

Math'n'pop :

géométrie et symétrie au service de la chanson

Les premiers théoriciens « modernes » de la musique sont également des mathématiciens : Mersenne et Euler ont proposé des représentations géométriques de l'espace tonal. Ces dernières permettent de capturer de façon naturelle les propriétés de symétrie de certaines successions harmoniques.

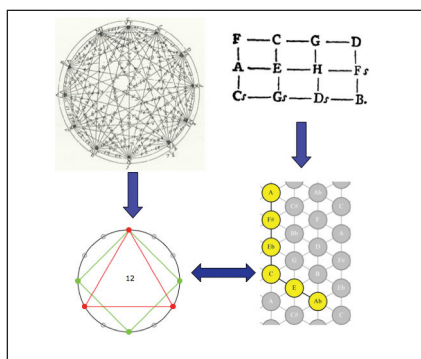
Qu'ont en commun une chanson de Paolo Conte, telle *Madeleine*, la pièce *Easy Meat* de l'inclassable Frank Zappa et le morceau *Shake the Disease*, tube des années 1980 du groupe pop Depeche Mode ? Bien qu'évidemment très lointaines d'un point de vue stylistique, ces pièces partagent en réalité une même préoccupation en ce qui concerne l'organisation harmonique ou, plus exactement, la façon avec laquelle les accords consonants majeurs et mineurs se déploient dans l'espace tonal. Pour mettre en évidence ces similitudes, nous allons nous appuyer sur une représentation géométrique des accords, dont les origines lointaines remontent à Euler.

Quand Mersenne et Euler s'intéressent à la musique

En effet, c'est dans la seconde moitié du XVIII^e siècle que le mathématicien suisse propose de considérer les notes et les tonalités comme des points d'un

espace bidimensionnel, une représentation géométrique qu'il appelle le « *speculum musicum* ». En opposition à la représentation circulaire, introduite par Marin Mersenne plus d'un siècle auparavant, Euler considère l'espace tonal comme engendré par deux axes représentant les intervalles à partir desquels tout intervalle peut être calculé. On découvrira par la suite, grâce au développement de la théorie des groupes et, notamment, au théorème de décomposition de Sylow, que les deux représentations sont *de facto* équivalentes, le groupe cyclique d'ordre 12 (c'est-à-dire le cercle) étant isomorphe au tore en tant que produit des sous-groupes d'ordre 3 et 4 respectivement (voir la figure suivante).

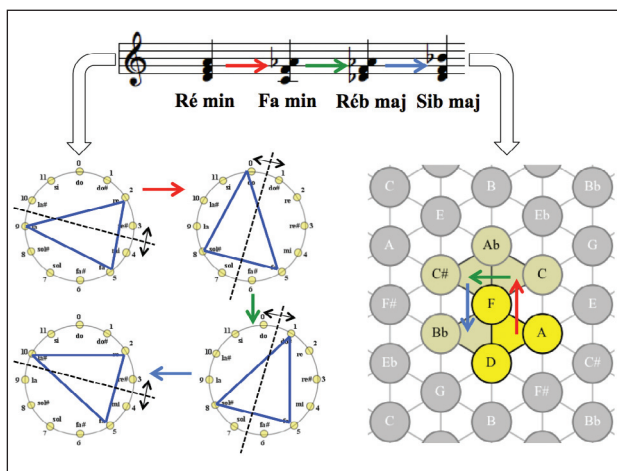
Les lecteurs « aficionados » de *Tangente* ayant déjà une certaine familiarité avec la représentations circulaire des structures musicales (voir le hors-série *Maths et Musique* par exemple), nous allons utiliser surtout le second type d'espace



Deux représentations géométriques équivalentes : la représentations circulaire et le « *speculum musicum* » d'Euler, à l'origine du Tonnetz (à droite). Les représentations circulaires et le Tonnetz sont réalisées, respectivement, à l'aide de l'environnement de programmation OpenMusic et du logiciel Hexachord.

