \rightarrow X, \text{ applications ensemblistes}\}$.

5. Ces applications f sont définis par l'image $f(\bullet)$ dans X . Donc la cardinalité de $A@X$ est la même que la cardinalité de X ! Il suffit de considérer cet $A@X$ pour comprendre X .

6. $\mathcal{D} = A@X$, rien à recoller.

7. $C(\mathcal{D}) = \mathcal{D} = A@X \rightarrow X: f \rightsquigarrow f(\bullet)$ est une bijection.



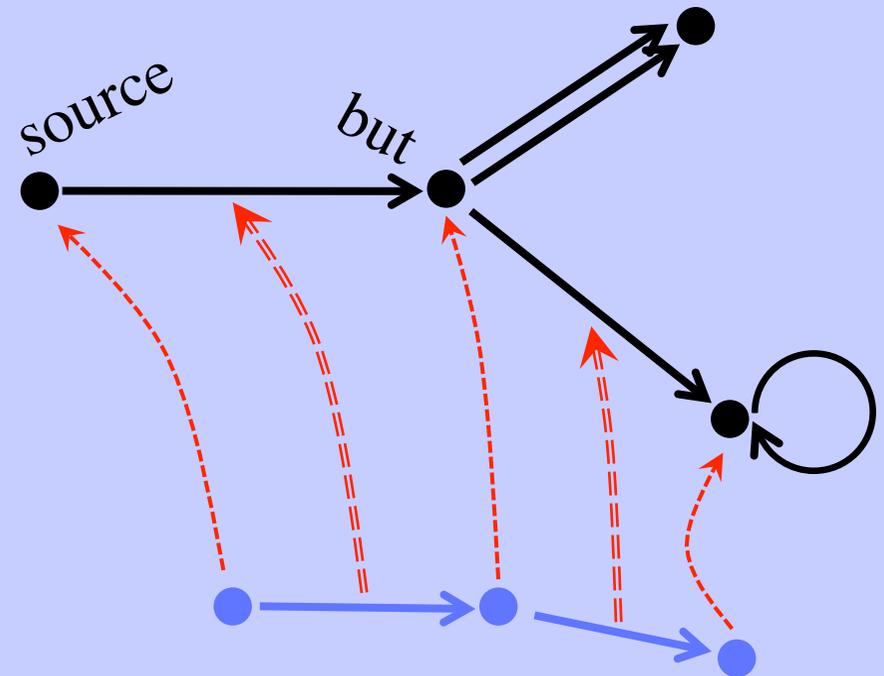
1. Comprendre l'espace X
2. La catégorie sous-jacente (quels objets, flèches?)
3. C'est bien X
4. Parois = tous les $A@X$ „comportement de X vu de A “. Choisir les adresses caractéristiques A_i
5. Observer le comportement des $A_i@X$ et de leurs relations.
6. Observer le comportement des $A_i@X$ et de leurs relations
7. Soit $C(\mathcal{D}) \rightarrow X$ la perspective „synthèse“ sur X . Quelle est la nouvelle compréhension de X ?



Trois exemples: 2. graphes orientés

1. Comprendre un graphe orienté X signifie connaître tous ses arcs et leurs connections dans des sommets communs. Voici un tel X :

2. La *catégorie sous-jacente* des graphes orientés (un topos!) a comme flèches les applications f qui envoient *sommets dans sommets et arcs dans arcs* avec des relations de compatibilité parmi les applications des arcs et des sommets.



1. Comprendre l'espace X
2. La catégorie sous-jacente (quels objets, flèches?)
3. C'est bien X
4. Parois = tous les $A @ X$ „comportement de X vu de A “. Choisir les adresses caractéristiques A_i
5. Observer le comportement des $A_i @ X$ et de leurs relations.
6. Observer le comportement des $A_i @ X$ et de leurs relations
7. Soit $C(\mathcal{D}) \rightarrow X$ la perspective „synthèse“ sur X . Quelle est la nouvelle compréhension de X ?



Trois exemples:

