Λ

Une découverte mathémusicale de Norman Carey
exposée par Emmanuel Amiot

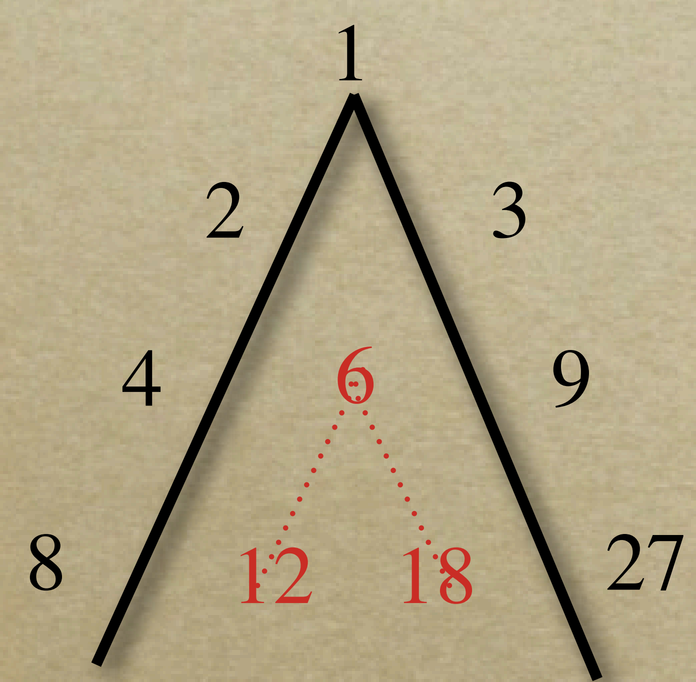
Perpignan, le 13 septembre 2013

Menu

- *Qui est* Λ *?*
- *Origine musicale*
- *Quelques propriétés apparentes*
- *Lien avec le développement en fraction continue*
- *Gammes pythagoriciennes et three-gap theorem*
- *Ses palindromes*
- *Richesse*

Lambda

- *Mentionné par Platon dans le Timée*

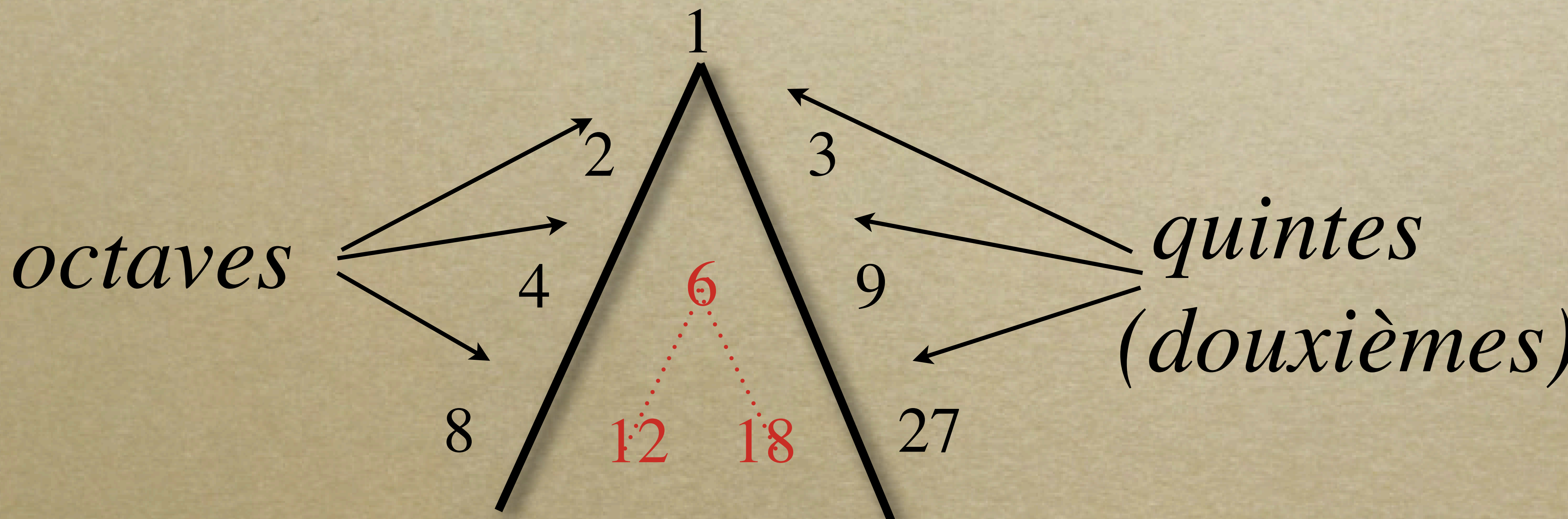


1 2 3 4 6 8 9 12 16 18 24 27 32 …

Nicolas Oresme en dit (Livre du Ciel et du Monde) «en vérité, cette figure recèle de grands mystères et on y peut faire de très belles et merveilleuses observations, car elle contient potentiellement toute la musique spéculative».

Lambda

- *Interprétation musicale*



1	2	3	4	6	8	9	12	16	18	24	27	32	…
fa	fa	do	fa	do	fa	sol	do	fa	sol	do	ré	fa	…

Lambda

- *Interprétation musicale*

… 384, 432, 486, 512, 576, 648, 729, …
… do ré mi fa sol la si …

fa fa do fa do fa sol do fa sol do ré fa …

8^{ve} 5^{te} 4^{te} 5^{te} 4^{te} 2^{de} 4^{te} 4^{te} 2^{de} 4^{te} 2^{de} 3^{ce} …

