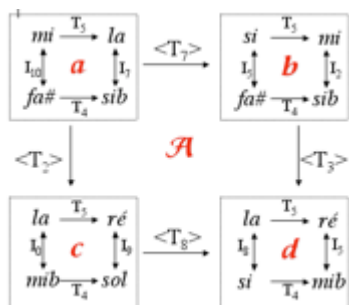
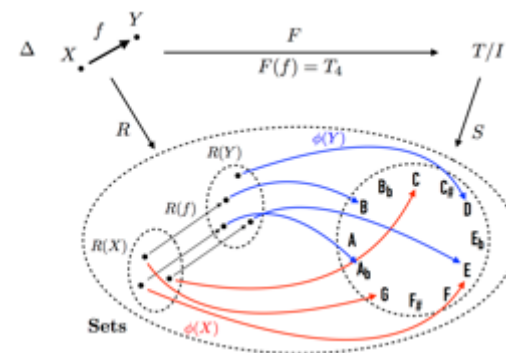




Séminaire *mamuphi*

ENS, 7 février 2015



Analyse musicale transformationnelle et
théorie des catégories :
compte-rendu d'une recherche en cours

Moreno Andreatta, Andrée Ehresmann & Alexandre Popoff

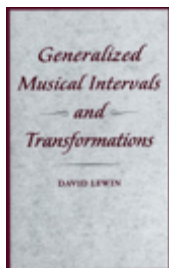
Plan de l'exposé (I)

- Quelques éléments d'analyse transformationnelle
 - GIS, K-nets et isographies
 - Premières difficultés théoriques sur les isographies positives
- Généralisation des GIS
 - Action de catégorie (Ch. Ehresmann, 1957)
 - Fibrations discrètes
 - Le groupoïde d'intervalles généralisés (Mandereau, 2012)
 - Catégories de diagrammes $\text{Diag}(K)$
- Des K-nets aux PK-nets
 - Trois exemples de PK-nets
 - Catégories de PK-nets
 - Exemples de morphismes de PK-nets

Plan de l'exposé (II)

- Extension de Kan d'un PK-net
 - Existence de la transformation naturelle
 - Retour aux K-nets usuels et à ses isographies
- PK-nets et topoi
 - Un exemple de calcul explicite du classifieur des sous-objets
- PK-homographies et PK-isographies
 - Construction des PK-homographies
 - PK-homographies et PK-isographies entre K-nets
 - PK-homographies entre K-nets de même support
- Conclusions et perspectives
 - Portée philosophique de la formalisation catégorielle
 - Retombées cognitives : SEM et K-PK-nets ?
 - Aller plus loin dans la généralisation ?

Système d'Intervalles Généralisés [GMIT, 1987/2007]



$$\text{GIS} = (S, G, \text{int})$$

S = ensemble

$(G, \bullet)$ = groupe d'intervalles

int = fonction intervallique

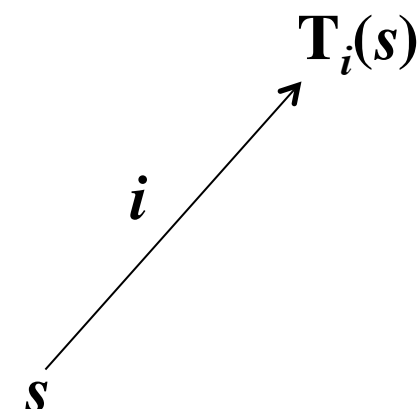
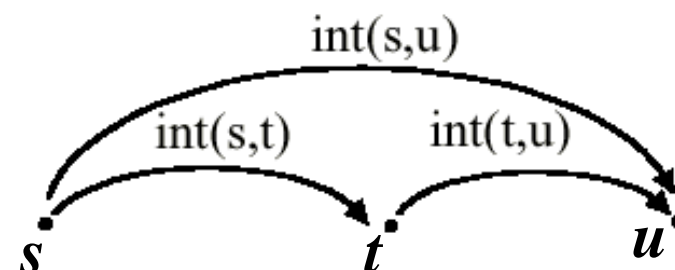
$$S \times S \xrightarrow{\text{int}} G$$

1. Pour tous objets s, t, u dans S :

$$\text{int}(s, t) \bullet \text{int}(t, u) = \text{int}(s, u)$$

2. Pour tout objet s dans S et tout intervalle i dans G il y a un seul objet t dans S tel que $\text{int}(s, t) = i$

Action
simplement
transitive



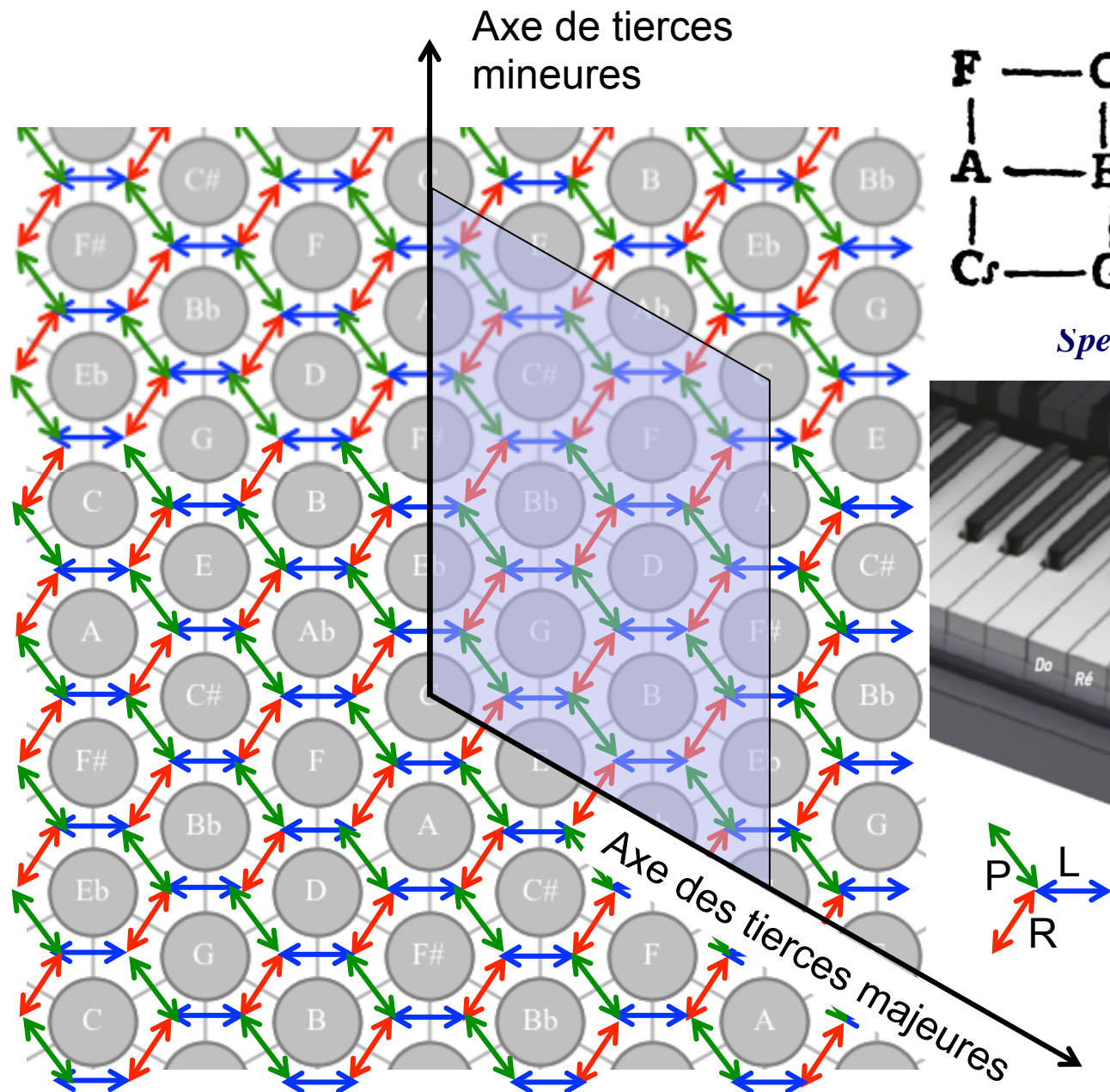
Soit $\tau = \{T_i ; i \in G\}$ le groupe des transpositions

$$\text{GIS} = (S, G, \text{int}) \Leftrightarrow \tau \times S \rightarrow S \text{ telle que } (T_i, s) \rightarrow T_i(s)$$

Terminologies équivalentes :

- Un GIS est un G -torseur à gauche
- S est un ensemble principal homogène [Bourbaki]

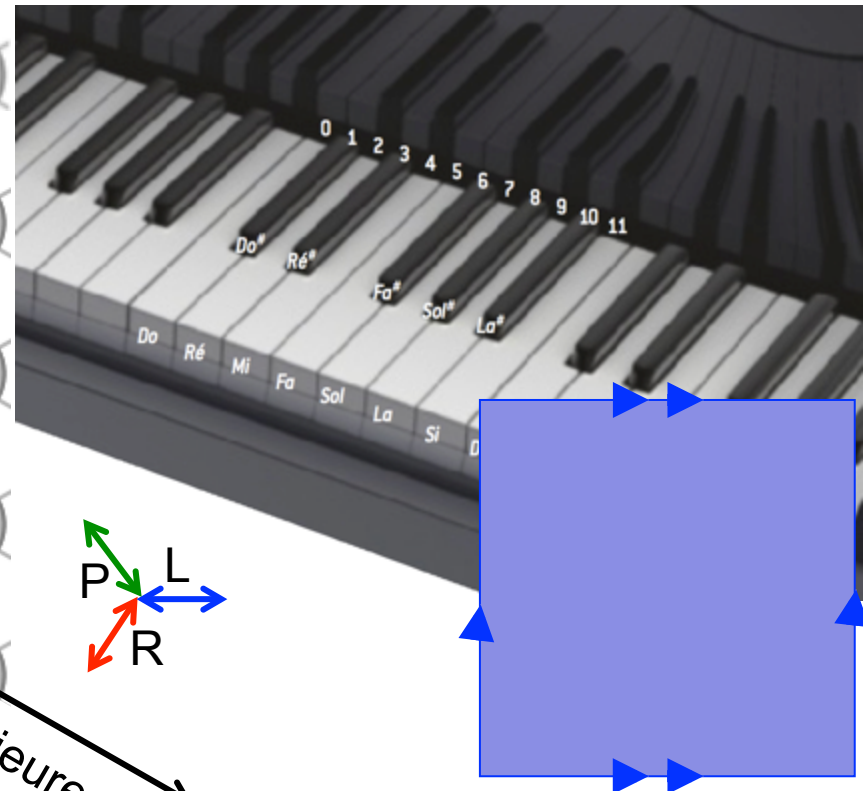
Le Tonnetz : un réseau pour les accords majeurs/mineurs