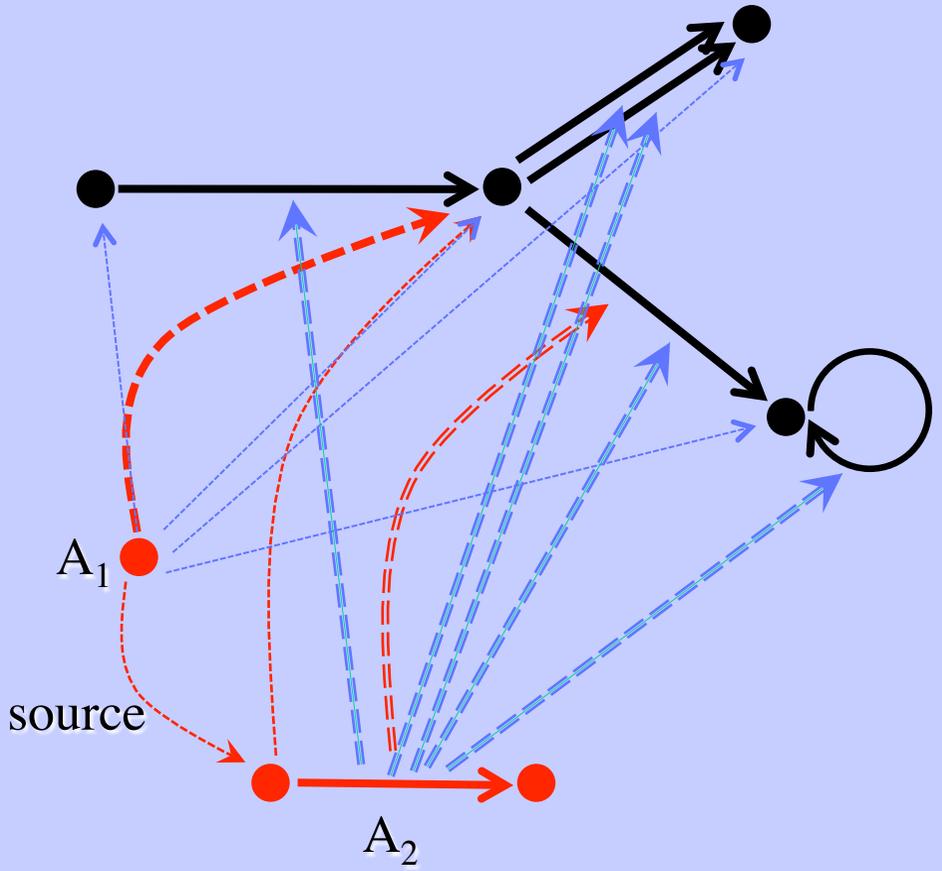
2. graphes orientés

4. Les parois caractéristiques sont toutes les flèches de graphes orientés partant des deux graphes élémentaires:

A_1 = un sommet pas d'arcs,
 A_2 = graphe à un arc entre deux sommets.

5. $A_1@X$ énumère tous les sommets (comme chez les ensembles).
 $A_2@X$ énumère tous les arcs, MAIS on a des relations: L'application de A_1 dans A_2 pour source ou but doit être compatible.

1. Comprendre l'espace X
2. La catégorie sous-jacente (quels objets, flèches?)
3. C'est bien X
4. Parois = tous les $A@X$ „comportement de X vu de A“. Choisir les adresses caractéristiques A_i
5. Observer le comportement des $A_i@X$ et de leurs relations.
6. Observer le comportement des $A_i@X$ et de leurs relations
7. Soit $C(\mathcal{D}) \rightarrow X$ la perspective „synthèse“ sur X. Quelle est la nouvelle compréhension de X?



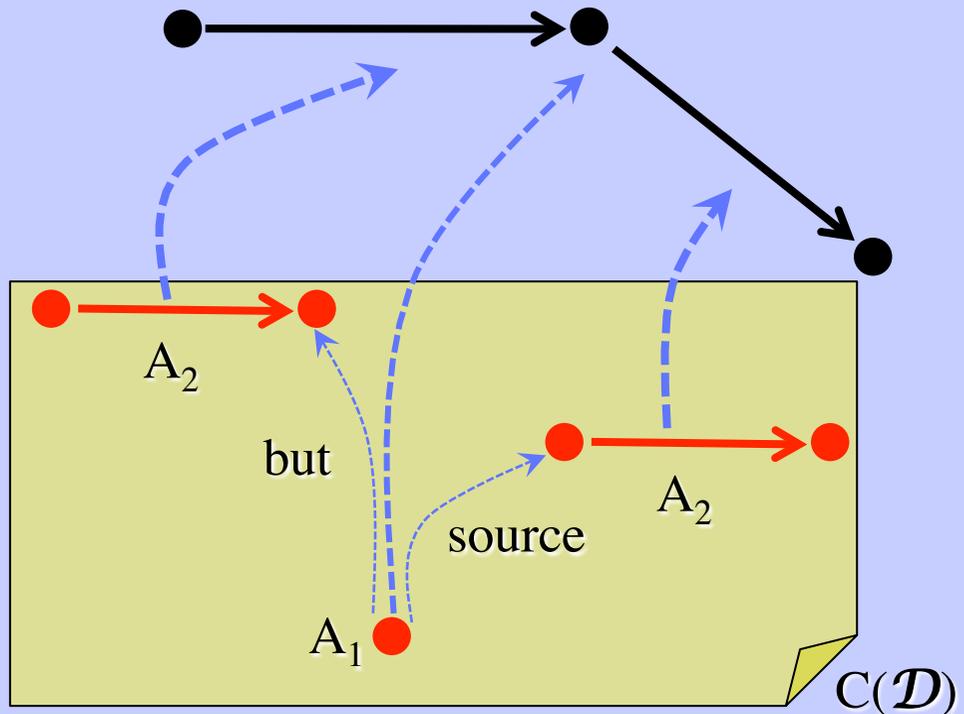


Trois exemples:

2. graphes orientés

- 6. Recoller le système \mathcal{D} des applications arcs et sommets de A_1 et de A_2 dans X donne
- 7. $C(\mathcal{D}) \rightarrow X$, est un isomorphism!