$\Lambda =$ a b c b c d c c d c d e …

Lambda

- *Interprétation musicale*

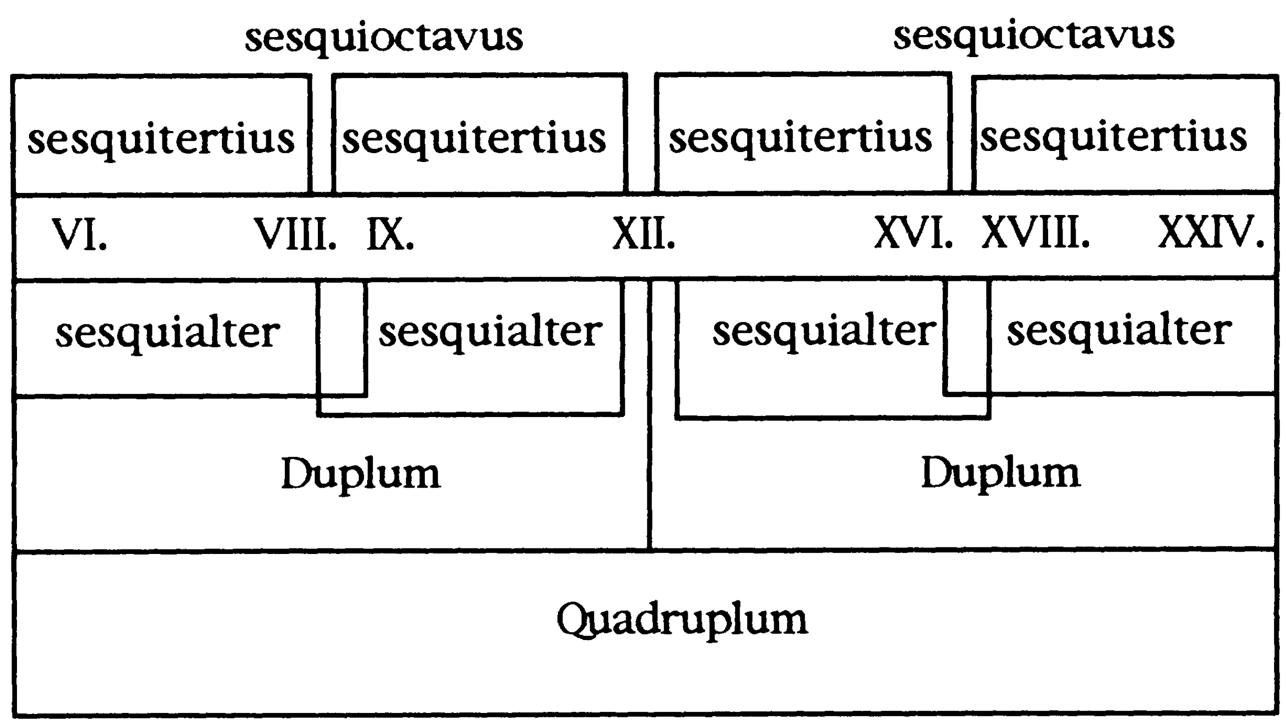


Figure 1. The *heptactys* {6, 8, 9, 12, 16, 18, 24} in *Scolica enchiriadis.*

IXe siècle, anonyme

6 8 9 12 12 16 18 24

NB: après l'heptactys, une division en deux tétrachordes de la gamme diatonique est classique, mais on peut aussi penser bien plus tard aux deux tétrachordes chromatiques qui composent le motif de Tristan, aux hexacordes de Babbitt, etc...
Les trois notes de l'heptactys sont la base de musiques populaires:

Lambda

- *Interprétation musicale*

9	18	36	72	144
3	6	12	24	48
1	2	4	8	16

Region: Carey/Clampitt 1996
(= symétrique et connexe entre 2^a et 3^b)

NB: après l'heptactys, une division en deux tétrachordes de la gamme diatonique est classique, mais on peut aussi penser bien plus tard aux deux tétrachordes chromatiques qui composent le motif de Tristan, aux hexacordes de Babbitt, etc…
Les trois notes de l'heptactys sont la base de musiques populaires:

Lambda

- *Une définition enfin !*

Soit $(M,\times)$ *le monoïde libre engendré par 2 et 3,*
i.e. $\{2^a 3^b \ / \ a, b \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}^*$.
On l'ordonne:
$M = \{1=m_0, 2=m_1, \ldots m_n<m_{n+1}<\ldots\}$

- *La suite des* intervalles *de M est* $S=(m_1/m_0, m_2/m_1, \ldots m_{n+1}/m_n \ldots)$

- *Le mot Lambda est créé en indexant S par ordre d'apparition de ses éléments.*

Lambda

- *Définition simplifiée et généralisée:*
- *En prenant les logarithmes, on considère un monoïde libre* additif, *engendré par ln 2 et ln 3, ou à homothétie près* $\{x + y \log_2 3 / \, x, y \in \mathbb{N}\}$. *Plus généralement on peut considérer spdg* $M_\Theta=\{x + y\,\Theta \,/\, x, y \in \mathbb{N}\}$ *pour tout* Θ *irrationnel et la séquence des différences successives.*
  - *(techniquement on se limite à* $1< \Theta <2$. *Sauf spécification on gardera la valeur «musicale» de* Θ*)*

$\Theta = 1{,}584962500721\ldots$

Regardons Lambda

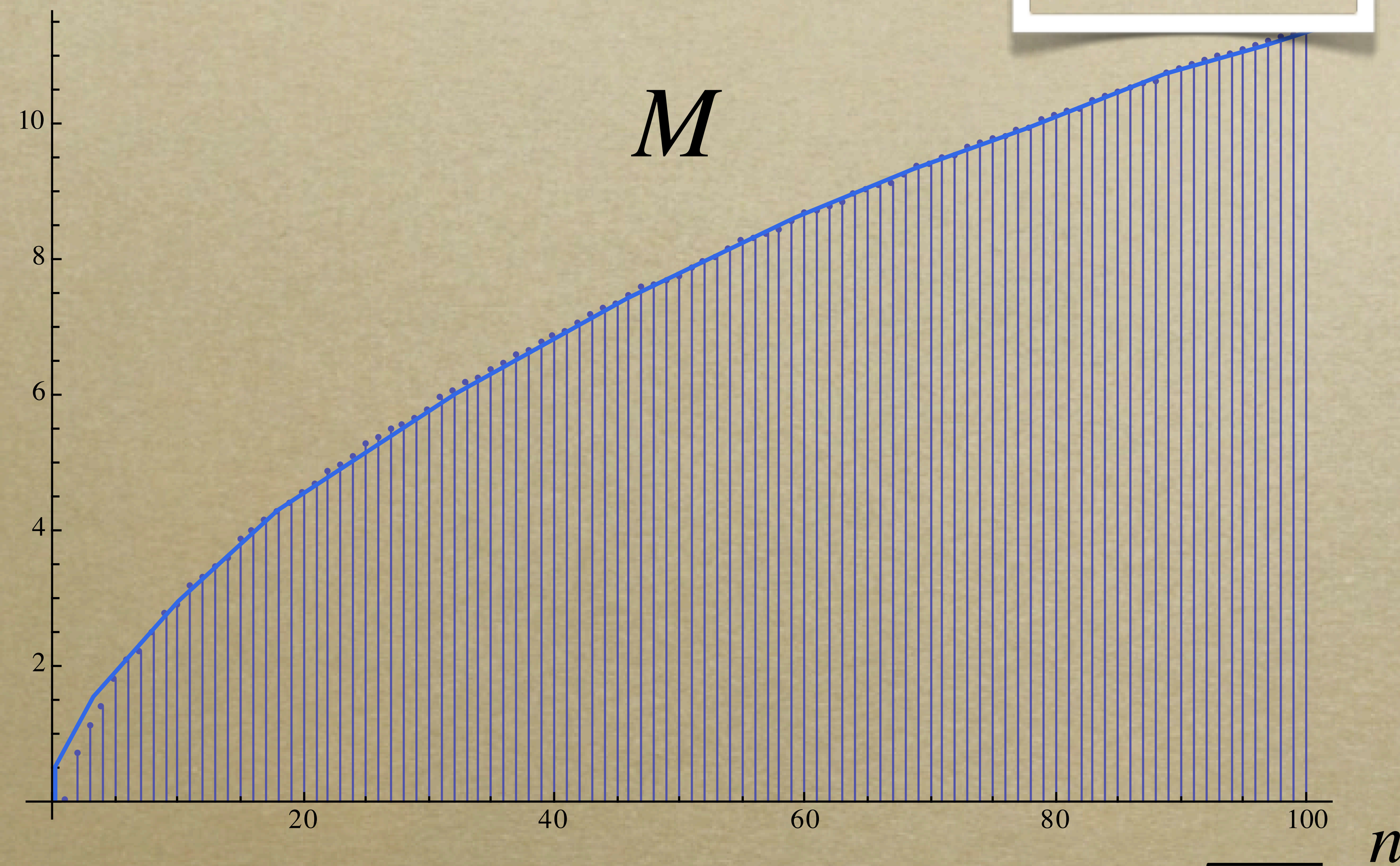
Λ = abcbcdccdcdedcdeddedeeddedeeddffde e
ddfdddfddfdddfddfgfddfddfgfddfgfdfgfd
dfgfdfgfgfdfgfdfgfgfdfgfgffgfgfdfgfgffg
fgfgffgfgffgfgfgffgfgffhffgfgffgfgffhffgf
gffhffgffhffgfgffhffgffhffhffgffhffgffhffh
ffgffhffhfffhffhffgffhffhfffhffhffhfffhffhf
ffhffhffhfffhffhffhihffhffhfffhffhffhi…