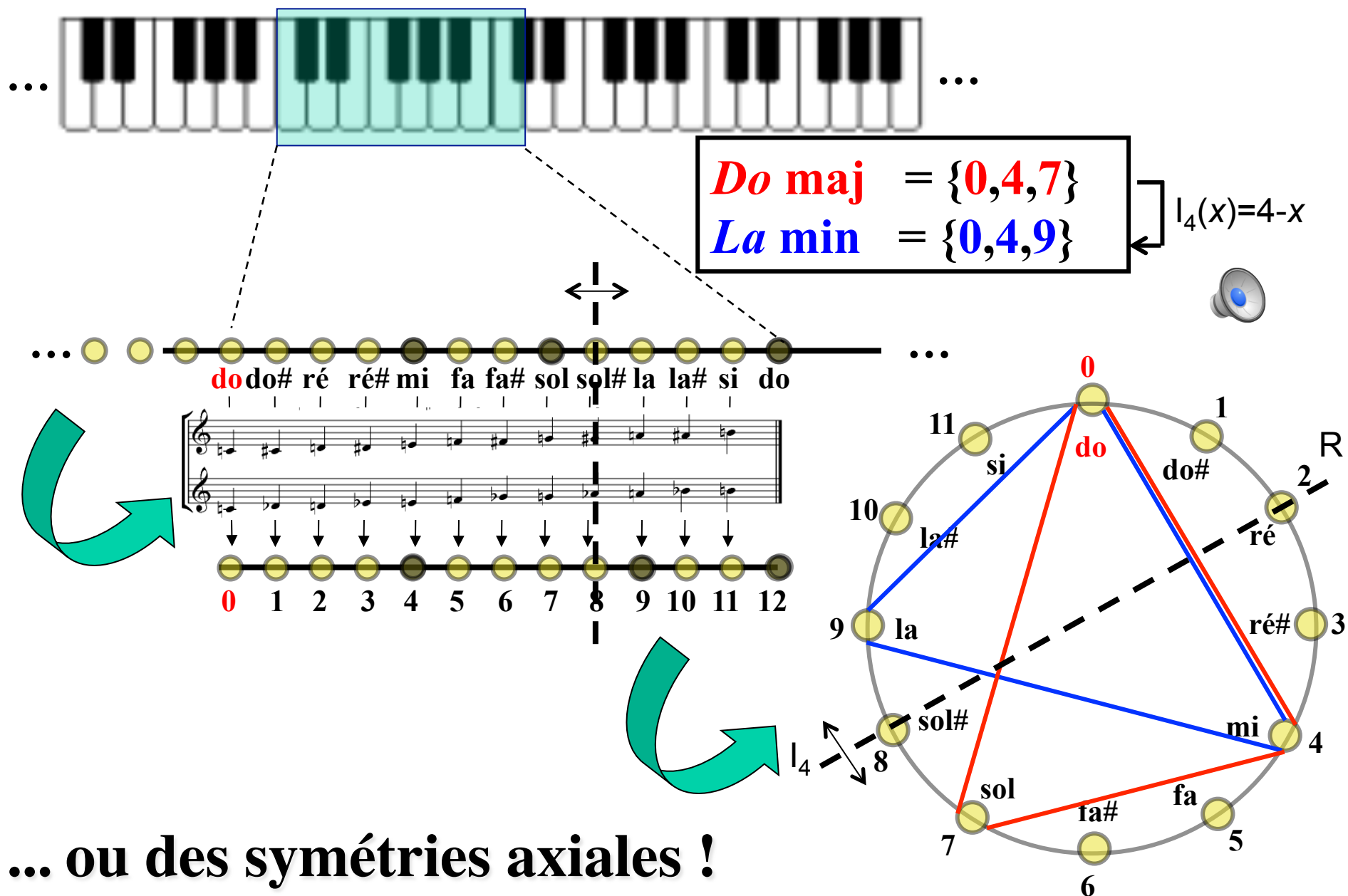
F	—	C	—	G	—	D
A	—	E	—	H	—	F _s
C _s	—	G _s	—	D _s	—	B.



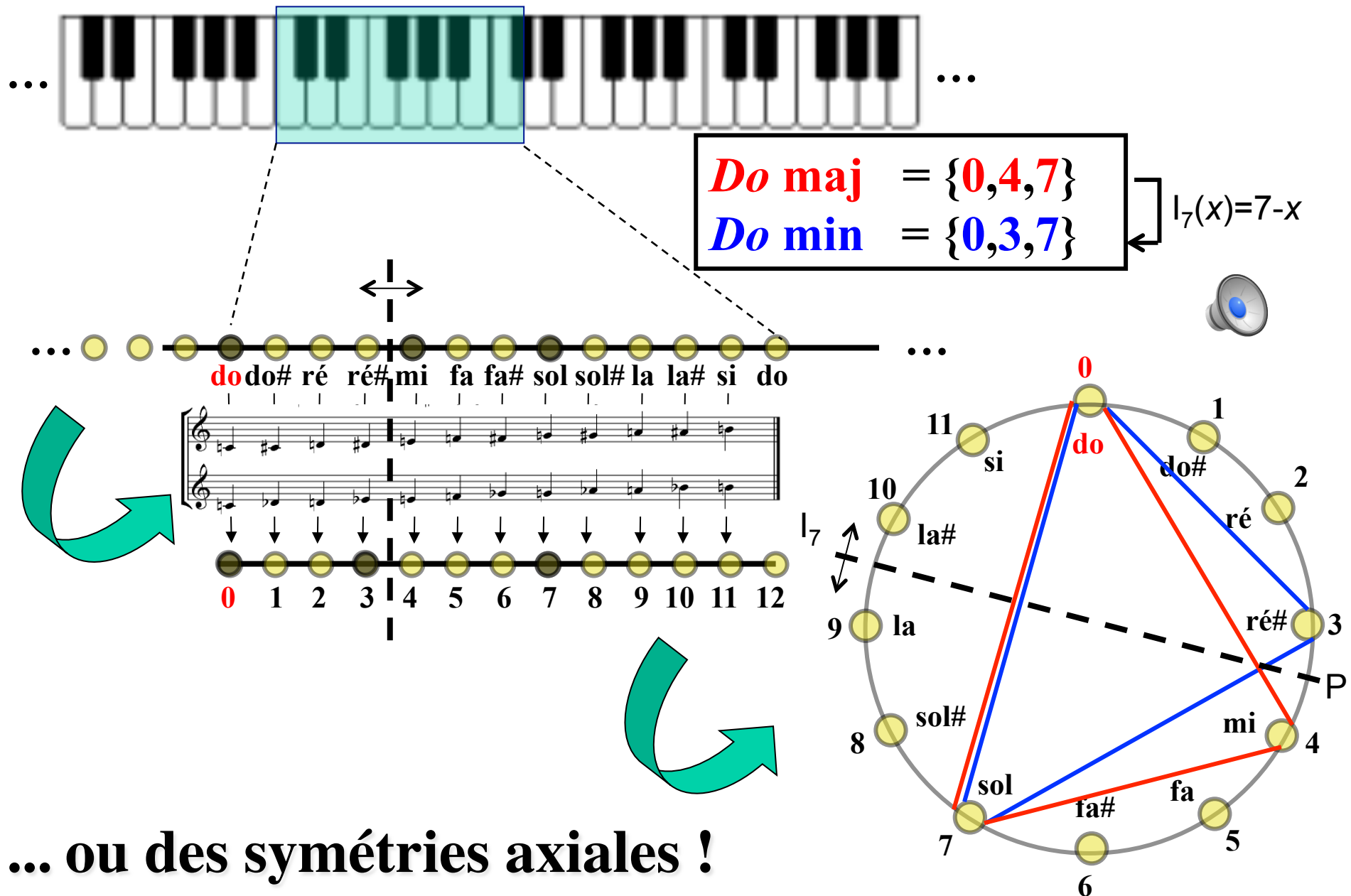
Speculum Musicum (Euler, 1773)



Les inversions sont des soustractions...

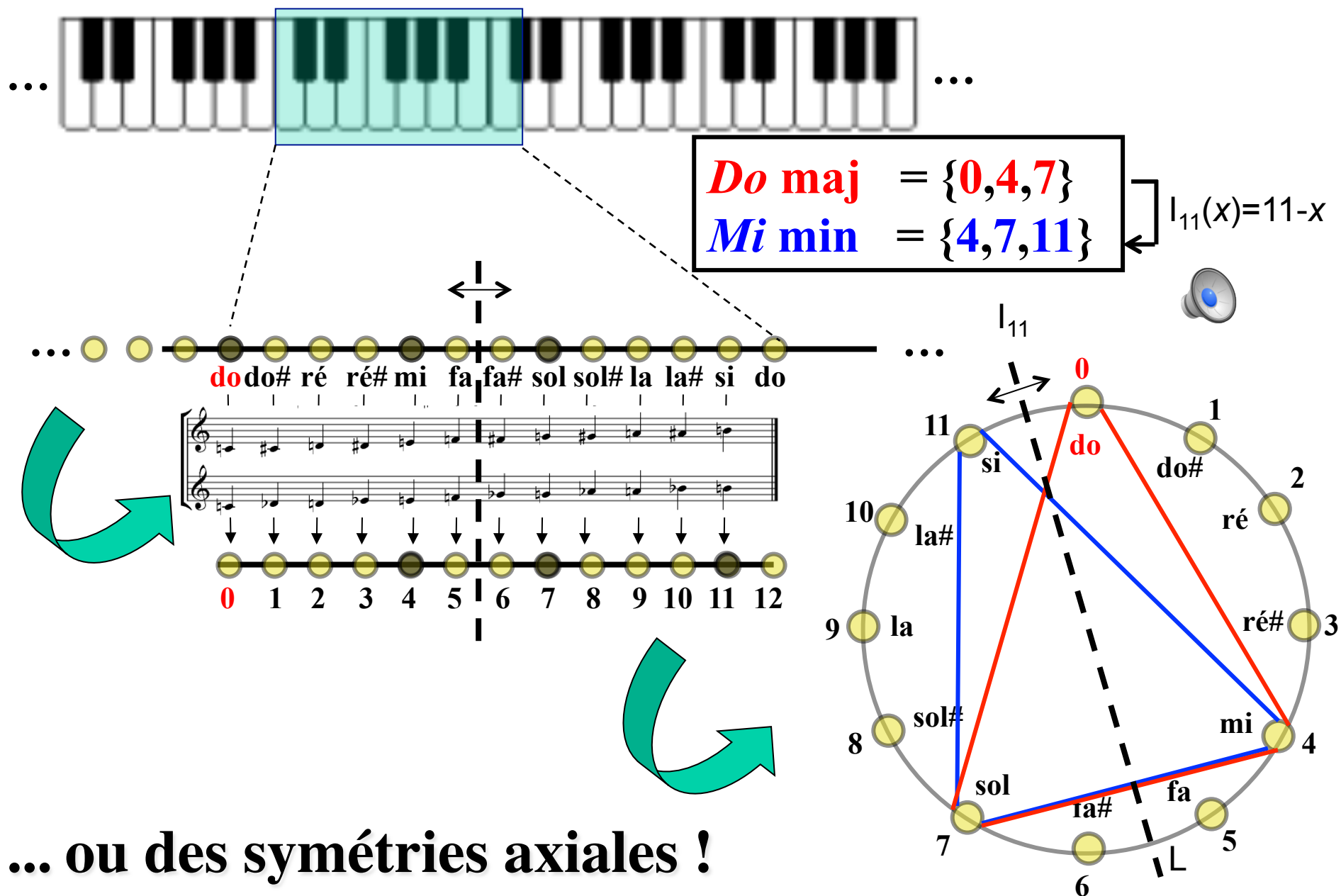


Les inversions sont des soustractions...



... ou des symétries axiales !

Les inversions sont des soustractions...



... ou des symétries axiales !

