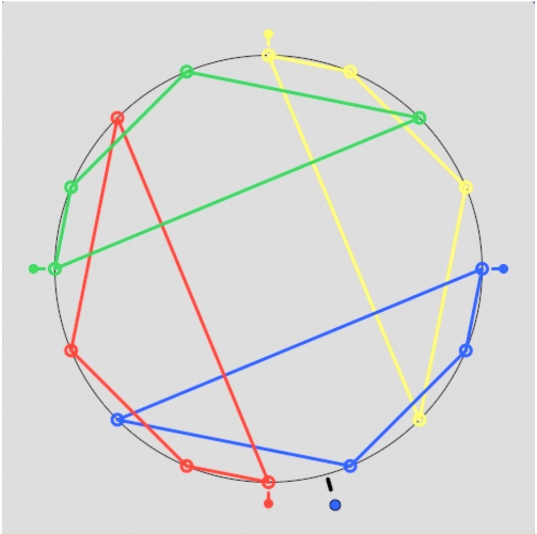
Outils algébriques pour l'étude des canons rythmiques mosaïques et du pavage modulo p

Hélianthe Caure

IRCAM - UPMC

13 septembre 2013



Pulsation, rythme

L'axe du temps est assimilé à $\mathbb{Z}$, les entiers sont les *pulsations*.
Une partie finie $A \subset \mathbb{N}$ qui contient 0 sera appelé un *rythme*.

Définition

On dit qu'un rythme A pave $\mathbb{Z}$ s'il existe $C \subset \mathbb{Z}$ tel que $A \oplus C = \mathbb{Z}$ où $\oplus$ est la somme directe.

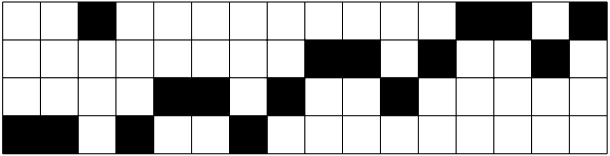
Exemple

$A = \{0, 1, 3, 6\}$ et $C = \{\dots, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\}$.

Représentation linéaire

Si un rythme A pave avec C, on parle d'un canon rythmique mosaïque. A est la voix principale, C celle des entrées.

On peut les représenter géométriquement ainsi :

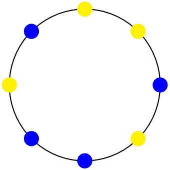


est le canon $A = \{0, 1, 3, 6\}$ qui pave avec $C = \{0, 4\} \oplus 8\mathbb{Z}$.

Théorème de deBruijn

Pour tout canon $A \oplus C = \mathbb{Z}$, il existe $B \subset \mathbb{Z}$ (qu'on peut supposer être dans $\mathbb{N}$ et qui contient 0) et $N \in \mathbb{N}$ tel que $C = B \oplus N\mathbb{Z}$.
En identifiant A, B par leur projection dans $\mathbb{Z}_N$, on a $A \oplus B = \mathbb{Z}_N$.
On dira alors que A pave $\mathbb{Z}_N$ avec B.

Représentation circulaire



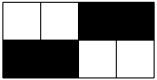
représente le canon $A = \{0, 1, 3, 6\}$ qui pave $\mathbb{Z}_8$ avec $B = \{0, 4\}$.

Pavage compact

Si on a exactement $A \oplus B = [\![0, N-1]\!]$, on dit que A pave $\mathbb{Z}_N$ de façon *compacte*.

Exemple

$A \oplus B = \{0, 1\} \oplus \{0, 2\}$ pave $\mathbb{Z}_4$ de façon compacte :



Représentation polynomiale

Si A est un rythme, on lui associe le polynôme de $\{0,1\}[X]$ $A(X) = \sum_{a \in A} X^a$.
Réciproquement, on dira que tout polynôme P de $\{0,1\}[X]$ est associée à un motif A tel que $P = A(X)$.

Exemple

$A = \{0,1,3,6\}$ est associé au polynôme $A(X) = 1 + X + X^3 + X^6$.

Équivalence

$A \oplus B = \mathbb{Z}_N$ ssi $A(X) \cdot B(X) = 1 + X + \cdots + X^{N-1} \bmod (X^N - 1)$.