- 1. Comprendre l'espace X
- 2. La catégorie sous-jacente (quels objets, flèches?)
- 3. C'est bien X
- 4. Parois = tous les $A@X$ „comportement de X vu de A “. Choisir les adresses caractéristiques A_i
- 5. Observer le comportement des $A_i@X$ et de leurs relations.
- 6. Observer le comportement des $A_i@X$ et de leurs relations
- 7. Soit $C(\mathcal{D}) \rightarrow X$ la perspective „synthèse“ sur X . Quelle est la nouvelle compréhension de X ?





Trois exemples:

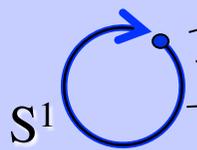
3. espaces topologiques

tels que notre espace 3D:
points, lignes, surfaces, etc.



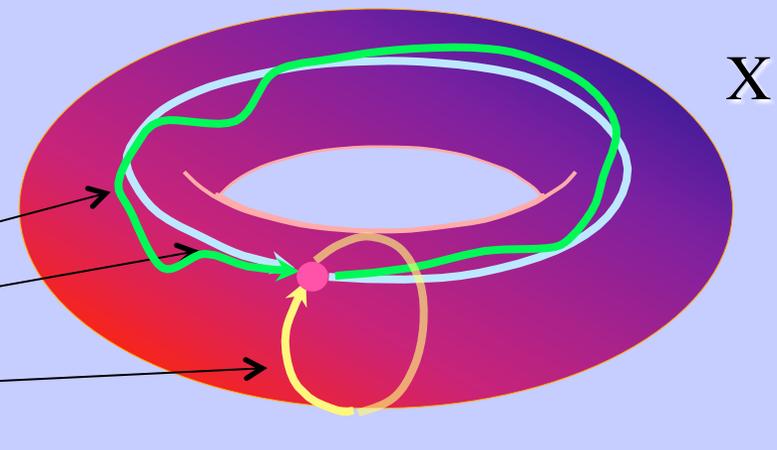
1. Comprendre un espace topologique X signifie savoir ce qui est conservé sous les déformations continues. Voice un espace topologique, la surface de tore X :

5. En regardant aux trajets circulaires dans $S^1@X$ on voit des relations: f_1 peut être déformé en f_2 , mais pas en f_3 . Ceci nous mène au *groupe fondamental*, essentiel pour comprendre les trous dans les espaces topologiques.



1. Comprendre l'espace X
2. La catégorie sous-jacente (quels objets, flèches?)
3. C'est bien X
4. Parois = tous les $A@X$ „comportement de X vu de A “. Choisir les adresses caractéristiques A_i
5. Observer le comportement des $A_i@X$ et de leurs relations.
6. Observer le comportement des $A_i@X$ et de leurs relations
7. Soit $C(\mathcal{D}) \rightarrow X$ la perspective „synthèse“ sur X . Quelle est la nouvelle compréhension de X ?

4. La compréhension est amplifiée en „faisant une tour“ sur le tore. Ceci se formalise en considérant des trajets circulaires continus, i.e. „regardant“ le tore du cercle S^1 .





La situation musicale

SONATE
Op.109.
Fräulein Maximiliana Brentano gewidmet.

Vivace, ma non troppo. Sempre legato.

30. *p dolce* *cresc.*

Les dernières sonates de Beethoven:

1816: No.28 en la (A), Op.101

1818: No.29 en si b (B b), Op.106 ("Hammerklavier")

1821: No.30 en mi (E), Op.109

1822: No.31 en la b (A b), Op.110

1822: No.32 en do mineur (C minor), Op.111

Op.109: mi majeur; trois mouvements: Vivace/Prestissimo/Gesangvoll (6 variations)

Nous renvoyons à l'analyse excellente de toutes les sonates de Beethoven par **Jürgen Uhde** et à l'édition de l'autographe de l'op. 109 par **William Kinderman**.

Notre discussion de la créativité dans l'op. 109 est publiée dans le chapitre 26 de notre livre **Musical Creativity**.



Comprendre X = Thème

Gesangvoll, mit innigster Empfindung.
Andante, molto cantabile ed espressivo.
mezza voce

cresc. *p*

cresc. *mezza voce*



Jürgen Uhde utilise un langage très à la mode de Yoneda: variations $A_1 - A_5 =$ perspectives caractéristiques sur le thème X

