Master I.C.A.

Master I.C.A.

Spécialité A.S.T.

Art
Sciences
Technologies

Traitement interactif de l'image et du son

Méthodes mathématiques pour la création musicale - I
du cercle au *Tonnetz*

– Moreno Andreatta –
Equipe Représentations Musicales
IRCAM/CNRS/UPMC UMR 9912
Moreno.Andreatta@ircam.fr

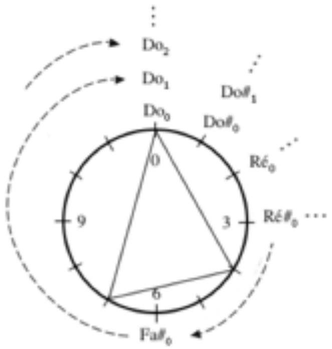
ircam Centre Pompidou

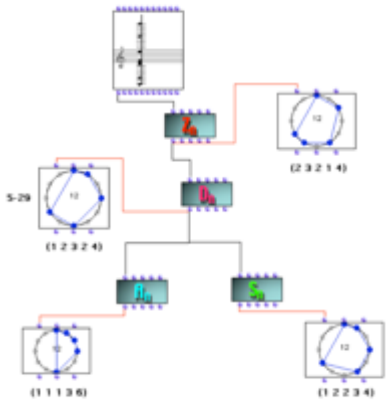
cnrs

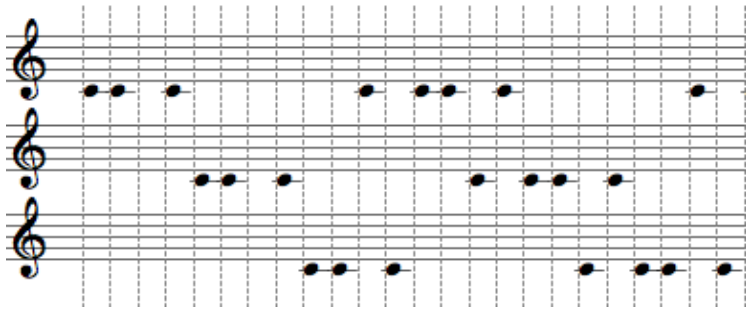
UPMC SORBONNE UNIVERSITÉS

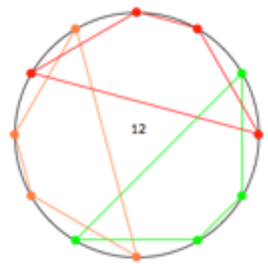
Structures algébriques et géométriques en musique

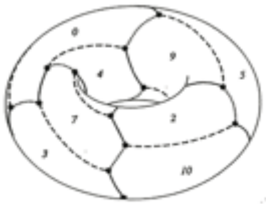
1.) Représentation géométriques et formalisations algébriques : du cercle au *Tonnetz*
2.) Pavages en composition : la construction des canons rythmiques mosaïques

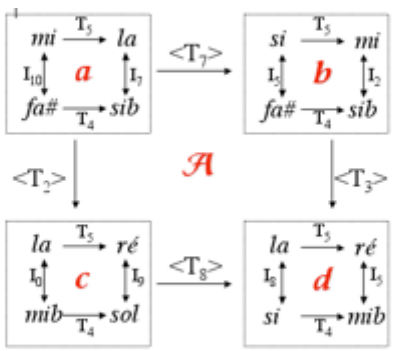












$$Df(x)=f(x)-f(x-1).$$

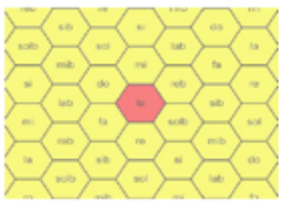
f = 7 11 10 11 7 2 7 11 10 11 7 2 7 11…

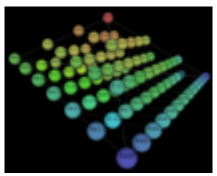
Df = 4 11 1 8 7 5 4 11 1 8 7 5 4 11…

$D^2 f$ = 7 2 7 11 10 11 7 2 7 11 10 11…

$D^3 f$ = 7 5 4 11 1 8 7 5 4 11 1 8…

$D^k f$ = ……





Andreatta M. et M. Chemillier (2007), « Modèles mathématiques pour l'informatique musicale (MMIM): Outils théoriques et strategies pédagogiques », Actes des Journées d'Informatique Musicale, Lyon, avril, p. 113-12
➔ `http://articles.ircam.fr/textes/Andreatta07b/index.pdf`

L’algèbre (le temps) et la géométrie (l’espace) en musique

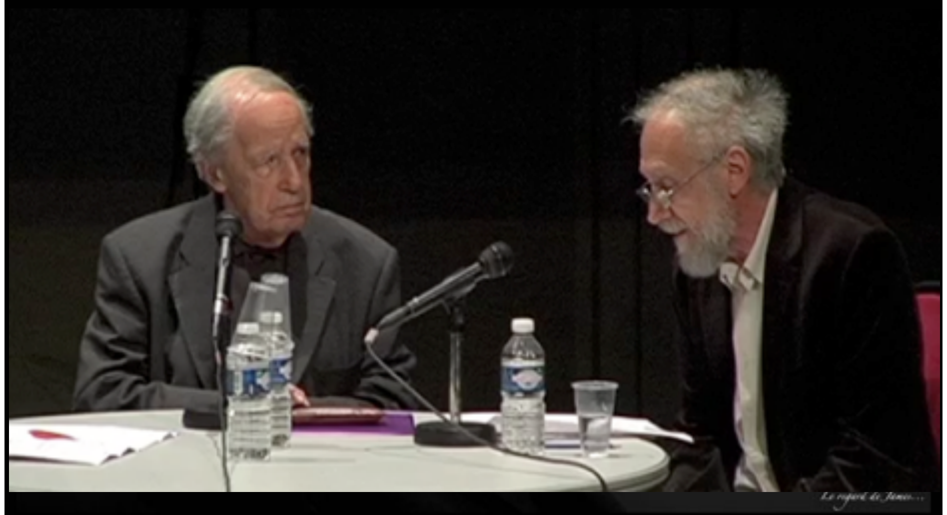
MATH / MUSiC MEETiNGS

Creativity in Music and Mathematics

Pierre Boulez & Alain Connes

Encounter with two major figures of musical creation and contemporary mathematical research: Pierre Boulez and Alain Connes.

What is the role of intuition in mathematical reasoning and in artistic activities? Is there an aesthetic dimension to mathematical activity? Does the notion of elegance of a mathematical demonstration or of a theoretical construction in music play a role in creativity?

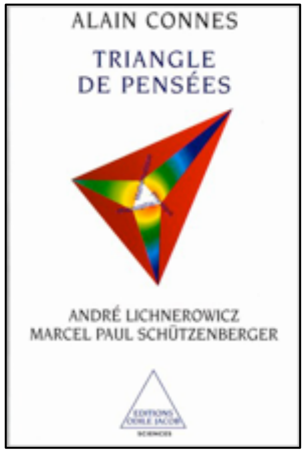


Gérard Assayag, director of the CNRS/IRCAM Laboratory for The Science and Technology of Music and Sound, will lead this dialogue on invention in the two disciplines.

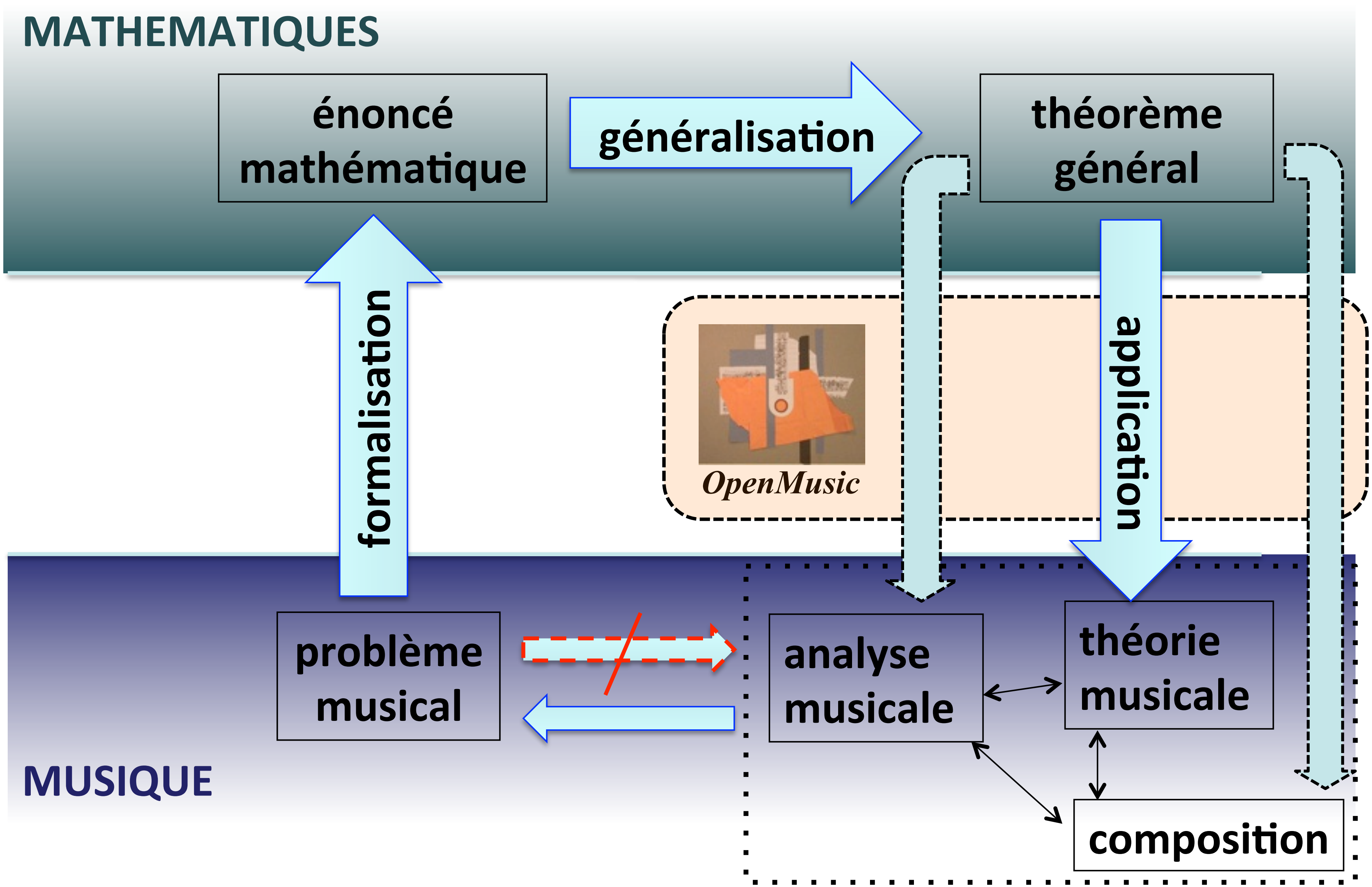
Photo: Pierre Boulez © Jean Radel

Wednesday, June 15, 2011, 6:30pm / IRCAM, Espace de projection

« La **musique** s'inscrit dans le temps exactement comme l'**algèbre** : dans les mathématiques, il y a cette dualité fondamentale entre d'un côté la **géométrie** qui correspond aux arts visuels, aux images mentales ; et de l'autre côté l'**algèbre**, qui inscrit une temporalité. Cela s'inscrit dans le temps, c'est le **calcul**, quelque chose qui est très proche du langage, et qui en a la précision diabolique.. »
(Alain Connes, dans “Créativité en musique et en mathématiques”, Ircam, Conférence MCM, juin 2011).



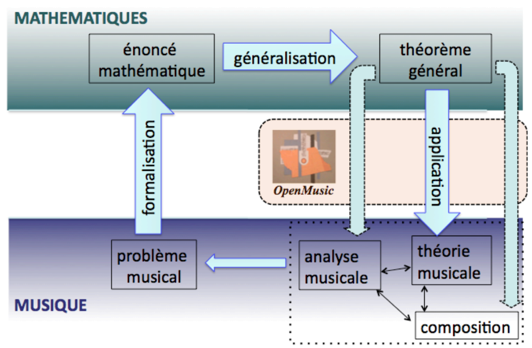
Double mouvement d'une dynamique mathémusicale

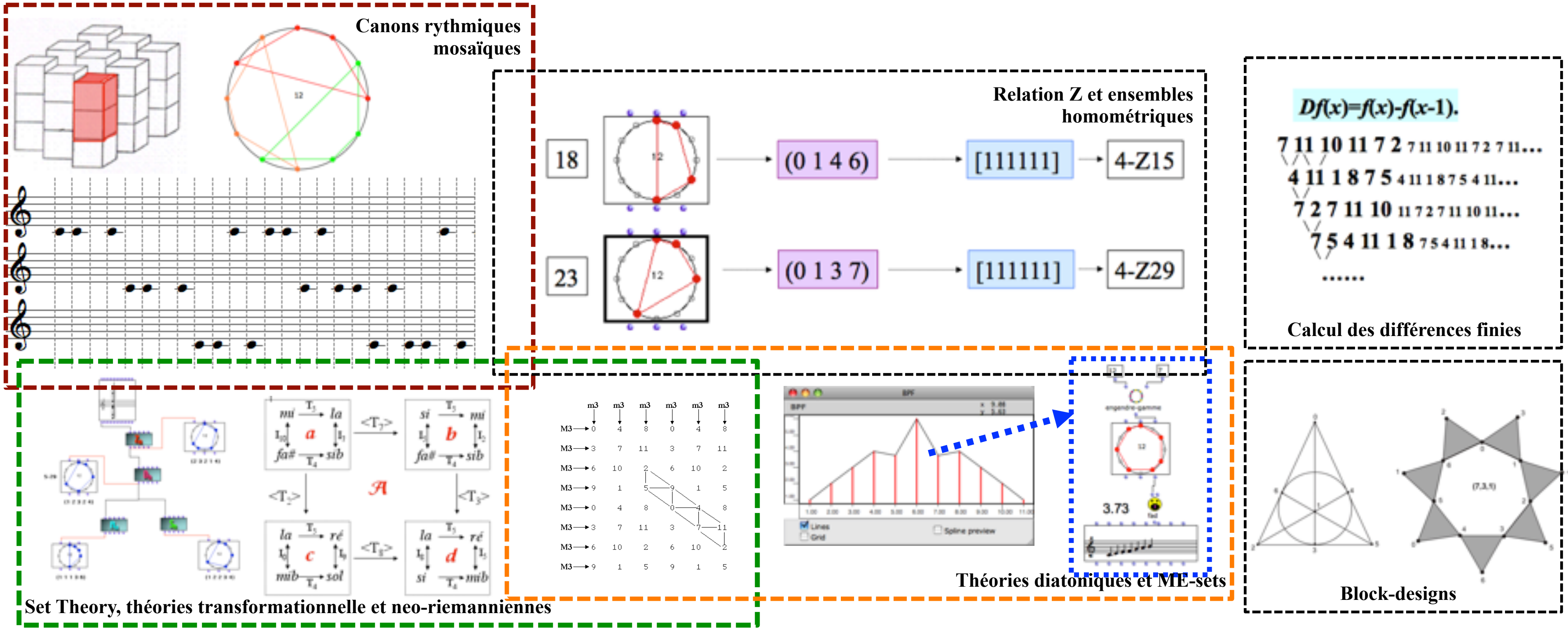


Petit catalogue d'objets mathémusicaux

[*Cf.* M. Andreatta : *Mathematica est exercitium musicae*, HDR, octobre 2010]

1. La construction des canons rythmiques mosaïques : de Minkowski à Fuglede
2. La relation *Z* et la théorie des ensembles homométriques
3. La *Set Theory* et la théorie transformationnelle
4. Les théories diatoniques et les *ME-sets*
5. Suites périodiques et calcul de différences finies
6. La théorie des block-designs en composition algorithmique
7. Modèles algébriques et catégoriels pour la cognition musicale





Etre chercheur en maths/musique

• 1999: 4e Forum Diderot (Paris, Vienne, Lisbonne), *Mathematics and Music* (G. Assayag, H.G. Feichtinger, J.F. Rodrigues, Springer, 2001)

• 2000-2001: *MaMuPhi Seminar, Penser la musique avec les mathématiques ?* (Assayag, Mazzola, Nicolas éds., Coll. 'Musique/Sciences', Ircam/Delatour, 2006)

• 2000-2003: International Seminar on *MaMuTh* (*Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory* (Mazzola, Noll, Luis-Puebla eds, epOs, 2004)

• 2003: *The Topos of Music* (G. Mazzola et al.)

• 2001-…: *MaMuX* Seminar at Ircam

• 2004-…: *mamuphi* Seminar (Ens/Ircam)

• 2006: Collection 'Musique/Sciences' (Ircam/Delatour France)

• 2007: Journal of Mathematics and Music (Taylor & Francis) and SMCM

• 2007: First MCM 2007 (Berlin) and Proceedings by Springer

• 2007-…: AMS Special Session on Mathematical Techniques in Musical Analysis

• 2009: *Computational Music Science* (eds: G. Mazzola, M. Andreatta, Springer)

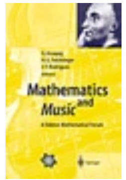
• 2009: MCM 2009 (Yale University) and Proceedings by Springer

• 2010: Mathematics Subject Classification : 00A65 Mathematics and music

• 2011: MCM 2011 (Ircam, 15-17 June 2011) and Proceedings LNCS Springer

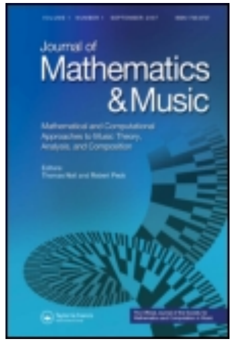
• 2013: MCM 2013 (McGill University, Canada, 12-14 June 2013) - Springer

• 2015: MCM 2015 (Queen Mary University, Londres, 22-25 June 2013) - Springer







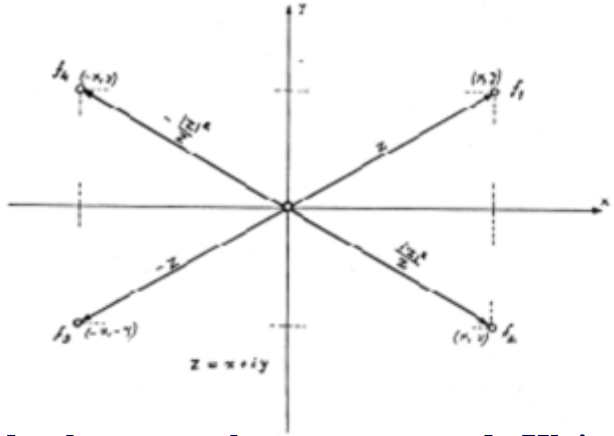




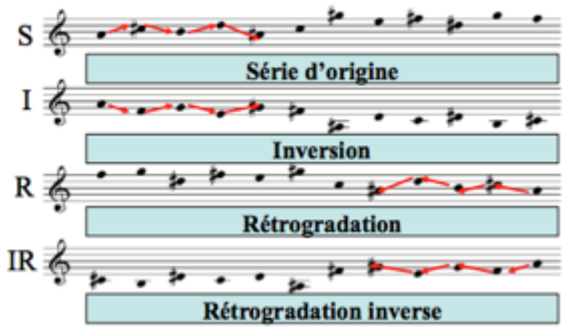
Musique et mathématiques : « prima la musica »!

MUSIQUE	MATHS
500 av. J. C. Relation hauteur/longueur corde. La musique est source d'inspiration pour la théorie des nombres et la géométrie.	Nombres naturels et rationnels.
Pas de correspondance musicale.	Nombres irrationnels, théorème de Pythagore.
300 a.J. Invention (théorique) de la gamme chromatique tempérée égale par Aristoxénos de Tarente) et **prémonition de la théorie des groupes**. Isomorphismes entre les logarithmes (intervalles musicaux) et les exponentiels (longueur d'une corde).	Les mathématiques ne réagissent pas.
1000 ap. J.C. Invention de la représentation bidimensionnelle des hauteurs.	*Aucune correspondance.*
1500 *Aucune reprise des concepts précédents.*	Nombres négatifs. Construction des rationnels.
1600 *Aucune relation.*	Nombres réels et les logarithmes. Invention des repères cartésiens.
1700 La fugue comme un automate abstrait. Manipulation inconsciente du groupe de Klein.	Nombres complexes (Euler, Gauss), les quaternions (Hamilton), continuité (Cauchy), structure de groupe (Galois, Abel).
1900 Libération de la prison de la tonalité (Loquin, Hauer, Schoenberg).	Nombres infinis et transfinis (Cantor). Axiomatique de Peano. Théorie de la mesure (Lebesgue, Borel).
1920 Formalisation radicale des macrostructures à travers le système sériel (Schoenberg).	*Aucun développement de la théorie des nombres.* Logique (contradictions de la théorie des ensembles).

Pythagore et le monocorde, VI^{e}-V^{e} siècle av. J. C.



Nombres complexes et groupe de Klein

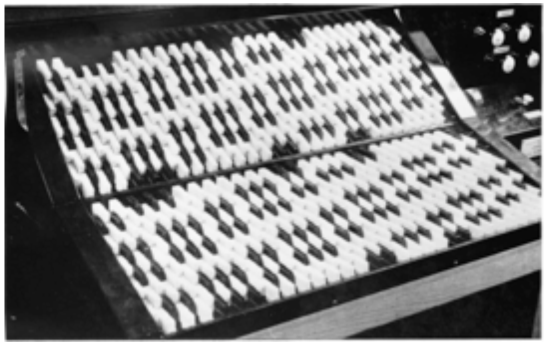


La série et ses symétries

- ***Musique. Architecture*, Casterman, 1971/1976**
- **Arts/Sciences Alliages, Casterman, 1979 (tr. *Arts/Sciences. Alloys*, Pendr. Press, 1985)**
- **« Les chemins de la composition musicale » (tr. Française E. Gresset, in *Musique et ordinateur*, Les Ulis, 1983)**
- **« Music Composition Treks », in *Composers and the Computer*, edited by C. Roads, MIT Press, Cambridge, Mass, 1985)**

Autres développements de la musique (1930-1970)

- **1930** Microtonalité, mais dans un esprit tonal (Wischnegradsky, Haba, Carrillo).
- **1950** Deuxième formalisation radicale des macrostructures (Messiaen).
- **1953** Introduction de l'échelle continue des hauteurs (Xenakis, avec calcul des probabilités, calcul logique et diverses structures de groupe).
- **1957** procédés stochastiques et chaînes de Markov (Hiller / Xenakis).
- **1960** Axiomatique des gammes à travers la théorie des cribles et utilisation nombres complexes dans la composition (théorie des arborescences).
- **1970** Nouvelles propositions dans la microstructure des sons (mouvements browniens).