Représentation $0 - 1$

Si A est un rythme, on lui associe une suite presque nulle A_{0-1} de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{0-1}[n] = \mathbb{1}_A(n)$, où $\mathbb{1}_A$ est la fonction indicatrice de A.
On notera de la même façon A_{0-1} tout suite finie de $\{0,1\}$ tronquée strictement après $\max(A)$.
Réciproquement, on dira que toute suite s finie, ou infinie presque nulle de $0-1$ est associée à un motif A tel que $A_{0-1} = s$.

Exemple

$A = \{0, 1, 3, 6\}$ est associé indifféremment aux suites $A_{0-1} = 1101001$ ou $110100100000000\ldots$

Équivalence

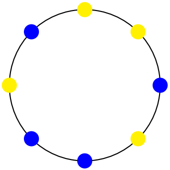
$A \oplus B = \mathbb{Z}_N \iff \mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_N}$.

Périodicité

Un canon $A \oplus B$ de $\mathbb{Z}_N$ est dit *périodique* s'il existe $0 < k < N$ tel que $A + k = A$ ou $B + k = B$.
Un canon est dit de Vuza s'il n'admet pas de période.

Exemple

$A \oplus B = \{0, 1, 3, 6\} \oplus \{0, 4\} = \mathbb{Z}_8$



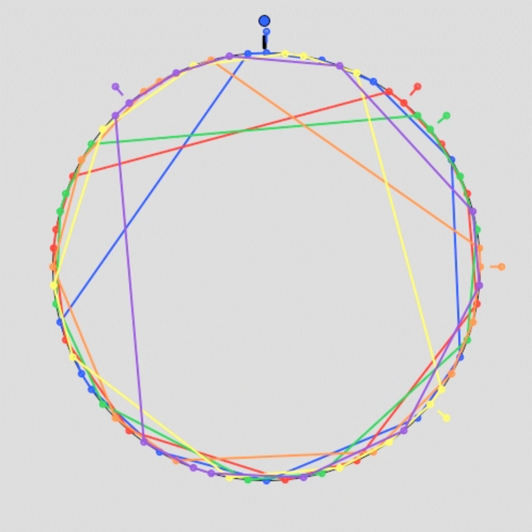
Théorème [Hajós, László, Rédei, De Bruijn, Sands]

Il existe des canons de Vuza pour les N, et seulement pour ceux là, qui ne sont pas de la forme

$$N = p^\alpha, N = p^\alpha q, N = p^2 q^2, N = pqr, N = p^2 qr, N = pqrs$$

où p, q, r, s sont des premiers distincts.

Pour $N = 72$ un canon de Vuza est
$A = \{0, 3, 6, 12, 23, 27, 36, 42, 47, 48, 51, 71\}$ qui pave avec
$B = \{0, 8, 10, 18, 26, 64\}$.



Concaténation

Si $A \subset \mathbb{N}$ pave $\mathbb{Z}_N$, on note $\overline{A}^k = A \oplus \{0, N, 2N, \ldots, (k-1)N\}$ son rythme *concaténé* k fois.
A pave $\mathbb{Z}_N$ avec B ssi $\overline{A}^k$ pave $\mathbb{Z}_{kN}$ avec B.

Dualité

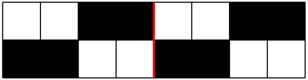
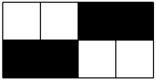
Si $A \oplus B = \mathbb{Z}_N$, alors $B \oplus A = \mathbb{Z}_N$ et cela donne un nouveau canon. On appelle cette opération la *dualité*.

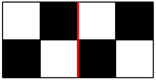
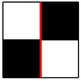
Théorème [Amiot]

Tout canon peut être déduit par concaténation et dualité du canon trivial $\{0\} \oplus \{0\}$ ou de canons de Vuza.

Exemple

$\{0,1,4,5\} \oplus \{0,2\} = \mathbb{Z}_8$ est concaténé de $\{0,1\} \oplus \{0,2\} = \mathbb{Z}_4$, lui même concaténé de $\{0,1\} \oplus \{0\} = \mathbb{Z}_2$ concaténé du canon trivial.

 concaténé de 

dual de  concaténé de 

concaténé du canon trivial : 

Définitions

Soit $d \in \mathbb{N}^*$, le d-ième polynôme cyclotomique Φ_d est le polynôme unitaire dont les racines sont exactement les racines primitives d-ièmes de l'unité, i.e. :

$$\Phi_d = \prod_{\substack{k \leq d \\ k \wedge d = 1}} \left(X - e^{2i\pi \frac{k}{d}} \right).$$

Si A est un rythme, on note $S_A = \{p^a, p \text{ premier}, \Phi_{p^a} | A(X)\}$.