géométrique, auquel le cercle sera souvent associé afin de montrer comment ces deux espaces de hauteurs permettent de capturer de façon naturelle les propriétés de symétrie de certaines successions harmoniques. Pour s'en rendre compte, commençons par analyser le refrain de *Shake the Disease* du groupe Depeche Mode (Mute Records, 1985) à l'aide des deux représentations géométriques. Ce refrain est constitué de quatre accords

qui se répètent cycliquement en déployant de multiples symétries. Une première transformation, en rouge, est celle reliant deux accords (*ré* mineur et *fa* mineur) ayant en commun une note (le *fa*). Une transformation similaire est celle, en bleu, reliant les deux accords majeurs (*ré* bémol majeur et *si* bémol majeur) ayant la même note *fa* en commun. La transformation verte, ainsi que celle permettant de clore le cycle, est de nature différente car elle change la nature de l'accord (d'un accord mineur à un accord majeur, ou d'un accord majeur au premier accord mineur de la séquence harmonique). Dans les deux cas, l'accord et son transformé ont deux notes en commun et la troisième note est transformée dans sa symétrique par rapport à un axe de réflexion correspondant à l'un des diamètres du cercle. Cette symétrie, reliant les accords de *fa* mineur et *ré* bémol majeur (ainsi que *si* bémol majeur et *ré* mineur), est l'une des trois transformations permettant de passer d'un accord majeur à un accord mineur (ou *vice versa*) tout en gardant deux notes inchangées. Dans la tradition analytique américaine, inspirée des travaux de l'Allemand Hugo Riemann, ces trois transformations s'appellent le *parallèle* (opérateur indiqué par P), le *relatif* (R) et le *leading tone* (L). Elles sont déployées



Transformations géométriques à la base du refrain de *Shake the Disease* du groupe Depeche Mode. La progression harmonique, constituée de cinq accords, est formalisée à l'aide de la représentation circulaire (à gauche) et du Tonnetz (à droite). Dans les deux cas on voit apparaître clairement des symétries entre le premier et le dernier accord, ainsi qu'entre le deuxième et le troisième. Ces deux symétries miroir correspondent à la même transformation néo-riemannienne, appelée L (comme « *leading tone* »).

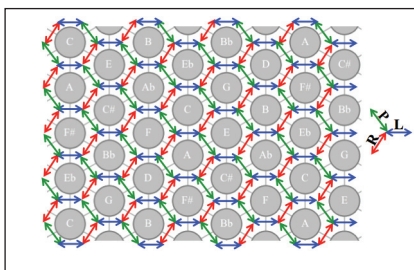
ACTIONS

Math'n'pop



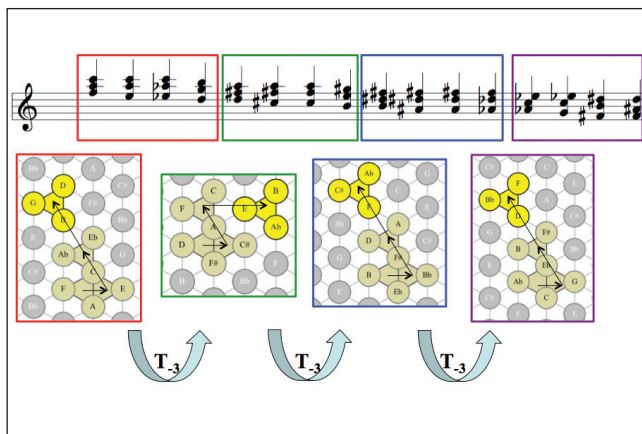
Le musicologue Hugo Riemann (1849–1919), contemporain du mathématicien Bernhard Riemann.

dans dans une portion du réseau de notes suivant :



Les trois transformations P (comme « parallèle »), R (comme « relatif ») et L (comme « leading tone ») permettant de passer d'une triade majeure à une triade mineure ayant avec l'accord de départ deux notes en commun.

On peut montrer que le « groupe néo-riemannien » engendré par ces transformations opère sur l'espace des triades consonantes de façon simplement transitive. De plus, cette action est en rapport de « dualité » avec celle du groupe diédral qui opère, lui aussi, de façon simplement transitive sur le même espace d'accords consonants.