L'orgue à 31 divisions de Fokker

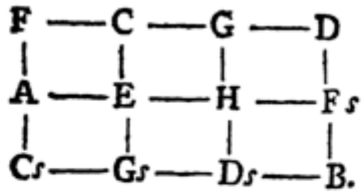
L. Hiller

- ***Musique. Architecture*, Casterman, 1971/1976**
- **Arts/Sciences Alliages, Casterman, 1979 (tr. *Arts/Sciences. Alloys*, Pendr. Press, 1985)**
- **« Les chemins de la composition musicale » (tr. Fr. E. Gresset, in *Musique et ordinateur*, Les Ulis, 1983)**
- **« Music Composition Treks », in *Composers and the Computer*, edited by C. Roads, MIT Press, Cambridge, Mass, 1985)**

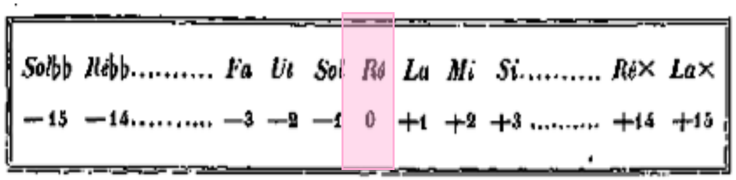
Musique et mathématiques : quelques oublis...

MUSIQUE	MATHS
500 av. J. C. Relation hauteur/longueur corde. La musique est source d'inspiration pour la théorie des nombres et la géométrie.	Nombres naturels et rationnels.
Pas de correspondance musicale.	Nombres irrationnels, théorème de Pythagore.
300 a.J. Invention (théorique) de la gamme chromatique tempérée égale par Aristoxénos de Tarente) et **prémonition de la théorie des groupes**. Isomorphismes entre les logarithmes (intervalles musicaux) et les exponentiels (longueur d'une corde).	Les mathématiques ne réagissent pas.
1000 ap. J.C. Invention de la représentation bidimensionnelle des hauteurs.	*Aucune correspondance.*
1500 *Aucune reprise des concepts précédents.*	Nombres négatifs. Construction des rationnels.
1600 *Aucune relation.*	Nombres réels et les logarithmes. Invention des repères cartésiens.
1648 Marin Mersenne : invention de la combinatoire musicale (*Harmonicorum Libri*)	Systématisation du calcul des probabilités par Bernoulli (*Ars Conjectandi*, 1713)
1700 La fugue comme un automate abstrait. Manipulation inconsciente du groupe de Klein.	Nombres complexes (Euler, Gauss), les quaternions (Hamilton), continuité (Cauchy), structure de groupe (Galois, Abel).
1773 Leonhard Euler : représentation géométrique des hauteurs (*Speculum Musicum*)	Invention de la théorie des graphes
1855 Camille Durutte : analyse harmonique, rythmique et mélodique	Développement en série d'une fonction (Wronski)
1900 Libération de la prison de la tonalité (Loquin, Hauer, Schoenberg).	Nombres infinis et transfinis (Cantor). Axiomatique de Peano. Théorie de la mesure (Lebesgue, Borel).
1920 Formalisation radicale des macrostructures à travers le système sériel (Schoenberg).	*Aucun développement de la théorie des nombres.* Logique (contradictions de la théorie des ensembles).
1937-1939 Ernst Krenek : les axiomes en musique	David Hilbert, *Les fondements de la géométrie* (1899)
1946 Milton Babbitt : théorie des groupes et système dodécaphonique	Rudolf Carnap, *The Logical Syntax of Language* (1937)

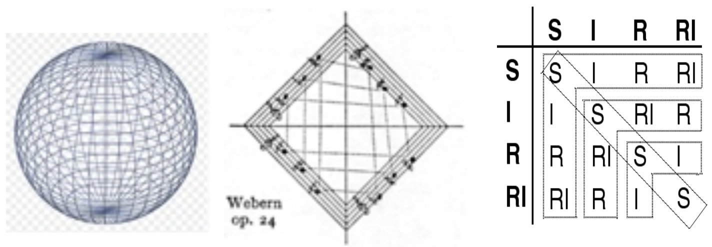
Mersenne, *Harmonicorum Libri* XII, 1648



Euler, *Speculum musicum*, 1773



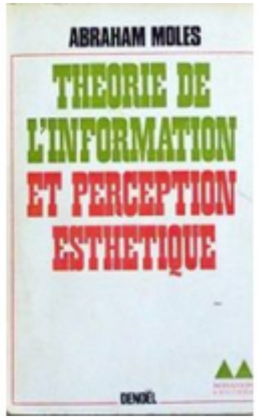
Durutte, *Technie, ou lois générales du système harmonique* (1855)

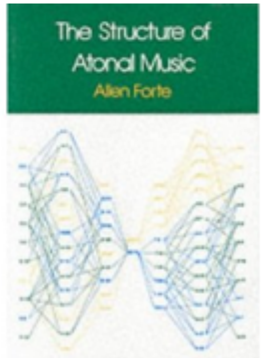


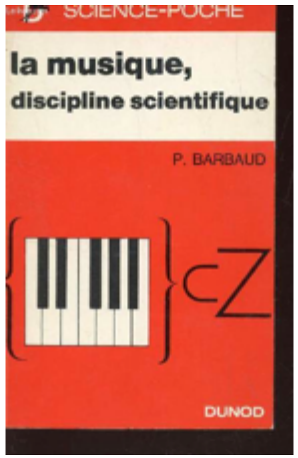
Krenek et Babbitt, technique dodécaphonique, axiomatique et groupe de Klein

Autres développements (1930-1990)

- **1930** Microtonalité, mais dans un esprit tonal (Wischnegradky, Haba, Carrillo).
- **1949** Théorie de l'information (Shannon & Weaver, *The mathematical theory of communication*)
- **1950** Deuxième formalisation radicale des macrostructures (Messiaen).
- **1953** Introduction de l'échelle continue des hauteurs (Xenakis, avec calcul des probabilités, calcul logique et diverses structures de groupe).
- **1954** Edmond Costère, *Lois et Styles des Harmonies Musicales*. Paris: Presses Universitaires de France.
- **1957** Procédés stochastiques et chaînes de Markov (Hiller / Xenakis).
- **1958** Abraham Moles, *Théorie de l'information et perception esthétique.*
- **1960** Axiomatique des gammes à travers la théorie des cribles et utilisation nombres complexes dans la composition (théorie des arborescences).
- **1960-1970** Musique algorithmique (Barbaud, Philippot) et naissance de la musicologie computationnelle (Riotte, Mesnage)
- **1970** Nouvelles propositions dans la microstructure des sons (mouvements browniens).
- **1973** *Set Theory* (Forte, Vieru, Carter, Estrada, Riotte, Mesnage, …)
- **1980** Théories diatoniques (Clough, Clampitt, Carey,...)
- **1987** Théories transformationnelles (Lewin) et néo-riemanniennes (Cohn, Gollin)
- **1990** Théorie des catégories et des topoi en musique (Mazzola, Noll)

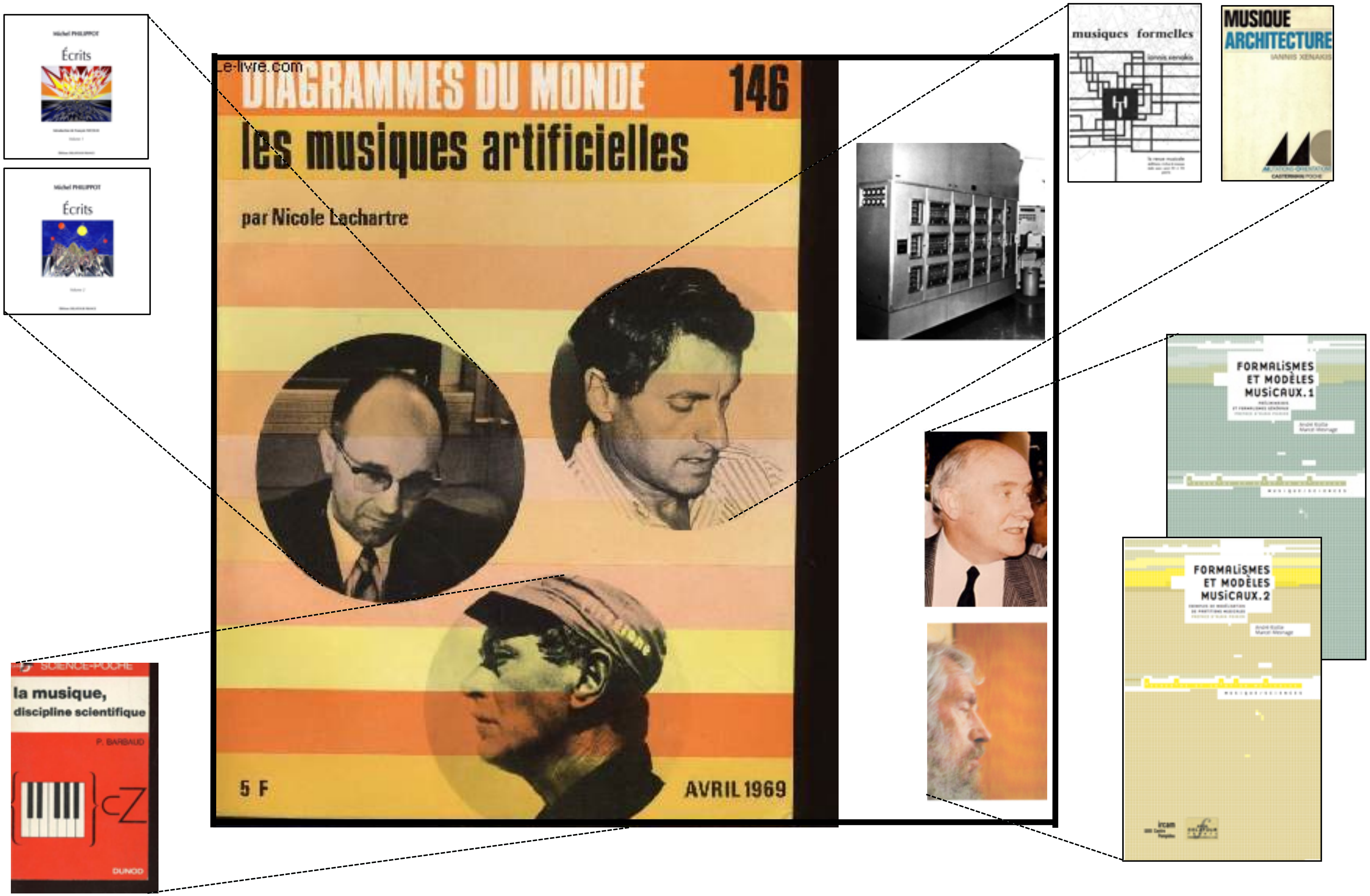






Peut-on parler d'une école formelle française en musique ?

Barbaud (1911-1990), Philippot (1925-1996), Xenakis (1922-2001), André Riotte & Marcel Mesnage



Marin Mersenne et la naissance de la combinatoire musicale

114 **Marin Mersenne, *Harmonicorum Libri XII*, 1648**

LIBER SEPTIMVS.

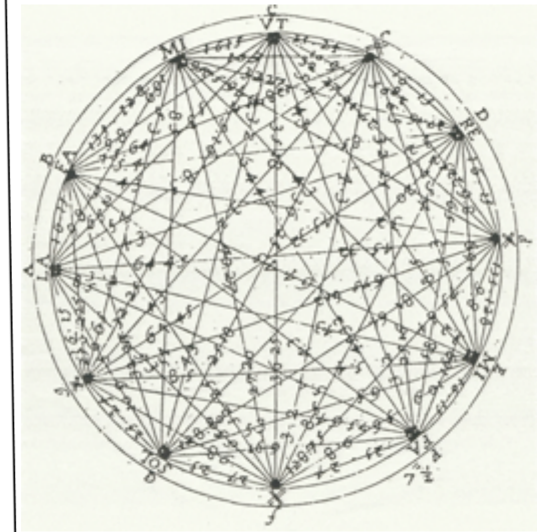
DE CANTIBVS, SEV CANTILENIS,

EARVMQ; NVMERO, PARTIBVS, ET SPECIEBVS.

Tabula Combinationis ab 1 ad 22.

I	1
II	2
III	6
IV	24
V	120
VI	720
VII	5040
VIII	40320
IX	362880
X	3628800
XI	39916800
XII	479001600
XIII	6127020800
XIV	87178291200
XV	1307674368000
XVI	20922789888000
XVII	355687428096000
XVIII	6402373705728000
XIX	121645100408832000
XX	2432902008176640000
XXI	51090942171709440000
XXII.	1124000727777607680000

HARMONICORVM
LIBRI XII.
IN QVIBVS AGITVR
DE SONORVM NATVRA,
CAVSIS, ET EFFECTIBVS: DE CONSONANTIIS,
Dissonantiis, Rationibus, Generibus, Modis, Cantibus, Compositione, orbisque totius Harmonicis Instrumentis.
Authore F. M. MERSENNO Minimo.
Ad Illustr. V. HENRICVM LVDOVICVM HABERTVM DE MONTMOR.
Laudate eum in cymbalis benesonantibus, laudate eum in cymbalis iubilationis: Omnis spiritus laudet Dominum. PSALM. 150.
EDITIO AVCTA.
LVTETIÆ PARISIORVM,
Sumptibus GVILLELMI BAVDRY, viâ Iacobæâ, prope Collegium Plessæum.
M. DC. XLVIII.
Cum Privilegio Regis Christianiss. & Approbatione Superiorum.



Varietas, seu Combinatio quatuor notarum.

De Mersenne à Edmond Costère : premiers catalogues d’accords

Edmond Costère, Lois et Styles des Harmonies Musicales. Paris: Presses Universitaires de France, 1954.

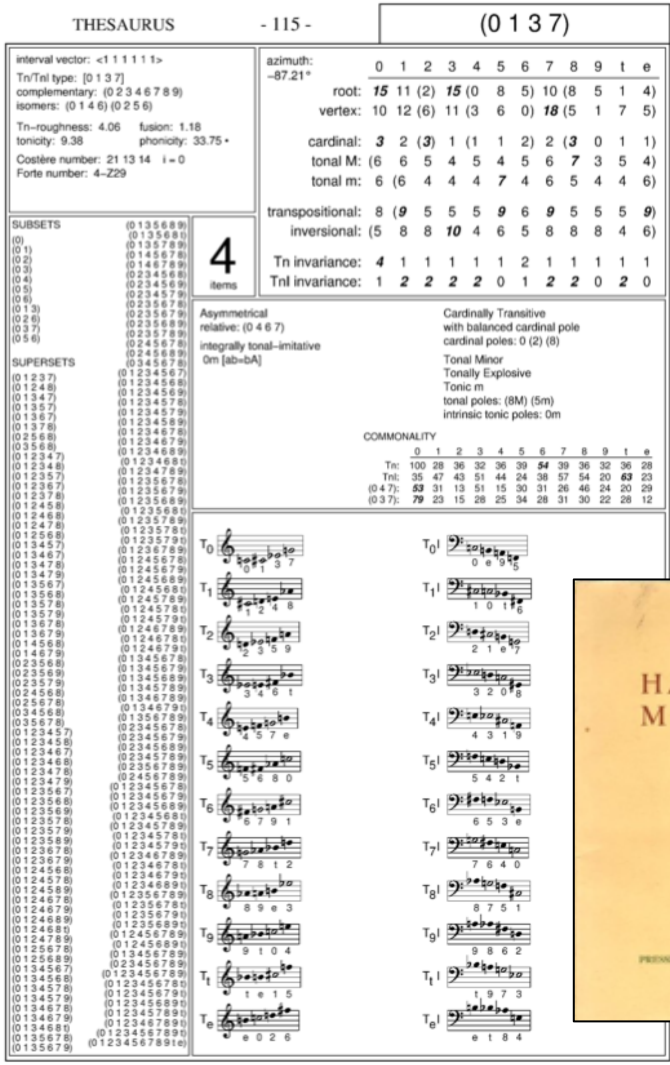
114

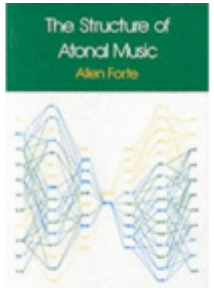
LIBER SEPTIMVS.

DE CANTIBVS, SEV CANTILENIS, EARVMQ; NVMERO, PARTIBVS, ET SPECIEBVS.

Tabella pulcherrima & vtilißima Combinationis duodecim Cantilenarum.

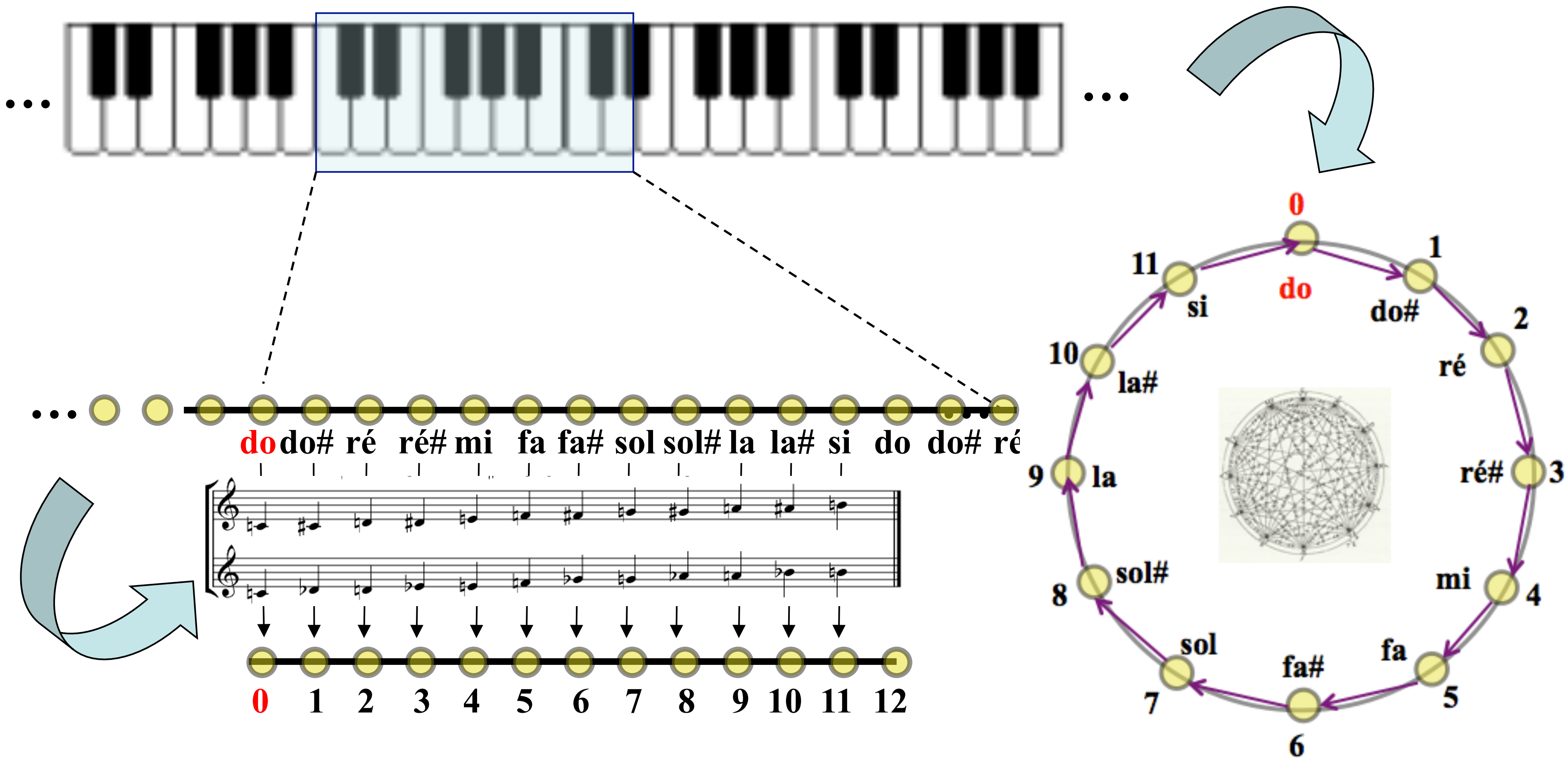
I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91
4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455
5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820
6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188
7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564
8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388
9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582	125970
10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960	293930
11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756	352716	646646
12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960	352716	705432	1352078
13	91	455	1820	6188	18564	50388	125970	293930	646646	1352078	2704156
14	105	56	2380	8568	27132	77520	203490	497420	1144066	2496144	5200300
15	120	680	3060	11628	38760	116280	319770	817190	1961256	4457400	9657700
16	136	816	3876	15504	54264	170544	490314	1307504	3268760	7726160	17383860
17	153	969	4845	20349	74613	245157	735471	2042975	5311735	13037895	30421755
18	171	1140	5985	26334	100947	346104	1081575	3124550	8436285	21474180	51895935
19	190	1330	7315	33649	134596	480700	1562275	4686825	13123110	34597290	86493225
20	210	1540	8855	42504	177100	657800	2220075	6906900	20030010	54627300	141120525
21	231	1771	10626	53130	230230	888030	3108105	10015005	30045015	84672315	225792840
22	253	2024	12650	5780	296010	1184040	4292145	14307150	44352165	129024480	354817320
23	276	2300	14950	80730	376740	1560780	5852925	20160075	64512290	193536720	548354040
24	300	2600	17550	98280	475020	2035800	7888725	28048800	92561040	286097760	834451800
25	325	2925	2047	8755	593775	2629575	10518300	38567100	131128140	417225900	1251677700





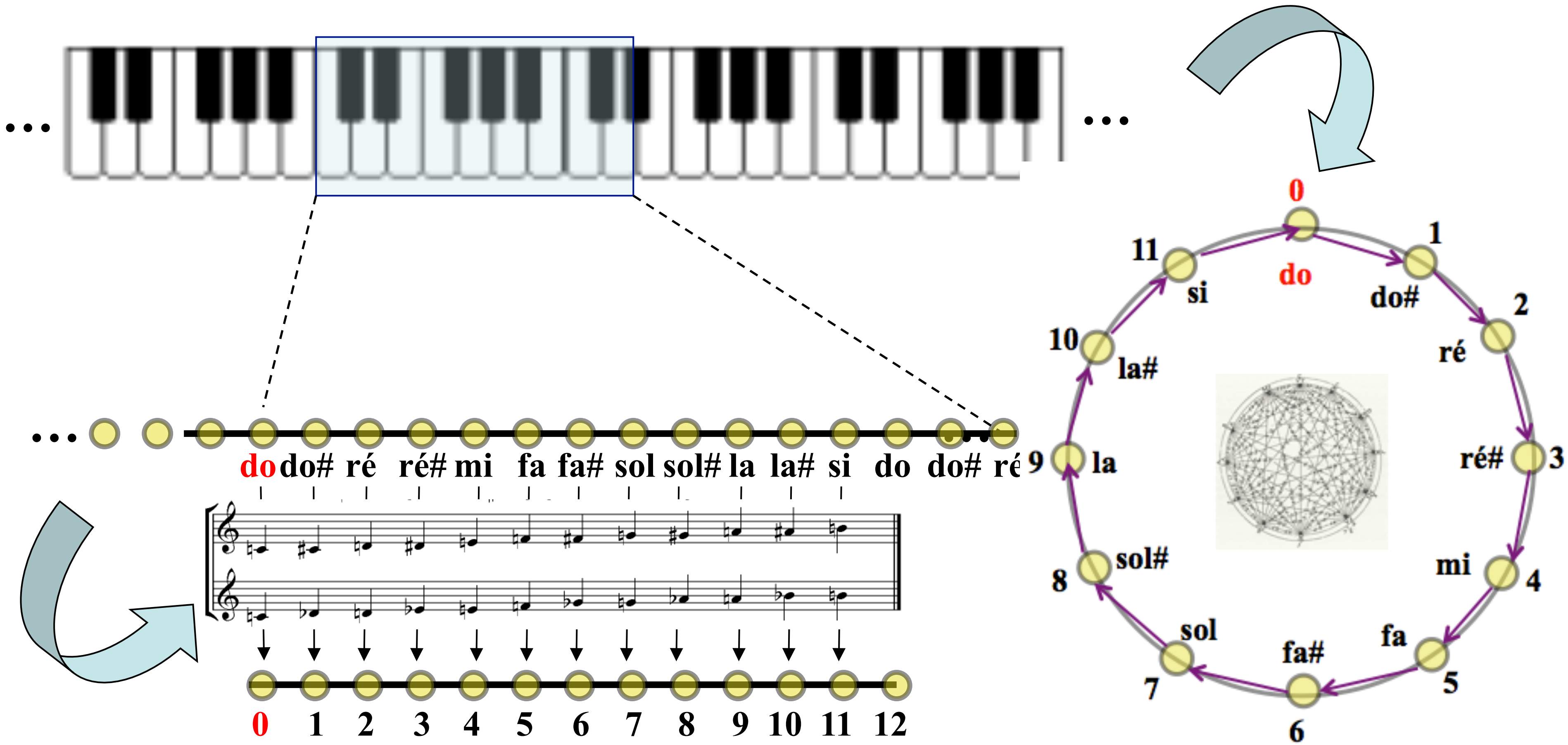
M. A. Bittencourt, « A computational model of E. Costère's music theories and Set-Theory implemented as an analytical calculator », SBCM 2007, São Paulo.