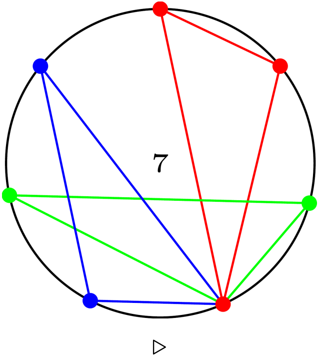
Conditions de Coven/Meyerowitz

(T_0) A pave
(T_1) $A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1)$
(T_2) si $s_1, \ldots, s_m$ puissances de premiers distincts sont dans S_A, alors $\Phi_{s_1 \cdots s_m} | A(X)$.

Conjecture de Coven/Meyerowitz

$$(T_0) \iff (T_1) \wedge (T_2)$$

On a pour l'instant $(T_0) \Leftarrow (T_1) \wedge (T_2)$, $(T_0) \Rightarrow (T_1)$.
Si $\sharp A$ a au plus deux facteurs premiers, l'équivalence est vraie.
On a que l'équivalence est vraie ssi elle est vraie pour les canons de Vuza.


7

Définition

$(A, B) \in \mathbb{N}^2$ pave $\mathbb{Z}_N$ modulo p ssi

$$A(X) \cdot B(X) = 1 + X + \cdots + X^{N-1} \bmod (X^N - 1, p).$$

Exemple

$A \oplus B = \{0, 1, 3\} \oplus \{0, 2, 3\} = \{0, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6\}$ pave $\mathbb{Z}_7$ modulo 2.

Remarque

On adapte aux multiensembles les notions de polynôme associé, notation $0 - 1$, pavage compact...

Théorème

Soit p premier, $P \in \mathbb{F}_p[X]$ tel que $P(0) \neq 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que P divise $X^N - 1$.

Remarque

En travaillant dans $\mathbb{F}_p[X]$, tout motif A pave modulo p :

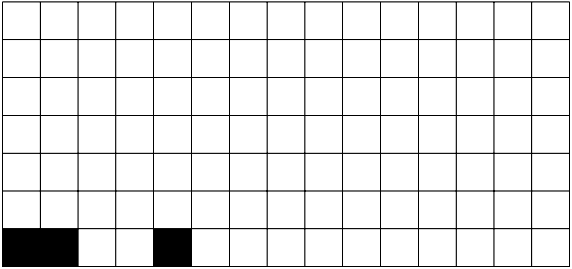
$$P(X) = A(X)(X - 1)$$

et Q, tel que $P(X) \cdot Q(X) = (X^n - 1)$, associé à un motif en itérant

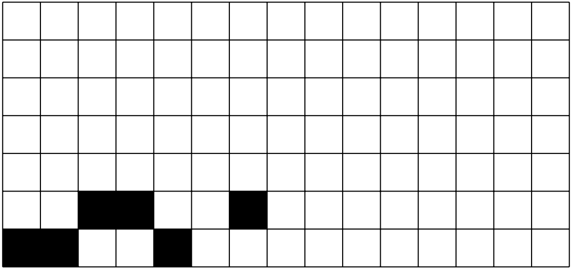
$$\alpha X^k = (\alpha - 1)X^k + X^{k+N} \bmod X^N - 1.$$

Dans $\mathbb{F}_2[X]$: tout motif admet un pavage compact modulo 2.

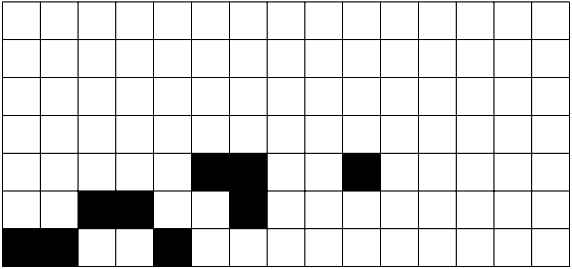
Algorithme glouton avec $A = \{0, 1, 4\}$ modulo 2