hffhffhfffhffhffh
hffhffhfffhffhffh

Λ à l'infini

$m_n = x_n + y_n \Theta$

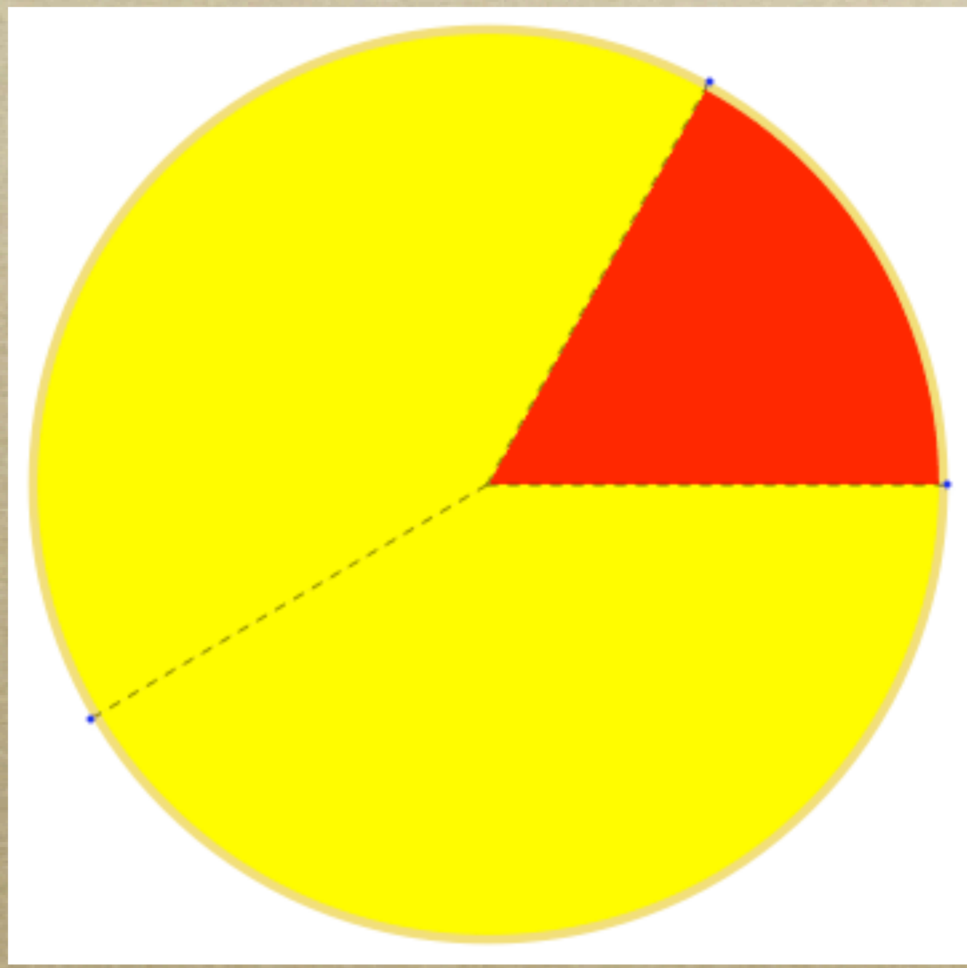
$\boxed{m_n \to \infty} \sim \sqrt{2\,n\,\theta}$



$\boxed{m_{n+1} - m_n \to 0} \approx \sqrt{\dfrac{\theta}{2\,n}}$

Interlude cyclique

C'est une conjecture de Steinhaus (celui qui a découvert Banach) qui est devenue le <u>three-gap theorem</u> *(1957): il y a soit deux soit trois intervalles distincts, dans ce dernier cas le plus grand est somme des deux autres.*



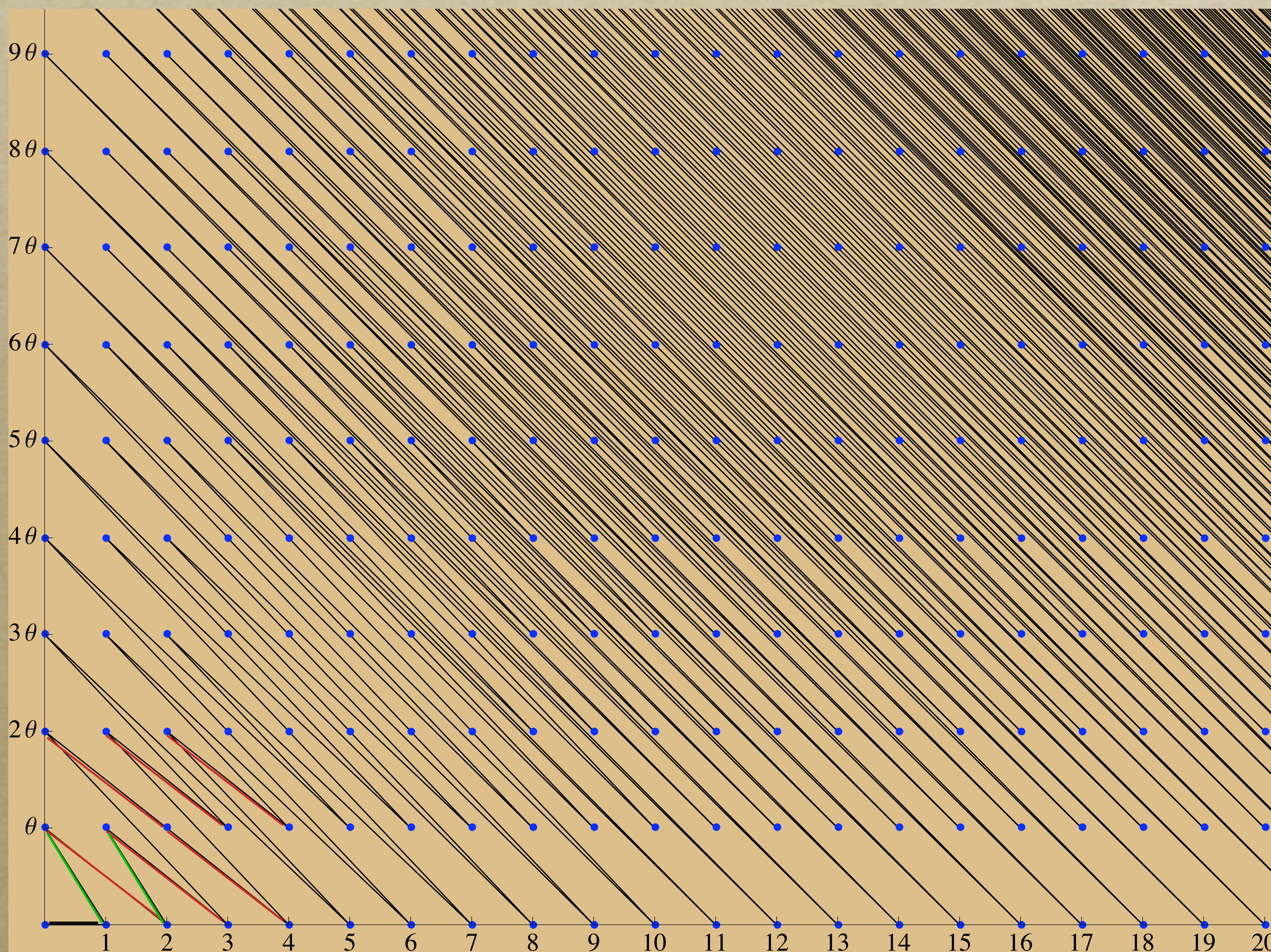
Chaque nouveau point vient couper en les deux petits intervalles le plus «ancien» des plus grands intervalles encore présents.