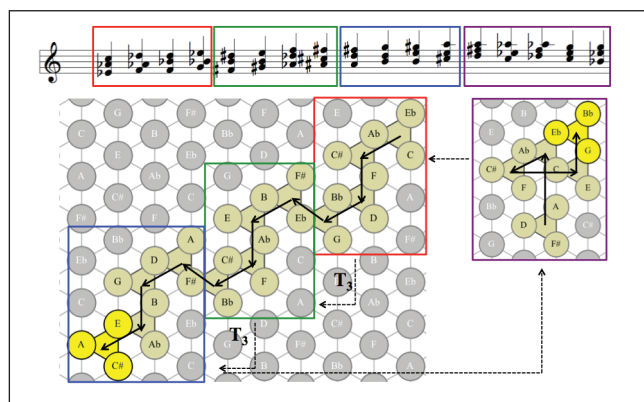


Une progression harmonique nettement plus complexe est celle utilisée par Frank Zappa dans la partie instrumentale de la pièce *Easy Meat* (Mud Shark, 1980). Il s'agit d'une progression qui comporte seize accords au total et qui peut se décomposer comme une répétition d'une même cellule de quatre accords. Chaque cellule déploie ainsi la même succession de transformations néo-riemanniennes, dont on laissera comme exercice au lecteur le soin d'en établir l'expression comme produit des transformations de base P, R et L. Les quatre parcours dans le *Tonnetz* sont indiqués ci-dessous.

On a la même impression de forte ressemblance entre des blocs d'accords à l'écoute de certaines chansons de Paolo Conte. C'est sans doute le cas de *Madeleine* (Ariola International, 1981), une chanson dans laquelle la progression harmonique de l'introduction, répétée plusieurs fois tout au long de la chanson, est également composée de quatre blocs de quatre accords chacun. Les trois premiers blocs sont la répétition, transposée d'un intervalle de trois demi-tons (T_3), de la même progression d'accords. Le dernier bloc, constitué de cinq accords, déploie des nouvelles trajectoires dans l'espace jusqu'à l'accord final permettant de « boucler la boucle » et revenir ainsi à l'accord de départ. La suite complète d'accords est représentée dans la figure en haute de la page suivante :

Progression harmonique dans la pièce *Easy Meat* de Frank Zappa, vue comme une série de transpositions (d'une tierce mineure descendante T_{-3}) d'une même cellule (en rouge).

Les quatre cellules correspondent donc à la même trajectoire dans le *Tonnetz* (les différences n'étant qu'apparentes à cause de la structure toroïdale du *Tonnetz*).

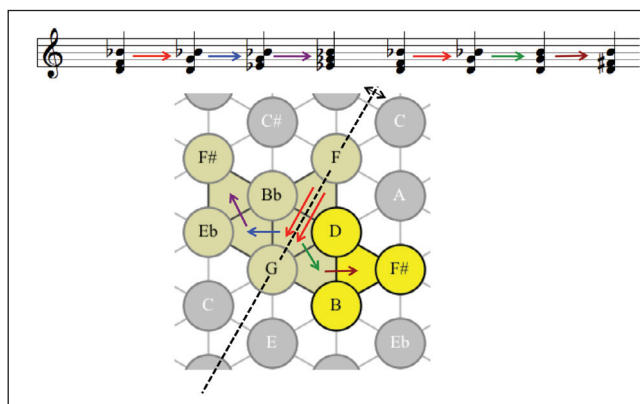


Progression harmonique à la base de la chanson *Madeleine* de Paolo Conte, vue comme une série de transpositions d'une tierce mineure ascendante (T_3) d'une même cellule de quatre accords (cellule en rouge). Les derniers cinq accords de la progression, correspondants à la cellule en violet, déploient une trajectoire spatiale complètement différente, leur fonction étant celle de permettre un retour à la tonalité initiale.

En regardant (ou plutôt en écoutant) plus attentivement la progression harmonique à la base de la *Madeleine*, on s'aperçoit d'une deuxième propriété remarquable de cette progression, à savoir celle de réaliser un *recouvrement* de l'espace chromatique avec des transpositions d'une même triade consonante. Autrement dit, dans l'espace potentiel des douze accords majeurs, le musicien a trouvé un chemin harmonique lui permettant de passer par presque tous les accords (à l'exception de l'accord de *fa* majeur), en minimisant, en quelque sorte, le nombre de répétitions d'un accord déjà utilisé. C'est un exemple d'utilisation d'une propriété qui rappelle le caractère hamiltonien et qui peut être explicitée en utilisant le *Tonnetz* comme espace et les opérateurs P, L et R comme symétries. En effet, comme on l'a vu, le *Tonnetz* est beaucoup plus riche car des symétries permettent de lier, de multiples façons, un accord majeur avec des accords mineurs ayant, avec l'accord de départ, deux notes en commun. Quel serait l'équivalent de la propriété observée dans la chanson de Paolo Conte dans l'espace potentiel des vingt-quatre accords majeurs et mineurs ? Une telle démarche, que l'on qualifiera d'oumupienne et même d'oumupopienne, pour souligner le caractère « pop » des réalisations musicales, nous a permis de

réaliser *Aprile* (voir en encadré), une véritable « chanson hamiltonienne » sur un texte du poète italien décadent Gabriele D'Annunzio (1863–1938).