L’espace tempéré égal est un groupe cyclique



« L'ensemble des intervalles mélodiques est muni d'une **structure de groupe** avec comme loi de composition l'addition. […] Or, cette structure n'est pas spécifique aux **hauteurs**, mais également aux **durées**, aux **intensités**, aux **densités** et à d'autres caractères des sons ou de la musique, comme par exemple le **degré d'ordre ou de désordre** »
(Xenakis, “La voie de la recherche et de la question”, *Preuves*, 1965).

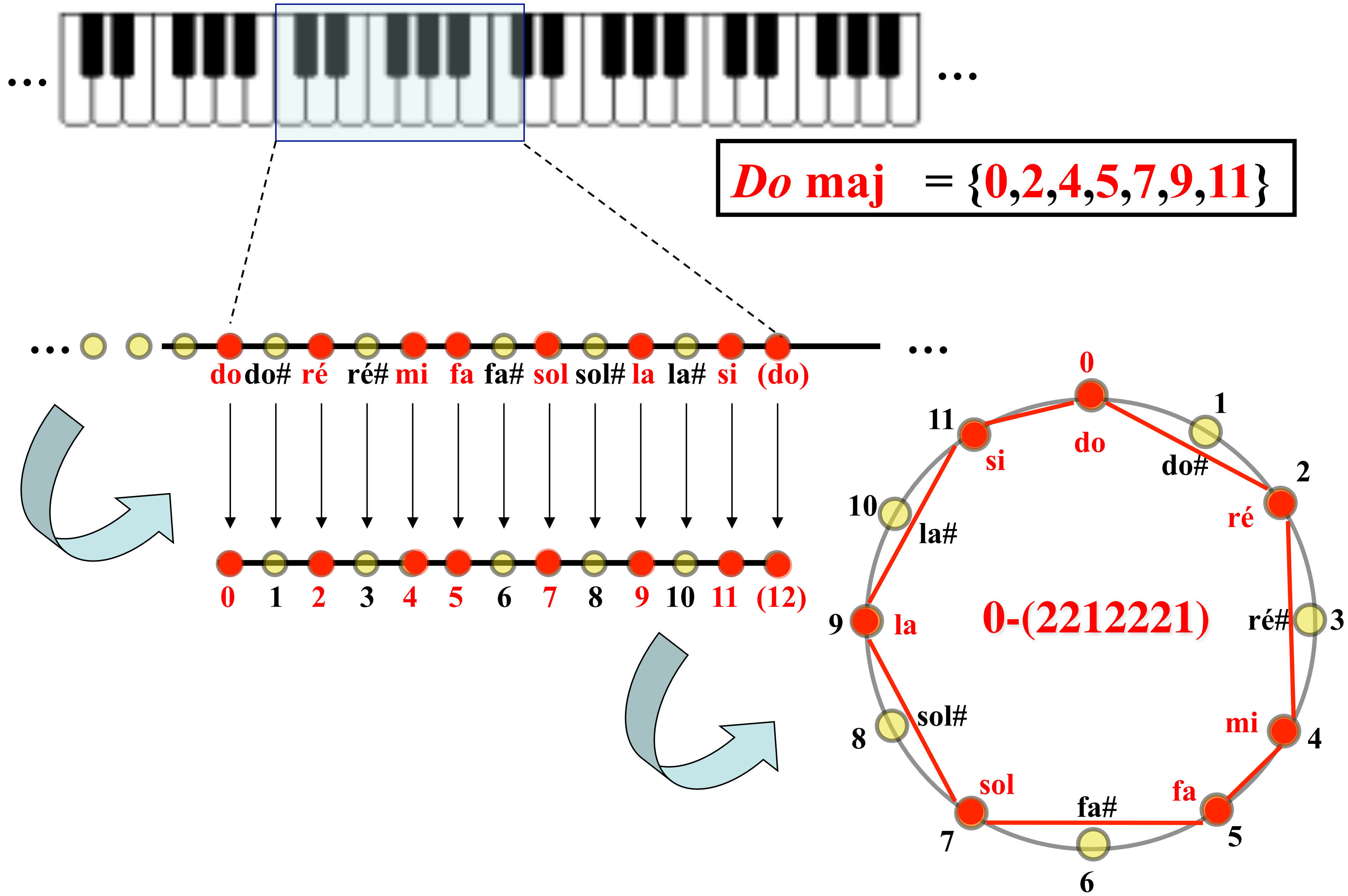
L’espace tempéré égal est un groupe cyclique



« [...] il faut aller plus profondément dans notre **mental musical**. Et c’est là que l’on découvre les **symétries**, les propriétés des sons ou les opérations qu’effectue l’auditeur ou le musicien sans le savoir. La musique, comme sans doute notre univers, est plongée dans l’idée de récurrence, de répétition plus ou moins fidèle, de symétrie en temps et hors-temps. C’est pourquoi l’on découvre les **structures de groupe** presque à fleur de peau. »
(Xenakis, “Problèmes actuels en composition musicale”, Conférence à Saclay, 1983).

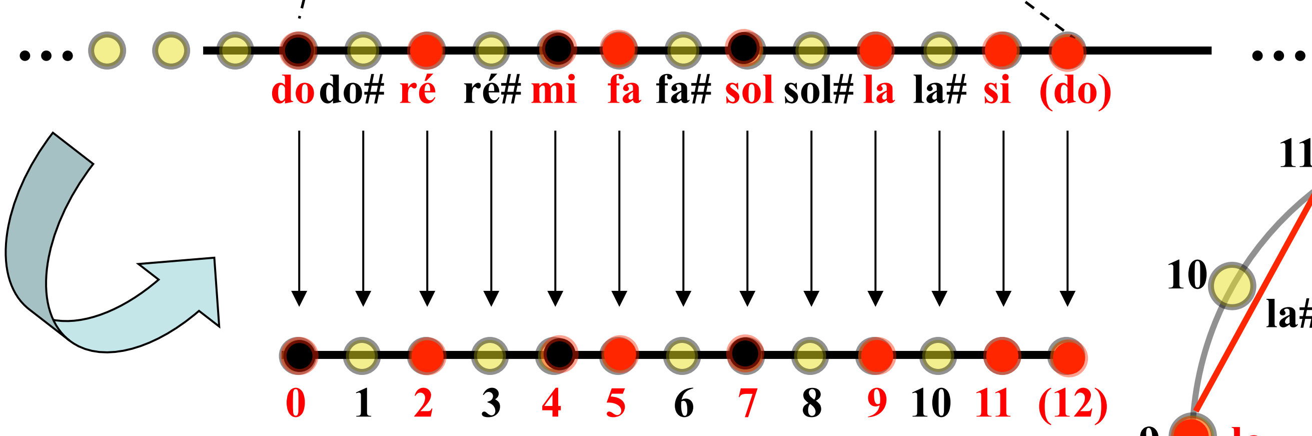
Une gamme est un polygone inscrit dans le cercle...

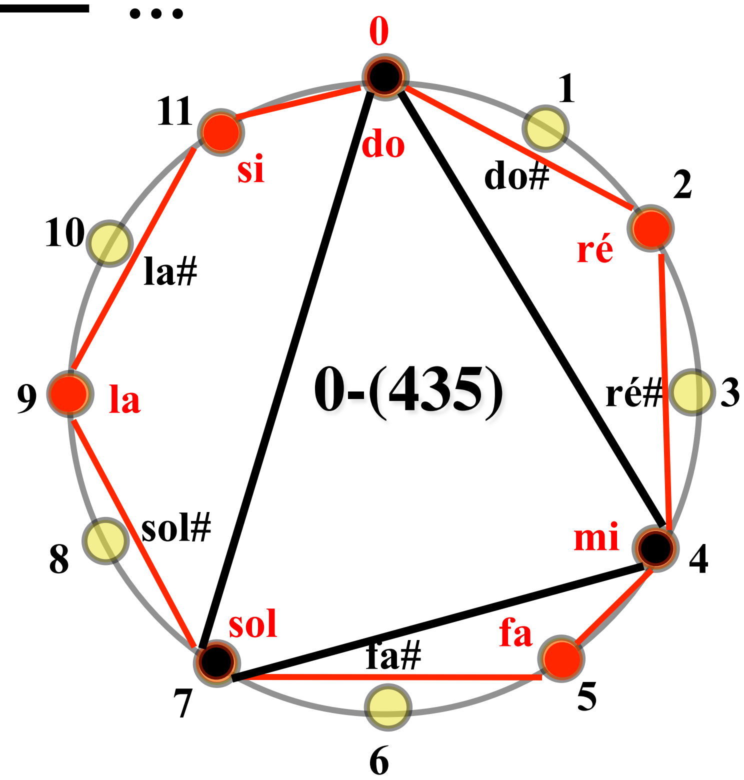
Do maj = {0,2,4,5,7,9,11}



...de même qu'un mode ou un accord

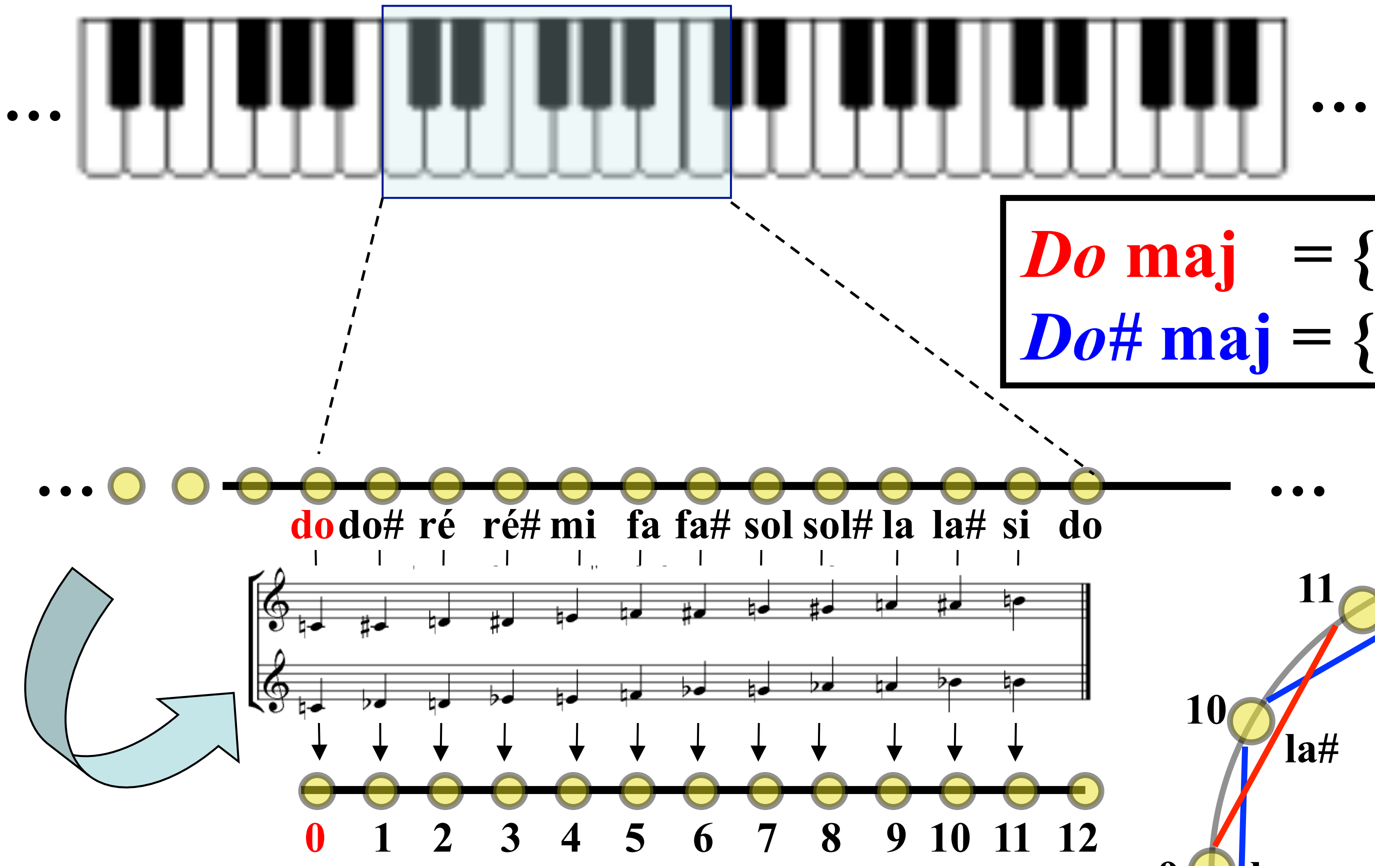
***Do* maj** = {0,2,4,5,7,9,11}





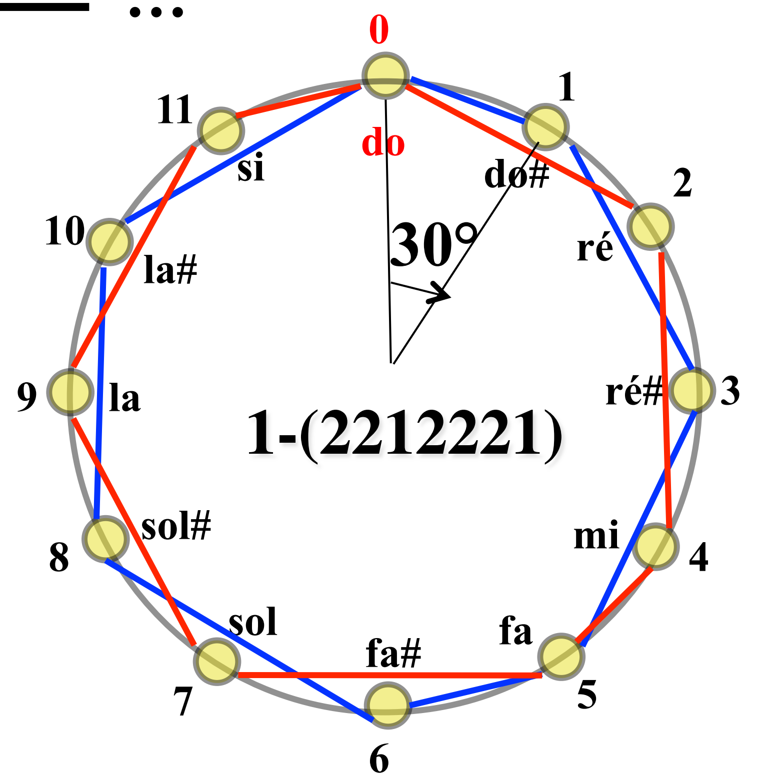
« Nous appelons mode tout ensemble de classes de résidus »
(A. Vieru, *Cartea Modurilor*, 1980)

Les transpositions sont des additions...



Do maj = {0,2,4,5,7,9,11} +1

Do# maj = {1,3,5,6,8,10,0}

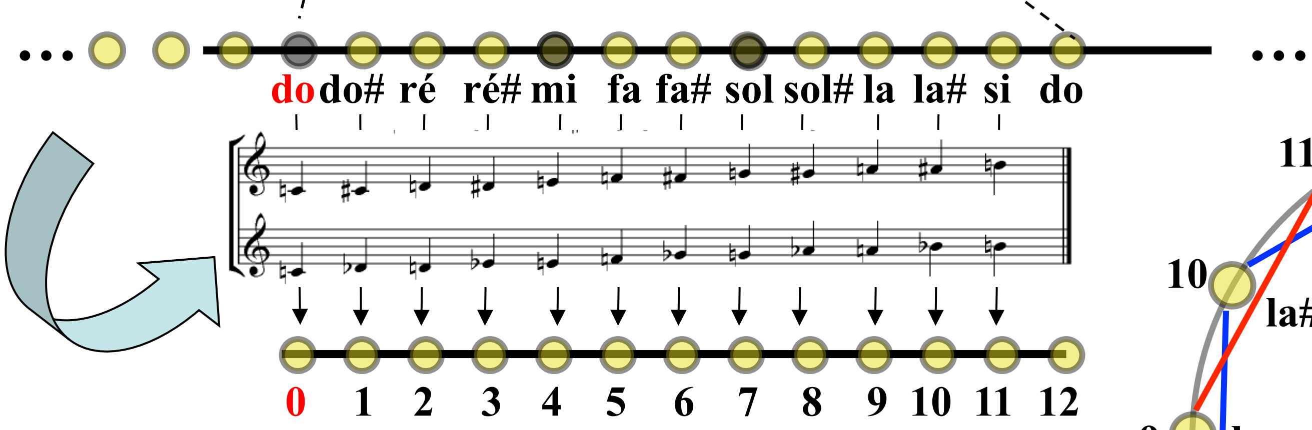


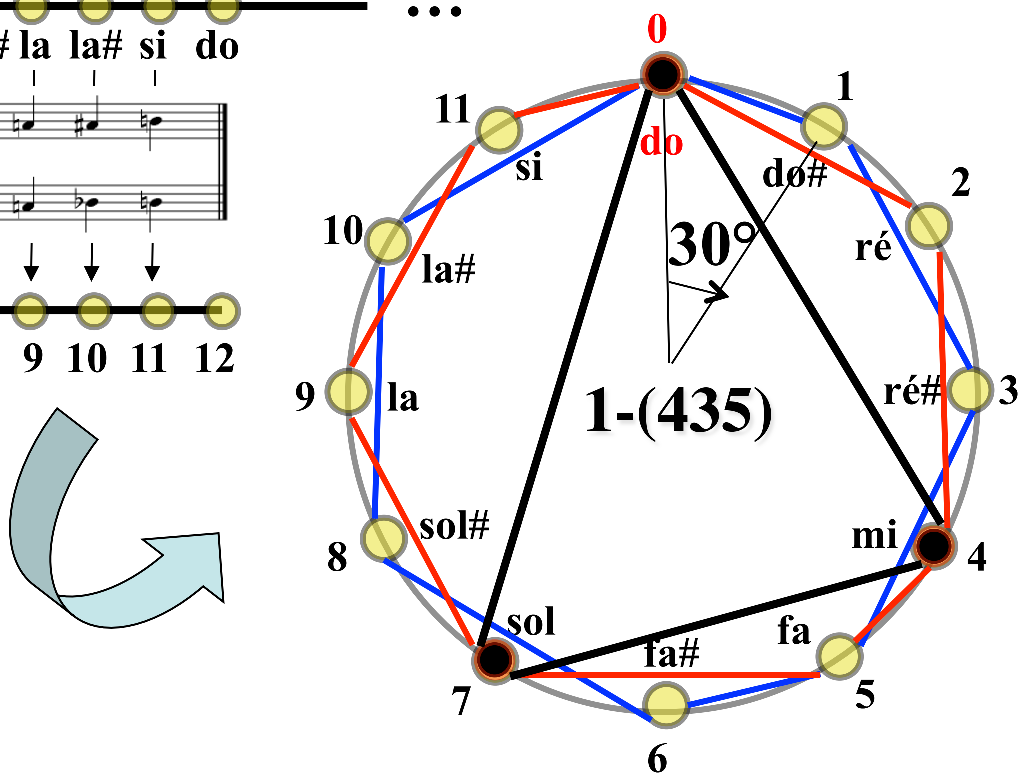
... ou des rotations !

Les transpositions sont des additions...