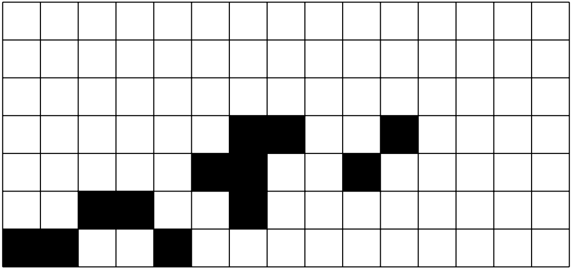
Algorithme glouton avec $A = \{0, 1, 4\}$ modulo 2



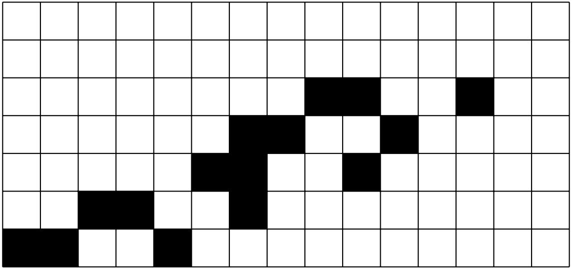
Algorithme glouton avec $A = \{0, 1, 4\}$ modulo 2



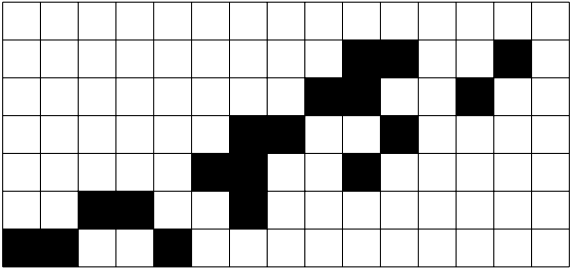
Algorithme glouton avec $A = \{0, 1, 4\}$ modulo 2



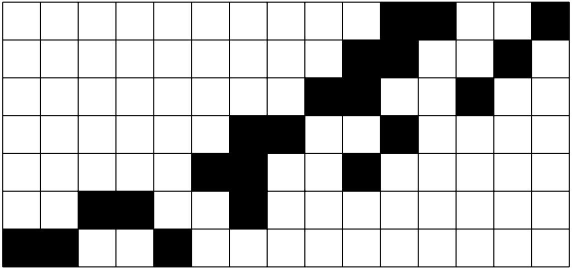
Algorithme glouton avec $A = \{0, 1, 4\}$ modulo 2



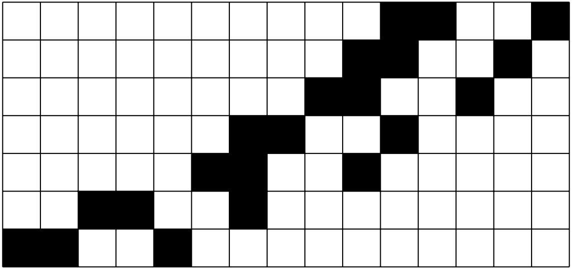
Algorithme glouton avec $A = \{0, 1, 4\}$ modulo 2



Algorithme glouton avec $A = \{0, 1, 4\}$ modulo 2



Algorithme glouton avec $A = \{0, 1, 4\}$ modulo 2



Propriété

Cet algorithme permet d'avoir le plus petit nombre d'entrées pour un pavage modulo p.

Taille minimal du pavage par $A = \{0, 1, n\}$ modulo 2

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
N	3	7	15	21	63	127	63	73	889	1533	3255	7905	11811	32767	255

Taille minimal du pavage par $A = \{0, 1, n\}$ modulo 2

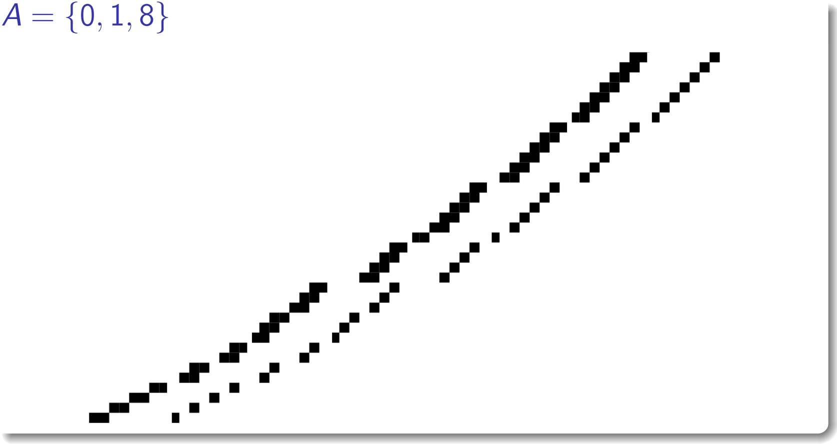
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	3	7	15	21	63	127	63	73	889	1533	3255