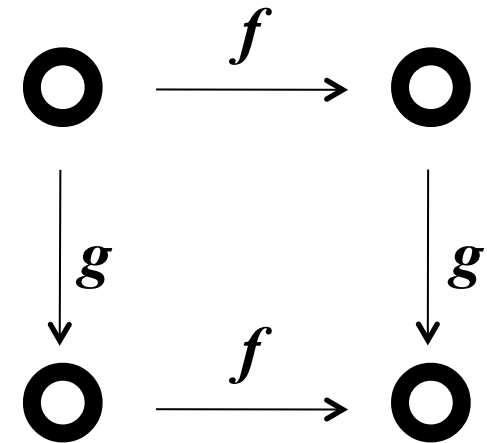
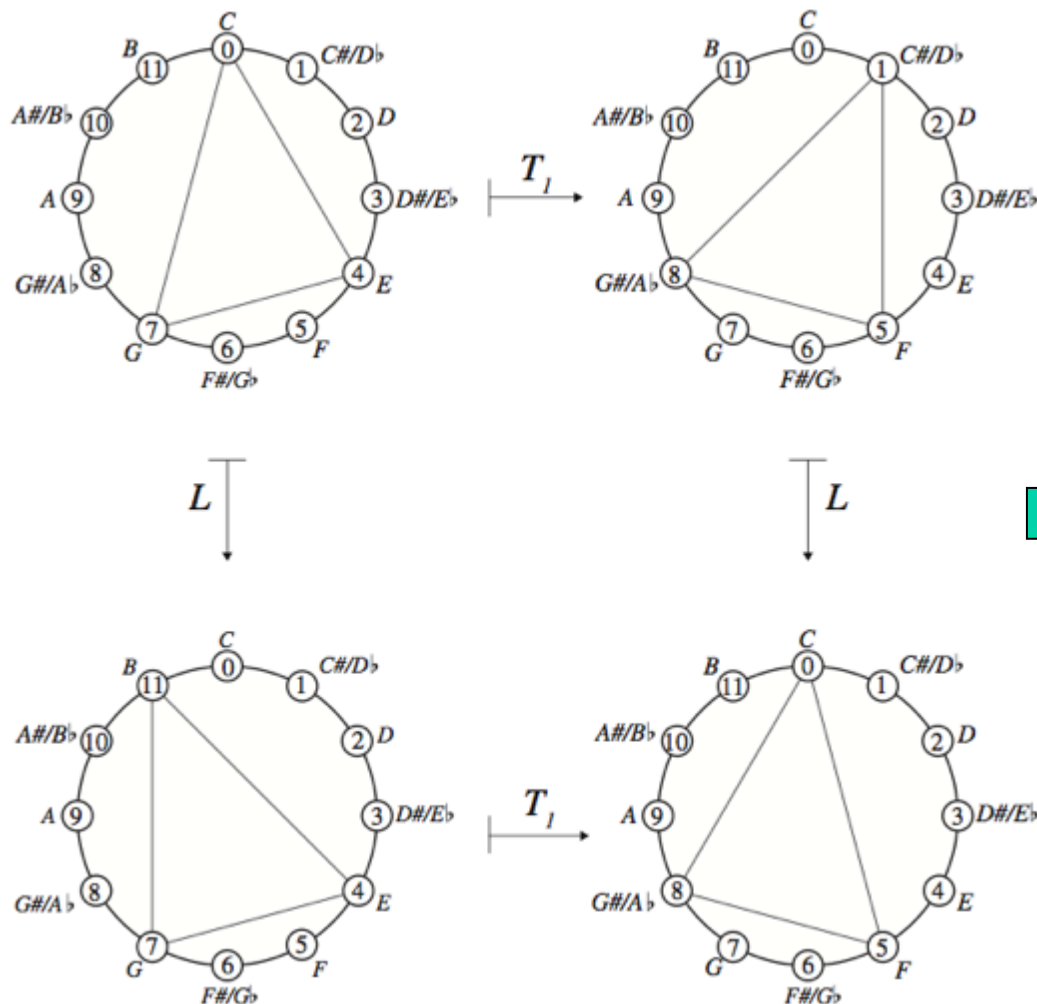
Le *Tonnetz*, un GIS en dualité avec le groupe diédral

$$\rho = \langle L, R \mid L^2 = (LR)^{12} = 1 ; LRL = L(LR)^{-1} \rangle$$

$\Leftrightarrow$

$$D_{12} = \langle I, T \mid I^2 = T^{12} = 1 ; ITI = I(IT)^{-1} \rangle$$

$\Rightarrow \rho$ et D_{12} sont l'un le *centralisateur* de l'autre (dans le groupe symétrique $Sym(S)$)

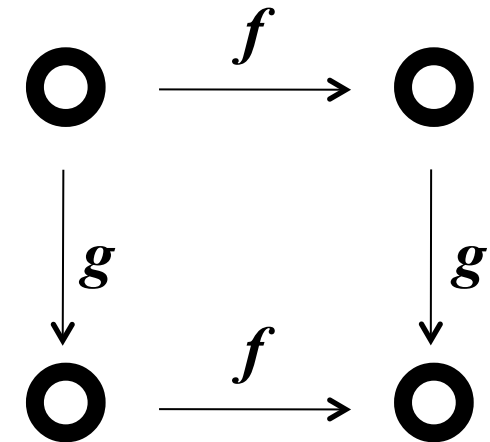
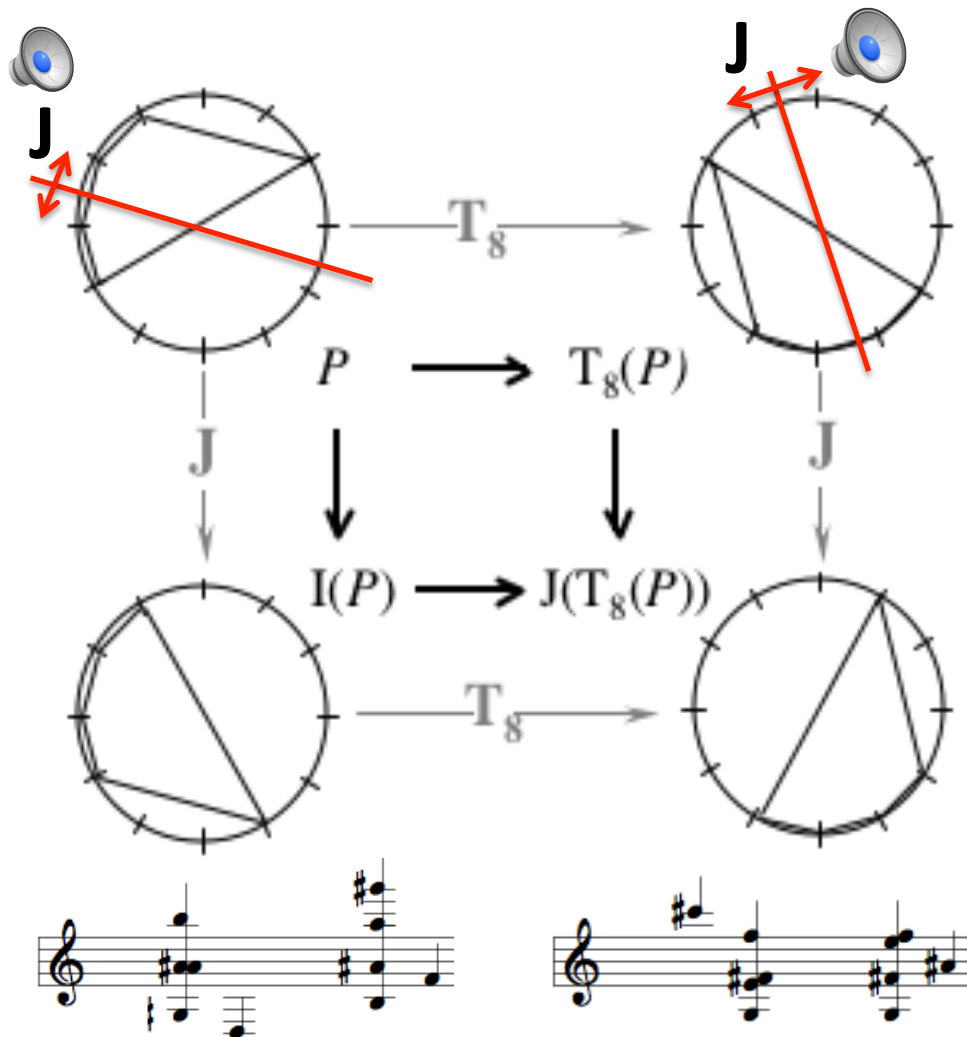


Tout diagramme commute

$$\forall f \in D_{12}$$

$$\forall g \in \rho$$

Inversions « contextuelles » et commutativité



Tout diagramme commute

$$\forall f, g \in \langle T, J \rangle$$

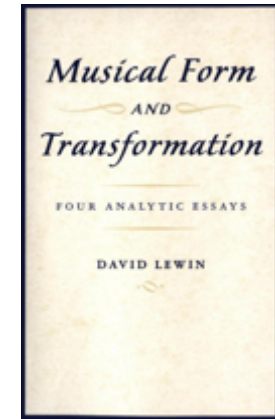
Le groupe des 24 transformations $\sigma = \{T_0, T_1, \dots, T_{11}, T_0J, T_1J, \dots, T_{11}J\}$ opère de manière simplement transitive sur l'espace S des 24 formes du pentacorde de base

$\Rightarrow (S, \sigma, \text{int})$ est un GIS

Analyse transformationnelle du *Klavierstück III* de Stockhausen



David Lewin



Trois interprétations :