Thème X

Var. I. *Molto espressivo*

Var. II. *Andante*

Var. III. *Allargo vivace*

Var. IV. *Très impétueux als des Thèmes*

Var. V. *Allegro vivace*

Var. VI. *Allegro vivace*

Var. VII. *Allegro vivace*

Var. VIII. *Allegro vivace*

Var. IX. *Allegro vivace*

Var. X. *Allegro vivace*

Var. XI. *Allegro vivace*

Var. XII. *Allegro vivace*

Var. XIII. *Allegro vivace*

Var. XIV. *Allegro vivace*

Var. XV. *Allegro vivace*

Var. XVI. *Allegro vivace*

Var. XVII. *Allegro vivace*

Var. XVIII. *Allegro vivace*

Var. XIX. *Allegro vivace*

Var. XX. *Allegro vivace*

Var. XXI. *Allegro vivace*

Var. XXII. *Allegro vivace*

Var. XXIII. *Allegro vivace*

Var. XXIV. *Allegro vivace*

Var. XXV. *Allegro vivace*

Var. XXVI. *Allegro vivace*

Var. XXVII. *Allegro vivace*

Var. XXVIII. *Allegro vivace*

Var. XXIX. *Allegro vivace*

Var. XXX. *Allegro vivace*

Var. XXXI. *Allegro vivace*

Var. XXXII. *Allegro vivace*

Var. XXXIII. *Allegro vivace*

Var. XXXIV. *Allegro vivace*

Var. XXXV. *Allegro vivace*

Var. XXXVI. *Allegro vivace*

Var. XXXVII. *Allegro vivace*

Var. XXXVIII. *Allegro vivace*

Var. XXXIX. *Allegro vivace*

Var. XL. *Allegro vivace*

Var. XLI. *Allegro vivace*

Var. XLII. *Allegro vivace*

Var. XLIII. *Allegro vivace*

Var. XLIV. *Allegro vivace*

Var. XLV. *Allegro vivace*

Var. XLVI. *Allegro vivace*

Var. XLVII. *Allegro vivace*

Var. XLVIII. *Allegro vivace*

Var. XLIX. *Allegro vivace*

Var. L. *Allegro vivace*

Var. LI. *Allegro vivace*

Var. LII. *Allegro vivace*

Var. LIII. *Allegro vivace*

Var. LIV. *Allegro vivace*

Var. LV. *Allegro vivace*

Var. LVI. *Allegro vivace*

Var. LVII. *Allegro vivace*

Var. LVIII. *Allegro vivace*

Var. LIX. *Allegro vivace*

Var. LX. *Allegro vivace*

Var. LXI. *Allegro vivace*

Var. LXII. *Allegro vivace*

Var. LXIII. *Allegro vivace*

Var. LXIV. *Allegro vivace*

Var. LXV. *Allegro vivace*

Var. LXVI. *Allegro vivace*

Var. LXVII. *Allegro vivace*

Var. LXVIII. *Allegro vivace*

Var. LXIX. *Allegro vivace*

Var. LXX. *Allegro vivace*

Var. LXXI. *Allegro vivace*

Var. LXXII. *Allegro vivace*

Var. LXXIII. *Allegro vivace*

Var. LXXIV. *Allegro vivace*

Var. LXXV. *Allegro vivace*

Var. LXXVI. *Allegro vivace*

Var. LXXVII. *Allegro vivace*

Var. LXXVIII. *Allegro vivace*

Var. LXXIX. *Allegro vivace*

Var. LXXX. *Allegro vivace*

Var. LXXXI. *Allegro vivace*

Var. LXXXII. *Allegro vivace*

Var. LXXXIII. *Allegro vivace*

Var. LXXXIV. *Allegro vivace*

Var. LXXXV. *Allegro vivace*

Var. LXXXVI. *Allegro vivace*

Var. LXXXVII. *Allegro vivace*

Var. LXXXVIII. *Allegro vivace*

Var. LXXXIX. *Allegro vivace*

Var. LXXXX. *Allegro vivace*

Var. LXXXXI. *Allegro vivace*

Var. LXXXXII. *Allegro vivace*

Var. LXXXXIII. *Allegro vivace*

Var. LXXXXIV. *Allegro vivace*

Var. LXXXXV. *Allegro vivace*

Var. LXXXXVI. *Allegro vivace*

Var. LXXXXVII. *Allegro vivace*

Var. LXXXXVIII. *Allegro vivace*

Var. LXXXXIX. *Allegro vivace*

Var. LXXXXX. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXI. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXII. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXIII. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXIV. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXV. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXVI. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXVII. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXVIII. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXIX. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXX. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXXI. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXXII. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXXIII. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXXIV. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXXV. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXXVI. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXXVII. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXXVIII. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXXIX. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXXX. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXXXI. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXXXII. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXXXIII. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXXXIV. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXXXV. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXXXVI. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXXXVII. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXXXVIII. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXXXIX. *Allegro vivace*

Var. LXXXXXXX. *Allegro vivace*

A_1 : mélodique

A_2 : rythmique

A_3 : contrapuntique

A_4 : permutationnelle

A_5 : permutationnelle avec tierces

A_6



1ère variation

Une variation mélodique bâtie sur une composition homophone avec accompagnement de valse.

Var. I.
molto espressivo

The musical score is presented in three systems, each with a treble and bass staff. The first system is marked 'Var. I.' and 'molto espressivo'. The second system includes first and second endings. The third system includes 'mezza voce' and 'cresc.' markings. The score is written in a key with three sharps (F#, C#, G#) and a 3/4 time signature. Fingerings and articulation marks are clearly indicated throughout the piece.