La chanson *Aprile* utilise, dans les parties instrumentales uniquement, trois cycles hamiltoniens distincts dont le début est anticipé dans la suite d'accords utilisés dans la section introductive du morceau :



Progression harmonique utilisée dans la section introductive du morceau *Aprile*, sur un texte du poète Gabriele D'Annunzio. Cette progression est composée de deux suites de cinq accords dont le jeu de symétries internes saute aux yeux dans le *Tonnetz*.

Le premier cycle hamiltonien est représenté ci-dessous en notation musicale traditionnelle et en indiquant le chemin à l'intérieur du *Tonnetz* :

ACTIONS

Math'n'pop

Aprile (d'après Gabriele D'Annunzio)

*Socchiusa è la finestra, sul giardino.
Un'ora passa lenta, sonnolenta.
Ed ella, ch'era attenta, s'addormenta
A quella voce che già si lamenta,
Che si lamenta in fondo a quel giardino.*

(Premier cycle hamiltonien)

*Non è che voce d'acque su la pietra:
E quante volte, quante volte udità!
Quell'amore e quell'ora in quella vita
S'affondan come ne l'onda infinita
Stretti insieme il cadavere e la pietra.*

(Deuxième cycle hamiltonien)

*Ella stende l'angoscia sua nel sonno.
L'angoscia è forte, e il sonno è così lieve!
(Par la luce d'avril quasi una neve
che sia tiepida.)
Ed ella certo deve soffrire,
Vagamente, anche nel sonno.*

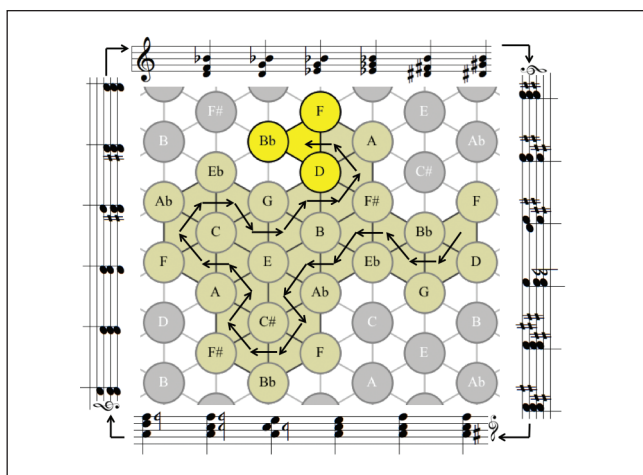
(Troisième cycle hamiltonien)

La fenêtre est entr'ouverte, sur le jardin.
Une heure passe, lente, somnolente.
Et elle, d'abord attentive, finit par s'endormir.
À cette voix qui là-bas se lamente,
Qui se lamente au fond de ce jardin.

Ce n'est qu'une voix d'eau sur la pierre,
Et combien de fois, combien de fois entendue !
Cet amour et cette heure s'abîment dans cette vie
Comme s'abîment dans l'onde sans fin
Le cadavre et la pierre liés ensemble.

Elle détend son angoisse dans le sommeil.
Mais l'angoisse est forte, et le sommeil est si léger !
(La lumière d'avril ressemble presque à une neige
qui serait tiède.)

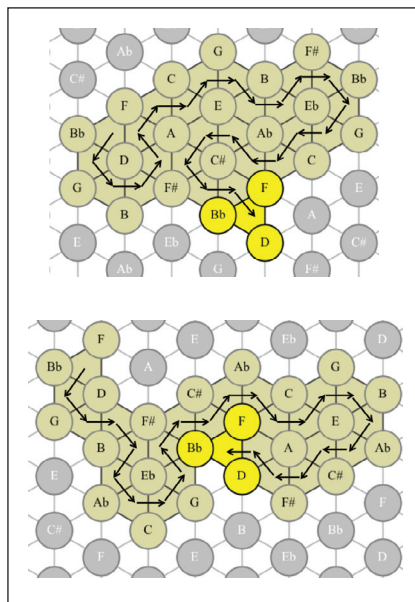
Et certes elle doit souffrir,
Vaguement souffrir, aussi dans le sommeil.