Henck



Kontarsky



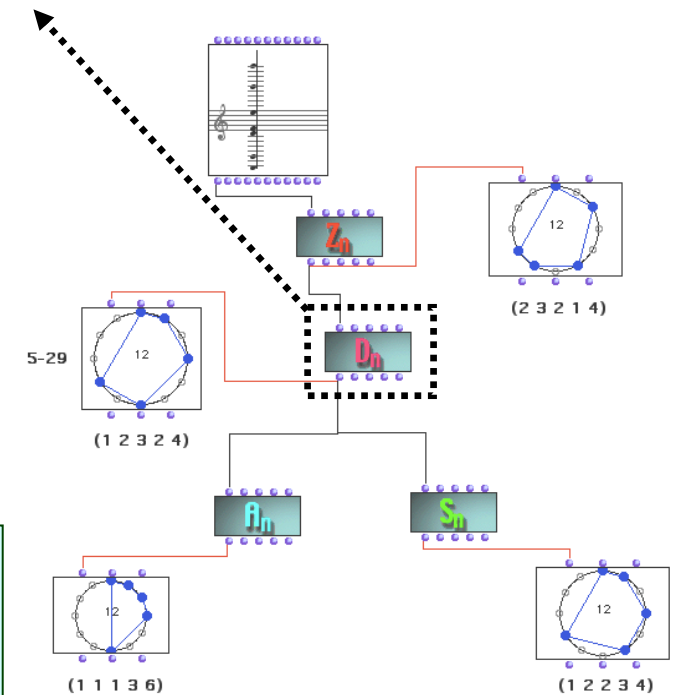
Tudor



K. Stockhausen

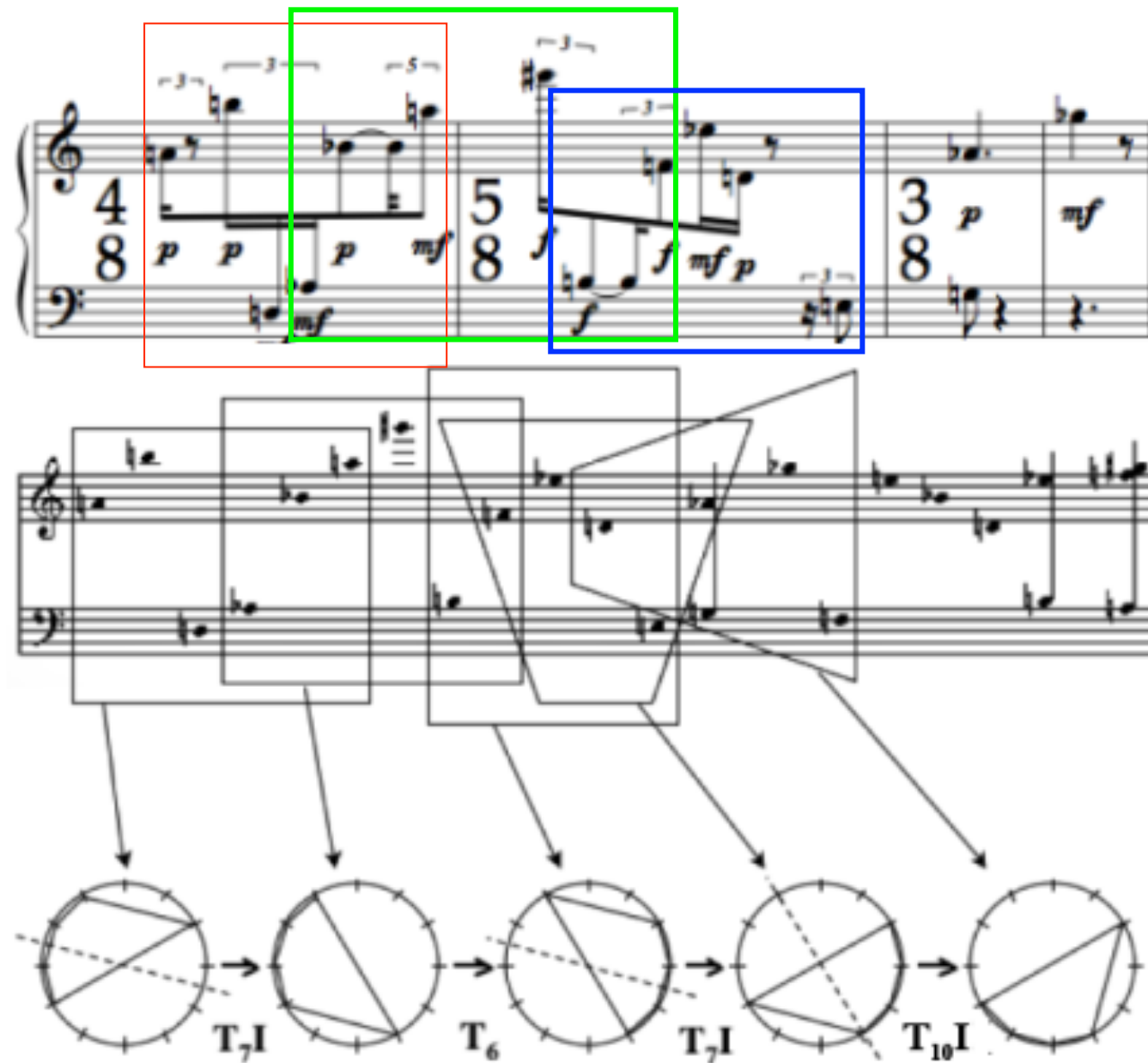
Approche paradigmatique et segmentation

The image shows a musical score in 4/8, 5/8, and 3/8 time signatures. Three segments are highlighted with colored boxes: a red box over the first 4/8 measure, a green box over the first 5/8 measure, and a blue box over the first 3/8 measure. Below each box is a circle with 12 points and a question mark, indicating a mapping or transformation problem.

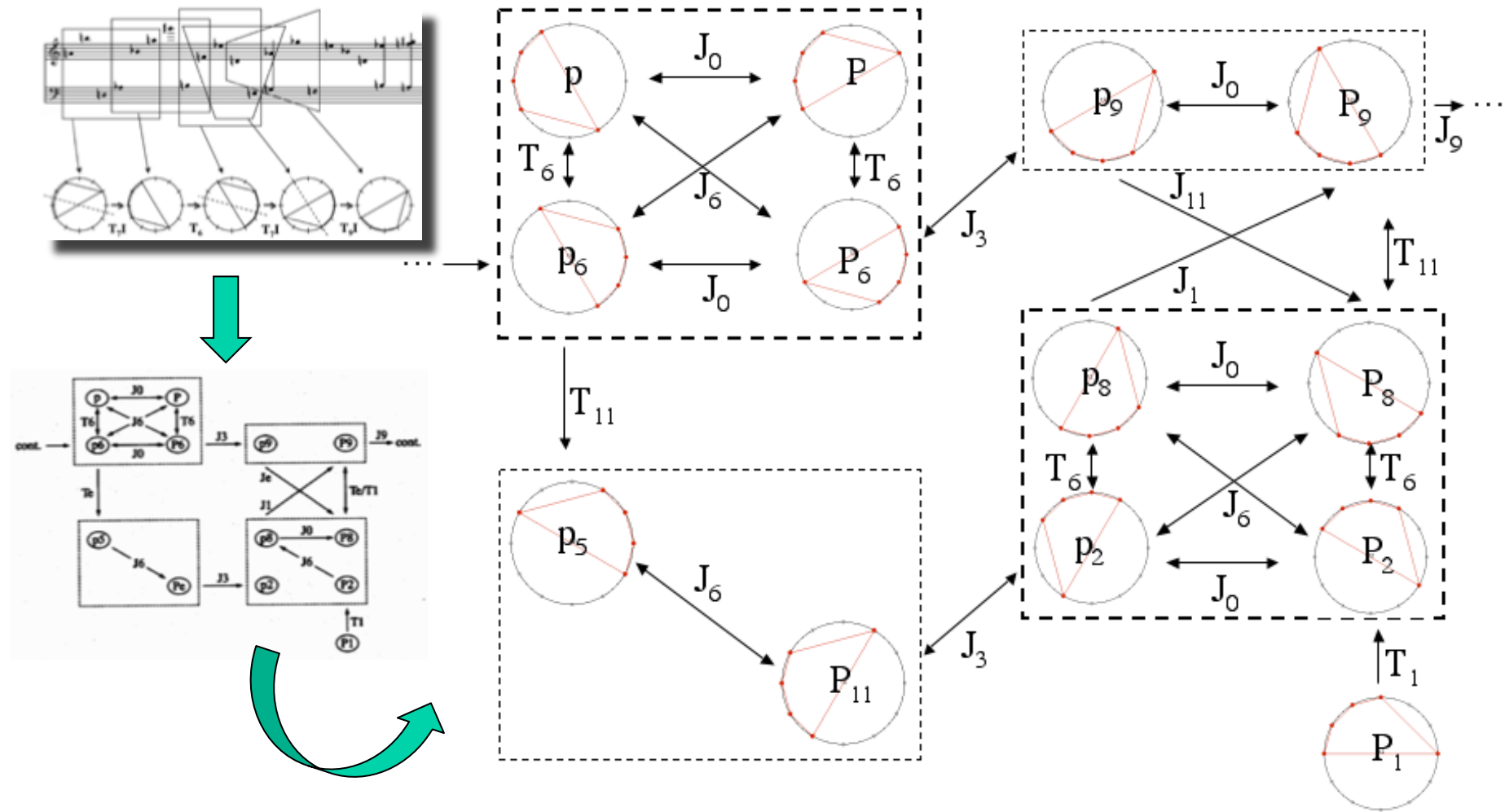


« The most ‘theoretical’ of the four essays, it focuses on the forms of **one pentachord reasonably ubiquitous in the piece**. A special group of transformations is developed, one suggested by the musical interrelations of the pentachord forms »

Segmentation par imbrication



Réseau transformationnel de la pièce

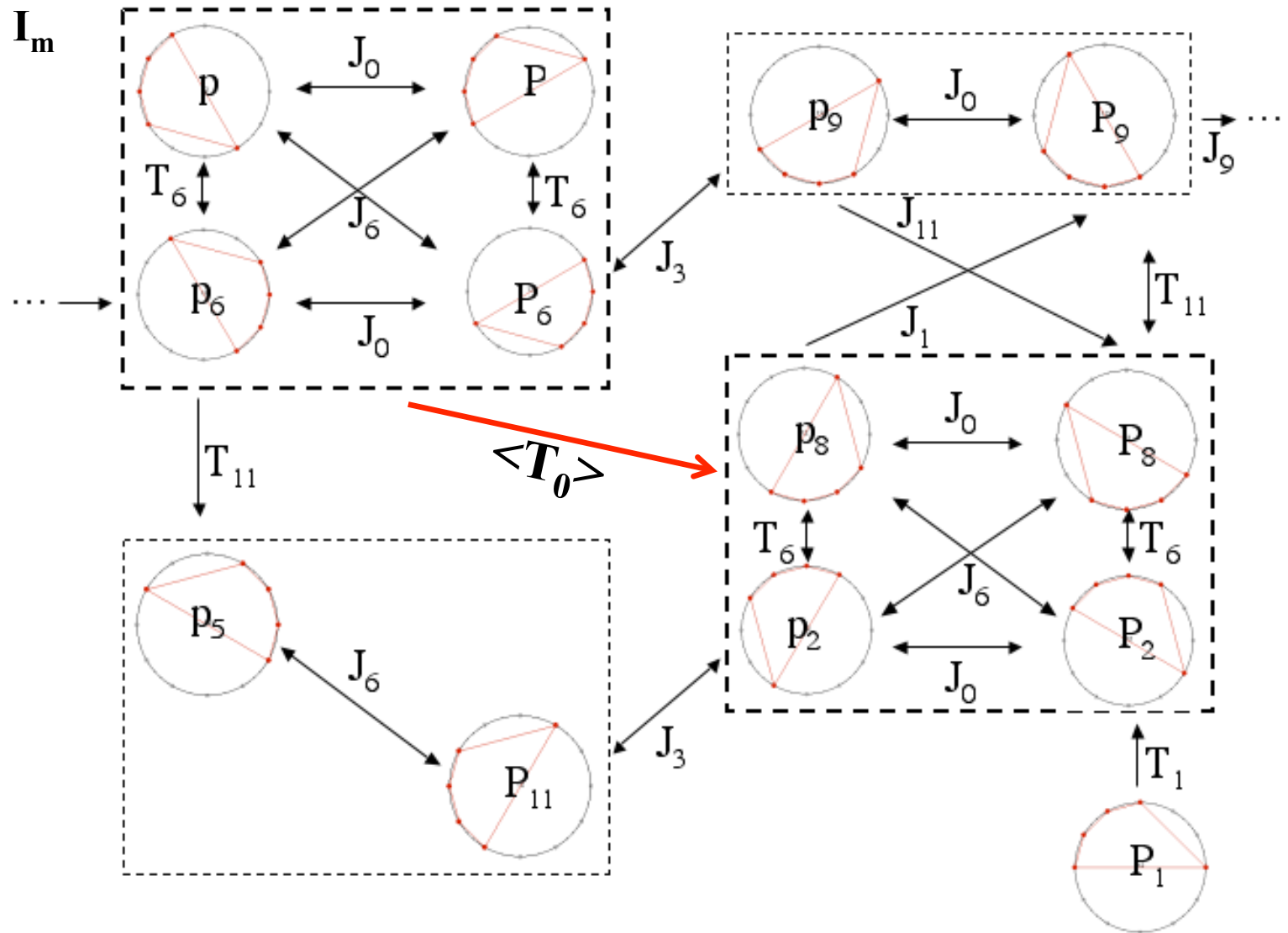


« Rather than asserting a network that follows pentachord relations one at a time, according to the **chronology of the piece**, I shall assert instead a **network** that displays all the pentachord forms used and all their potentially functional interrelationships, in a **very compactly organized little spatial configuration**. » (Lewin, 1993/2007)