13	14	15	16
7905	11811	32767	255

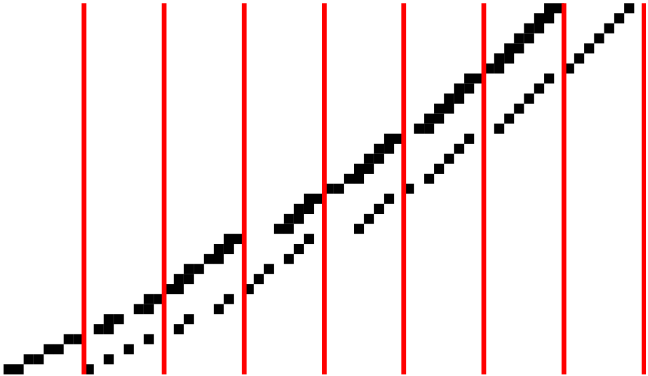
Théorème

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le motif $A = \left\{0, 1, 2^k\right\}$ pave modulo 2 avec B qui a $\sharp B = 4^k - 3^k$ termes un pavage compact qui finit sur le temps $N = 4^k - 2$ et en obtenant $4^k - \dfrac{3^{k+1} - 1}{2}$ notes superposées.

$A = \{0, 1, 8\}$



$A = \{0, 1, 8\}$



1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0				
0	1	1	0				
1	1	1	0				

1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1				
0	1	1	1				
1	1	1	1				

1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0

1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0

$$\begin{array}{|c|c|}\hline T(k) & T(k) \\ \hline \widetilde{T(k)} & 1 \\ \hline \end{array} = T(k+1)$$

1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0

Énumération

$\sharp B(k) = b(k) =$ le nombre de 1 dans le tableau $T(k)$, vérifie $b(1) = 1$; $b(2) = 7$ et

$$b(k+1) = 3 * b(k) + 4^k.$$

Soit pour tout k,

$$b(k+2) - 7b(k+1) + 12b(k) = 0,$$

qui donne le résultat $b(k) = 4^k - 3^k$.

$$N = (2^k - 1) * 2^k - 1 + 2^k - 1 = 4^k - 2 \text{ et } \sharp D = 4^k - \frac{3^{k+1} - 1}{2}.$$

Rappel

$$A \oplus B = \mathbb{Z}_N \iff \mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_N}$$

Transformée de Fourier discrète

Si $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ on note sa transformée de Fourier
$\hat{f} : x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}_N} f(k) e^{-2ik\pi x/N}$

Équivalence

$$A \oplus B = \mathbb{Z}_N \iff \hat{\mathbb{1}_A} \times \hat{\mathbb{1}_B} = \hat{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_N}} : x \mapsto N\delta_0$$

Zéros de la TFD

Si A est un rythme, on note Z_A les zéros de la transformée de Fourier de sa fonction caractéristique.

Équivalence

$A \oplus B = \mathbb{Z}_N$ est un canon ssi $Z_A \cup Z_B = \mathbb{Z}_N \setminus \{0\}$ et $\sharp A \times \sharp B = N$

Périodicité

A est périodique dans $\mathbb{Z}_N$ ssi le complémentaire de Z_A est inclu dans un sous groupe de $\mathbb{Z}_N$.

Théorème

Il existe des N arbitrairement grands et des canons de Vuza $A \oplus B$ de $\mathbb{Z}_N$ qui admettent des entrées distincts $B_1, \ldots, B_k$ non périodiques (i.e. $A \oplus B_i = \mathbb{Z}_N$) telles que $k \geq e^{C\sqrt{N}}$ où C est une constante.

Ensembles spectraux

Si A est un rythme de $\mathbb{Z}_N$, et $n = \sharp A$, on dit que

$$\Lambda = \{0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n-1} < 1\}$$

où les $\lambda_i = q_i/N$ est un spectre de A si

$$\forall i \neq j < n, A(e^{2i\pi(\lambda_i - \lambda_j)}) = 0$$

Si A admet un spectre, il est spectral.