Do maj	= {0,2,4,5,7,9,11}
Do# maj	= {1,3,5,6,8,10,0}

+1

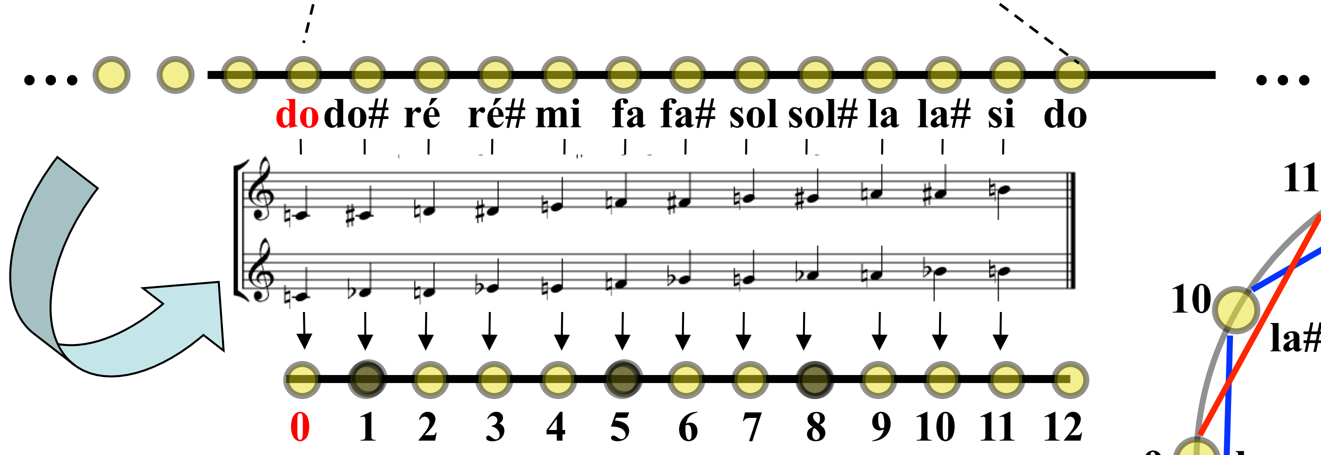


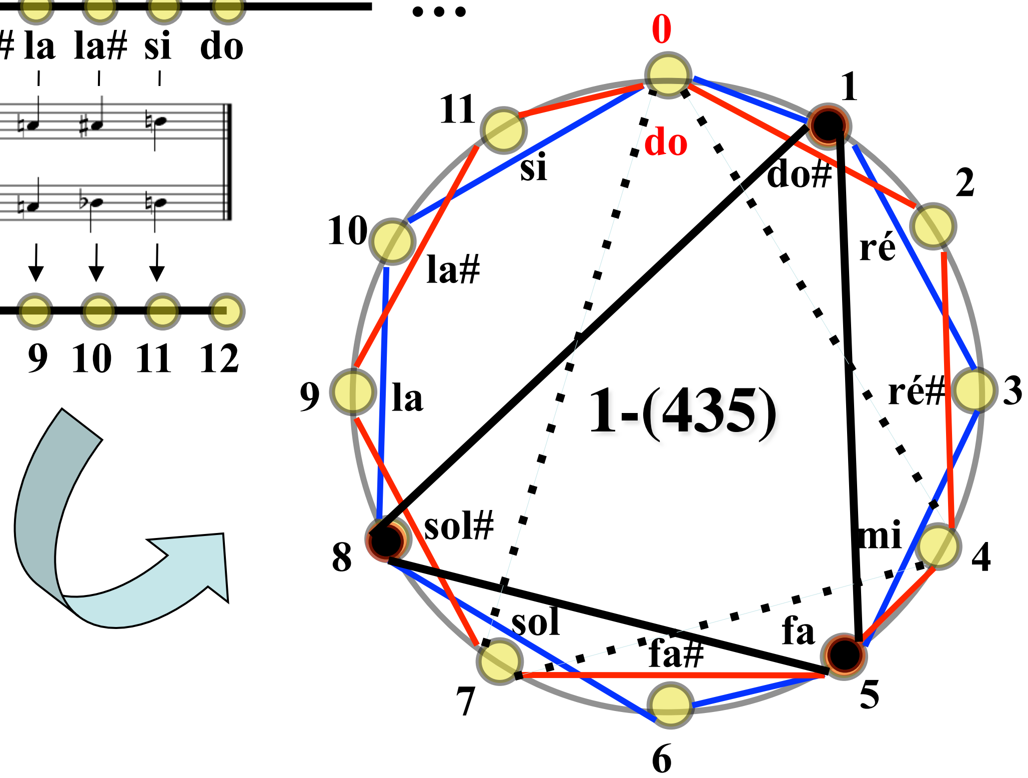


... ou des rotations !

Les transpositions sont des additions...

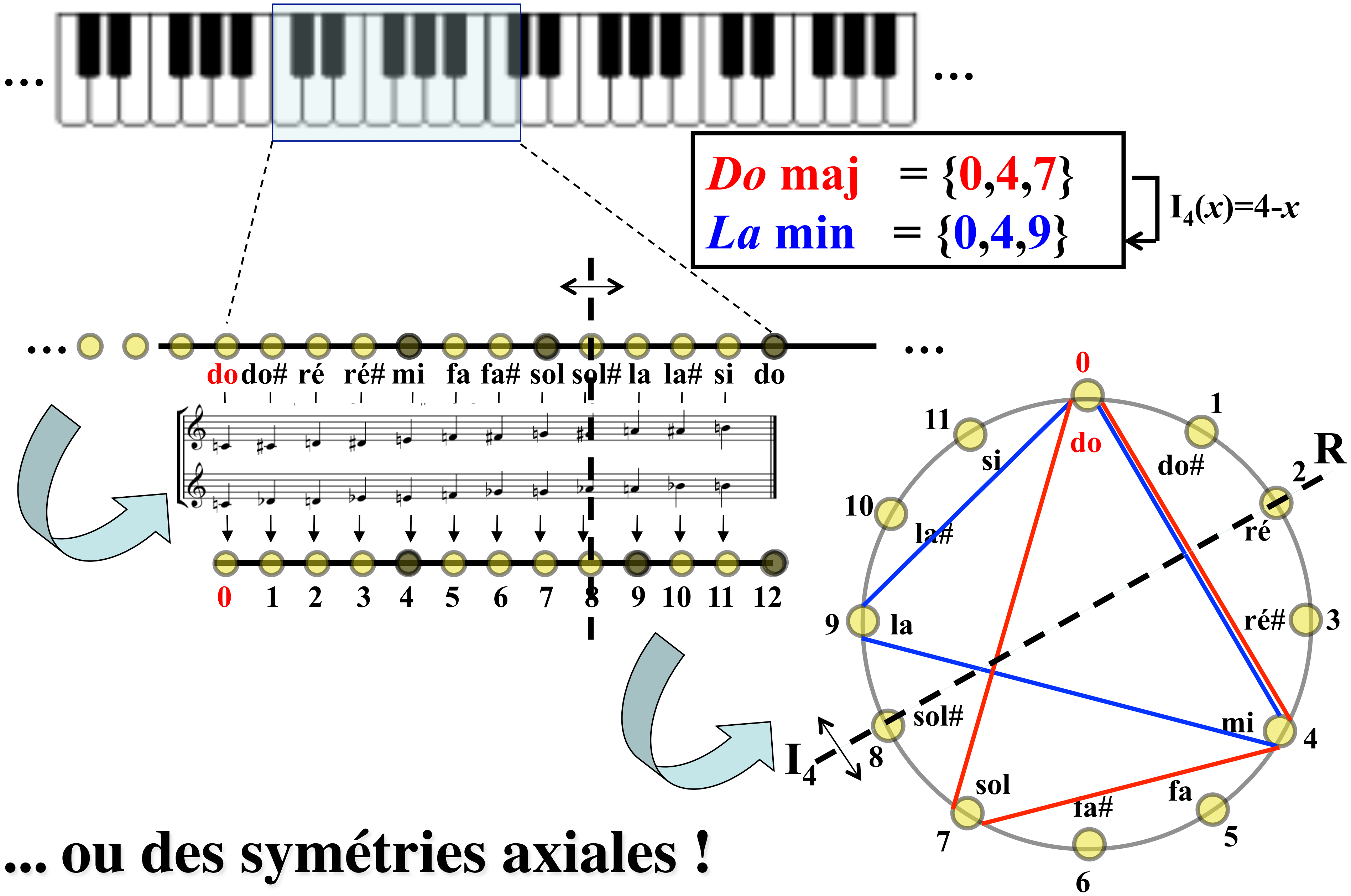
$$\textbf{Do maj} = \{0,2,4,5,7,9,11\} \quad +1$$
$$\textbf{Do\# maj} = \{1,3,5,6,8,10,0\}$$





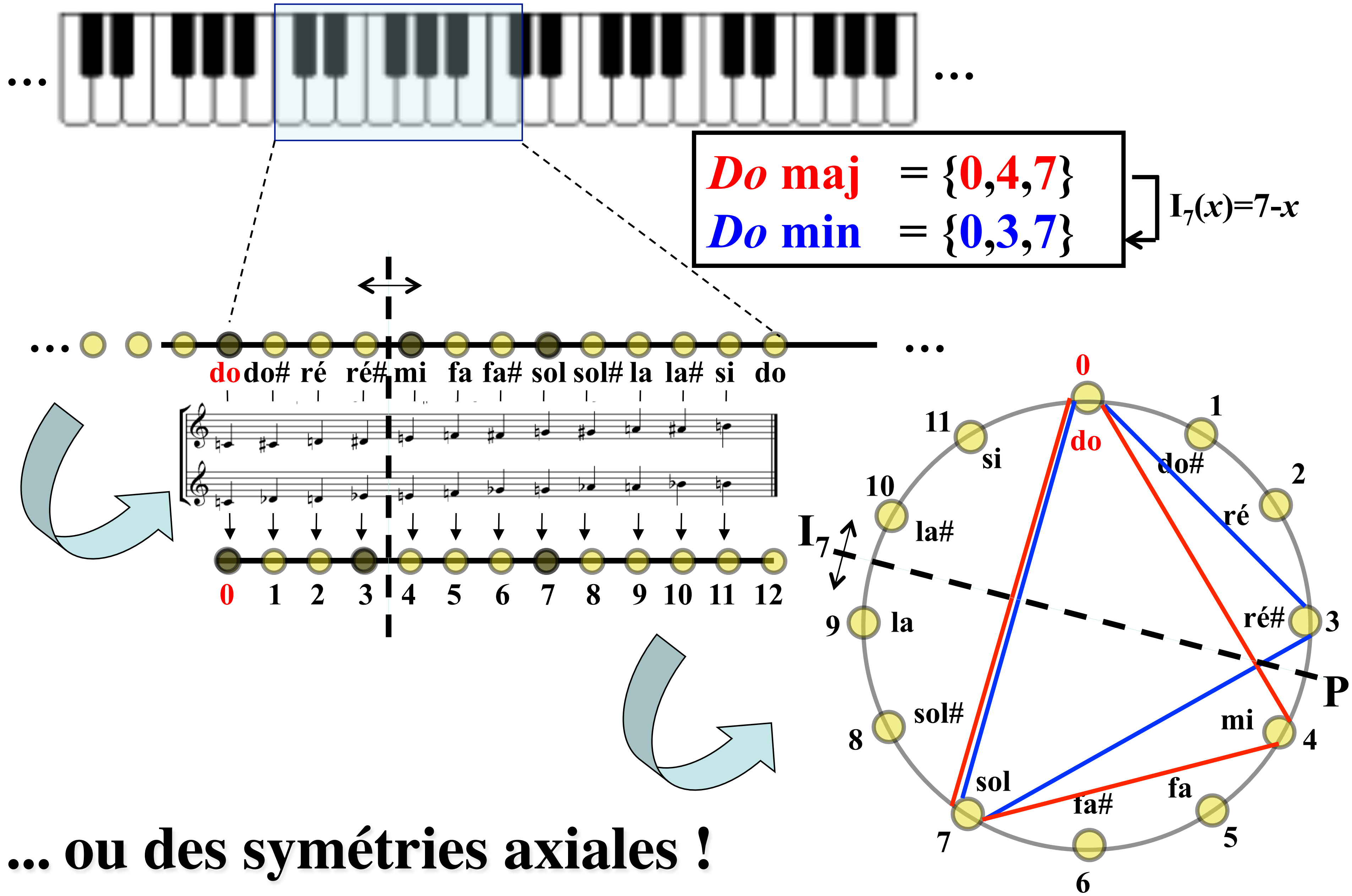
... ou des rotations !

Les inversions sont des soustractions...



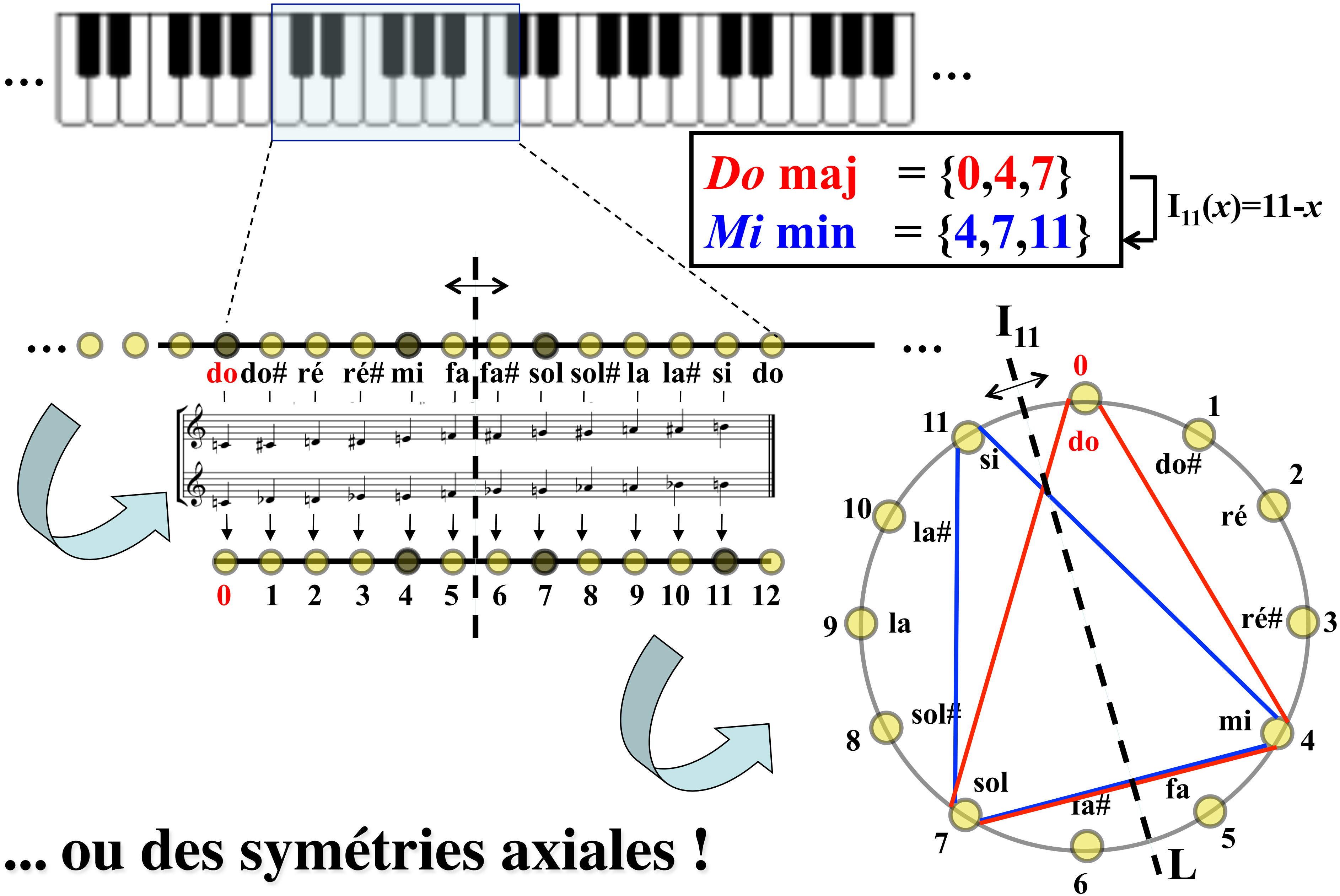
... ou des symétries axiales !

Les inversions sont des soustractions...



... ou des symétries axiales !

Les inversions sont des soustractions...

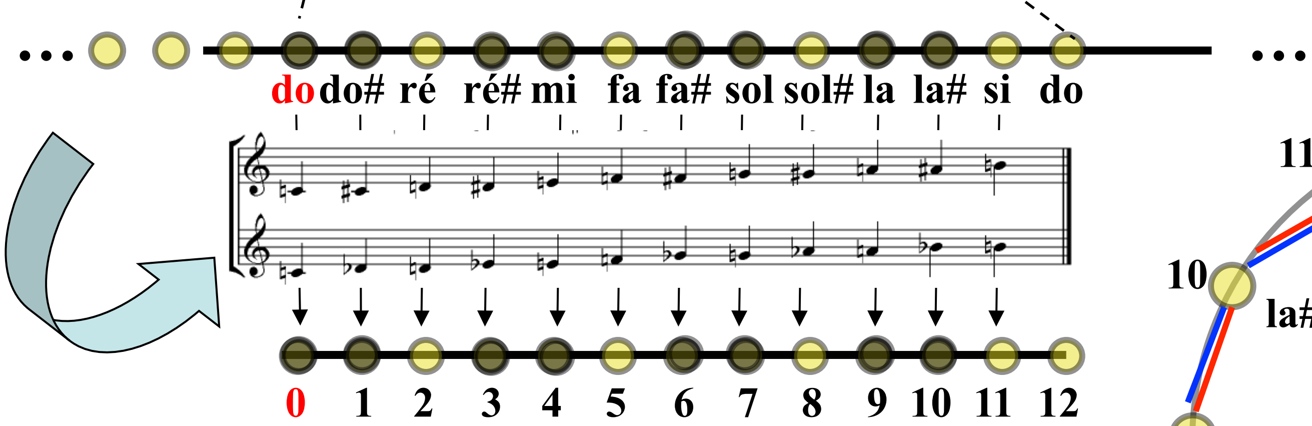


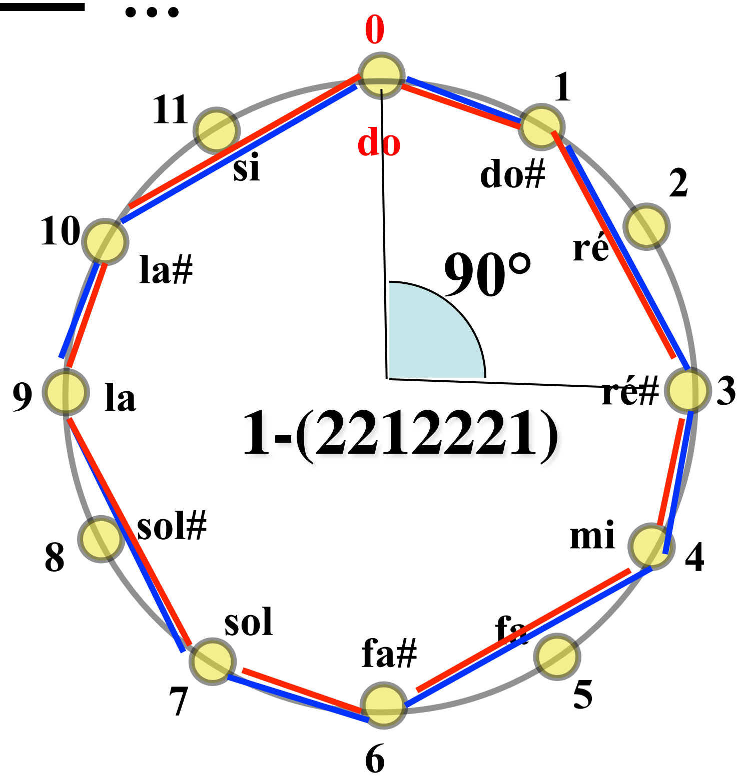
... ou des symétries axiales !

Modes à transpositions limitées de Messiaen

Do maj	= {0,1,3,4,6,7,9,10}
Do# maj	= {3,4,6,7,9,10,0,1}

+3

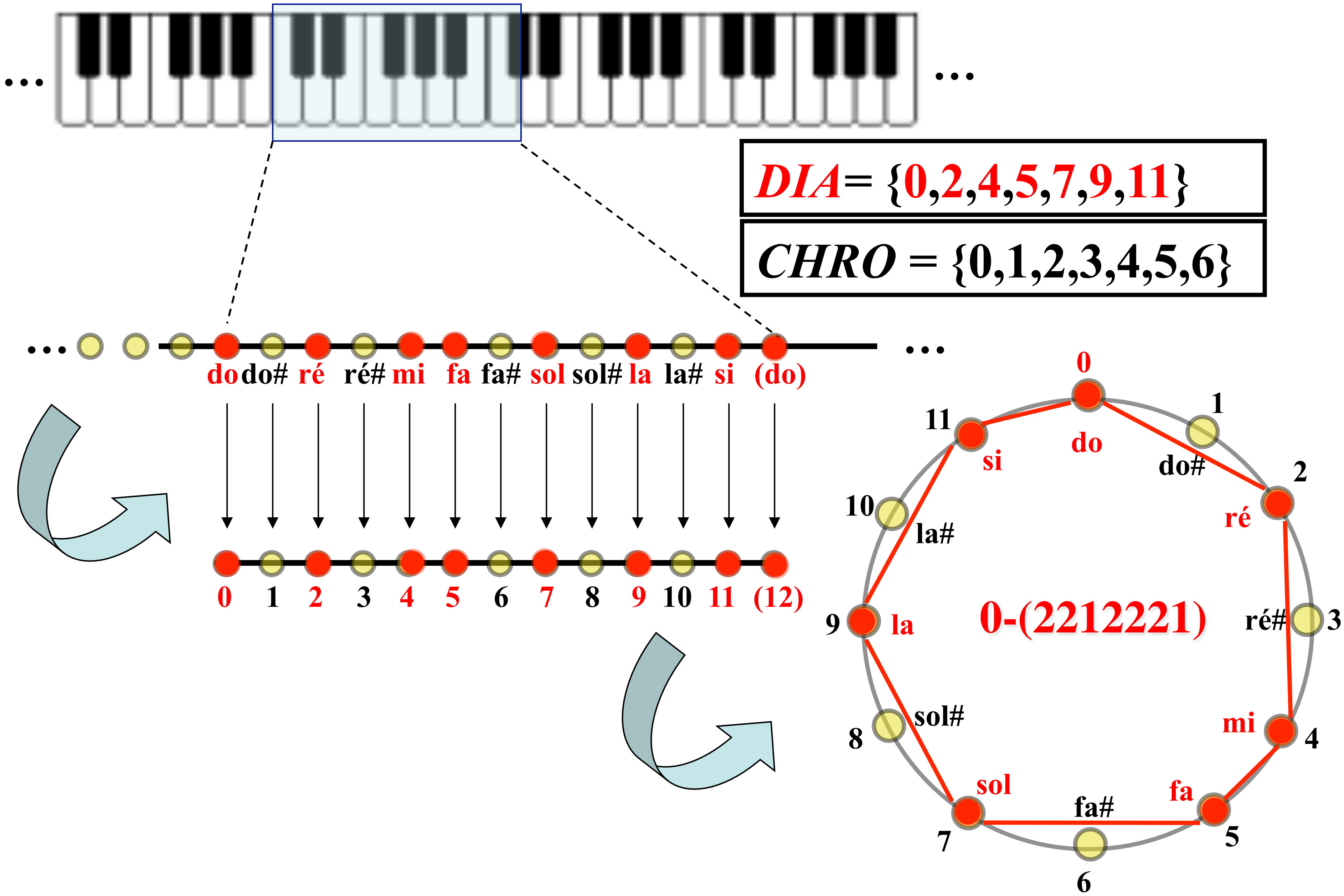




Les augmentations sont des multiplications...