Isographies « fortes » dans le réseau transformationnel

$$\langle T_0 \rangle : T_m \rightarrow T_m$$

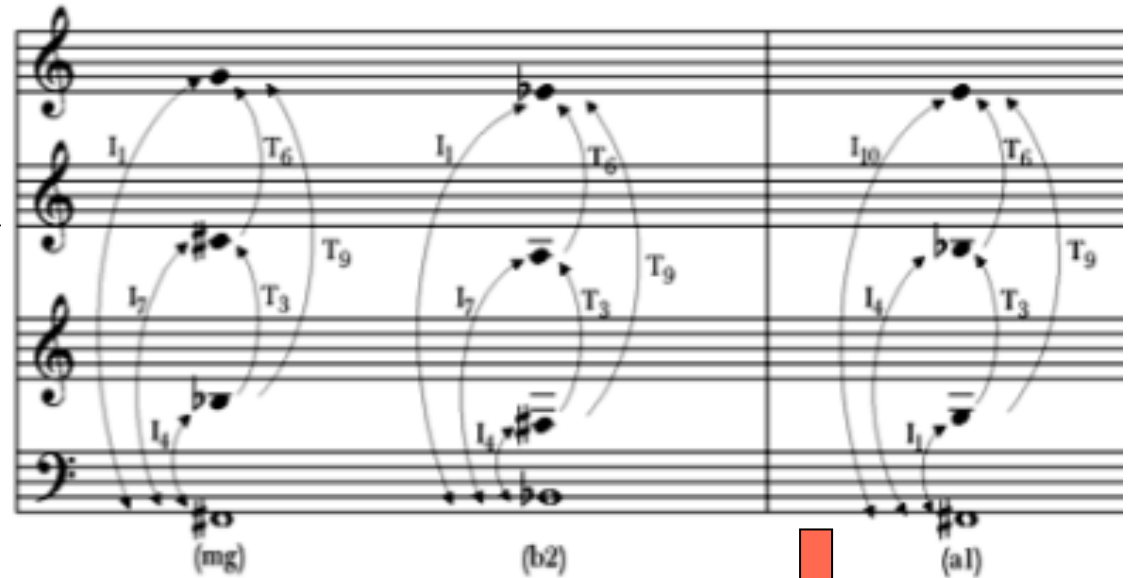
$$I_m \rightarrow I_m$$



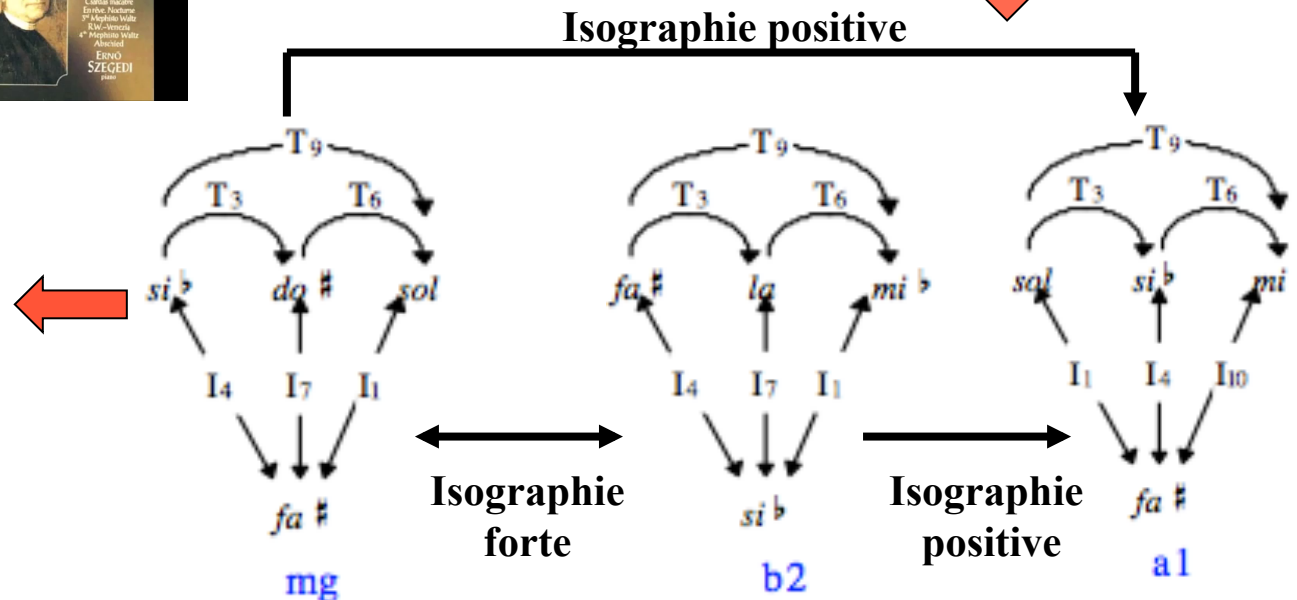
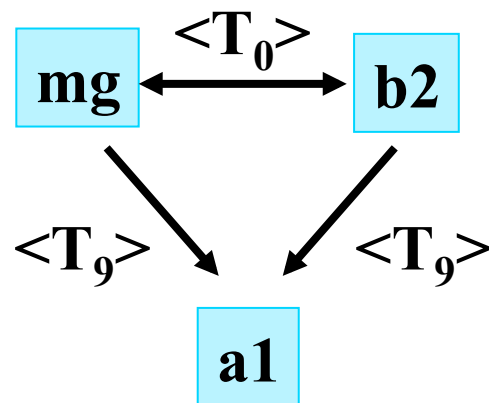
Klumpenhower Networks (K-réseaux)



Ex. 1 - « Ladislaus Teleki » (*Historische ungarische Bildnisse* n° 4), mes. 1-7
Les agrégats dans la classification de Forte

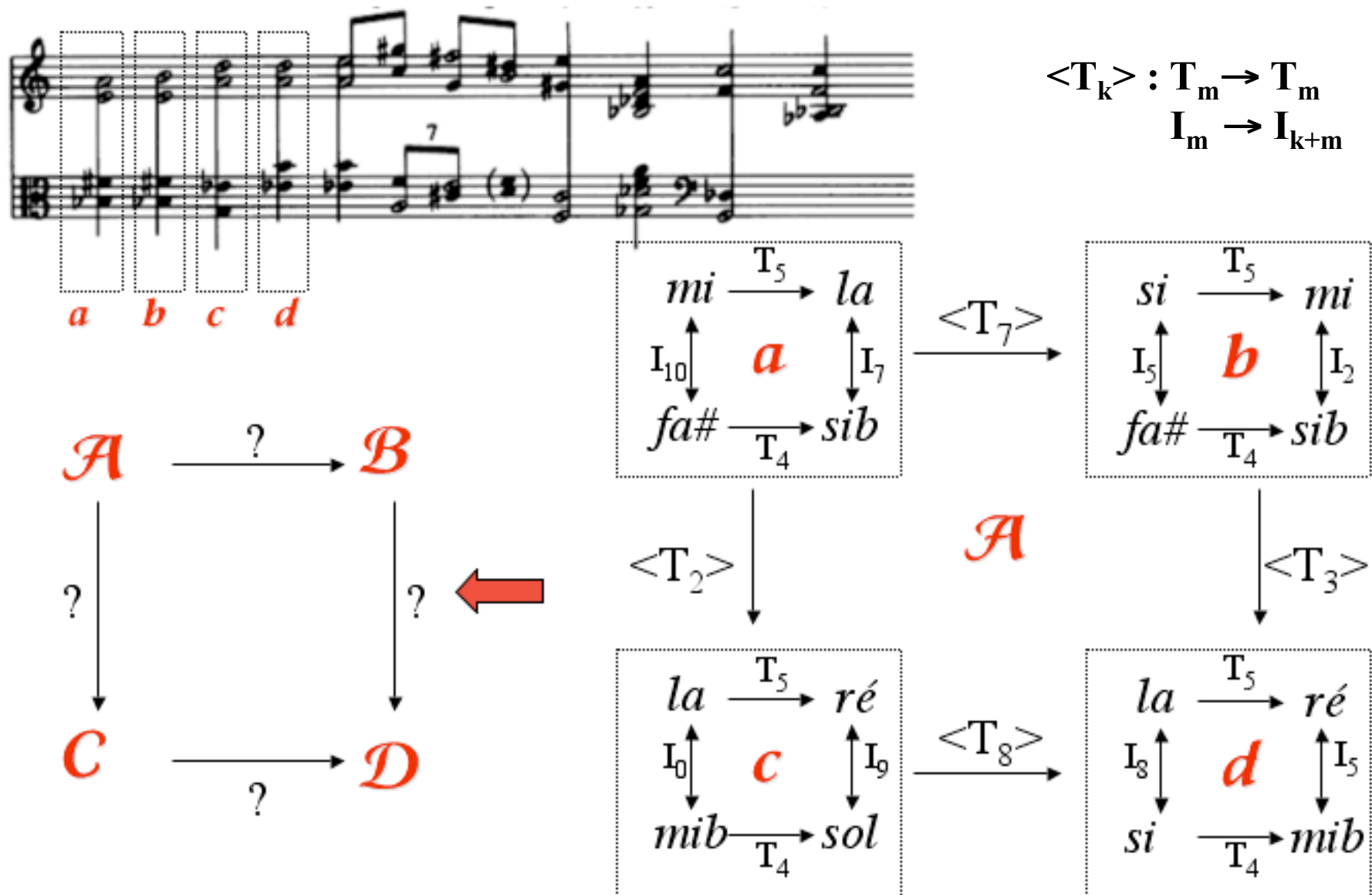


Xavier Hascher: « Liszt et les sources de la notion d'agrégat », *Analyse Musicale*, 43, 2002



K-nets et récursivité

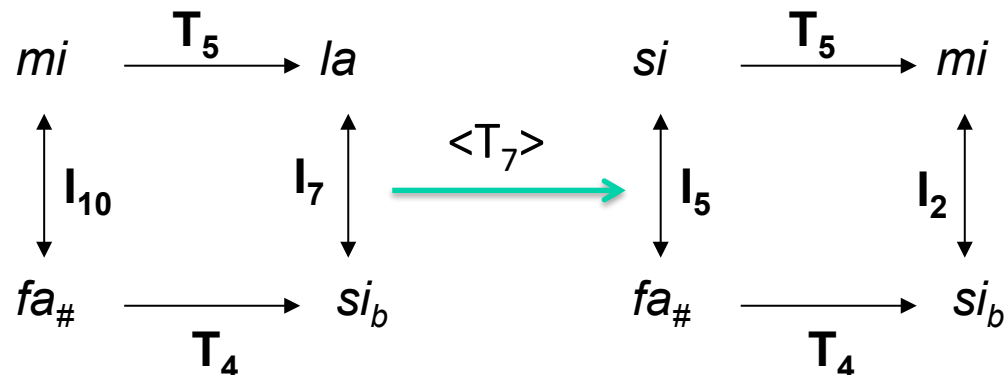
D. Lewin: «A Tutorial on K-nets using the Chorale in Schoenberg's Op.11, N°2 », *JMT*, 1994



Isomorphismes de réseaux de Klumpenhouwer

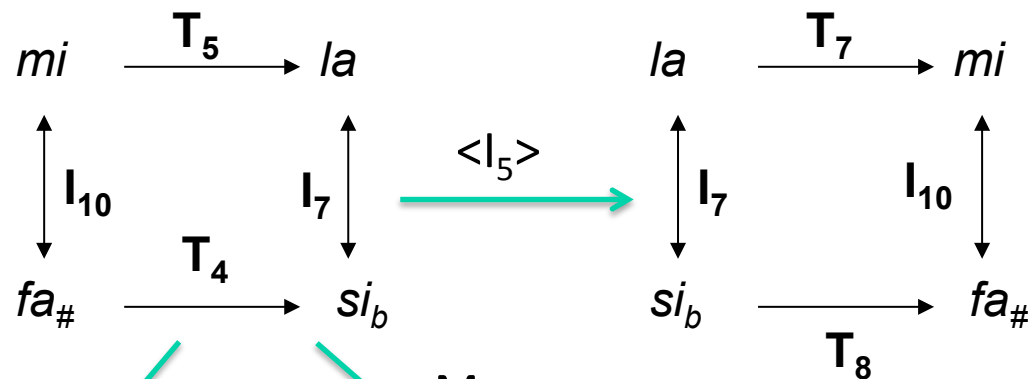
Isographie positive

$$\begin{aligned} \langle T_k \rangle : T_m &\rightarrow T_m \\ I_m &\rightarrow I_{k+m} \end{aligned}$$



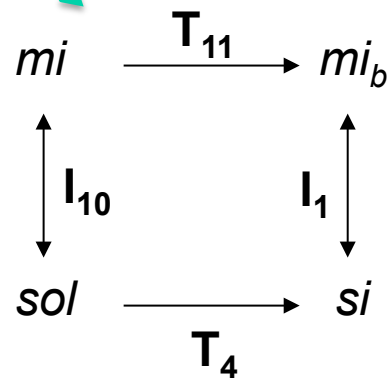
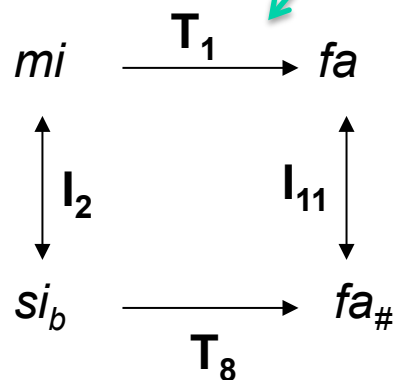
Isographie négative

$$\begin{aligned} \langle I_k \rangle : T_m &\rightarrow T_{-m} \\ I_m &\rightarrow I_{k-m} \end{aligned}$$



Isographie des quarts

$$\begin{aligned} \langle M_{5,k} \rangle : T_m &\rightarrow T_{5m} \\ I_m &\rightarrow I_{k+5m} \end{aligned}$$



Isographie des quintes

$$\begin{aligned} \langle M_{7,k} \rangle : T_m &\rightarrow T_{7m} \\ I_m &\rightarrow I_{k+7m} \end{aligned}$$

$\langle M_5 \rangle$ and $\langle M_7 \rangle$ are indicated by arrows pointing from the negative isography diagram to the quarter isography diagrams.