Well-formed scales

- *Carey et Clampitt (1989) ont défini les* Well-Formed Scales *comme les cas* (n, Θ) *où il y a deux intervalles exactement.*
- *Pour le* Θ *pythagoricien, on retrouve l'enchaînement (I IV V), la gamme pentatonique, la diatonique…!*
- *Cela touche aux* suites Sturmiennes *et aux* mots de Christoffel *(version finie)*.

On peut générer les mots sturmiens par des morphismes en partant d'une lettre, ou mécaniquement (droite de pente irrationnelle), les mots de Christoffel sont les mêmes tronqués — à permutation circulaire du mot près. Il y a des rapports entre Lambda et les mots **épisturmiens** introduits par Geneviève Paquin, vus les nombreux palindromes cf infra.

Λ en 2D



a

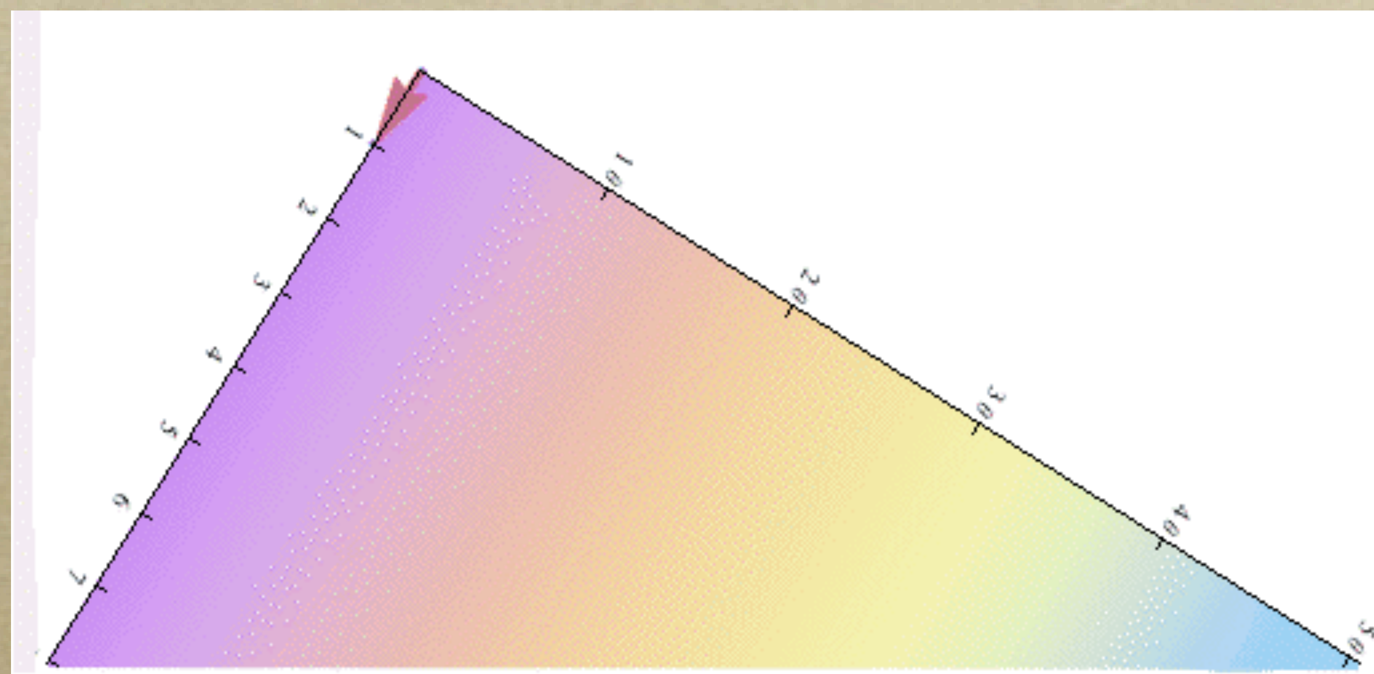
b

c

……

abcbcdccdcdedcdeddededdeddfdde…

Λ en 2D (dynamique)

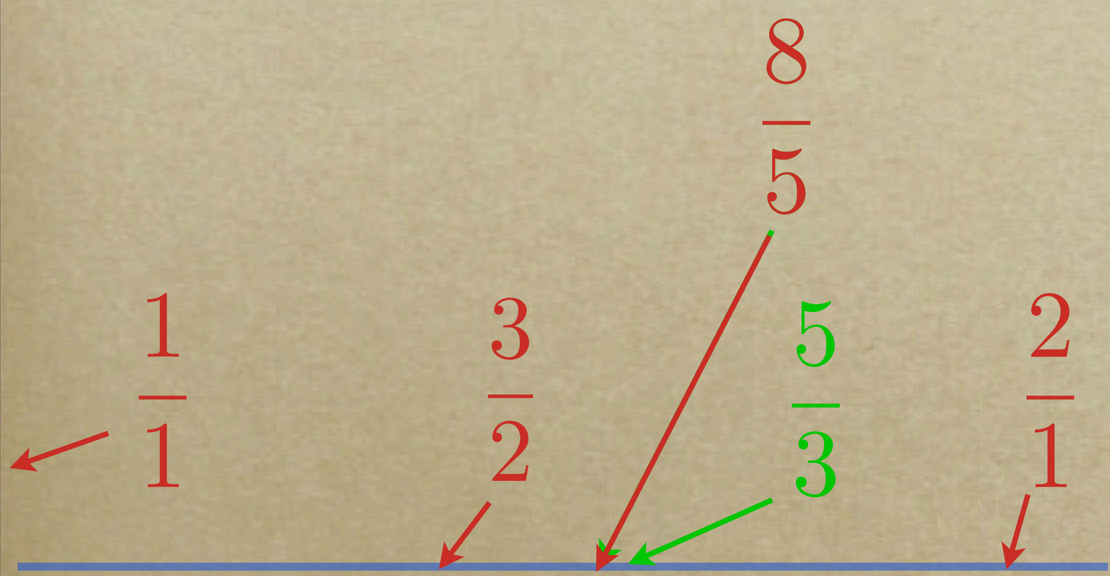


Λ décrit un (quart de) réseau par valeurs croissantes (mais le moins possible !) de la forme linéaire $(x,y) \to x + \Theta\, y$