2:12



2nde variation

Une variation rythmique avec des déplacements sophistiqués des notes du thème dans une séquence d'arpèges intervalliques.

Var. II.
Leggiermente.

p

cresc.

dimin. *cresc.* *dimin.* *p*

tenerezamente

cresc. *dimin.* *p*

p

cresc.

p *cresc.* *dim.* *p*



3ème variation

Une variation contrapuntique basée sur des correspondances par inversion du thème et de ses redistributions dans les voix.

Var. III.
Allegro vivace.

The musical score is presented in six systems, each with a piano (piano) staff on the bottom and a violin staff on the top. The key signature is D major (two sharps) and the time signature is 3/4. The tempo is marked 'Allegro vivace'. The score includes various dynamic markings: 'f' (forte) at the beginning of the first system, 'p' (piano) at the start of the third system, and 'cresc.' (crescendo) markings in the third, fourth, and sixth systems. The notation shows intricate counterpoint between the two instruments, with the piano often playing a more active role than the violin in this variation.



4ème variation

Une variation permutationnelle échangeant quelques notes du thème pour saisir toute la puissance cantabile dans une élaboration en fughetta.

Var. IV.
Etwas langsamer als das Thema.
Un poco meno andante, cioè è: un poco più adagio come il tema.

placevole

cresc. poco a poco

dimin. -

1.

2.

pp

dolce

pp

1.

2.



5ème variation

Allegro, ma non troppo.

Une autre variation permutationnelle, mais vouée à la révélation du pouvoir de la tierce qui est aussi l'intervalle initiale (sol#, mi) du thème original.



Uhde: Tout a été dit. On a vu toutes les perspectives du thème.

Pourquoi alors une sixième variation?



6ème variation

Tempo I. del tema.
cantabile

cresc. *poco* *a poco*

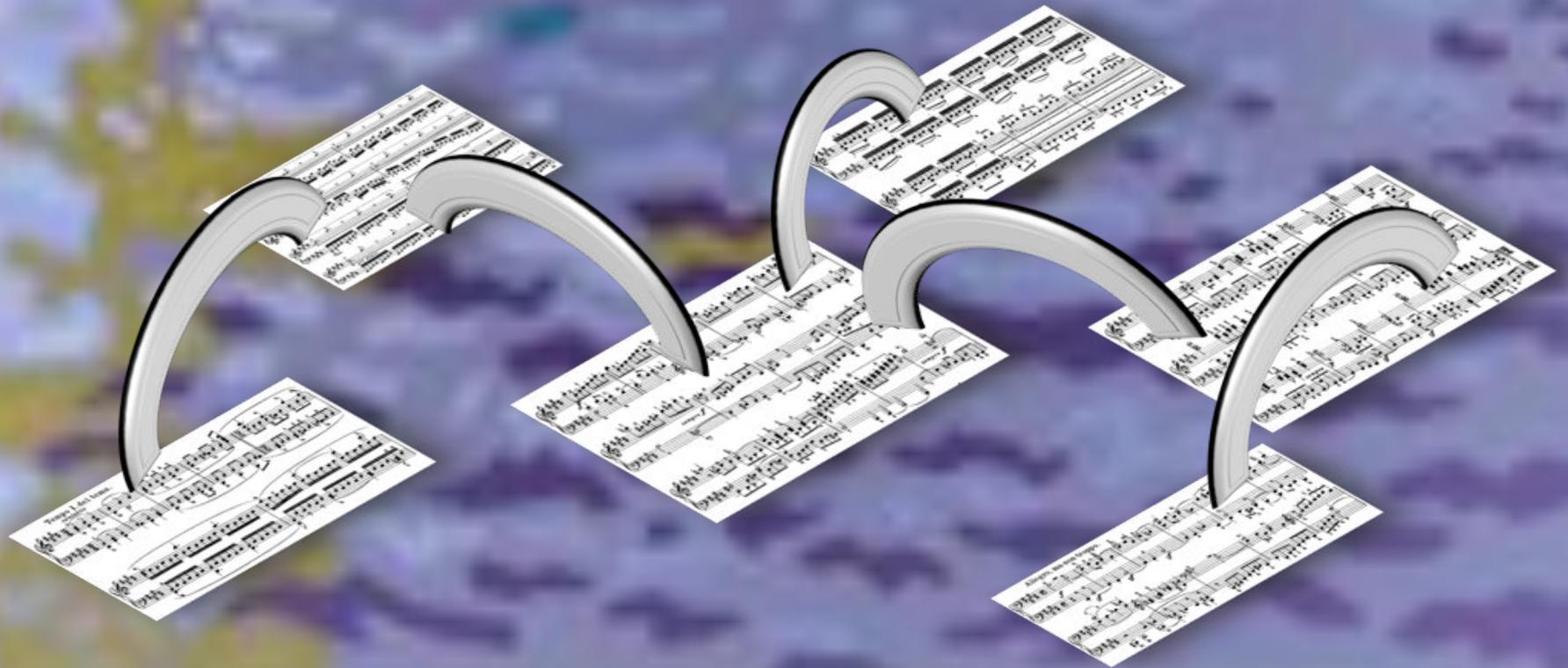
f

dimin. *pp*



La réponse d'Uhde utilise un langage remarquablement géométrique:

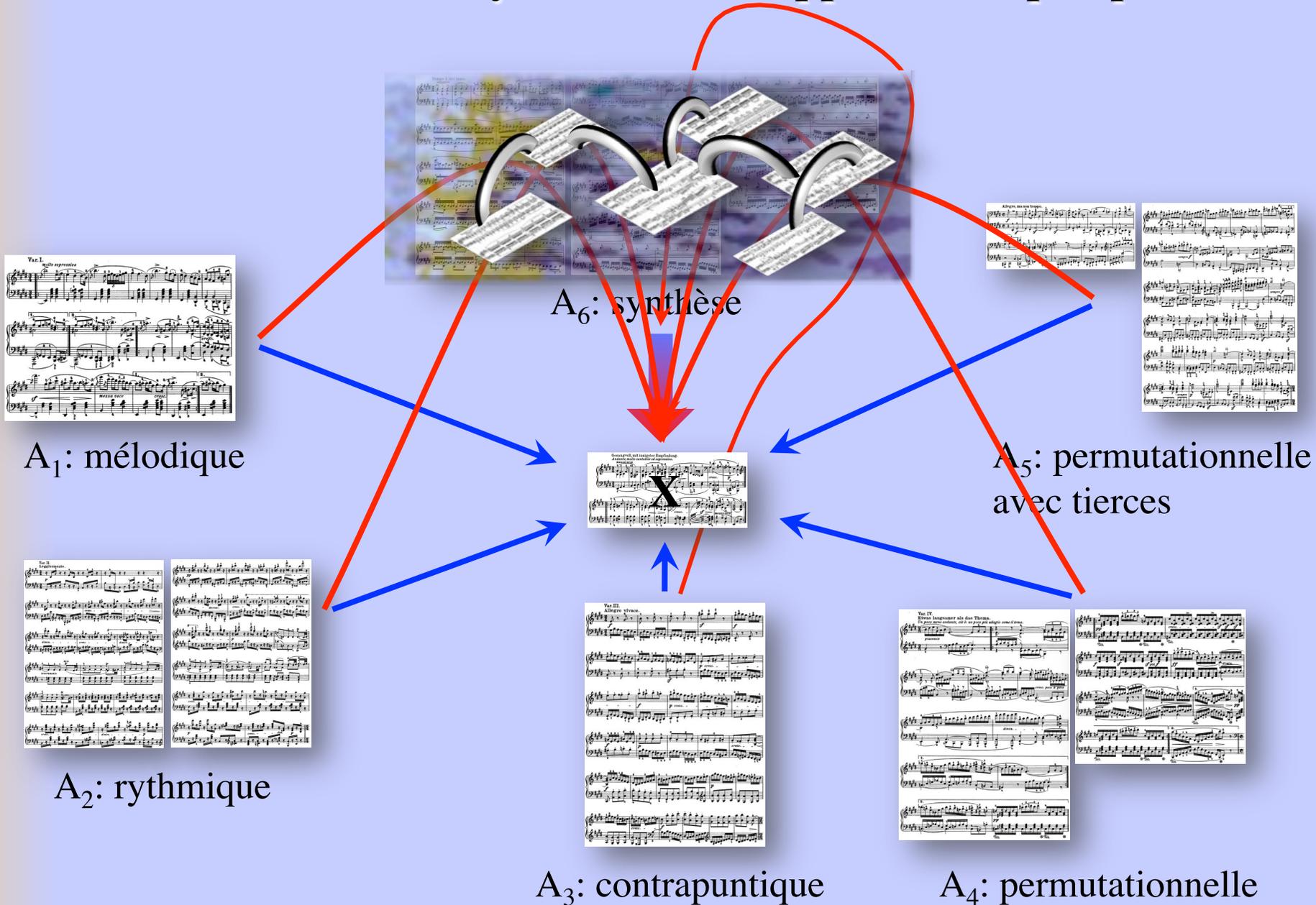
Il la voit comme si elle était un corps composé de six micro-variations, et il décrit ce corps comme étant un “Stromland mit Brücken,” un paysage fluvial, dont les ponts connectent les six micro-variations.