DIA= {0,2,4,5,7,9,11}

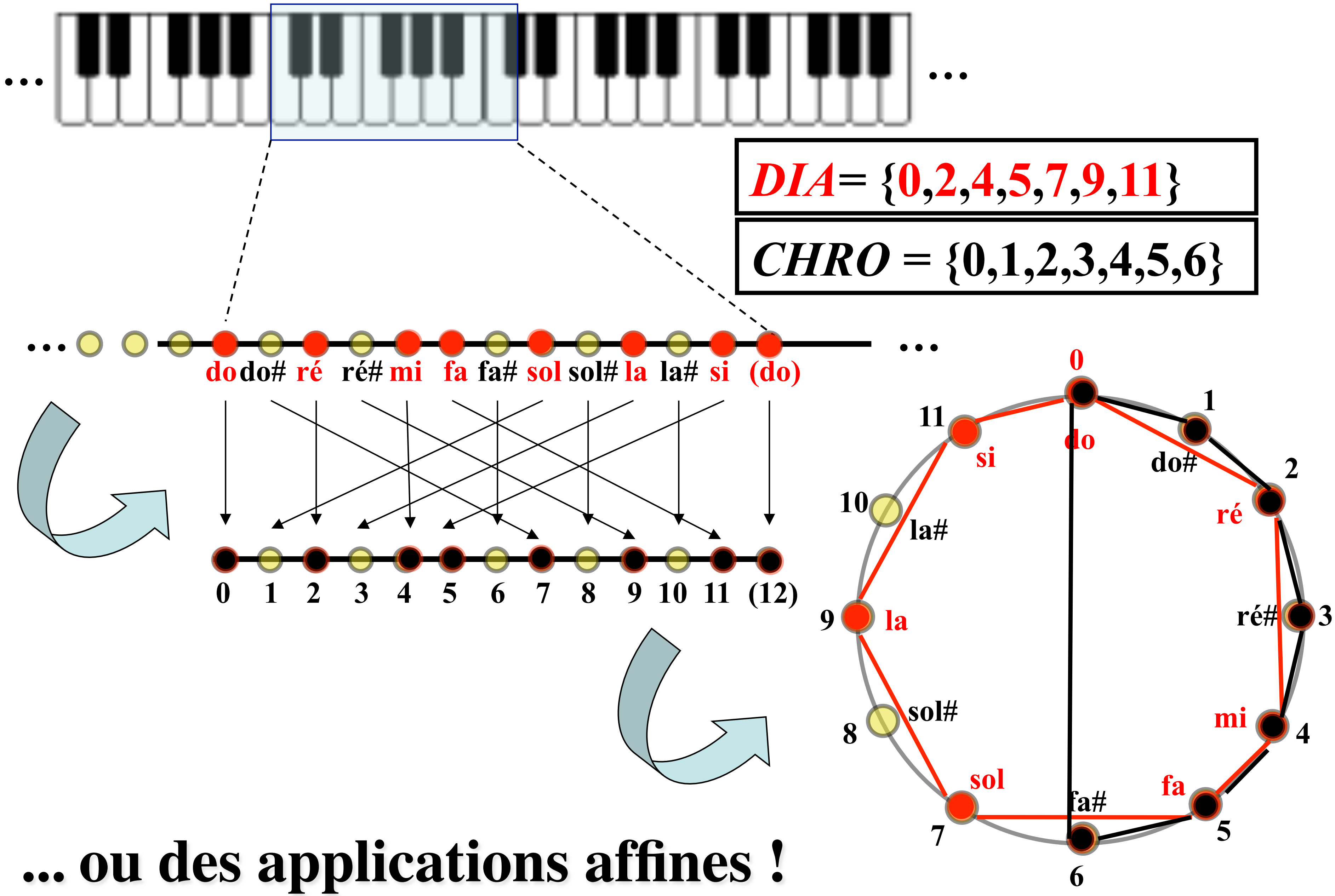
CHRO = {0,1,2,3,4,5,6}



Les augmentations sont des multiplications...

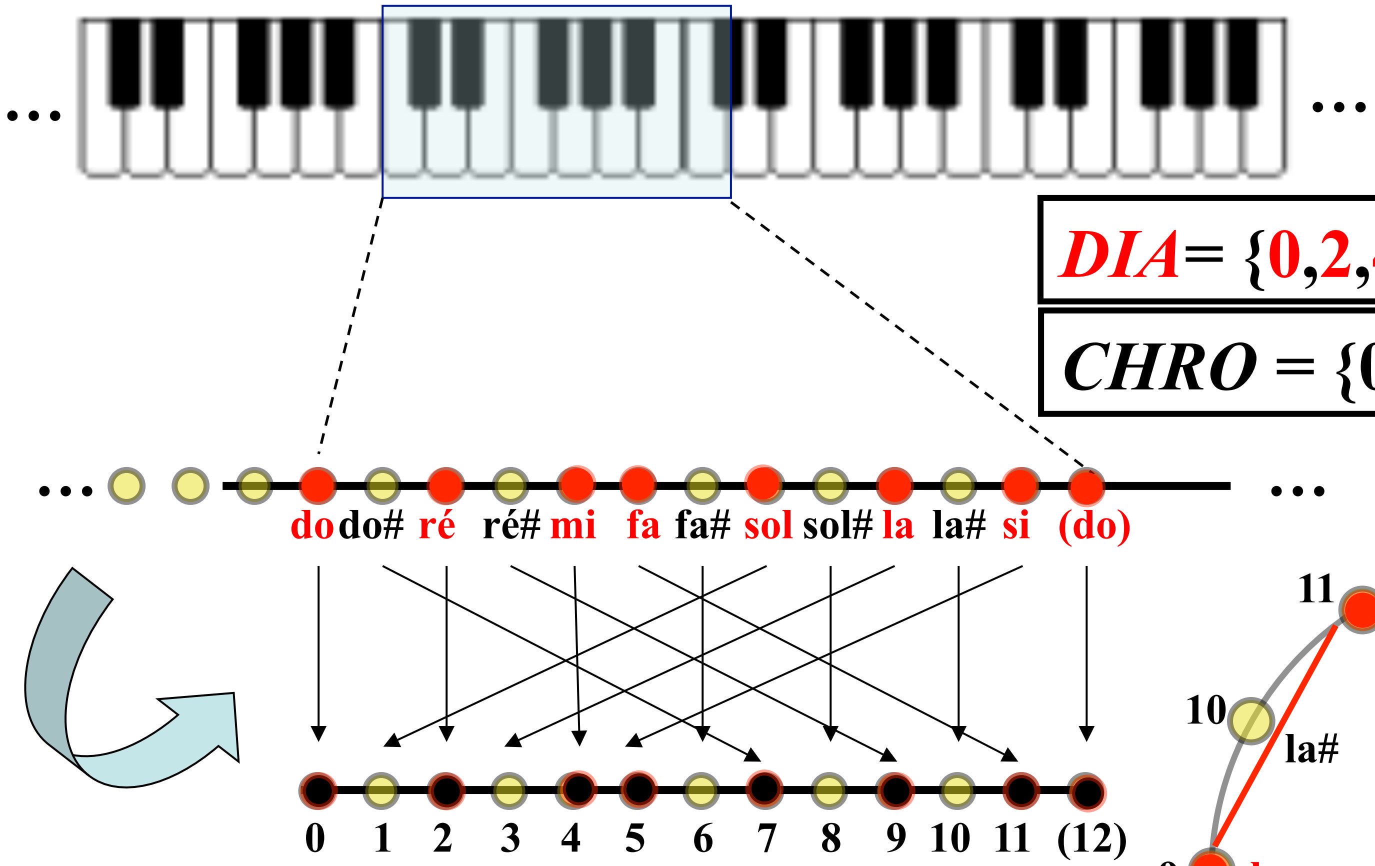
$DIA = \{0,2,4,5,7,9,11\}$

$CHRO = \{0,1,2,3,4,5,6\}$



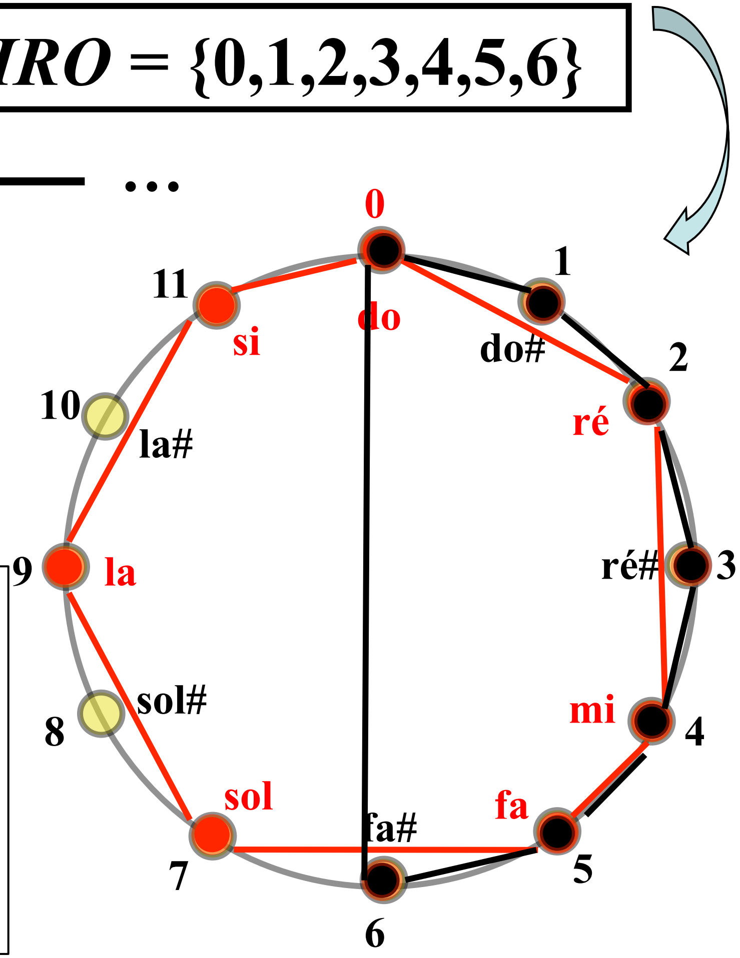
... ou des applications affines !

Signification musicale d'une application affine



DIA= {0,2,4,5,7,9,11}

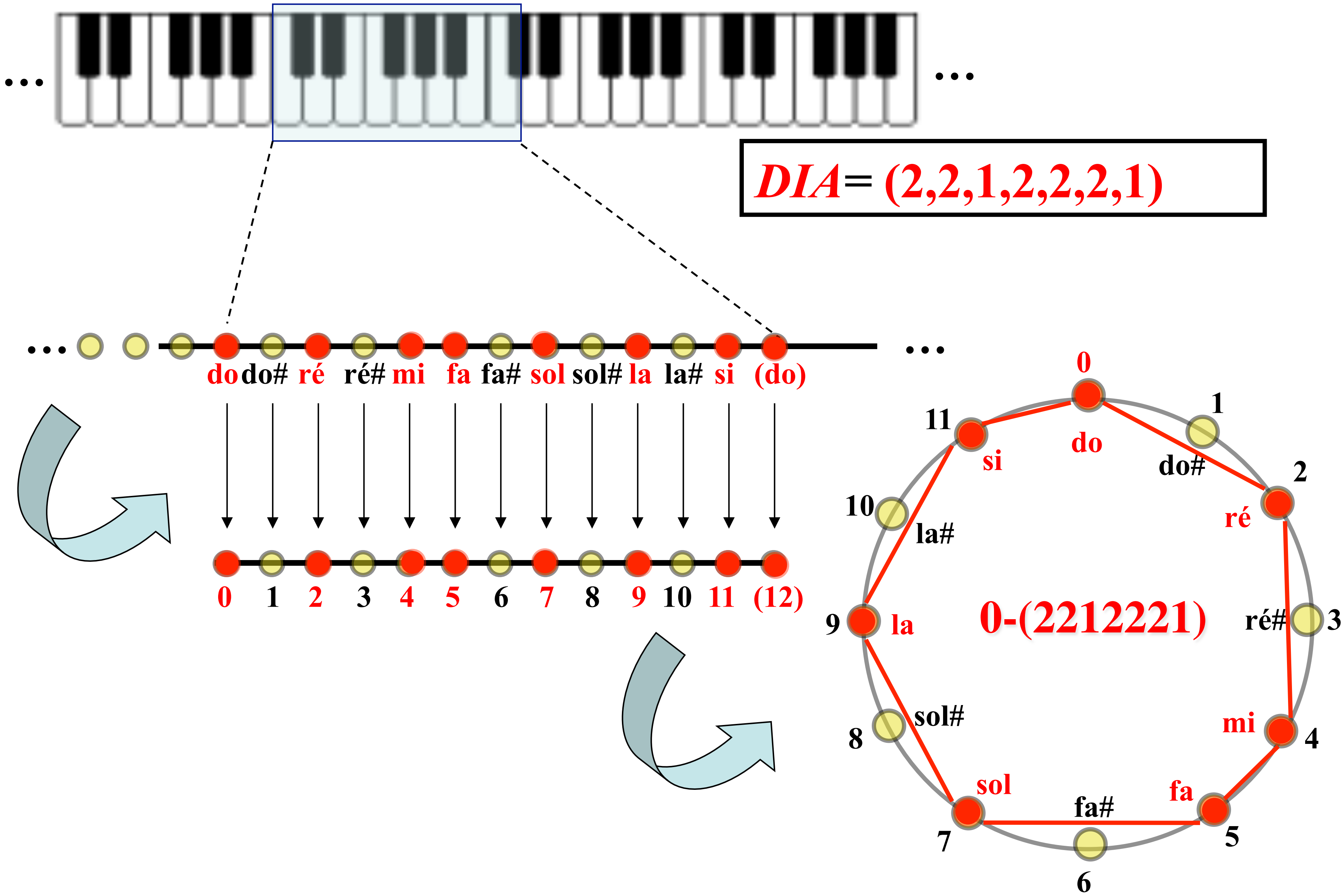
CHRO = {0,1,2,3,4,5,6}



« Le **diatonisme** et le **chromatisme** ne peuvent pas être envisagés en termes de simplicité ou de complexité, comme on le pensait jadis. Il s'agit plutôt d'une question **d'unité des contraires** dans le groupe **Z/12Z** »

(A. Vieru, « The Musical Signification of Multiplication by 7. Diatonicity and Chromaticity », *Muzica,* 1995)

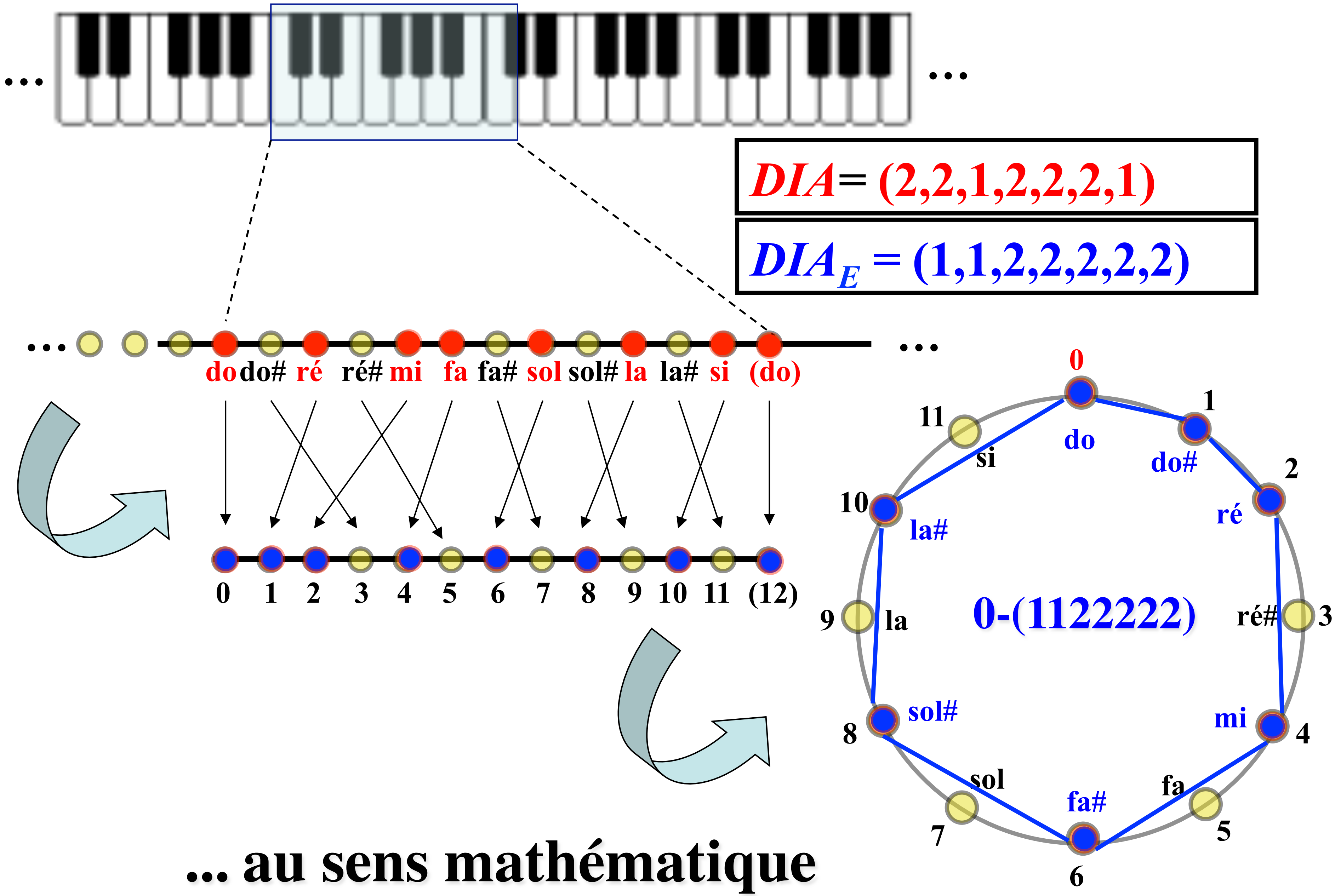
Les permutations sont des ‘partitions’...



Les permutations sont des ‘partitions’...

$DIA = (2,2,1,2,2,2,1)$

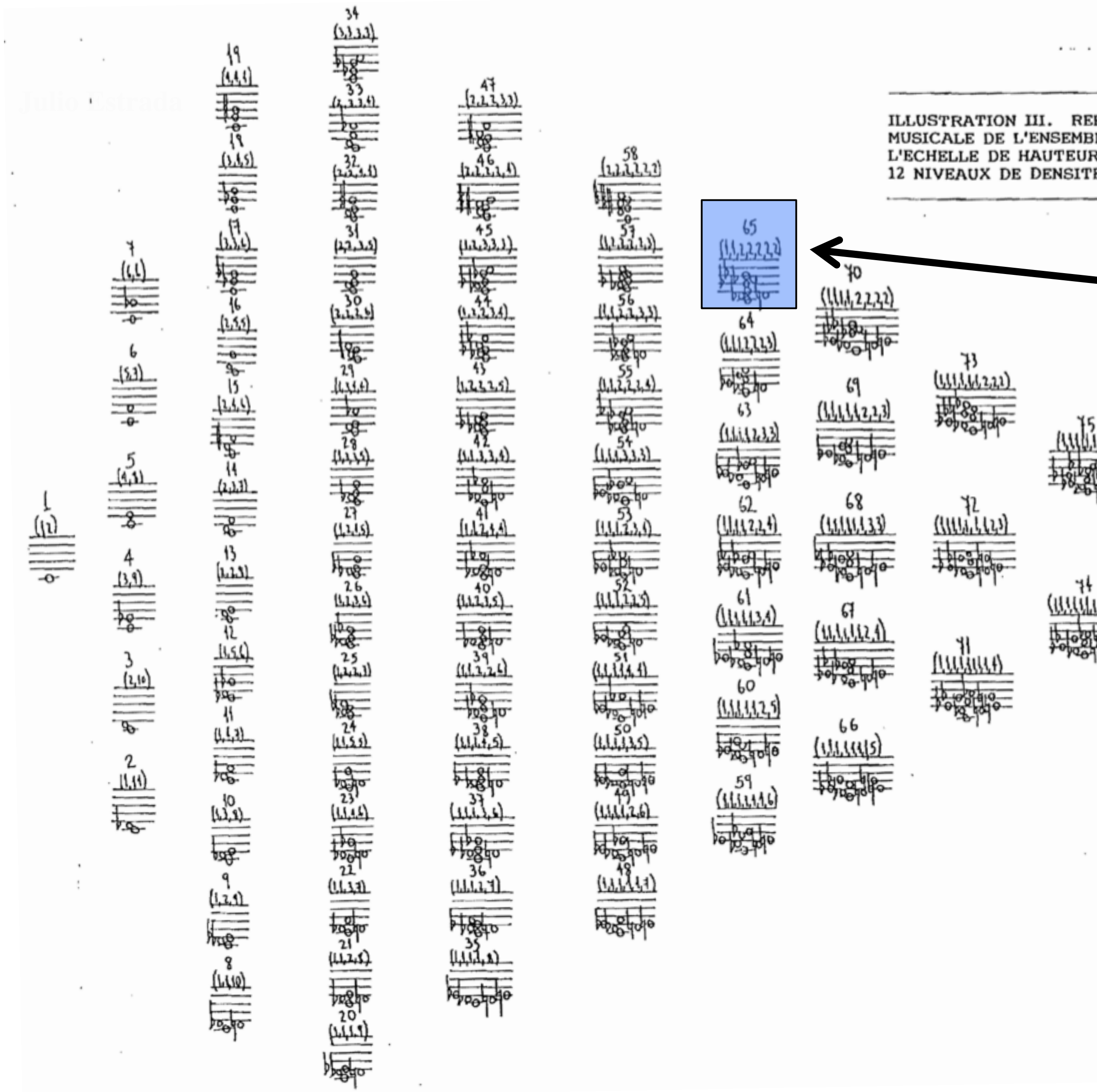
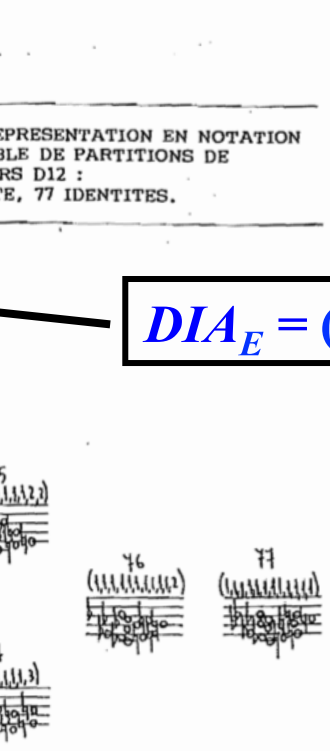
$DIA_E = (1,1,2,2,2,2,2)$



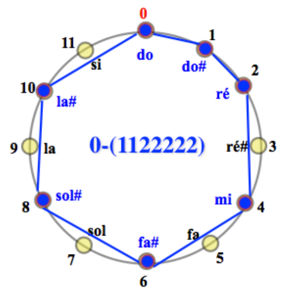
... au sens mathématique

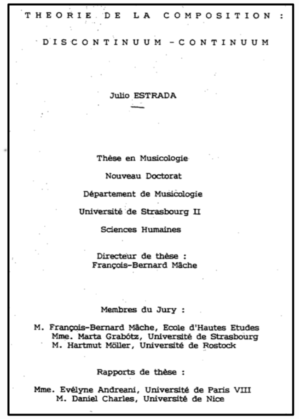
Le permutoèdre d'Estrada comme espace combinatoire

Julio Estrada, ***Théorie de la composition : discontinuum – continuum,*** **université de Strasbourg II, 1994**

$DIA_E = (1,1,2,2,2,2,2)$




THEORIE DE LA COMPOSITION :

DISCONTINUUM - CONTINUUM

Julio ESTRADA

Thèse en Musicologie

Nouveau Doctorat

Département de Musicologie

Université de Strasbourg II

Sciences Humaines

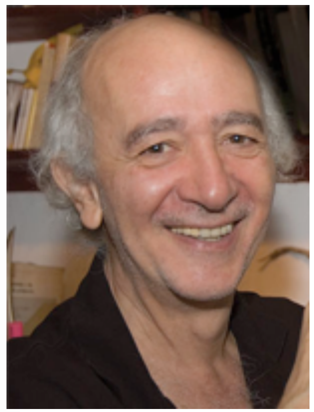
Directeur de thèse :
François-Bernard Mâche