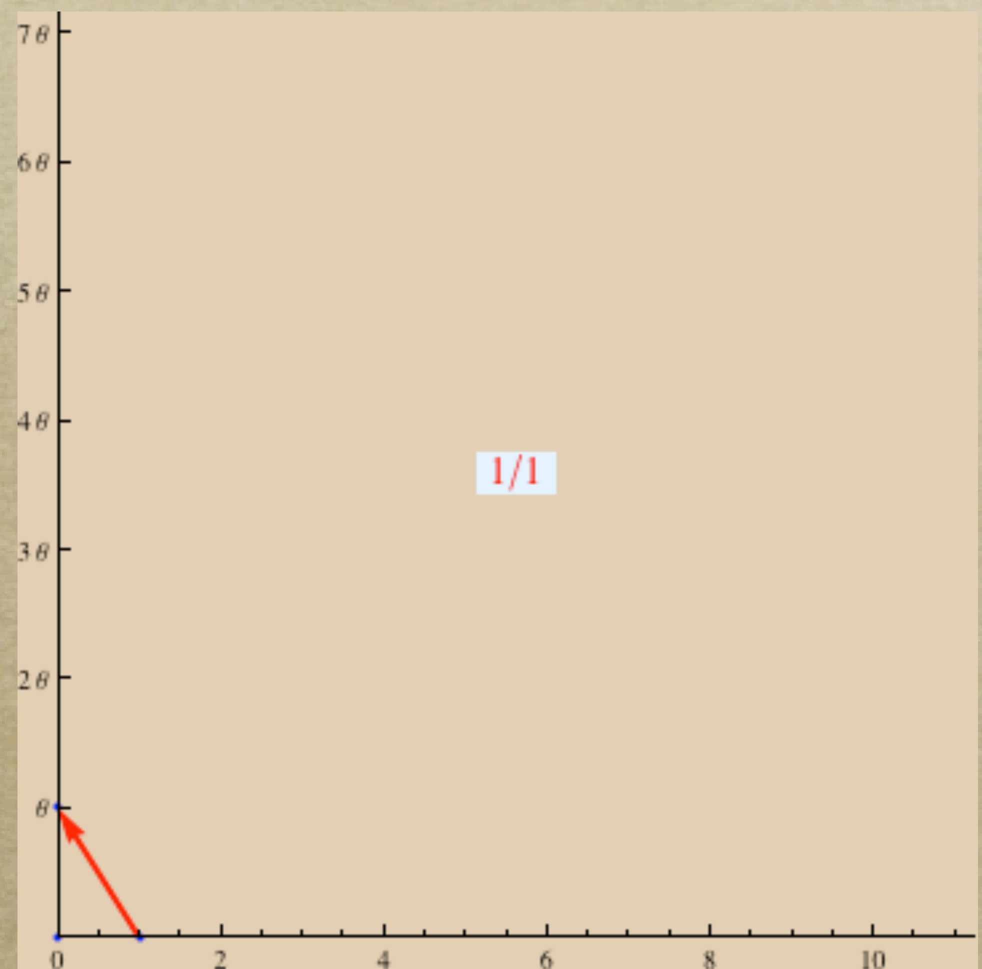
Λ en 2D: conséquences

- *Comme il y a de plus en plus de place, les différences* $\partial_n = (x_{n+1} + y_{n+1}\,\Theta) - (x_n + y_n\,\Theta)$ *tendent vers* 0, *et donc* Λ *a une infinité de lettres*.
- *Chaque lettre apparaît un nombre fini de fois*.
- *À un instant donné il n'y a qu'un nombre fini de lettres possibles* (*on a vu que ce nombre est 3*).
- *Chaque zig ou zag est un vecteur à coordonnées entières qui donne une pente proche de* Θ (ex. (8,-5Θ) alias 8/5): $(a, -b)$ *ou* $(-a, b)$ *avec* $a/b \approx \Theta$.

Λ via les réduites de Θ



$$\Theta \approx 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cdots}}}}$$



Réduites principales, *réduites intermédiaires*

= fractions de meilleure approximation

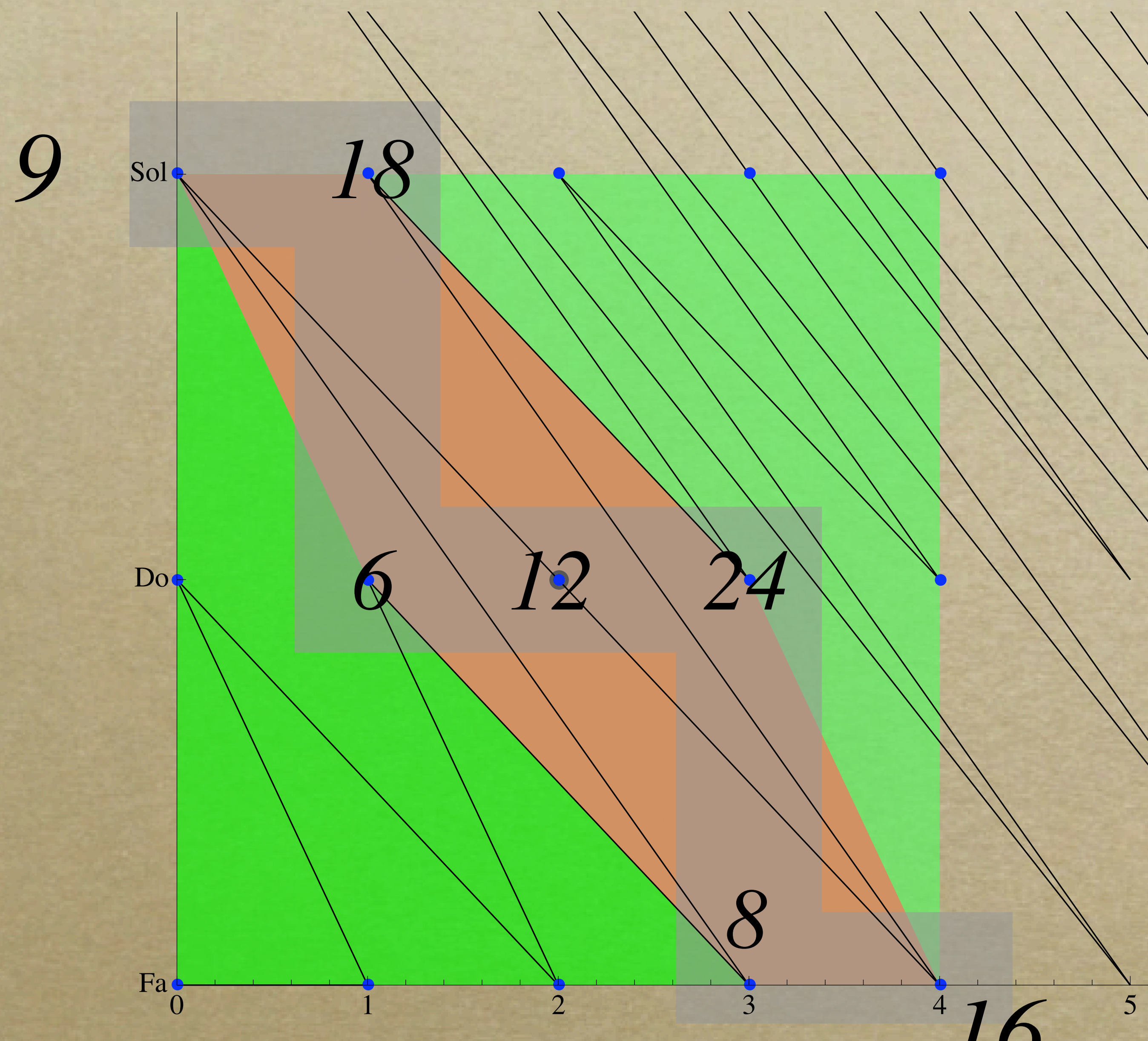
Λ via les réduites de Θ

- <u>*Thm:*</u> *x et Θy sont reliés dans le graphe ssi x/y est une réduite de Θ (idem pour la différence de deux points consécutifs de M_Θ).*

- <u>*Algorithme*</u>*:*
  il s'agit donc de «placer» la meilleure réduite possible en fonction du point du réseau atteint.