K-nets et approche paradigmatique

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{\varphi} & y \\
 \gamma \downarrow & & \downarrow \delta \\
 w & \xrightarrow{\psi} & z
 \end{array}$$

$\langle ? \rangle$

$$\begin{array}{ccc}
 F(x) & \xrightarrow{F\varphi F^{-1}} & F(y) \\
 F\gamma F^{-1} \downarrow & & \downarrow F\delta F^{-1} \\
 F(w) & \xrightarrow{F\psi F^{-1}} & F(z)
 \end{array}$$

Proposition :

- $F = \text{identité} \Rightarrow \langle ? \rangle = \text{isographie forte}$
- $F = \text{transposition} \Rightarrow \langle ? \rangle = \text{isographie positive}$
- $F = \text{inversion} \Rightarrow \langle ? \rangle = \text{isographie négative}$
- $F = \text{multiplication affine} \Rightarrow \langle ? \rangle = \text{isographie des « quartes » ou des « quintes »}$

K-nets et approche paradigmatique

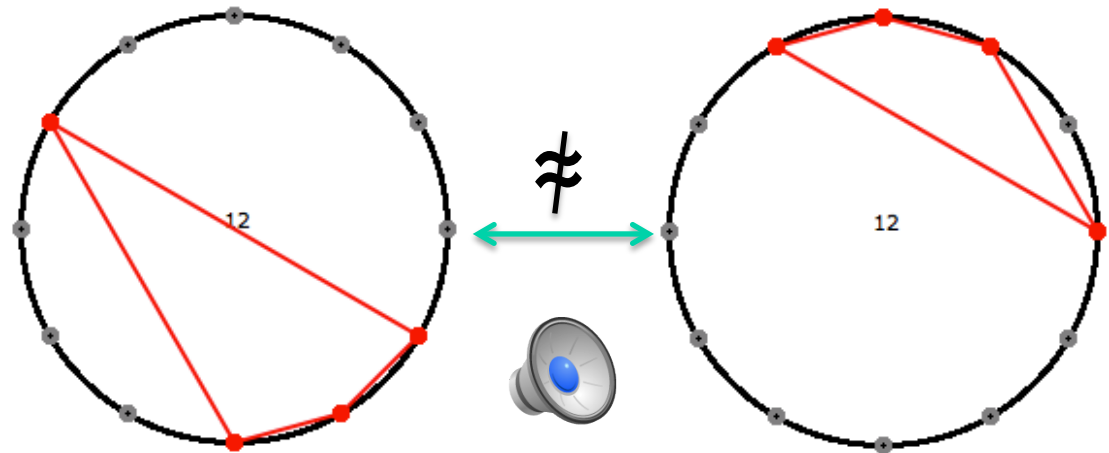
Proposition :

- $F = \text{identité} \Rightarrow \langle ? \rangle = \text{isographie forte}$
- $F = \text{transposition} \Rightarrow \langle ? \rangle = \text{isographie positive}$
- $F = \text{inversion} \Rightarrow \langle ? \rangle = \text{isographie négative}$
- $F = \text{multiplication affine} \Rightarrow \langle ? \rangle = \text{isographie des « quartes » ou des « quintes »}$

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\varphi} & y \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \delta \\ w & \xrightarrow{\psi} & z \end{array}$$

$\langle ? \rangle$

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{F\varphi F^{-1}} & F(y) \\ F\gamma F^{-1} \downarrow & & \downarrow F\delta F^{-1} \\ F(w) & \xrightarrow{F\psi F^{-1}} & F(z) \end{array}$$



K-nets et approche paradigmatique

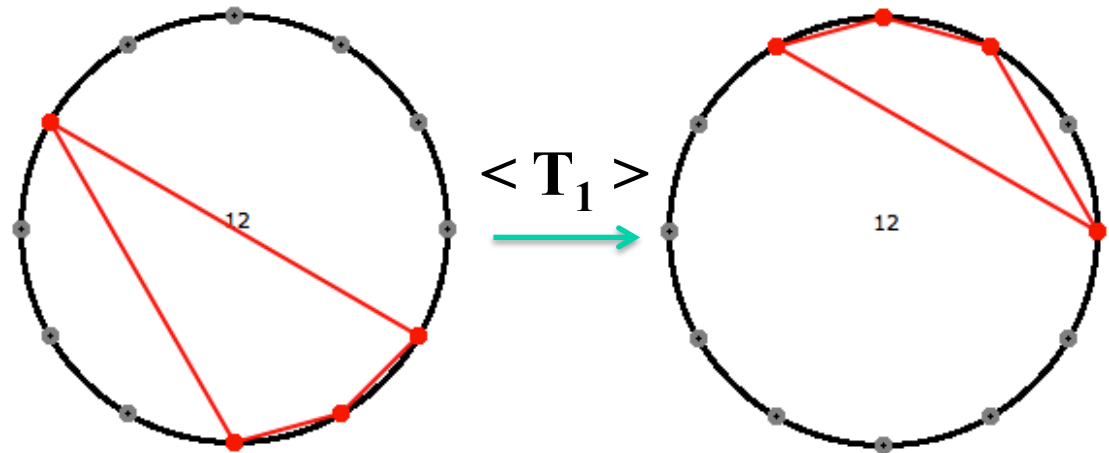
Proposition :

- $F = \text{identité} \Rightarrow \langle ? \rangle = \text{isographie forte}$
- $F = \text{transposition} \Rightarrow \langle ? \rangle = \text{isographie positive}$
- $F = \text{inversion} \Rightarrow \langle ? \rangle = \text{isographie positive}$
- $F = \text{multiplication affine} \Rightarrow \langle ? \rangle = \text{isographie des « quartes » ou des « quintes »}$

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\varphi} & y \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \delta \\ w & \xrightarrow{\psi} & z \end{array}$$

$\langle ? \rangle$

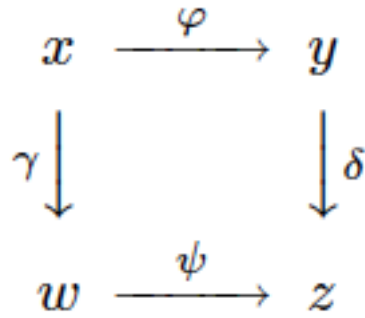
$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{F\varphi F^{-1}} & F(y) \\ F\gamma F^{-1} \downarrow & & \downarrow F\delta F^{-1} \\ F(w) & \xrightarrow{F\psi F^{-1}} & F(z) \end{array}$$



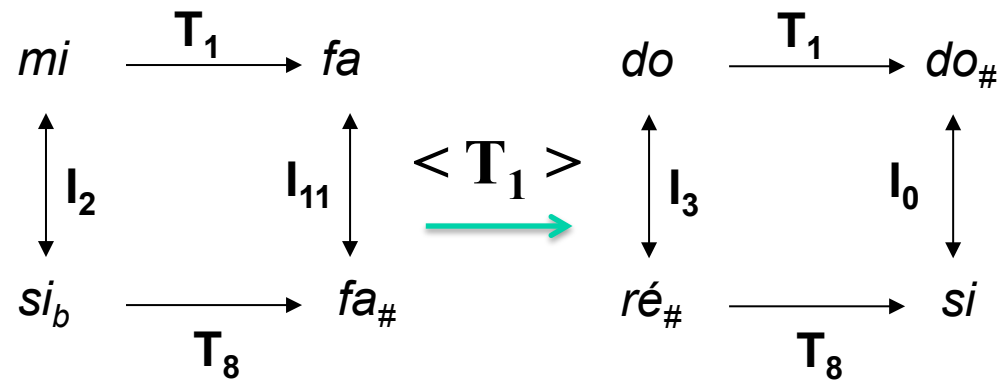
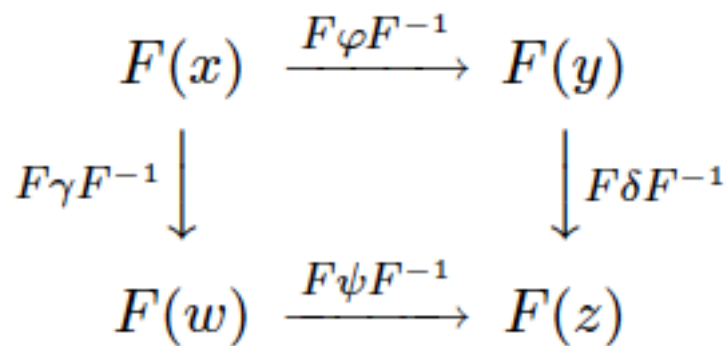
K-nets et approche paradigmatique