Membres du Jury :

M. François-Bernard Mâche, Ecole d'Hautes Etudes
Mme. Marta Grabòtz, Université de Strasbourg
M. Hartmut Möller, Université de Rostock

Rapports de thèse :

Mme. Evélyne Andreani, Université de Paris VIII
M. Daniel Charles, Université de Nice



J. Estrada

Les permutoèdre comme catalogue d'accords

J. Estrada

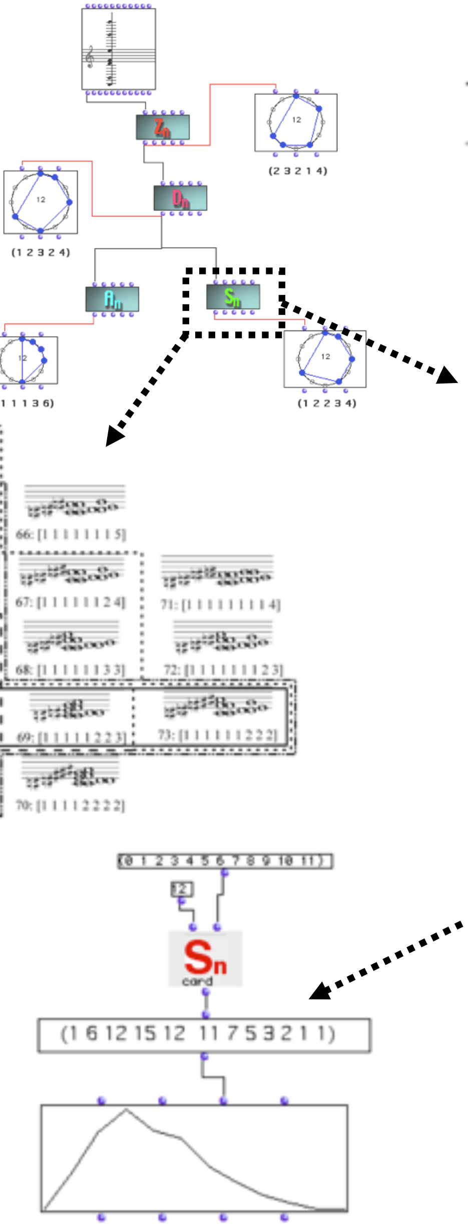


Tabelle 1

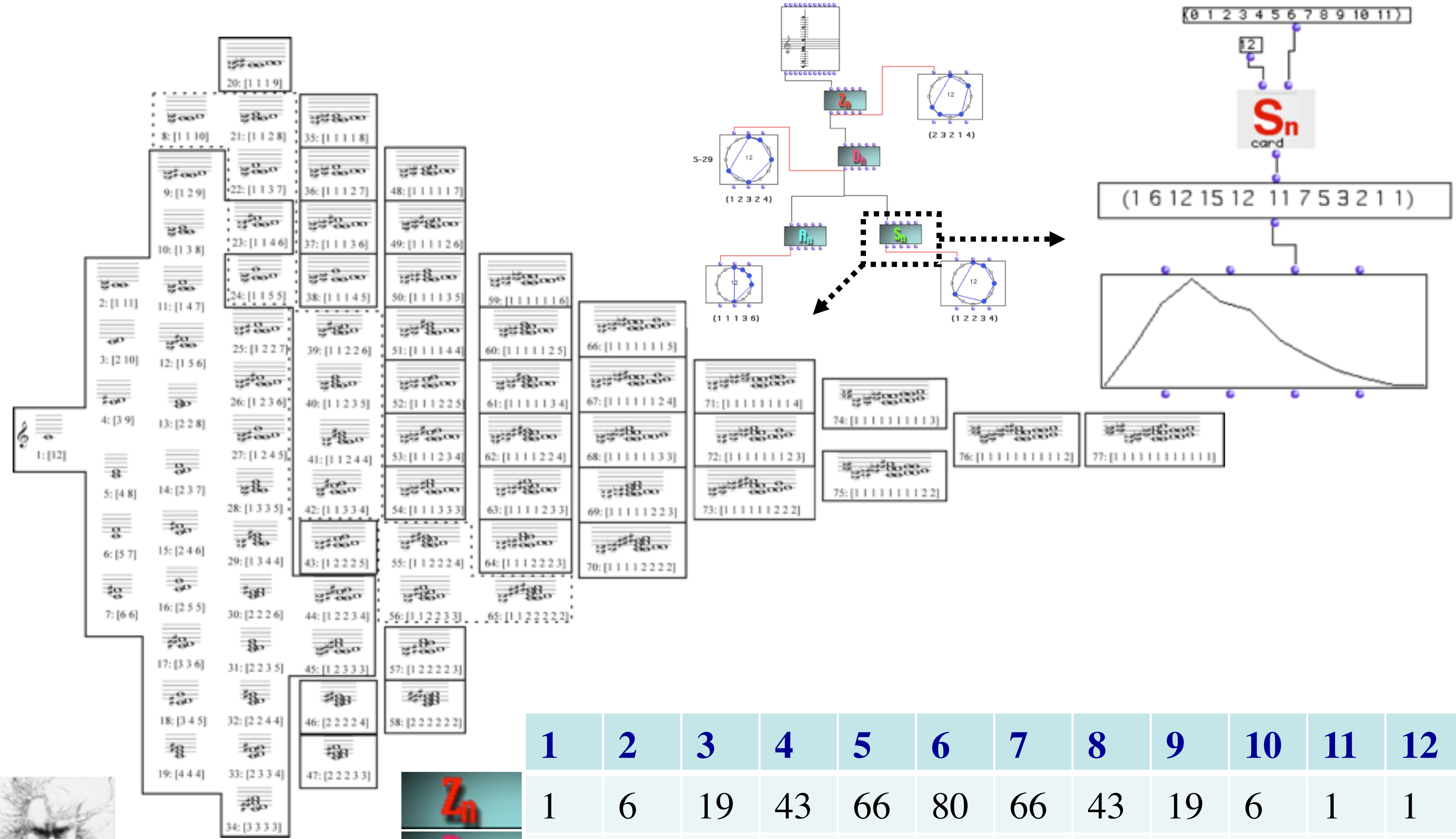
Tabelle aller möglichen Intervallstrukturen

lfd. Nr.	Intervalle
0	—
1	12
2	6 + 6
3	5 + 7
4	4 + 8
5	4 + 4 + 4
6	3 + 9
7	3 + 4 + 5
8	3 + 3 + 6
9	3 + 3 + 3 + 3
10	2 + 10
11	2 + 5 + 5
12	2 + 4 + 6
13	2 + 3 + 7
14	2 + 3 + 3 + 4
15	2 + 2 + 8
16	2 + 2 + 4 + 4
17	2 + 2 + 3 + 5
18	2 + 2 + 2 + 6
19	2 + 2 + 2 + 3 + 3
20	2 + 2 + 2 + 2 + 4
21	2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2
22	1 + 11
23	1 + 5 + 6
24	1 + 4 + 7
25	1 + 3 + 8
26	1 + 2 + 9
27	1 + 3 + 4 + 4
28	1 + 3 + 3 + 5
29	1 + 2 + 4 + 5
30	1 + 2 + 3 + 6
31	1 + 2 + 2 + 7
32	1 + 2 + 3 + 3 + 3
33	1 + 2 + 2 + 3 + 4

Studia Musicologica Academiae Scientiarum Hungaricae 9, 1967

W. Reckziegel, "Musikanalyse und Wissenschaft." Studia Musicologica 9(1-2), 1967, p. 163-186

Le permutoèdre comme paramètre de style



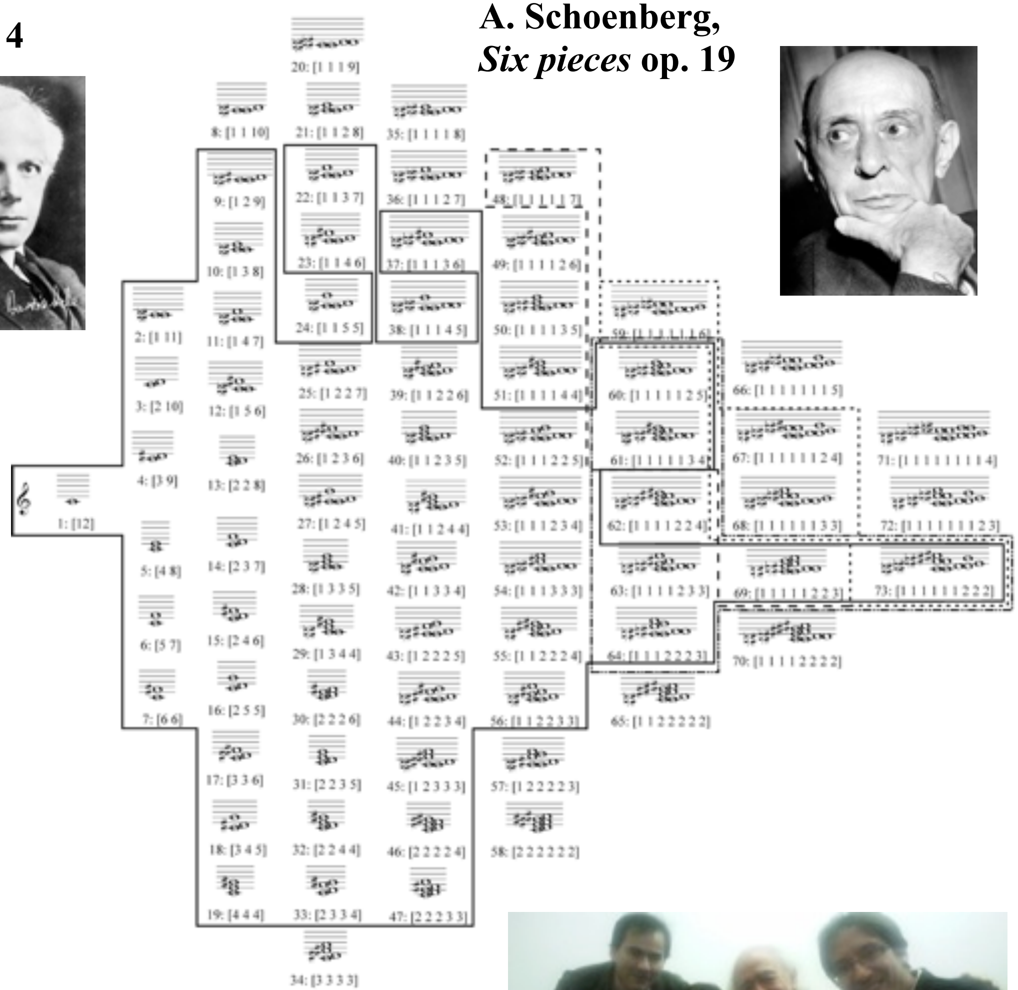
L. Van Beethoven,
Quatuor n° 17

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Z_n	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1
D_n	1	6	12	29	38	50	38	29	12	6	1	1
A_n	1	5	9	21	25	34	25	21	9	5	1	1
S_n	***1***	***6***	***12***	***15***	***12***	***11***	***7***	***5***	***3***	***2***	***1***	***1***

L'analyse musicale comme trajectoire dans un espace

B. Bartok, Quartet n° 4
(3d movement)

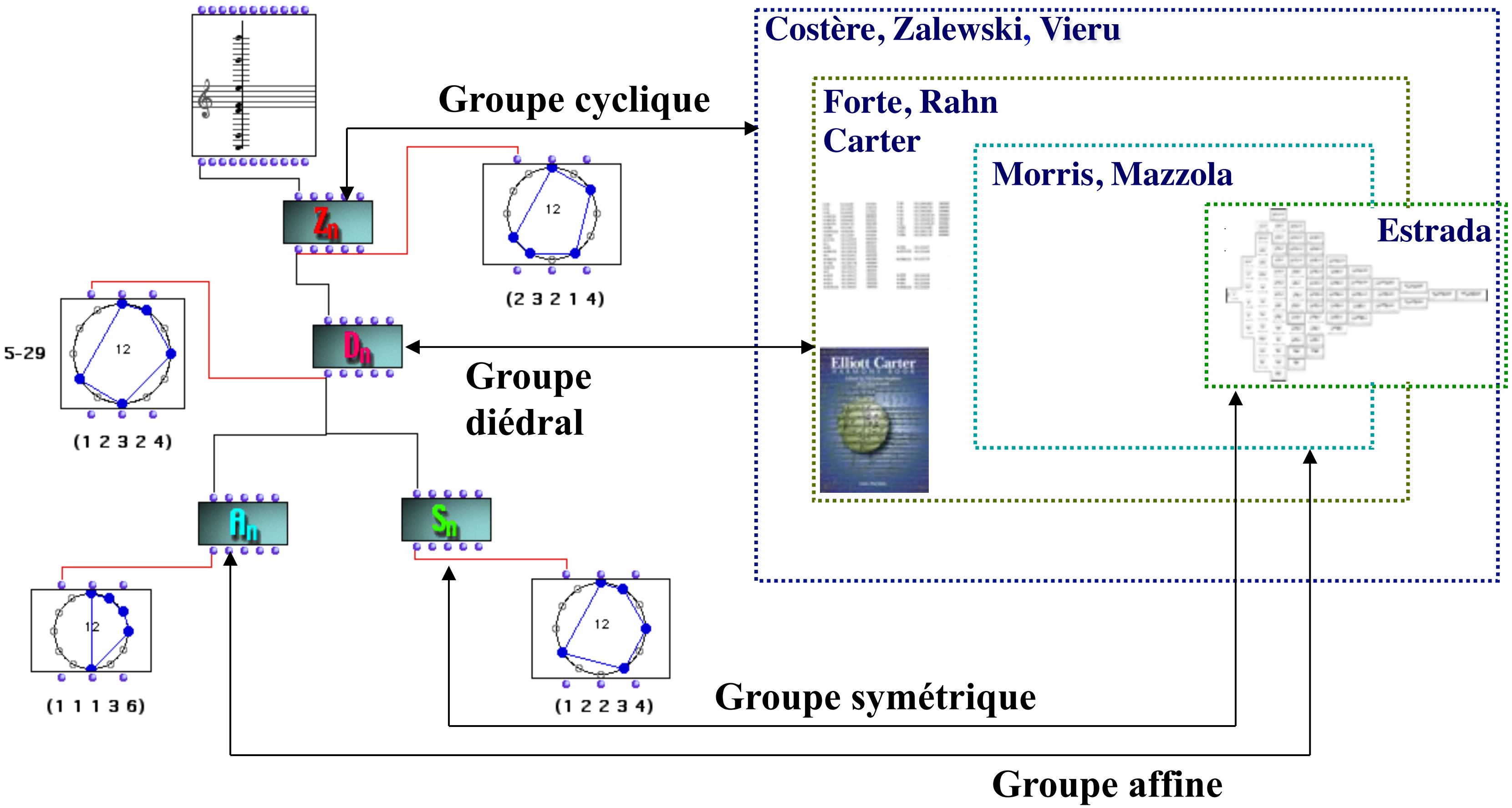
A. Schoenberg,
Six pieces op. 19



J. Estrada, "The intervallic thought",
Joint course ATIAM/Cursus , 20th November 2012

➔ **`http://ressources.ircam.fr/archiprod.html`**

Architecture paradigmatique et dualité objectale/opératoire

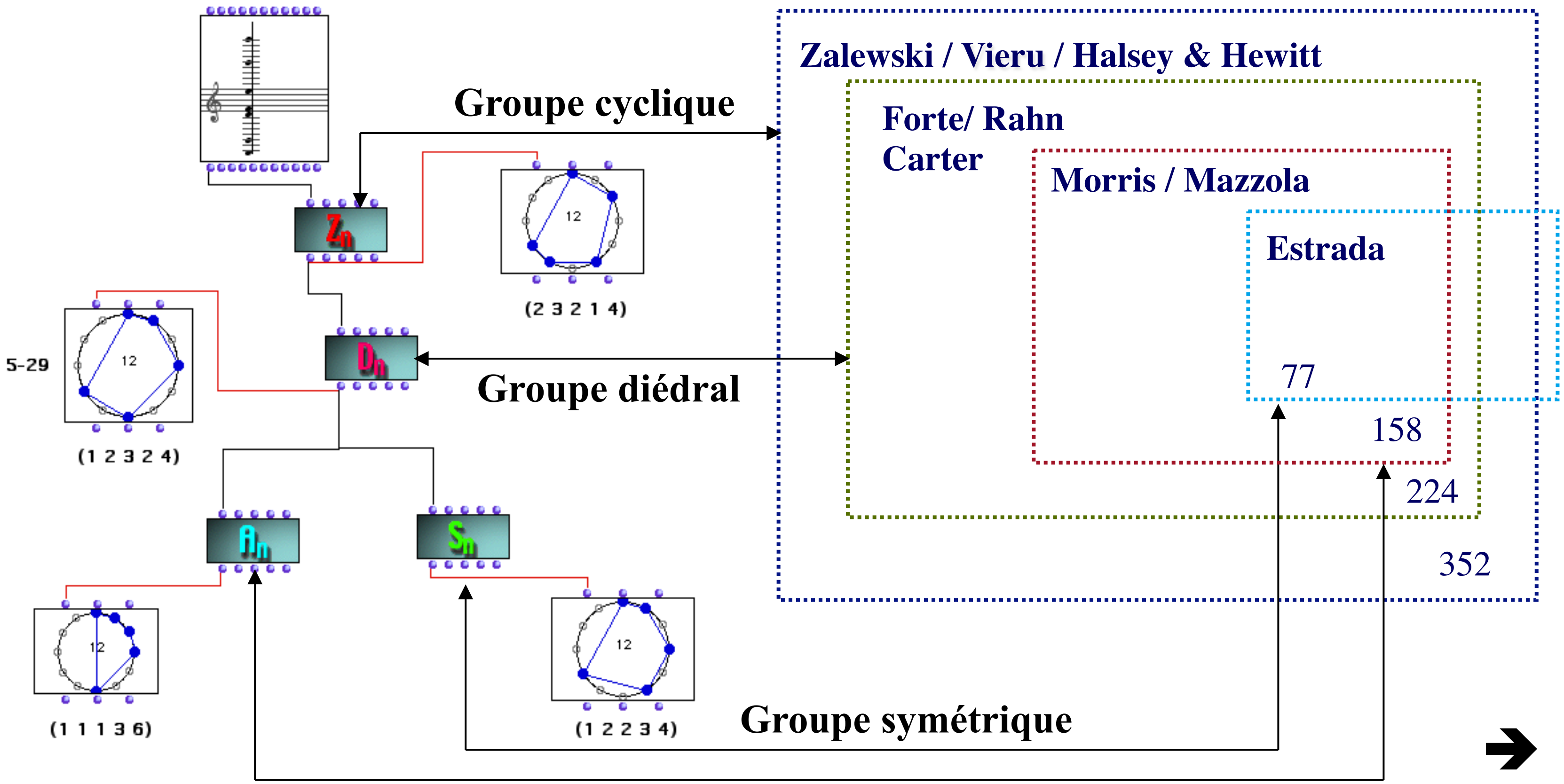


« [C'est la **notion de groupe** qui] donne un sens précis à l'idée de **structure** d'un ensemble [et] permet de déterminer les éléments efficaces des transformations en réduisant en quelque sorte à son **schéma opératoire** le domaine envisagé. […]L'objet véritable de la science est le **système des relations** et non pas les termes supposés qu'il relie. […] Intégrer les résultats - symbolisés - d'une expérience nouvelle revient […] à créer un canevas nouveau, un **groupe de transformations** plus complexe et plus compréhensif » **(G.-G. Granger : « Pygmalion. Réflexions sur la pensée formelle », 1947)**

G.-G. Granger

Classification paradigmatique des structures musicales

$G\backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
C_{12}	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1	
D_{12}	1	6	12	29	38	50	38	29	12	6	1	1	**Set Theory**
$\mathrm{Aff}_1(Z_{12})$	1	5	9	21	25	34	25	21	9	5	1	1	



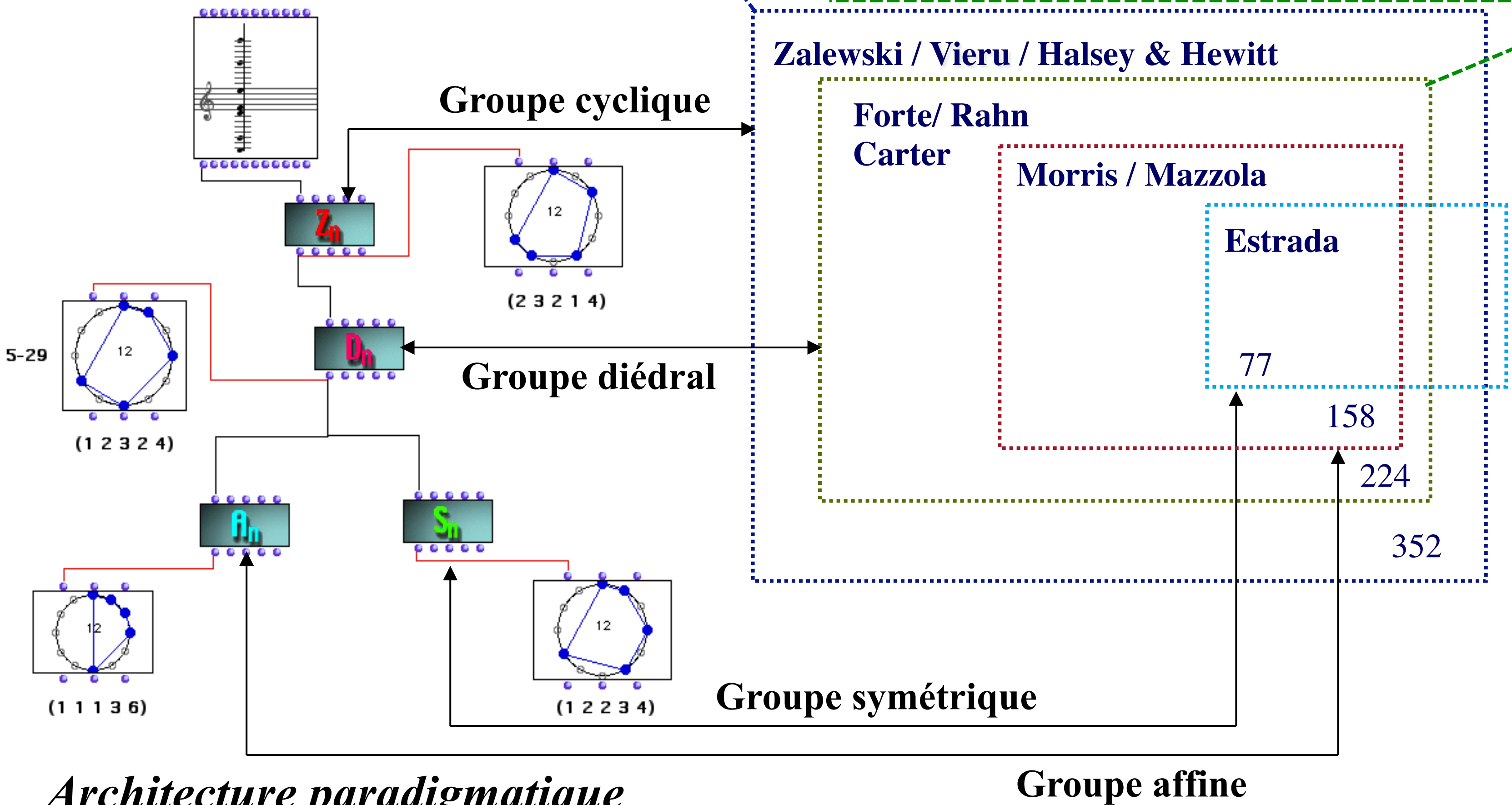
Architecture paradigmatique

02-paradigms

Classification paradigmatique des structures musicales

$$\#\text{ of }k\text{-chords} = \frac{1}{n}\sum_{j|(n,k)} \phi(j)\binom{n/j}{k/j} = \frac{1}{n}\Phi_n(k),$$

$$\#\text{ of }k\text{-chords} = \begin{cases} \frac{1}{2n}\left[\Phi_n(k) + n\binom{(n-1)/2}{[k/2]}\right], & \text{if } n \text{ is odd,} \\ \frac{1}{2n}\left[\Phi_n(k) + n\binom{n/2}{k/2}\right], & \text{if } n \text{ is even and } k \text{ is even,} \\ \frac{1}{2n}\left[\Phi_n(k) + n\binom{(n/2)-1}{[k/2]}\right], & \text{if } n \text{ is even and } k \text{ is odd.} \end{cases}$$