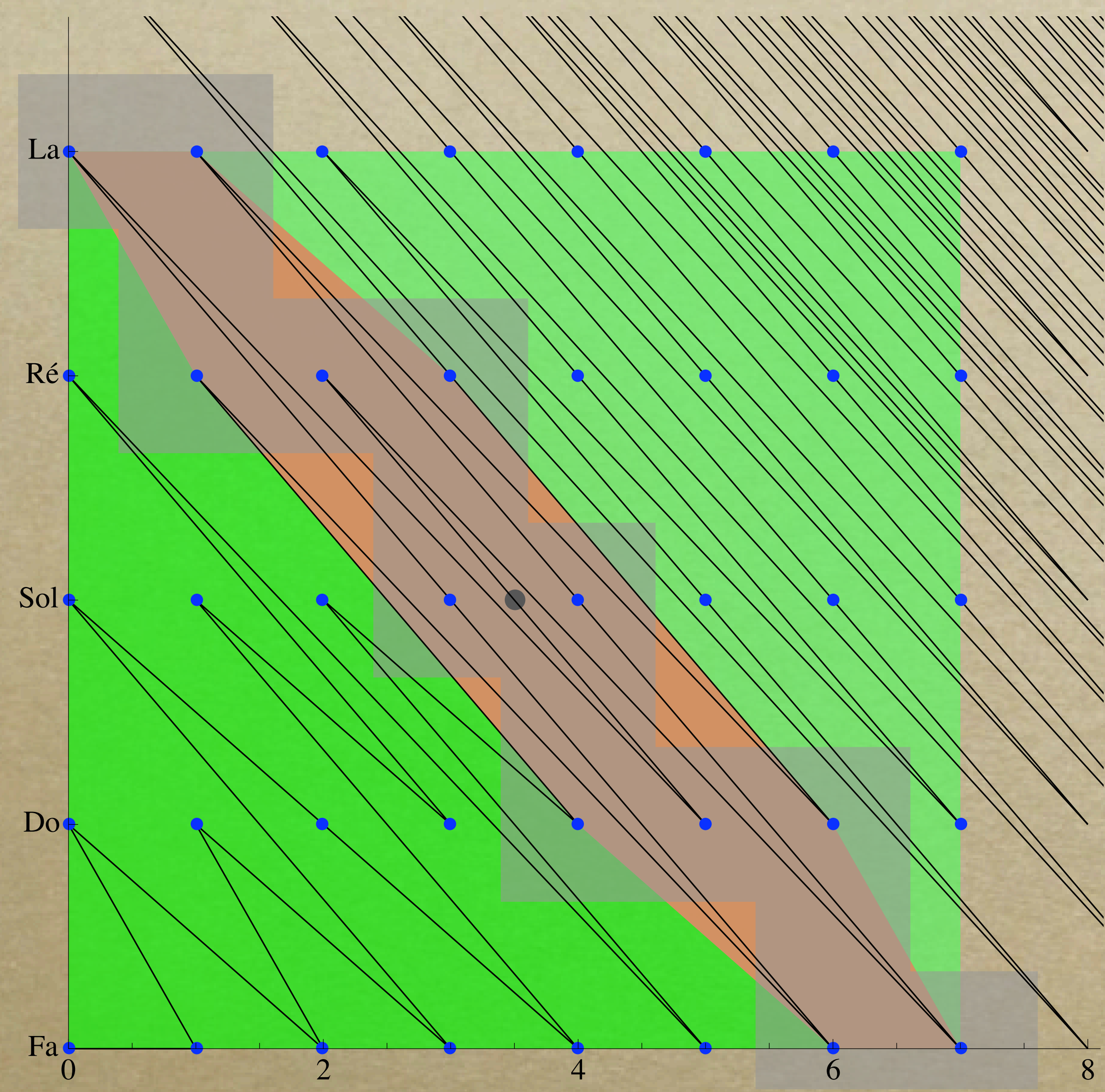
- <u>*Direction*</u>*: changement de sens à chaque réduite* principale *(les intermédiaires vont dans le sens de la principale* suivante*).*

Les régions via les réduites de Θ



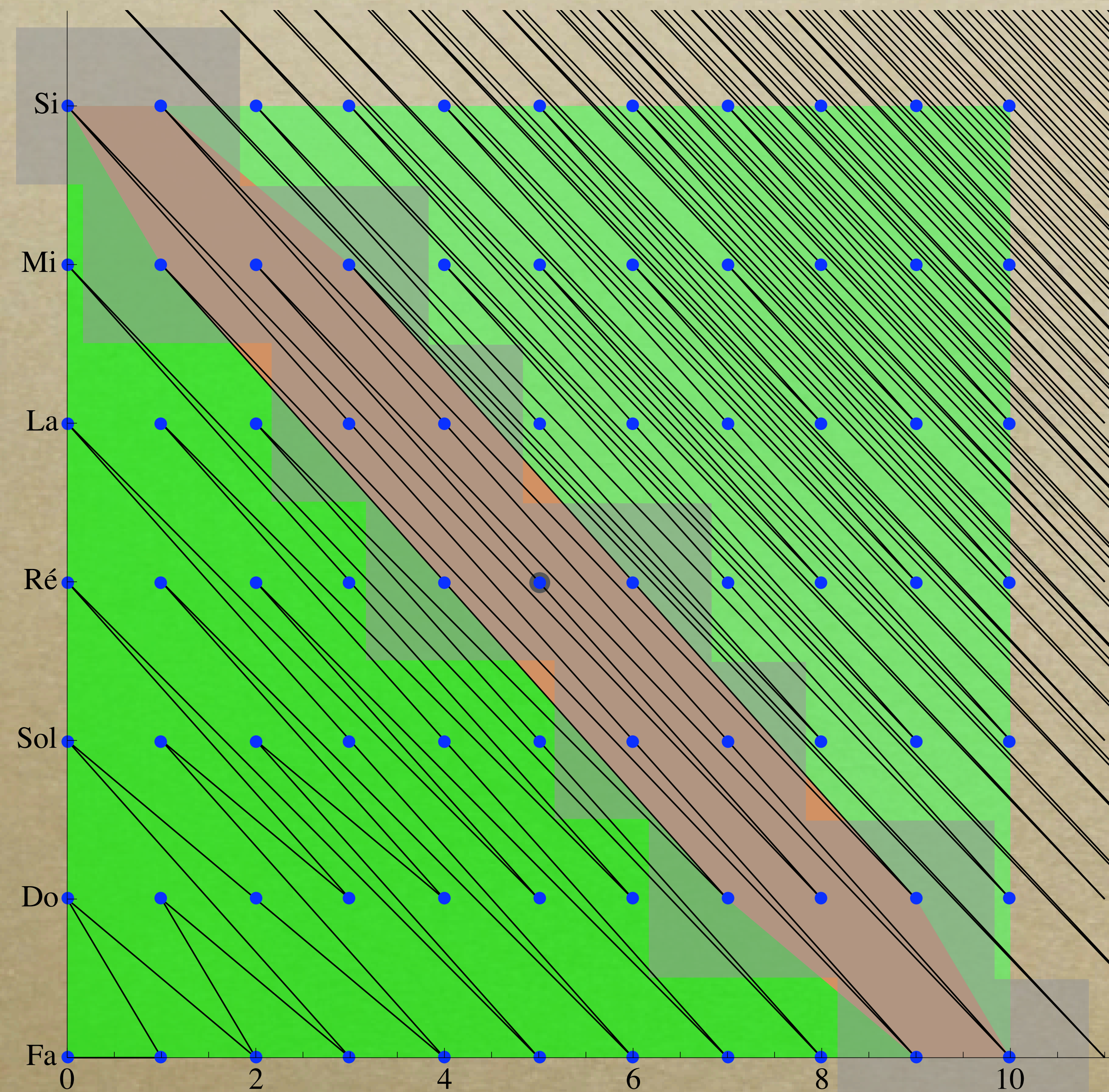
L'heptactys

Les régions via les réduites de Θ



La région (8, 5) (gamme pentatonique)

Les régions via les réduites de Θ



La région (11, 7) (gamme diatonique)

jeudi 19 septembre 2013

Carey et Clampitt donnent même sans démonstration une formule pour les A+B−1 éléments de la région définie par 2^A et 3^B (quand A/B est une réduite). Elle est fausse (typo) mais c'est encourageant.