Conjecture de Fuglede dans le cas général

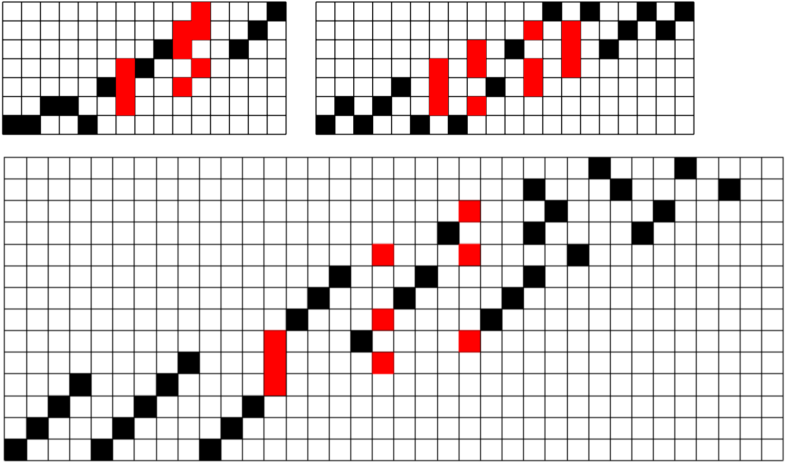
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble de mesure non-nulle. Ω pave $\mathbb{R}^N$ ssi il est spectral.

Liens avec la conjecture de Fuglede

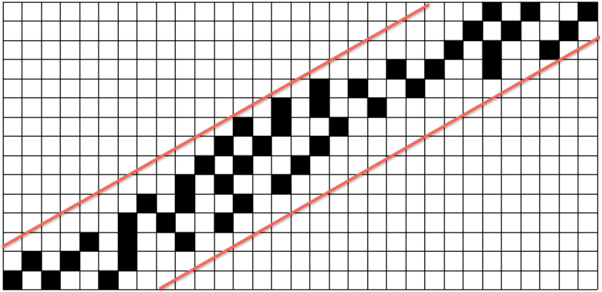
$$
\begin{aligned}
& \Rightarrow (T_0) \Rightarrow (T_1) \\
(T_1) \wedge (T_2) \quad & \Leftarrow (T_0) \wedge (\sharp A = p^a q^b) \\
& \Rightarrow \textit{Spectral}
\end{aligned}
$$

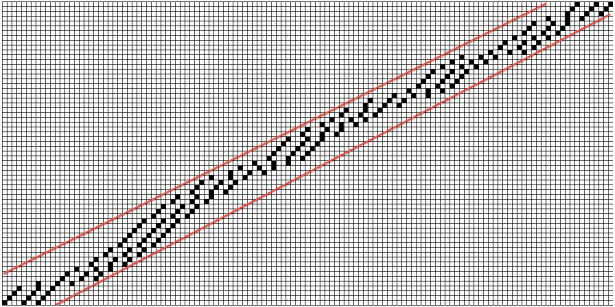
En dimension 1, la conjecture spectrale est vraie ssi elle est vraie pour les canons de Vuza.

Rapport doublon/rétrograde du motif



Croissance du pavage





Construction des entrées par itération de morphisme

Soit l'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1, z, c\}$ et S la 2-2 substitution définie sur $\mathcal{A}$ par : $S(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & c \end{pmatrix}$, $S(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $S(z) = \begin{pmatrix} 0 & z \\ z & 1 \end{pmatrix}$, $S(c) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & c \end{pmatrix}$. En itérant k fois la substitution, puis en remplaçant les z, c par $1, 0$, on obtient le tableau $T(k)$.

Exemple

$$0 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ z & c & z & c \\ 0 & z & 1 & c \\ z & 1 & 1 & c \end{pmatrix}$$

Autres pistes

- Élargir théorème pour $A(k, m) = \{0, 1, 2, \ldots, m, m^k\}$
- Pavage mélodico-rythmique
- Pavage non périodiques à la Penrose
- Pavage avec rétrogradation, augmentation...
- Aspects perceptifs de la non périodicité modulo p
- Algorithmes plus rapides d'exploration des Vuza
- $\ldots$

Merci de votre attention.