Premier cycle hamiltonien utilisé dans la chanson *Aprile*,
en représentation musicale traditionnelle et en tant
que chemin à l'intérieur du *Tonnetz*.

Les représentations géométriques du
deuxième cycle hamiltonien (ci-contre,
en haut) ainsi que du cycle conclusif
(ci-contre, en bas) montrent clairement

qu'il s'agit de chemins très différents,
ayant cependant en commun les quatre
premiers accords

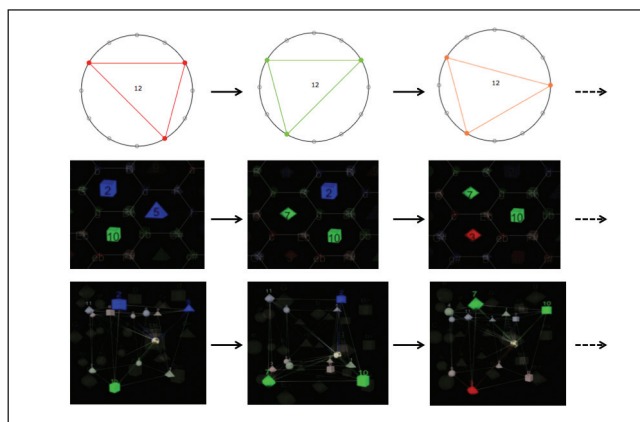


La figure ci-contre, enfin, donne trois représentations géométriques alternatives du début du premier cycle hamiltonien utilisé dans *Aprile*, la première à l'aide de la simple représentation circulaire, et les deux autres en utilisant les visualisations proposées par Gilles Baroin dans son modèle Planet (en deux et quatre dimensions).

Le caractère hamiltonien de tous ces trois cycles et le type de transformations géométriques utilisées, permettant de passer de façon « lisse » d'un accord à l'accord successif en gardant deux notes en commun, maintiennent l'auditeur dans une attente constante de l'accord qui va suivre. Au même temps, l'auditeur a l'impression d'une progression harmonique extrêmement « lisse », dans laquelle chaque accord est lié à l'accord suivant par ce qu'on appelle en jargon musical une « conduite parcimonieuse des voix » (*minimal voice leading*). Le lecteur pourra vérifier que les trois cycles hamiltoniens utilisés ne peuvent pas être décomposés en sous-cycles, ce qui leur donne une sorte de complexité maximale par rapport à d'autres cycles hamiltoniens qui constituent le catalogue, bien connu, de tous les cycles hamiltoniens possibles dans le *Tonnetz*. L'impression que plusieurs auditeurs ont à l'écoute de cette chanson est ainsi celle d'une variété harmonique maximale qui s'accompagne, cependant, d'un sentiment de continuité dans la progression. Les maths, elles sont là, mais (à bien les écouter) elles ont peut-être fini par laisser la place à la musique... ce qui n'est pas non plus une mauvaise chose !

M. A.

Ci-contre, en haut : Deuxième cycle hamiltonien d'*Aprile*. En bas : Troisième et dernier cycle hamiltonien utilisé dans la *coda* instrumentale de la chanson *Aprile*.



Trois représentations géométriques alternatives du début du premier cycle hamiltonien utilisé dans *Aprile*, la première à l'aide de la simple représentation circulaire (en OpenMusic) et les deux autres utilisant les visualisations proposées par Gilles Baroin dans son modèle Planet (respectivement en deux et quatre dimensions).

Références

- *Hamiltonian Cycles in the Topological Dual of the Tonnetz*. Giovanni Albin et Samuele Antonini, Proceedings of the Yale Mathematics and Computation in Music Conference, Springer, 2009.
- *Neo-Riemannian Theory and the Analysis of Pop-Rock Music*. Guy Capuzzo, *Music Theory Spectrum* 26 (2), 2004.
- *De harmoniae veris principiis per speculum musicum repraesentatis*. Leonhard Euler, *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 18, 1774.
- Maths et musique. Bibliothèque Tangente 11, 2010.
- Planet. Modèle de Gilles Baroin : www.youtube.com/user/MatheMusic4D
- Hexachord. Logiciel de Louis Bigo : www.lacl.fr/~lbigo/recherche
- OpenMusic. Langage de programmation : repmus.ircam.fr/openmusic/home
- *Aprile* (et autres expériences omoup(op)iennes) : repmus.ircam.fr/moreno/music



Le chercheur Gilles Baroin (à gauche) avec le théoricien de la musique Thomas Noll.