PALINDROMES

- *Les régions sont symétriques par construction, i.e. correspondent à des mots palindromiques.*
- *Quels autres palindromes ? Maximaux ? Exhaustifs ?*
- *La belle conjecture de Norman Carey:* entre deux occurrences successives d’une même lettre il y a un palindrome.

Recouvrement

Λ = a b cbc d cc dcd edcde dd ede ddedd fddeddf ddd fddfdddfddf g fddfddf gfddfg fdfgfddfgfdf gfg fdfgfdf gfgfdfgfg ffgfgfdfgfgff gfgfg ffgfgffgfgfgffgfgff h ffgfgffgfgff hffgfgffh ffgffhffgfgffhffgff hffh ffgffhffgff hffhffgffhffh fffhffhffgffhffhfff hffhffh fffhffhfff hffhffhfffhffhffh ihffhffhfffhffhffhi…

Noyaux palindromiques

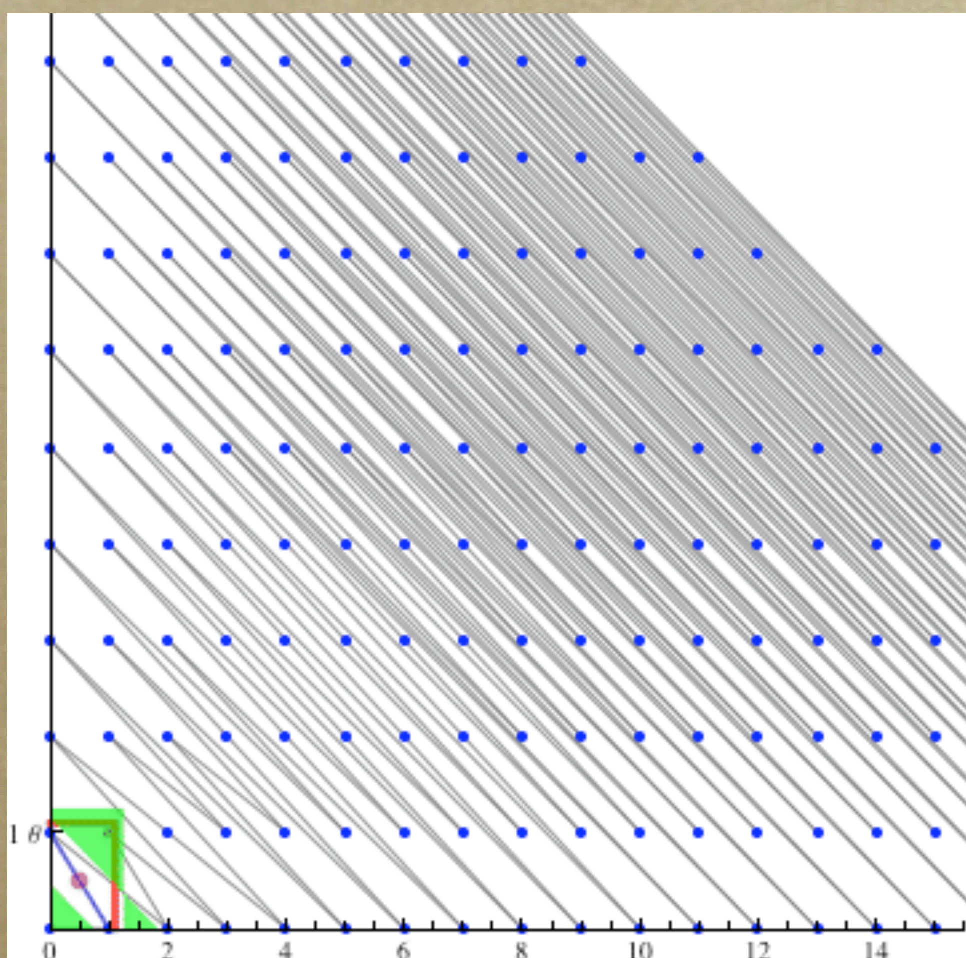
- *Généralisant les «régions», Norman a défini les «nuclear sequences» par:*

$$\{N_{A+B}\} = \begin{cases} \{a + b\theta \mid A \leq a + b\theta \leq B\theta, \lfloor B\theta \rfloor = A\} = \{N_{A+B(-)}\} \\ \text{or} \\ \{a + b\theta \mid B\theta \leq a + b\theta \leq A, \lfloor A/\theta \rfloor = B\} = \{N_{A+B(+)}\} \end{cases}$$

- *Les couples (A, B) sont tels que (mettons) pour A fixé, A/B ≈Θ. Le noyau est compris entre deux triangles qui «collent» M_Θ.*

Noyaux palindromiques

(Au lieu de ne prendre que les réduites on considère les suites de Beatty encadrant Θ)



Ainsi on a des domaines à symétrie centrale (i.e. des palindromes *si on considère les différences)* qui recouvrent *automatiquement* Λ

a b cbc d cc dcd edcde dd ede ddedd fddeddf ddd fddfdddfddf g fddfddf gfddfg

Suites de Beatty: on regarde les E(B *Θ*) ou E(A/*Θ*).

Incidemment, ces noyaux apparaissent pour la première fois en tant que facteur (mot) dans Lambda. Ceci sert à prouver des résultats d'unicité.

noter le gros noyau (13,8)