Architecture paradigmatique

• D. Halsey & E. Hewitt: « Eine gruppentheoretische Methode in der Musik-theorie », *Jahresber. Der Dt. Math.-Vereinigung*, 80, 1978.
• D. Reiner: «Enumeration in Music Theory», *Amer. Math. Month*. 92:51-54, 1985
• R.C. Read: « Combinatorial problems in the theory of music », *Discrete Math.*, 1997
• H. Fripertinger: « Enumeration of mosaics », *Discrete Math.*, 1999

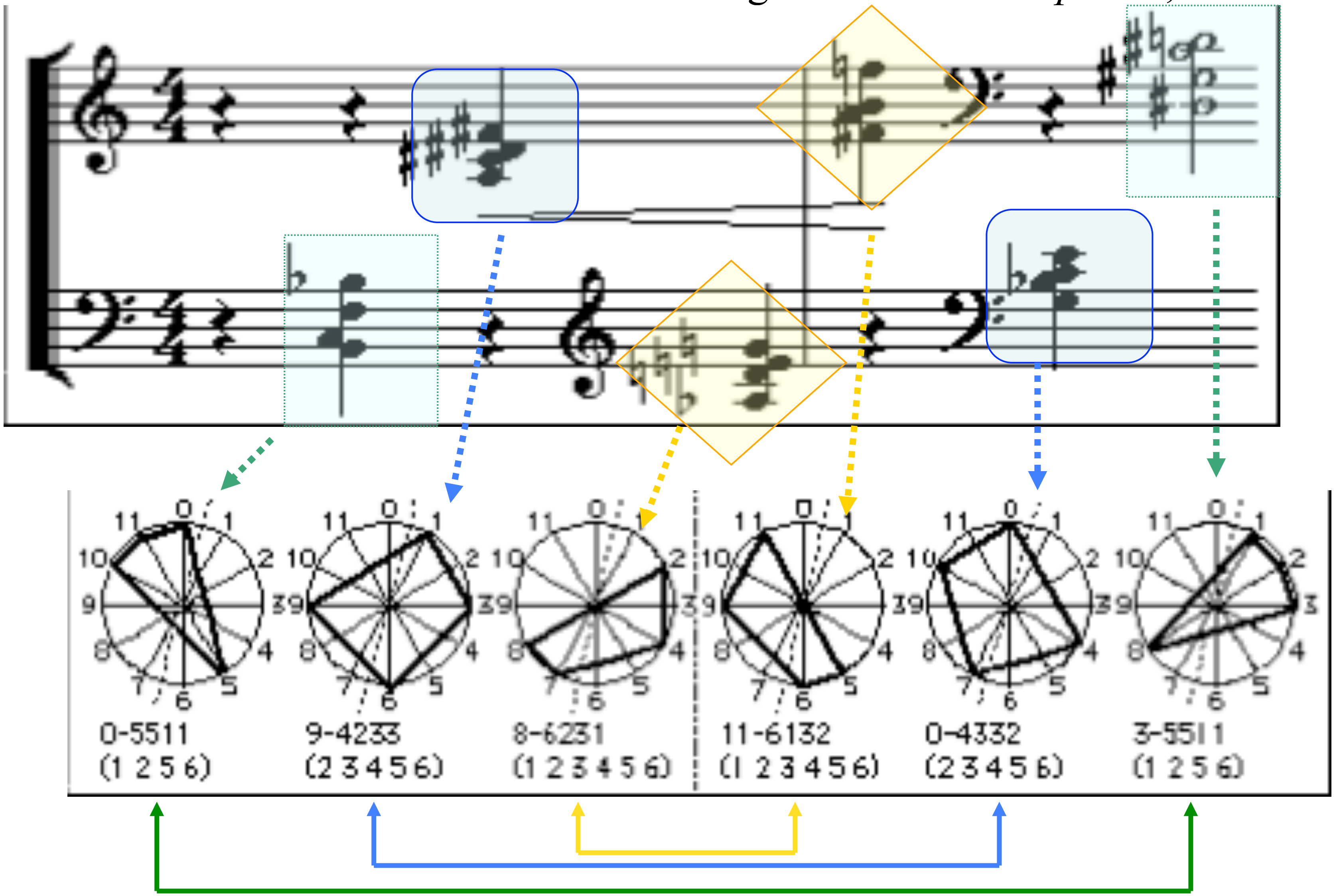
➔ 

06-TTL


L’école française en musicologie computationnelle

A. Riotte & M. Mesnage, *Formalismes et modèles musicaux* (in 2 volumes), Collection « Musique/Sciences », Ircam/Delatour France, 2006


A. Schoenberg : *Klavierstück Op. 33a*, 1929

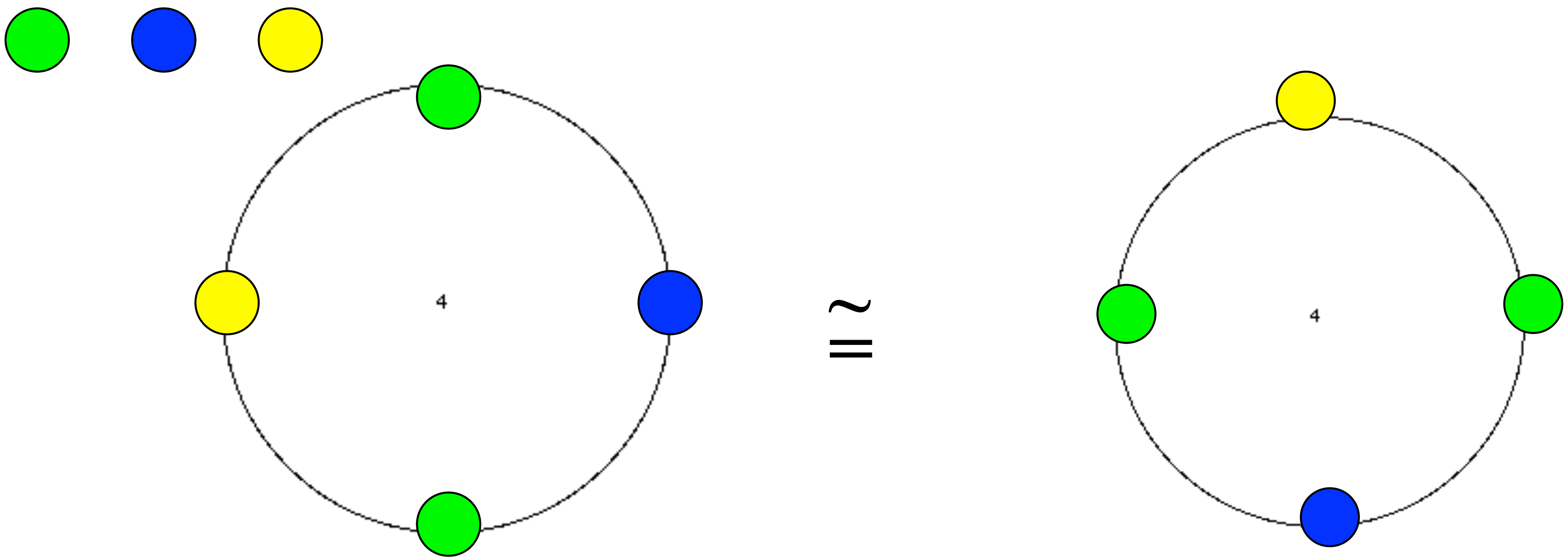


Enumération des classes d'accords (modulo l'action d'un groupe)

Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|.$$

$$X^g = \{x\in X : gx=x\}$$



?

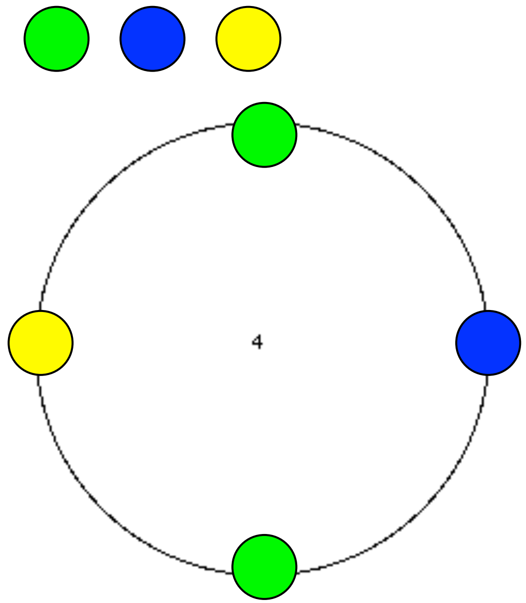
Trouver le nombre de configurations possibles

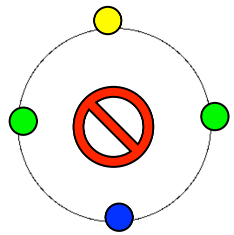
Enumération des classes d’accords (modulo l’action d’un groupe)

Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |X^g|.$$

$X^g = \{x \in X : gx = x\}$





Action de **Z/4Z**

T_0 = identité
T_1 = rotation de 90°
T_2 = rotation de 180°
T_3 = rotation de 270°

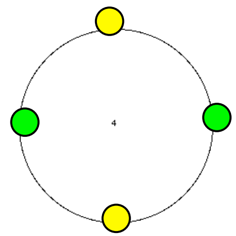
Configurations possibles = 3^4 = 81

T_0 fixe toute configuration => $|X^{T_0}|=81$

T_1 fixe toute configuration monochromes => $|X^{T_1}|=3$

T_3 idem

T_2 fixe toute configuration «double-diamètre » => $|X^{T_1}| = 3^2 = 9$



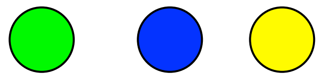
n = 1/4 (81+3+3+9) = 24

Enumération des classes d'accords (modulo l'action d'un groupe)

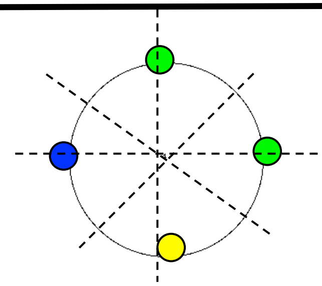
Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|.$$

$$X^g = \{x \in X : gx = x\}$$



Action de $\mathbf{D_4}$



Transformation	*Action*	*Cycle representation*	*No. of cycles*	*Fixed configs.*	*Cycle type*	*Cycle index*
T_0	$0\to0,\ 1\to1,\ 2\to2,\ 3\to3$	(0)(1)(2)(3)	4	$3^4 = 81$	1^4	$t_1^{\,4}$
T_1	$0\to1\to2\to3\to0$	(0 1 2 3)	1	$3^1 = 3$	4^1	$t_4^{\,1}$
T_2	$0\to2\to0,\ 1\to3\to1$	(0 2)(1 3)	2	$3^2 = 9$	2^2	$t_2^{\,2}$
T_3	$0\to3\to2\to1\to0$	(0 3 2 1)	1	$3^1 = 3$	4^1	$t_4^{\,1}$
I	$0\to0,\ 1\to3\to1,\ 2\to2$	(0)(1 3)(2)	3	$3^3 = 27$	$1^2 2^1$	$t_1^{\,2}t_2^{\,1}$
T_1I	$0\to1\to0,\ 2\to3\to2$	(0 1)(2 3)	2	$3^2 = 9$	2^2	$t_2^{\,2}$
T_2I	$0\to2\to0,\ 1\to1,\ 3\to3$	(0 2)(1)(3)	3	$3^3 = 27$	$1^2 2^1$	$t_1^{\,2}t_2^{\,1}$
T_3I	$0\to3\to0,\ 1\to2\to1$	(0 3)(1 2)	2	$3^2 = 9$	2^2	$t_2^{\,2}$

Julian Hook, « Why are there 29 Tetrachords? A Tutorial on Combinatorics and Enumeration in Music Theory », MTO, 13(4), 2007

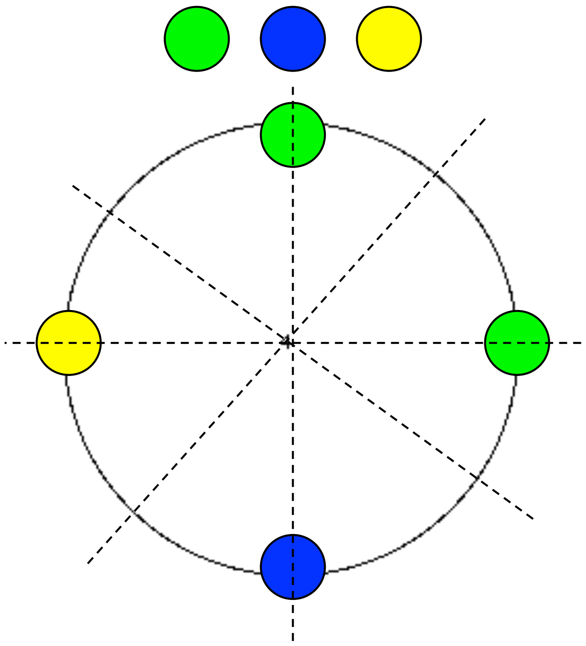
$$n = 1/8\ (81+3+3+9+27+9+27+9) = 168/8=21$$

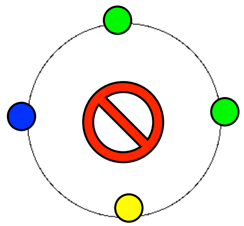
Enumération des classes d'accords (modulo l'action d'un groupe)

Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |X^g|.$$

$$X^g = \{x \in X : gx = x\}$$

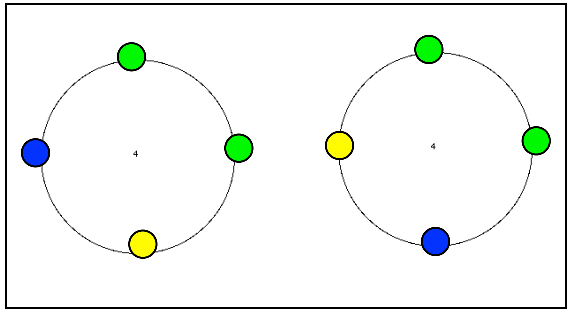


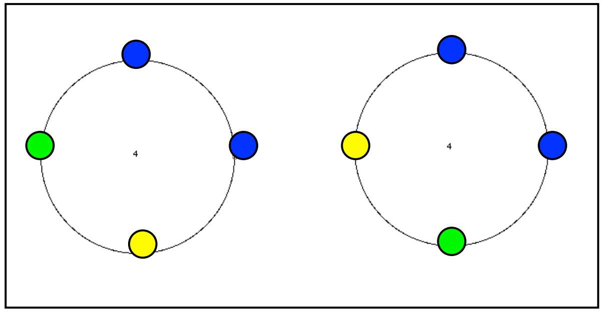


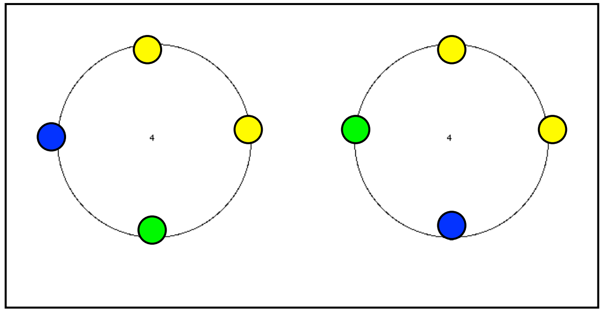
Action de $\mathbf{D_4}$

T_0 = id	$T_0 I$ = inversion
T_1 = rot 90°	$T_1 I$ = inv.
T_2 = rot 180°	$T_2 I$ = inv.
T_3 = rot 270°	$T_3 I$ = inv.

⇒ 21=24-3







Enumération d'accords par rapport à l'action du groupe diédrale

Transformation	*Cycle representation*	*No. of cycles*	*Fixed configs.*	*Cycle type*	*Cycle index*
T_0	(0)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(A)(B)	12	$2^{12} = 4096$	1^{12}	t_1^{12}
T_1	(0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B)	1	$2^1 = 2$	12^1	t_{12}^1
T_2	(0 2 4 6 8 A)(1 3 5 7 9 B)	2	$2^2 = 4$	6^2	t_6^2
T_3	(0 3 6 9)(1 4 7 A)(2 5 8 B)	3	$2^3 = 8$	4^3	t_4^3
T_4	(0 4 8)(1 5 9)(2 6 A)(3 7 B)	4	$2^4 = 16$	3^4	t_3^4
T_5	(0 5 A 3 8 1 6 B 4 9 2 7)	1	$2^1 = 2$	12^1	t_{12}^1
T_6	(0 6)(1 7)(2 8)(3 9)(4 A)(5 B)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6
T_7	(0 7 2 9 4 B 6 1 8 3 A 5)	1	$2^1 = 2$	12^1	t_{12}^1
T_8	(0 8 4)(1 9 5)(2 A 6)(3 B 7)	4	$2^4 = 16$	3^4	t_3^4
T_9	(0 9 6 3)(1 A 7 4)(2 B 8 5)	3	$2^3 = 8$	4^3	t_4^3
T_{10}	(0 A 8 6 4 2)(1 B 9 7 5 3)	2	$2^2 = 4$	6^2	t_6^2
T_{11}	(0 B A 9 8 7 6 5 4 3 2 1)	1	$2^1 = 2$	12^1	t_{12}^1
I	(0)(1 B)(2 A)(3 9)(4 8)(5 7)(6)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
T_1I	(0 1)(2 B)(3 A)(4 9)(5 8)(6 7)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6
T_2I	(0 2)(1)(3 B)(4 A)(5 9)(6 8)(7)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
T_3I	(0 3)(1 2)(4 B)(5 A)(6 9)(7 8)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6
T_4I	(0 4)(1 3)(2)(5 B)(6 A)(7 9)(8)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
T_5I	(0 5)(1 4)(2 3)(6 B)(7 A)(8 9)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6
T_6I	(0 6)(1 5)(2 4)(3)(7 B)(8 A)(9)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
T_7I	(0 7)(1 6)(2 5)(3 4)(8 B)(9 A)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6
T_8I	(0 8)(1 7)(2 6)(3 5)(4)(9 B)(A)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
T_9I	(0 9)(1 8)(2 7)(3 6)(4 5)(A B)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6
$T_{10}I$	(0 A)(1 9)(2 8)(3 7)(4 6)(5)(B)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
$T_{11}I$	(0 B)(1 A)(2 9)(3 8)(4 7)(5 6)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6

Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |X^g|.$$

$X^g = \{x\in X : gx=x\}$

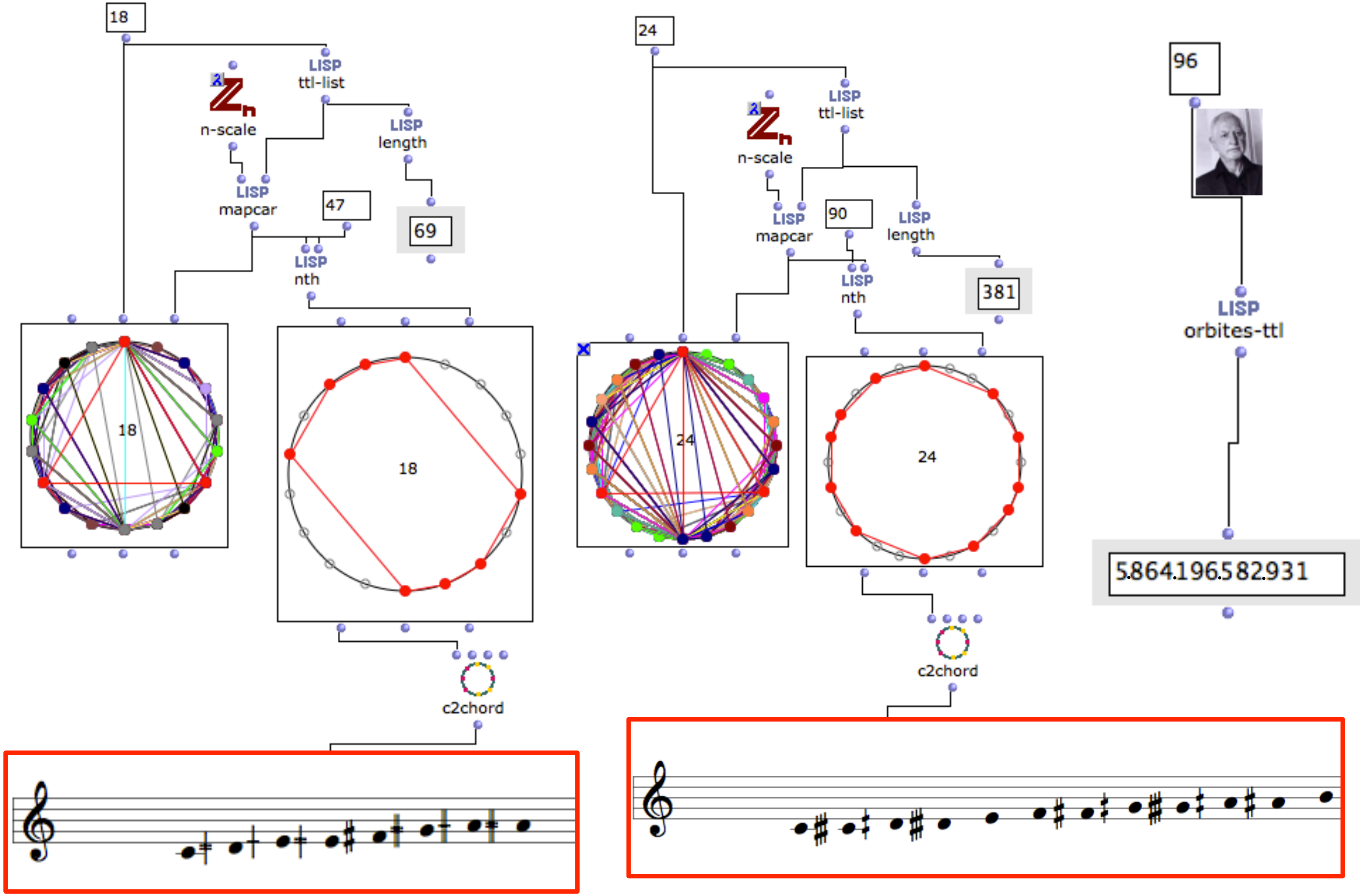
Action de $\mathbf{D_{12}}$

(Hook, MTO)