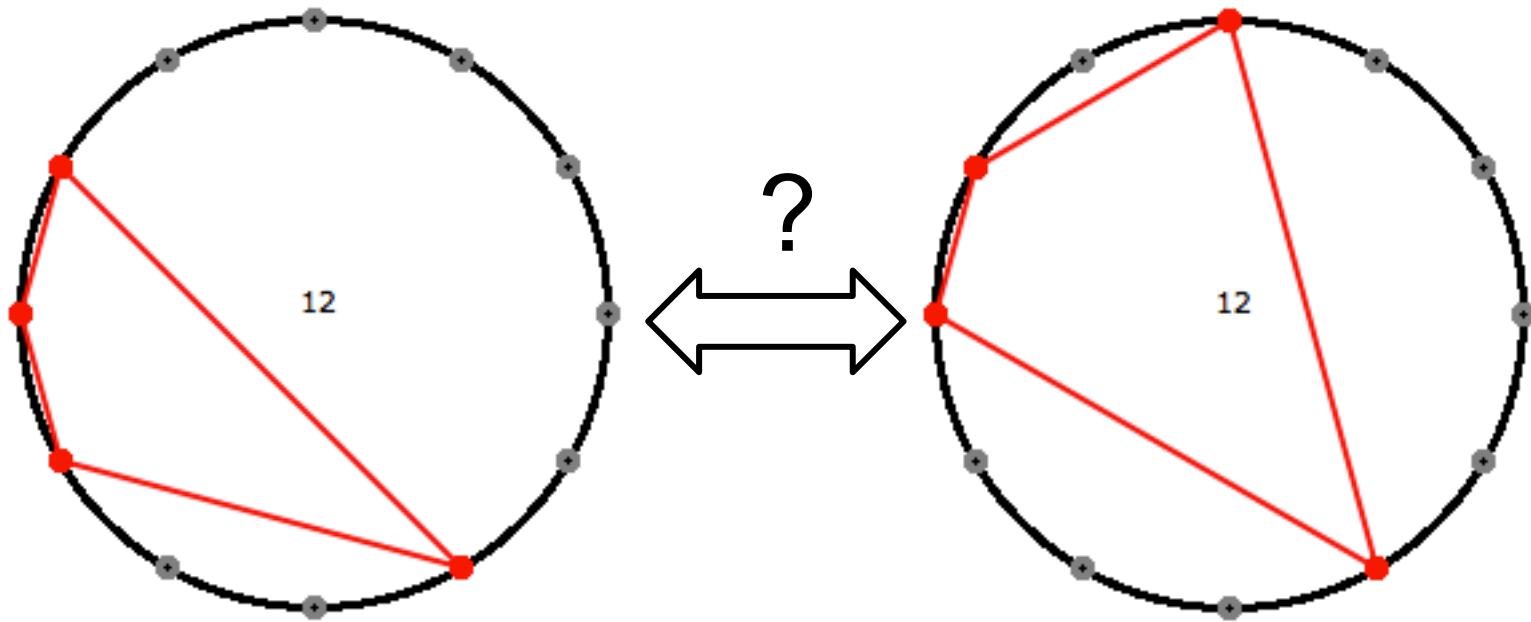
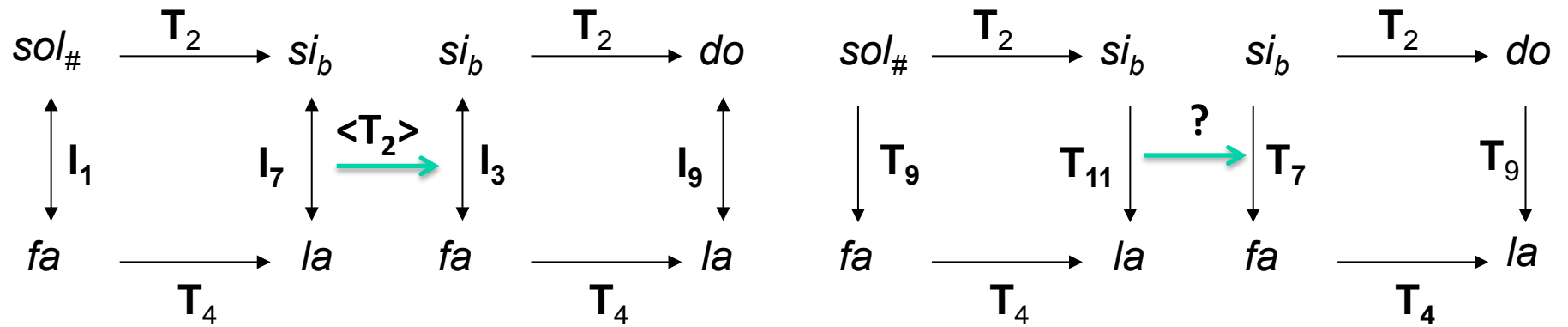
Proposition :

- $F = \text{identité} \Rightarrow \langle ? \rangle = \text{isographie forte}$
- $F = \text{transposition} \Rightarrow \langle ? \rangle = \text{isographie positive}$
- $F = \text{inversion} \Rightarrow \langle ? \rangle = \text{isographie positive}$
- $F = \text{multiplication affine} \Rightarrow \langle ? \rangle = \text{isographie des « quartes » ou des « quintes »}$

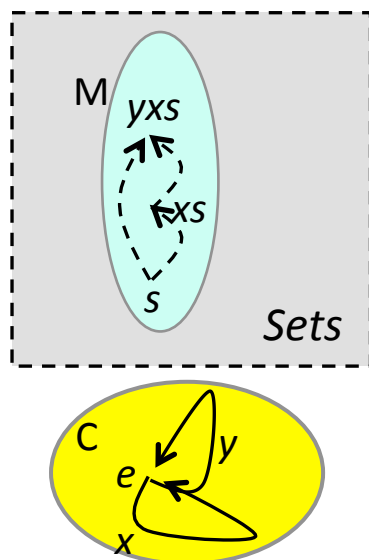


$\langle ? \rangle$



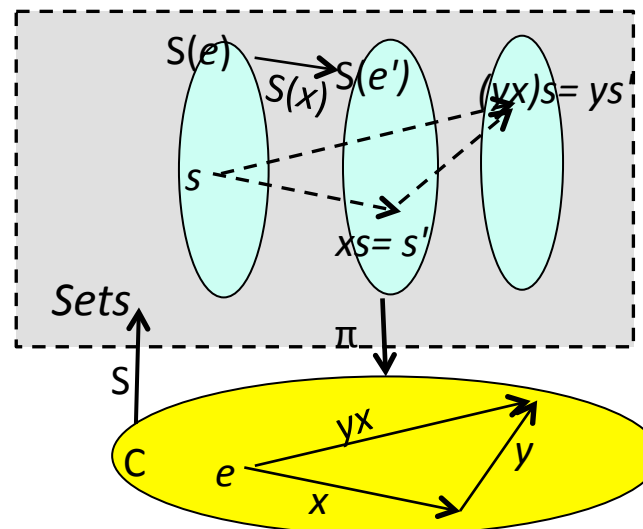


ACTION DE CATEGORIE (C. Ehresmann, 1957)



C = groupe opère sur M pour la loi $k: C \times M \rightarrow M: (x, s) \mapsto xs$ vérifiant $y(xs) = (yx)s$ et $es = s$.

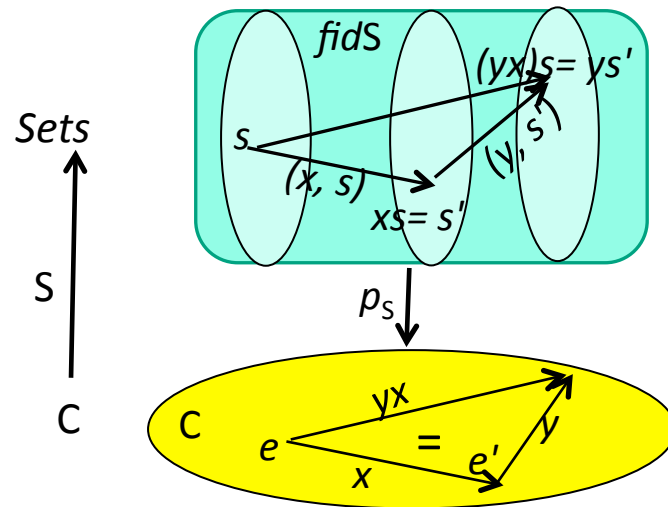
D'où un foncteur $S: C \rightarrow \text{Sets}$:
 $S(e) = M, S(x): M \rightarrow M: s \mapsto xs$



C = catégorie, $S: C \rightarrow \text{Sets}$ un foncteur tel que $S(e)$ non vide pour tout $e \in |C|$; soit $\Sigma S = \sum_e S(e)$ et $\pi: \Sigma S \rightarrow |C|: s \mapsto e$ si $s \in S(e)$.

Alors C opère sur ΣS , l'action étant la loi
 $k: C * \Sigma S \rightarrow \Sigma S: (x, s) \mapsto xs = F(e)(s)$ si $\pi(s) = e$
 Cette action vérifie : $y(xs) = (yx)s$ et $\pi(s)s = s$.
 $(C, \Sigma S, \pi)$ est une *espèce de structures* sur C .

FIBRATION DISCRETE



A $S: C \rightarrow \text{Sets}$ on associe le foncteur $p_S: \text{fid}S \rightarrow C$. Les objets de $\text{fid}S$ sont tous les $s \in \Sigma S$; les morphismes sont les couples (x, s) où $s \in S(e)$, $x: e \rightarrow e'$ dans C ; la composition est $(y, s')(x, s) = (yx, s)$ ssi $s' = S(x)(s) = xs$. $p_S: \text{fid}S \rightarrow C$ est la *fibration discrète* associée à S .

Un foncteur $p: H \rightarrow C$ est une *fibration discrète* si, pour tout objet s de H et tout morphisme $x: p(s) \rightarrow e'$, il existe un et seul $h: s \rightarrow s'$ tel que $p(h) = x$.

A un tel p on associe le foncteur

$$S_p: C \rightarrow \text{Sets} \quad \text{où} \quad S_p(x): p^{-1}(e) \rightarrow p^{-1}(e'): s \mapsto s'.$$

Proposition. *Un foncteur $S: C \rightarrow \text{Sets}$ admet l'ensemble des sections r de p_S pour limite (projective).*

A r on associe l'élément $(r(e))_{e \in |C|}$ de $\lim S$.

GENERALISATIONS DES GIS

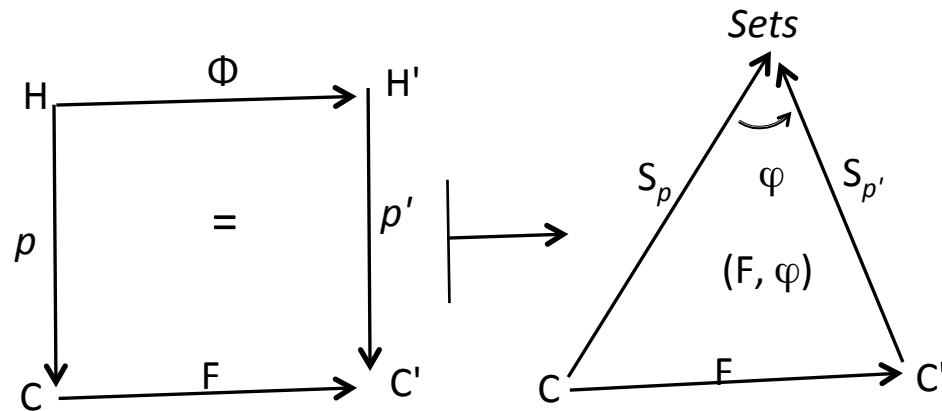
Proposition. *Soit $S: C \rightarrow \text{Sets}$ un foncteur. Ce foncteur est représentable si, et seulement si, la catégorie $\text{fid}S$ associée admet un objet initial. Si C est un groupoïde transitif (e.g., un groupe) cette condition équivaut à dire que C opère transitivement sur ΣS .*

Exemple. La notion de *Generalized Interval System* de Lewin est équivalente à celle d'un groupe opérant simplement transitivement sur un ensemble, donc à celle d'un foncteur représentable d'un groupe C vers *Sets*.

Plus généralement John Mandereau (2012) a appelé *Generalized Interval Groupoid System* la donnée d'un groupoïde transitif C opérant simplement transitivement, donc associé à un foncteur représentable $S: C \rightarrow \text{Sets}$. Et il lui a associé la *fonction intervalle*:

$$\text{int}: \Sigma S \times \Sigma S \rightarrow C : (s, s') \mapsto x \text{ où } xs = s'.$$

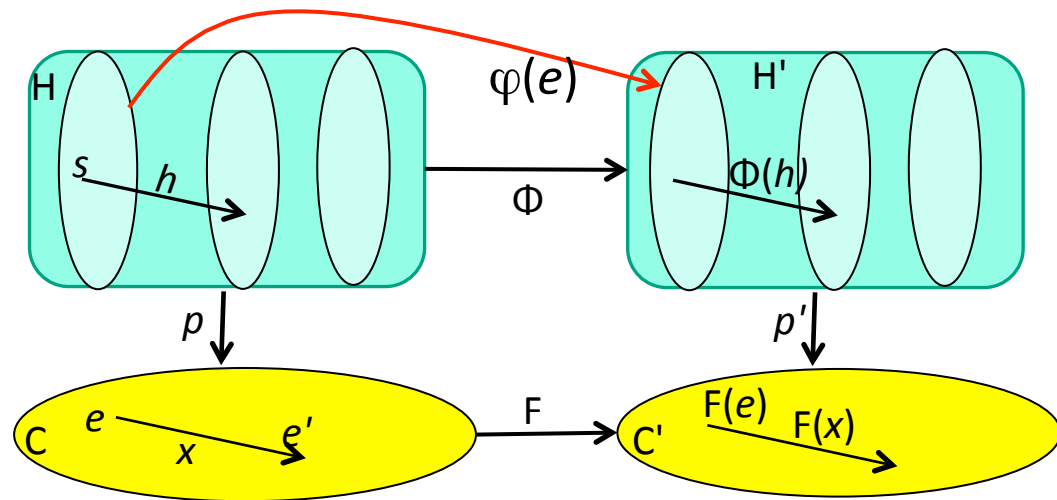
FIBRATIONS DISCRETES ET DIAGRAMMES



La catégorie des fibrations discrètes est la sous-catégorie pleine Fid de Cat^2 ayant pour objets les fibrations discrètes ; les morphismes sont des carrés commutatifs de foncteurs.