Palindromes maximaux

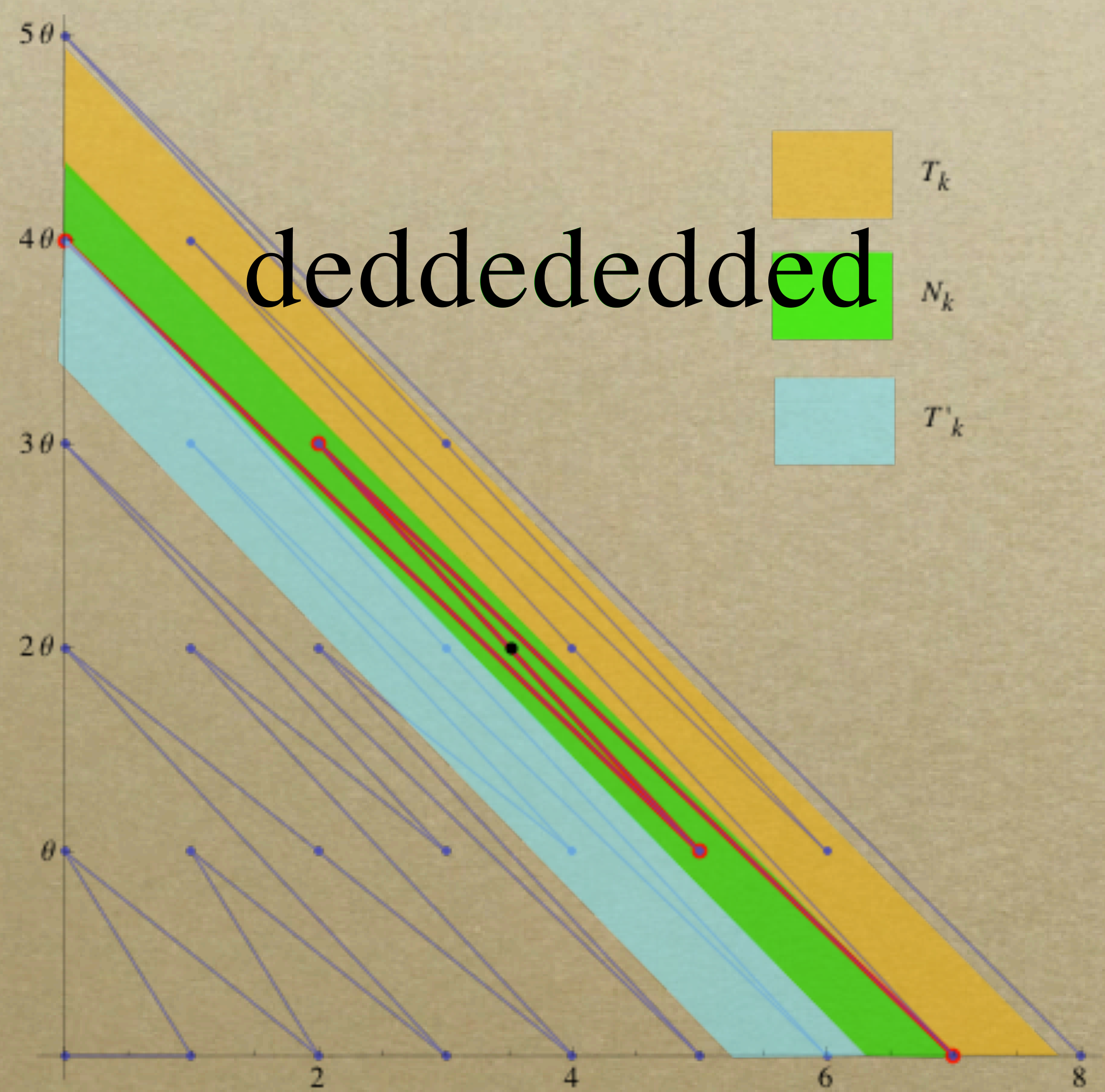
- *On aura remarqué que ces palindromes ne sont pas (pas tous) maximaux.*
- *On peut étendre à des palindromes maximaux par les définitions suivantes:*

$$\{T_{A+B}\} = \begin{cases} \{a+b\theta \mid B\theta \leq a+b\theta < \min(A+1,(B+1)\theta)\} = \{T_{A+B(-)}\} \\ \text{or} \\ \{a+b\theta \mid A \leq a+b\theta < \min(A+1,(B+1)\theta)\} = \{T_{A+B(+)}\} \end{cases}$$

$$\{T'_{A+B}\} = \{a+b\theta \mid (A-a)+(B-b)\theta \in \{T_{A+B}\}\}.$$

$$\{C_{A+B}\} = T'_{A+B} \cup \{N_{A+B}\} \cup \{T_{A+B}\}.$$

Palindromes maximaux



k=7+4=11

À ce stade, on a tiré au maximum ce que l'on peut créer comme palindromes de manière locale, en partant d'un point ou d'une zone donnée du monoïde.

D’une lettre à elle-même

De : Norman Carey
Objet : **Lambda - and one huge discovery**
Date : 30 juin 2009 20:38:11 GMT+02:00

ALERT!!!!

I've just discovered a most amazing property, and it is stunning to me that I've looked at this sequence for so many years and never saw it. Here's a good chunk of lambda. I've replaced the 40 appearances of the letter g with a bold **X**:

abcbcdccdcdedcdeddededdeddfddeddf … df**X**fdf**X**f
Xfdf**X**fdf**X**f**X**fdf**X**f**X**ff**X**f**X**fdf**X**f**X**ff**X**f**X** … ff**X**f**X**ff
hff**X**ffhff**X**f**X**ffhff**X**ffhffhff**X**ffhff**X** …

NOTE THIS: between any two adjace … m a palindrome.

I am stunned.

De : Norman Carey
Objet : **Champagne**
Date : 21 août 2010 23:39:15 GMT+02:00
À : Emmanuel Amiot , David Clampitt
1 pièce jointe, 172 Ko Enregistrer Coup d'œil

PDF
SuccessiveLe....pdf (172 Ko)

There, I think, it is.

D'une lettre à elle-même

- *On travaille avec la partie V du monoïde dont les différences forment le mot xWx.*
- *D'abord on prouve que V est «mince»: max V - min V ≤ 1 («épaisseur» de la tranche entre les deux occurrences de la différence x)*
- *On en déduit que V est entièrement contenu dans un palindrome maximal.*
- *Enfin par modifications récursives de V, on prouve que c'est forcément un palindrome.*

D'une lettre à elle-même

- *Principe de la preuve du dernier maillon:*
  - *On montre que V est soit centrée dans C_k (donc palindromique), soit «calée à droite», soit «calée à gauche» mais dans C_{k-1}.*
  - *Si elle est calée à droite on la remplace par son symétrique dans C_k, si gauche on décrémente k.*
  - *Applicant récursivement cette transformation (au couple (V, C_k)) on finit par trouver que V centrée dans un C_m, i.e. palindromique.*

… et même plus

- *Norman a récemment publié un résultat qui implique le précédent :*

(Journal of Integer Sequences, Vol. 16 (2013))

- *La complexité palindromique de* Λ *est maximale, i.e.* Λ *est «riche».*
- *Ex: «tailor» est riche car contient 6 palindromes pour 6 lettres.*

… et même plus

- *Définition équivalente d'un mot «riche»: tous ses préfixes finissent par un palindrome à occurrence unique (pou).*
- *Ex: «indeed» avec* i, *i*n, *in*d, *ind*e, *ind*ee, *in*deed.
- *Tout facteur d'un mot riche étant riche, on peut définir les mots infinis riches.*

… et même plus

- *Il est assez élémentaire de prouver (avec les noyaux et «facteurs centrés») que tous les préfixes des facteurs finis de Λ se terminent par un palindrome à usage unique, i.e. que Λ est riche.*

abcbcdccdcded…

La richesse implique la «conjecture des occurrences successives»:
in a rich word, if P is a palindrome, w a word, and PwP is a factor of a rich word such that P is not a factor of w, then PwP is a palindrome, and, of course, w is a palindrome. They call PwP the "first return" of palindrome P. Since a single letter is a palindrome, the successive letter palindrome property follows a fortiori.

Bibliographie

- *N. Carey,* On a class of locally symmetric sequences: The right infinite word Λ_Θ, *in Mathematics and Computation in Music, Lect. Notes in Comp. Sci., Vol. 6726, Springer, 2011, pp. 42–55*

- *N. Carey and D. Clampitt,* Regions: A theory of tonal spaces in early medieval treatises, *J. Music Theory 40 (1996), 113–147*.

- *N. Carey,* Lambda Words: A Class of Rich Words Defined Over an Infinite Alphabet, *Article 13.3.4 Journal of Integer Sequences, Vol. 16 (2013)* ***3***.