Z_n # d'accords = 1/12[4096+2+4+8+16+2+64+2+16+8+4+2]=4224/12=352

D_n # d'accords = 1/24[4224+1152] = 224

Extensions microtonales du catalogue des modes à transpositions limitées de Messiaen



Composition des structures modales et modes TL

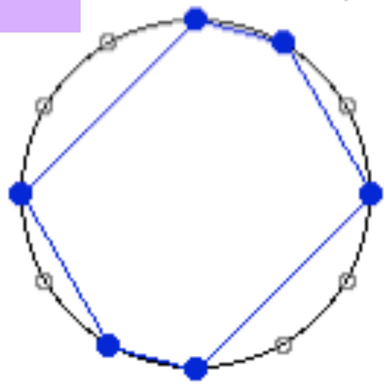
$\{0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 7,\ 9\}$

$(6\ 6)\bullet(1\ 2\ 9)=(6\ 6)\bullet\{0,1,3\}$

$=((6\ 6)\bullet\{0\})\cup((6\ 6)\bullet\{1\})\cup((6\ 6)\bullet\{3\})=$

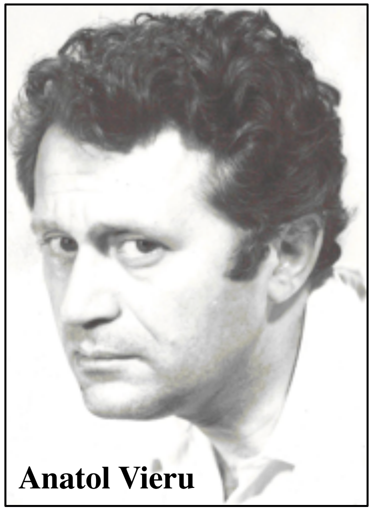
$=\{0,6\}\cup\{1,7\}\cup\{3,9\}=$

$=\{0,1,3,6,7,9\}.$



Multiplication d'accords (Boulez)

$6_0 \cup 6_1 \cup 6_3$ **crible**



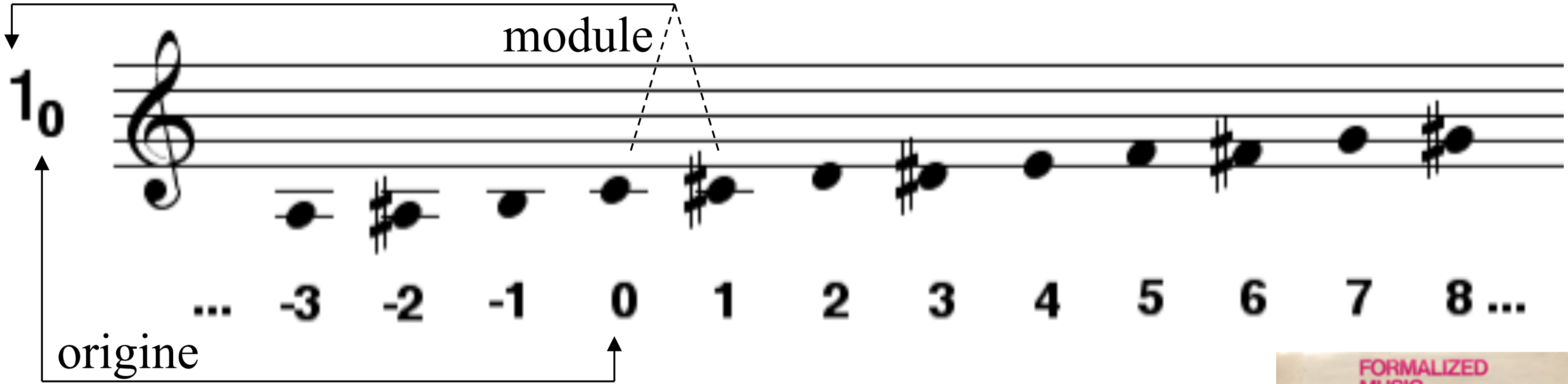
Anatol Vieru

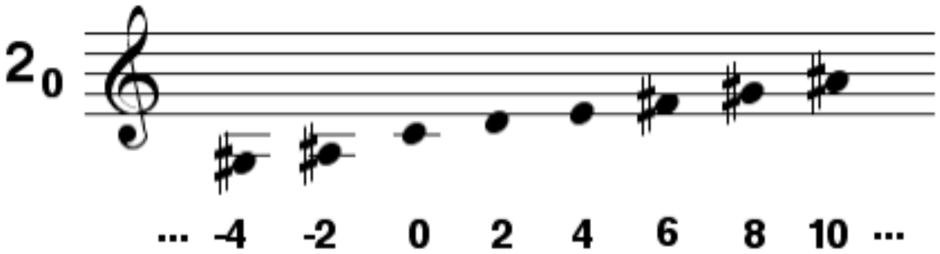
I. Xenakis

P. Boulez

La théorie des cribles ou les structures d’ordre en musique

« [Une] théorie qui annexe les congruences modulo z et qui est issue d'une axiomatique de la structure universelle de la musique » (I. Xenakis, descriptif de la pièce Nomos Alpha *pour violoncelle solo, 1966)*



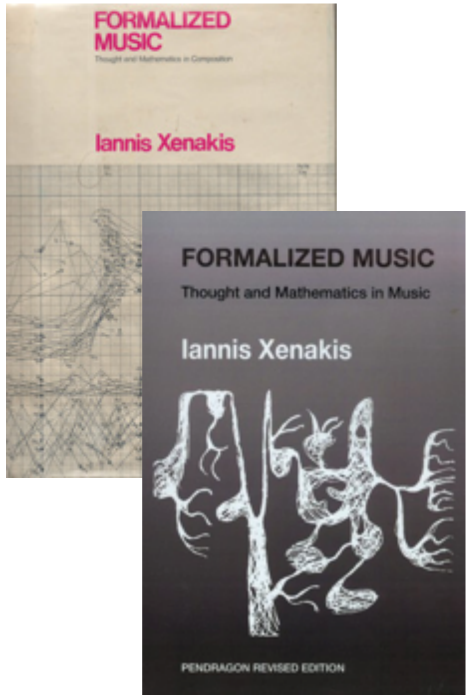


$1_0 = 2_0 \cup 2_1$

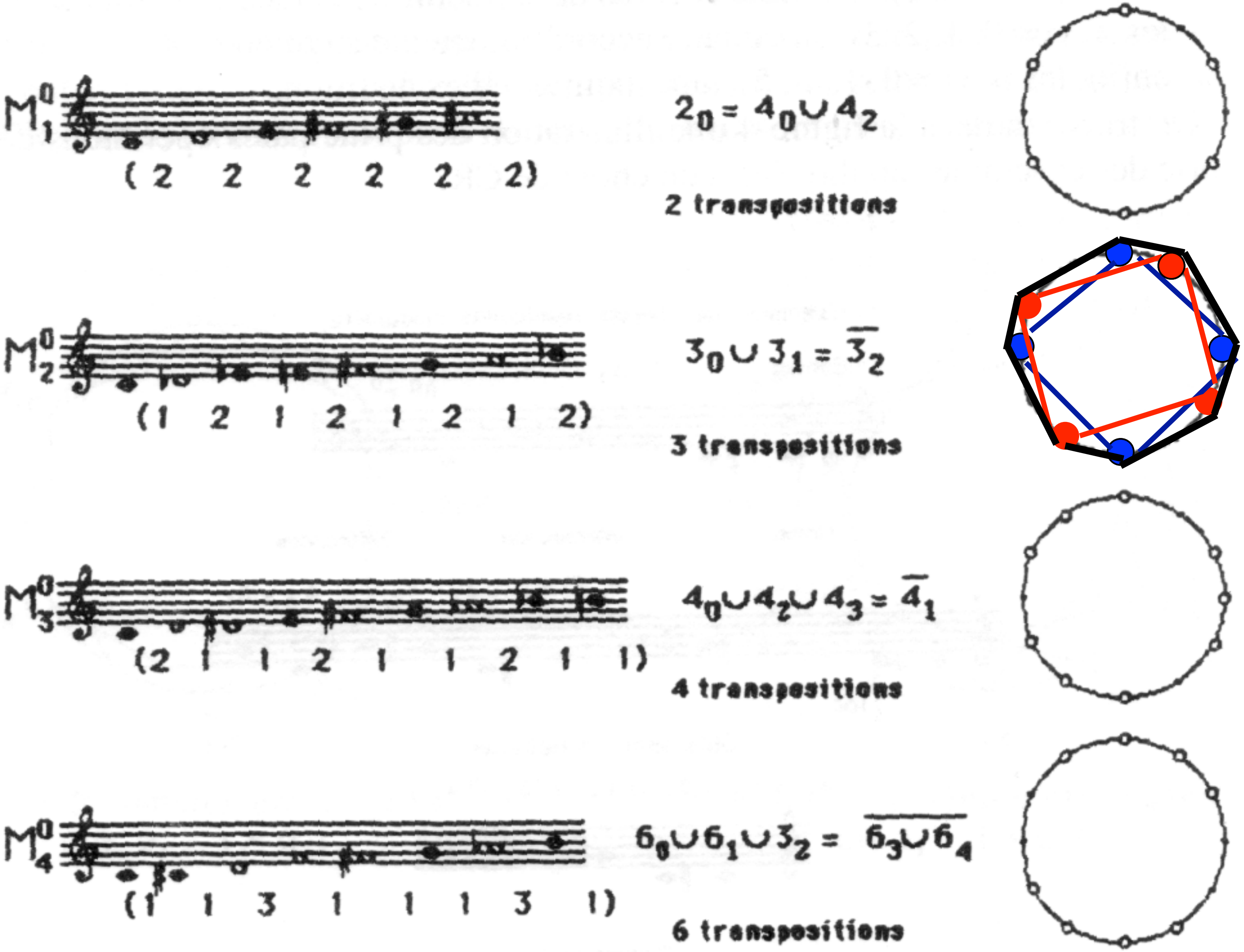
$2_0 \cap 2_1 = \varnothing$

$(2_0)^c = 2_1$

$(2_1)^c = 2_0.$

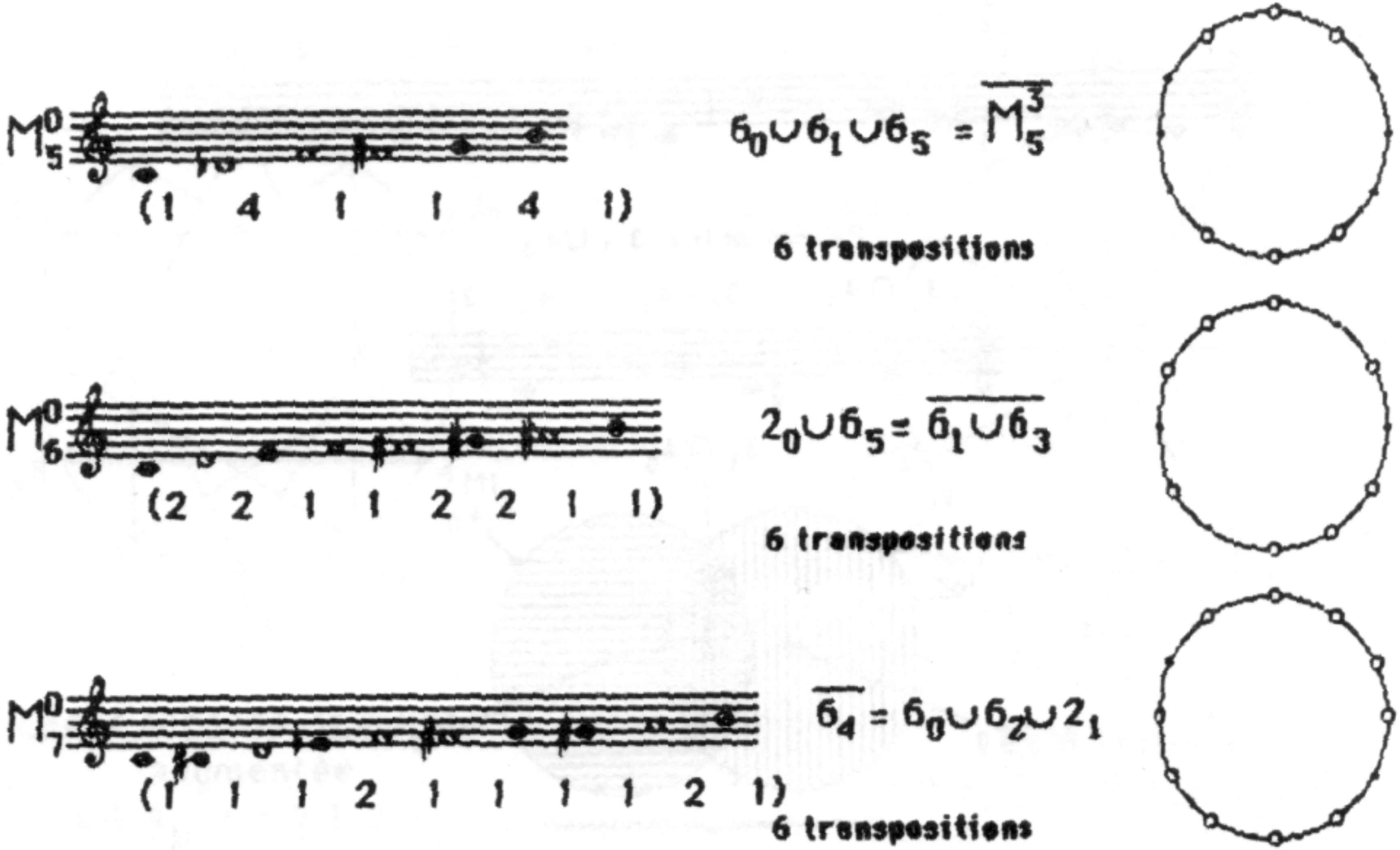


Théorie des cribles et modes de Messiaen



A. Riotte, "L'utilisation de modèles mathématiques en analyse et en composition musicales", *Quadrivium musiques et sciences*, éditions ipmc, Paris, 1992.

Théorie des cribles et modes à transpositions limitées



A. Riotte, "L'utilisation de modèles mathématiques en analyse et en composition musicales", Quadrivium musiques et sciences, éditions ipmc, Paris, 1992.

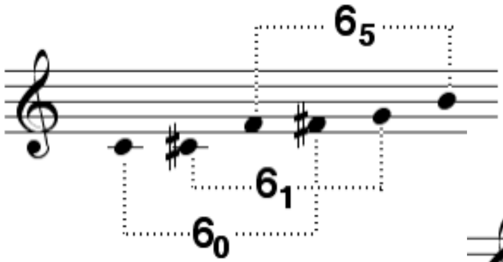
« Cribles » / Messiaen

Catalogue

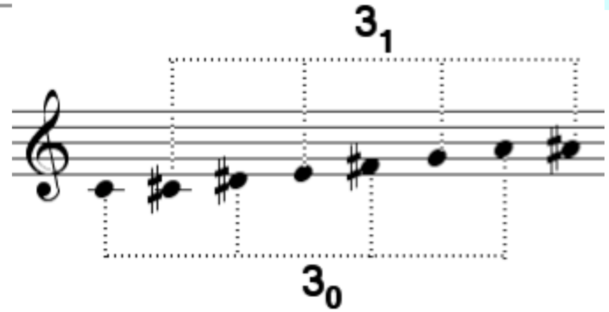
(1_0) (2_0) (3_0) (4_0) (6_0) $6_0 \cup 6_1$ $6_0 \cup 6_2$

$6_0 \cup 6_1 \cup 6_5$

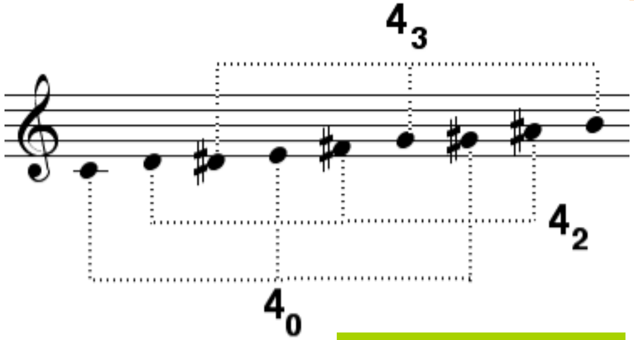
Mode n.5

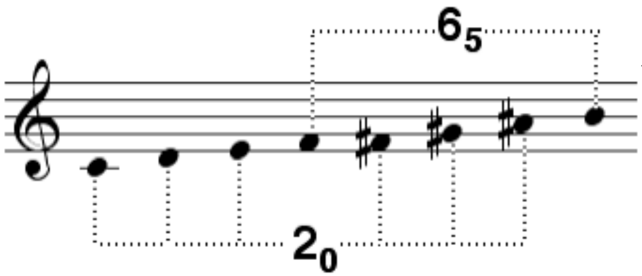


$3_0 \cup 3_1$ *Mode n.2*



$4_0 \cup 4_2 \cup 4_3$ *Mode n.3*



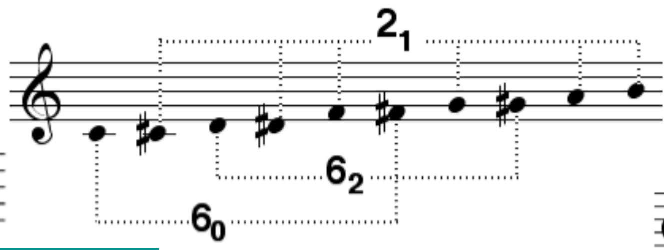


$2_0 \cup 6_5$ *Mode n.6*

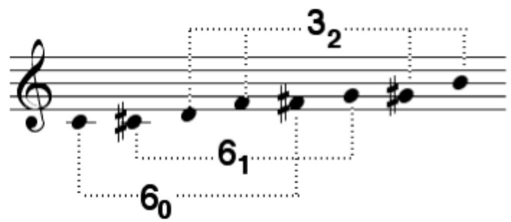
Mode n.8

$6_0 \cup 6_1 \cup 3_2$

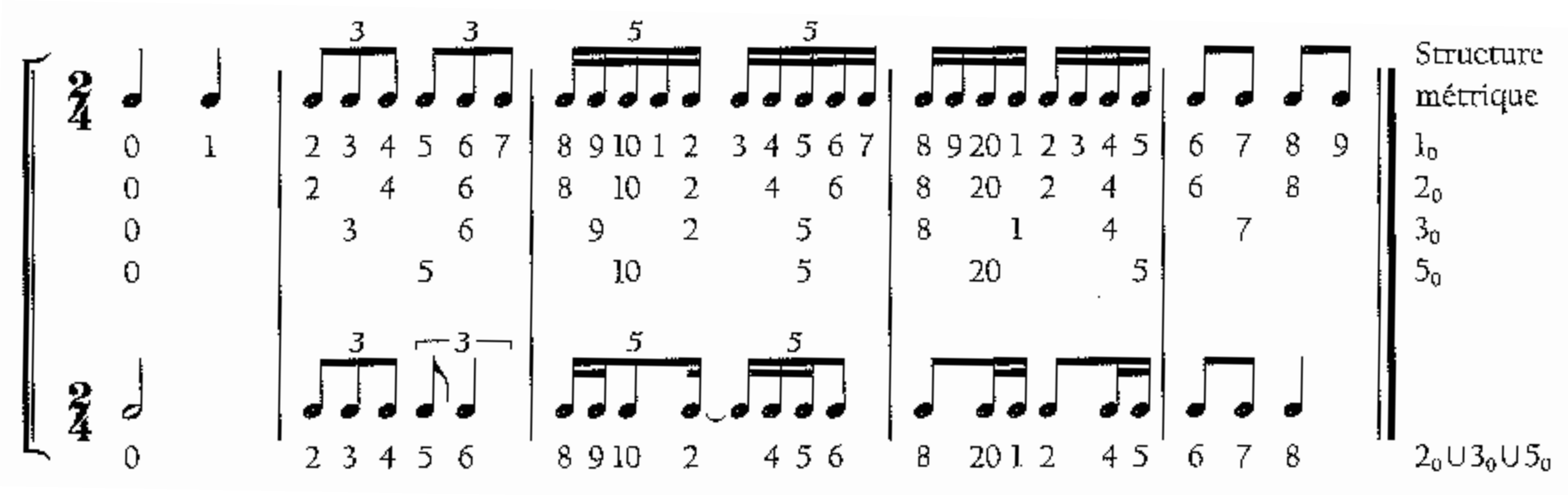
$6_0 \cup 6_1 \cup 3_2$ *Mode n.4*



Mode n.7 $2_1 \cup 6_0 \cup 6_2$

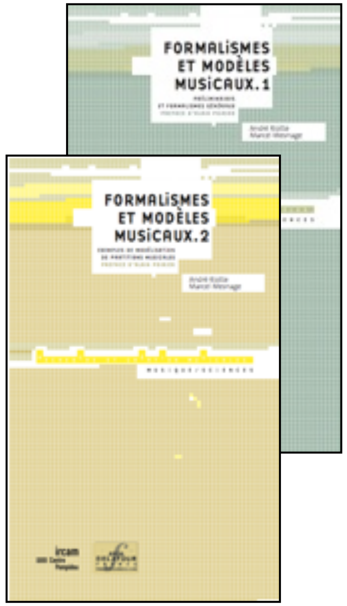


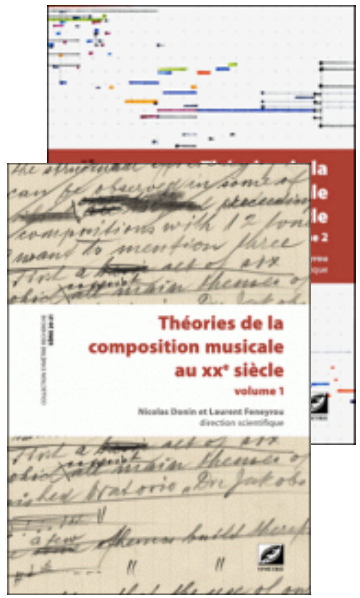
Extensions de la théorie des cribles en musique algorithmiques



E. Amiot, G. Assayag, C. Malherbe & A. Riotte, “Génération et identification de structures de durées en écriture musicale, 1986 (repris dans A. Riotte & M. Mesnage, *Formalismes et modèles musicaux*, collection “Musique/Sciences”, Ircam Delatour France, 2006

M. Andreatta, « Musique algorithmique », in In N. Donin et L. Feneyrou (dir.), *Théorie de la composition musicale au XX*e *siècle*, Symétrie, 2013





Modes à transpositions limitées et contenu intervallique

Le *contenu intervallique* IC_A d'une structure musicale est la multiplicité d'occurrence de ses intervalles