Uhde:

la 6ème variation est la synthèse des cinq premières perspectives

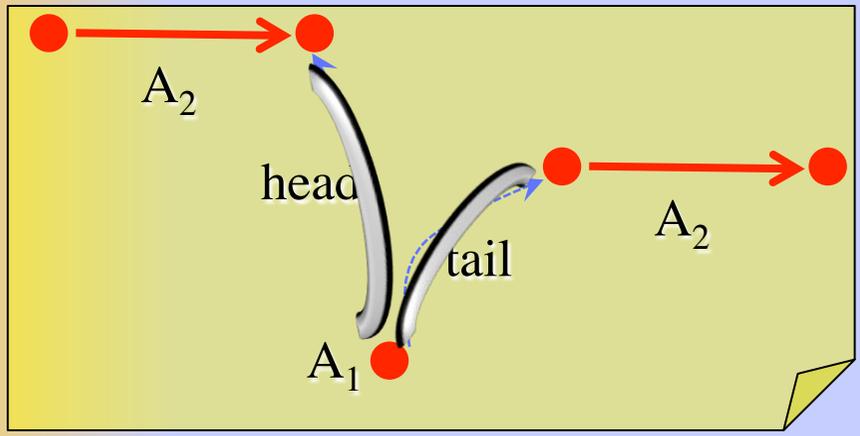




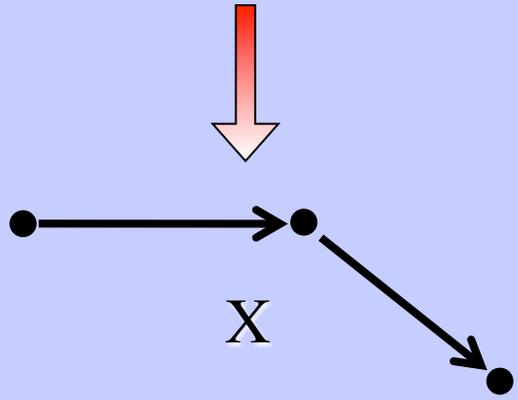
En mathématiques, ce „Stromland mit Brücken” serait appelé *colimite* des variations $A_1 - A_5$. L’analogie est remarquable, bien que le contexte musical ne soit pas précisément une catégorie mathématique. C’est là un enjeu en théorie mathématique de la musique!

$C(\mathcal{D})$

variation $A_6 = C(\mathcal{D})$



composition globale?





Le sixième variation contient en effet un nombre de récapitulations du thème, mais dramatiquement converge vers un finale qui est une synthèse de tous les aspects.

Uhde décrit le finale d'une manière très émotionnelle comme *explosion d'énergie*.

Kinderman ajoute une interprétation similaire:

“Through a kind of radioactive breakup, the theme virtually explodes from within, yielding an array of shimmering, vibrating sounds. One might regard the sustained trill on B with its upper neighbor C #, which migrates into the treble in the passage before the thematic reprise, as the utmost elaboration of the melodic peak of the sarabande on these two notes.”

Mais ce langage émotionnel admet une justification bien rationnelle!



6ème variation

Tempo I. del tema.
cantabile

cresc. *poco* *a poco*

dimin. *piu dimin.*

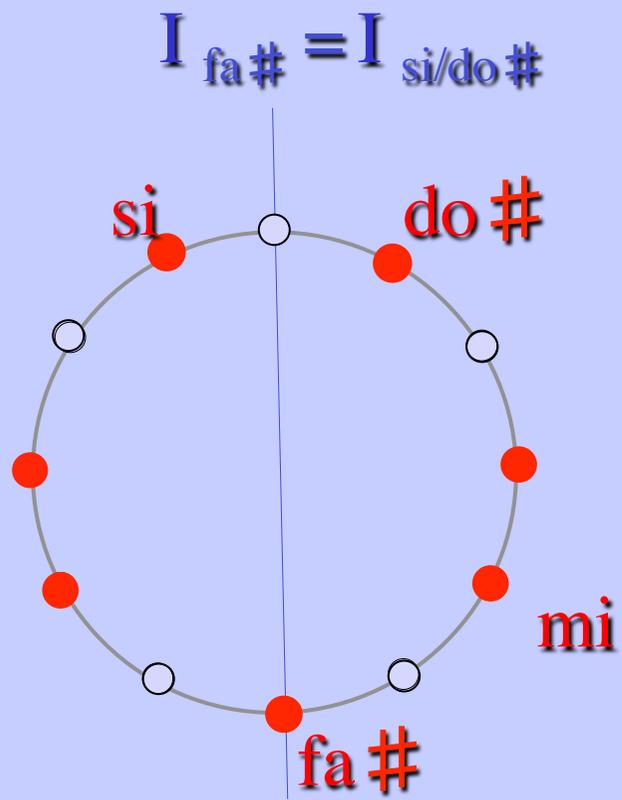
dimin. *pp*

trille retenu sur si avec son voisin supérieur do #

de m.164 à m.187 ... seulement la dominante si preparant la tonique mi?



gamme mi majeur



$I_{fa\#} = I_{si/do\#}$

La "rotation trille" exprime la symétrie d'inversion de la gamme mi majeur.

C'est une cadence, détermine uniquement E majeur : mi et si-bémol majeur se partagent cette symétrie, mais seulement mi majeur contient les notes du trille.

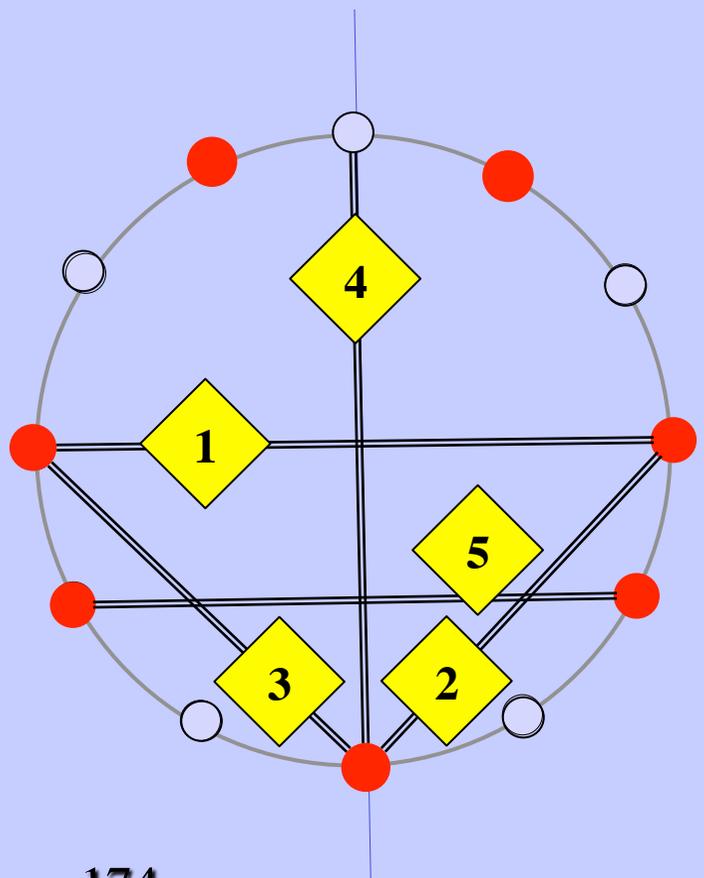
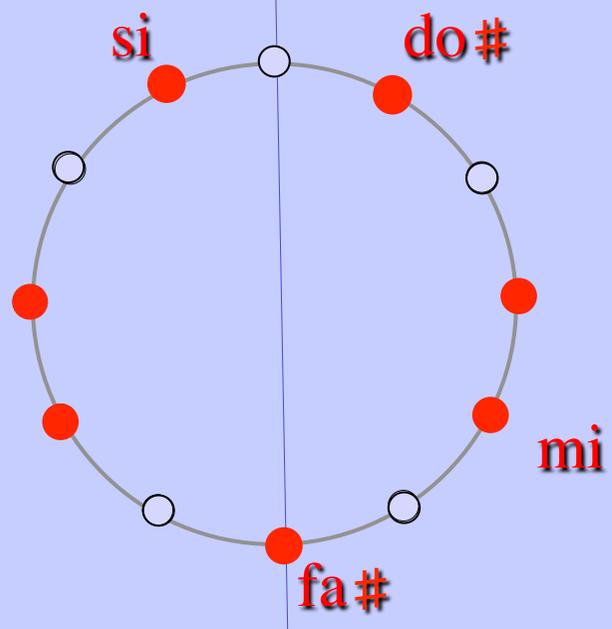


m.173

The image displays two systems of handwritten musical notation. Each system consists of a grand staff with a treble clef on top and a bass clef on the bottom. The key signature is two sharps (F# and C#). The first system shows a melodic line in the treble clef with various note values and fingerings (1, 2, 3, 4). The bass line features a tremolo effect, indicated by a wavy line. The second system continues the melodic line with a 's' marking above the first measure, and the tremolo bass line continues. The notation is handwritten and appears to be a study or practice score.

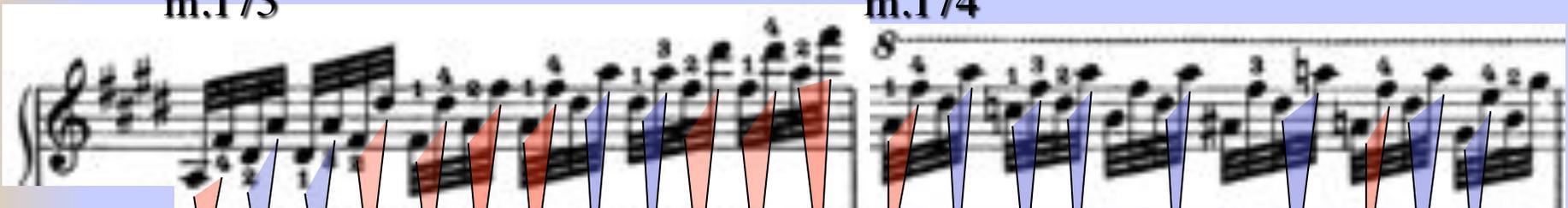


$I_{fa\#} = I_{si/do\#}$



m.173

m.174



3 1 1 2 2 3 3 1 1 2 2 3 3 1 4 1 1 1 3 1 5



thème final

cantabile

cresc. *p*

cresc. *ritard.*

fin.