Proposition. L'application $p \mapsto S_p$ s'étend en un foncteur de Fid vers la catégorie des diagrammes $Diag(Sets)$ qui est équivalente à la catégorie des applications covariantes entre espèces de structures (C. Ehresmann).

Au carré $(F, \Phi): p \rightarrow p'$ on associe $(F, \varphi): S_p \rightarrow S_{p'}$ où φ est la transformation naturelle telle que $\varphi(e)$, pour chaque $e \in |C|$, soit la restriction de Φ à $p^{-1}(e)$.



CATEGORIES DE DIAGRAMMES

Si K est une catégorie, on définit la catégorie $\text{Diag}(K)$:

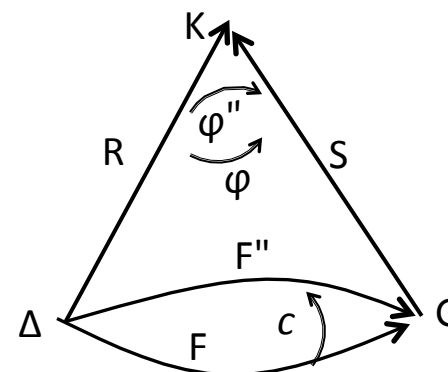
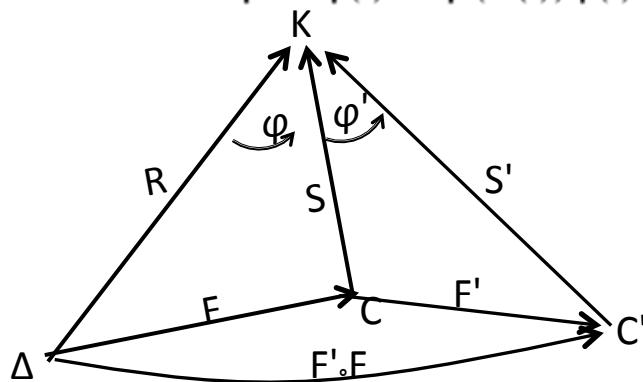
= objets = foncteurs $R: \Delta \rightarrow K$ où Δ est une (petite) catégorie ;

= morphismes = $(F, \varphi): R \Rightarrow S$ où $F: \Delta \rightarrow K$ est un foncteur et où $\varphi: R \Rightarrow S \circ F$ est une transformation naturelle.

= composition :

$$((F', \varphi'): S \Rightarrow S')((F, \varphi): R \Rightarrow S) = (F'F, \varphi'F \circ \varphi): R \Rightarrow S',$$

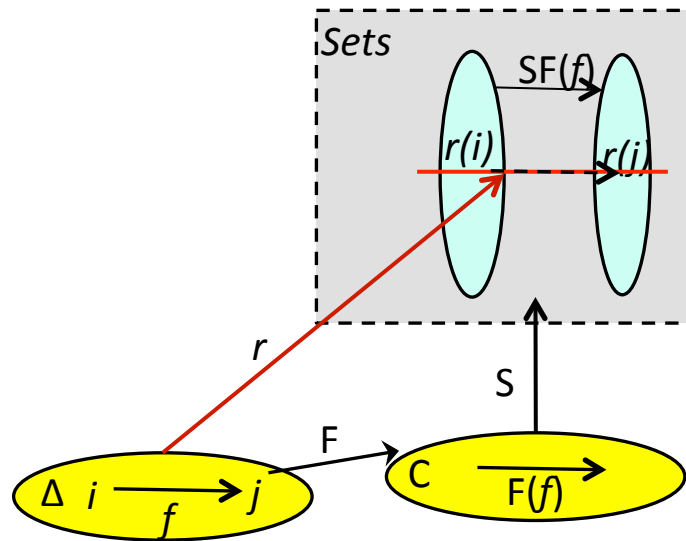
$$\text{où } \varphi'F \circ \varphi(i) = \varphi'(F(i))\varphi(i) : R(i) \rightarrow S'F'F(i) \text{ pour tout } i \in |\Delta|$$



$\text{Diag}(K)$ s'étend en une 2-catégorie **Diag**(K), dont les 2-morphismes de $(F, \varphi): R \Rightarrow S$ vers $(F'', \varphi''): R \Rightarrow S$ sont les $c: F \Rightarrow F''$ tel que $\varphi'' = S \circ c \circ \varphi$.

Proposition (Guitart & Van den Bril, 1977). *Si K est (co)complète, il en est de même pour $\text{Diag}(K)$. La 2-catégorie **Diag**(K) est la lax-cocomplétion de K .*

K-NETS ET PK-NETS



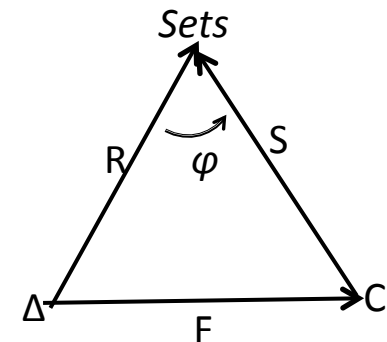
(i) **K-net** (au sens de Lewin) = un groupe C opérant sur un ensemble M , un foncteur $F: \Delta \rightarrow C$ et une application $r: |\Delta| \rightarrow M$ vérifiant :

(C) si $f: i \rightarrow j$ dans Δ , alors $r(j) = F(f)r(i)$.

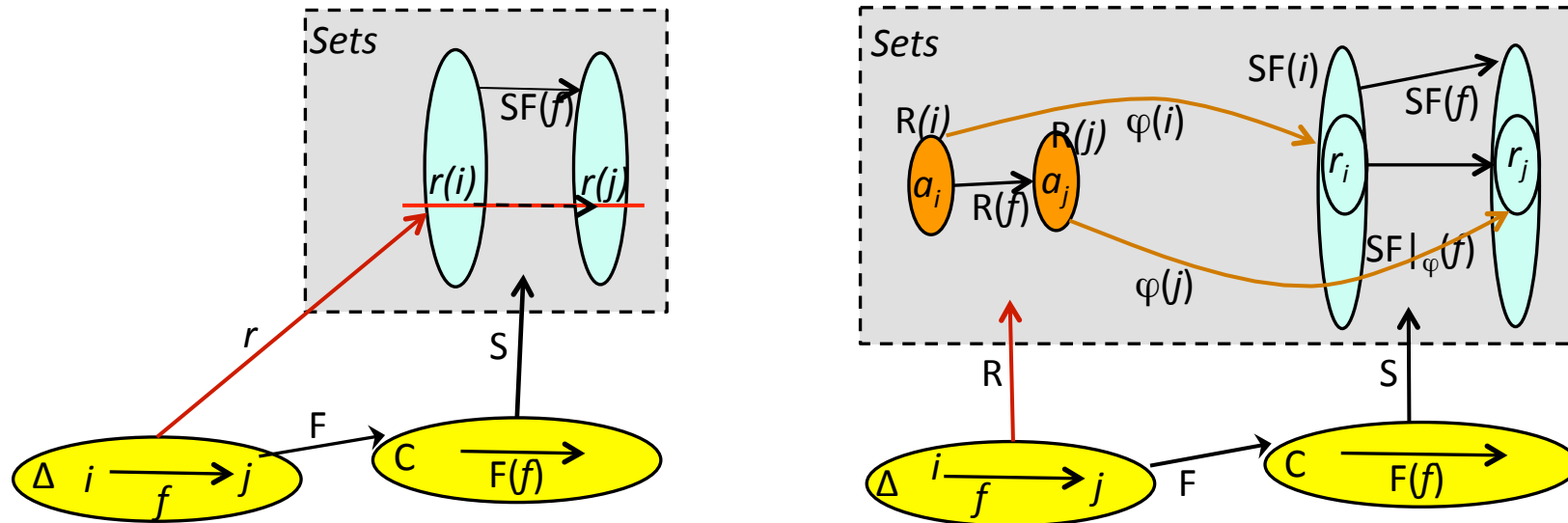
(ii) **MA-généralisation**: C = catégorie opérant via un foncteur $S: C \rightarrow \text{Sets}$. Un *K-net* pour $(S, F: \Delta \rightarrow C)$ 'est' un élément r de la limite de $S \circ F: \Delta \rightarrow \text{Sets}$ (Mazzola et-Andreatta, 2006).

(iii) **PK-net**. Popoff a proposé une notion plus 'globale' :

Définition. On appelle *PK-net* un morphisme $(F, \varphi): R \Rightarrow S$ de $\text{Diag}(\text{Sets})$. On appelle R la *forme* du PK-net et S son *support*.



DES PK-NETS AUX K-NETS



Proposition. Un PK-net $(F, \varphi): R \Rightarrow S$ définit l'application $\lim \varphi: \lim R \rightarrow \lim S.F$ qui associe à un K-net pour $R: \Delta \rightarrow \text{Sets}$ un K-net pour $(S, F: \Delta \rightarrow \text{Sets})$.

Preuve. Un élément de $\lim R$ est une famille $(a_i)_{i \in |\Delta|}$ telle que :

$$a_i \in R(i) \quad \text{et} \quad a_j = R(f)(a_i) \quad \text{pour } f: i \rightarrow j \text{ dans } \Delta ;$$

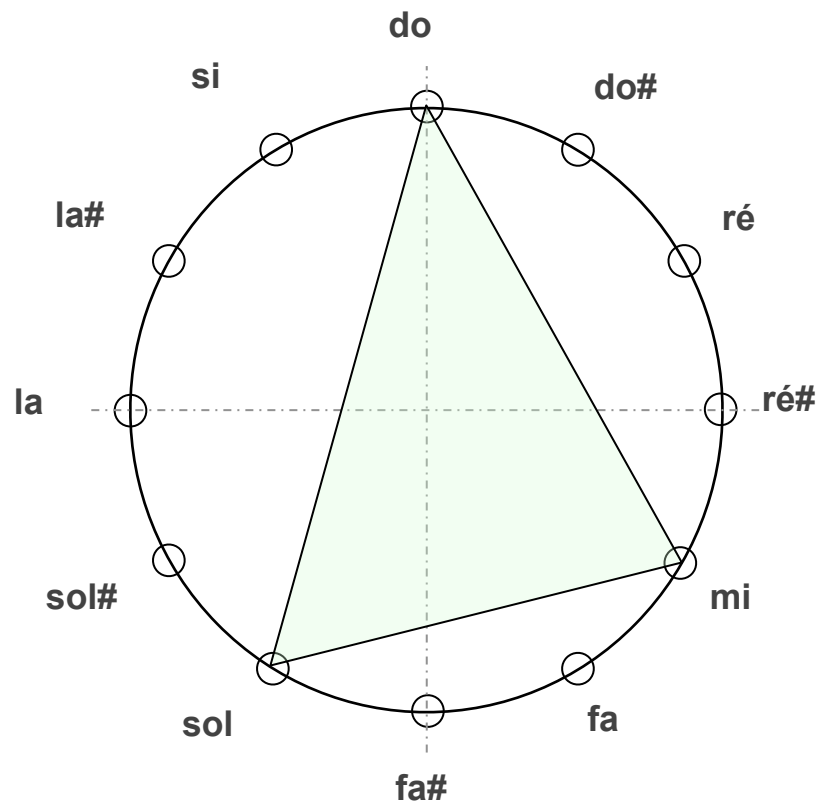
$\lim \varphi$ lui associe le K-net (r_i) pour (S, F) , où $r_i = \varphi(i)(a_i) \in SF(i)$.

$\Rightarrow$ Un PK-net ne représente pas un unique K-net, mais un ensemble de K-nets pour (S, F) et une manière de les "nommer" via des K-nets pour R .

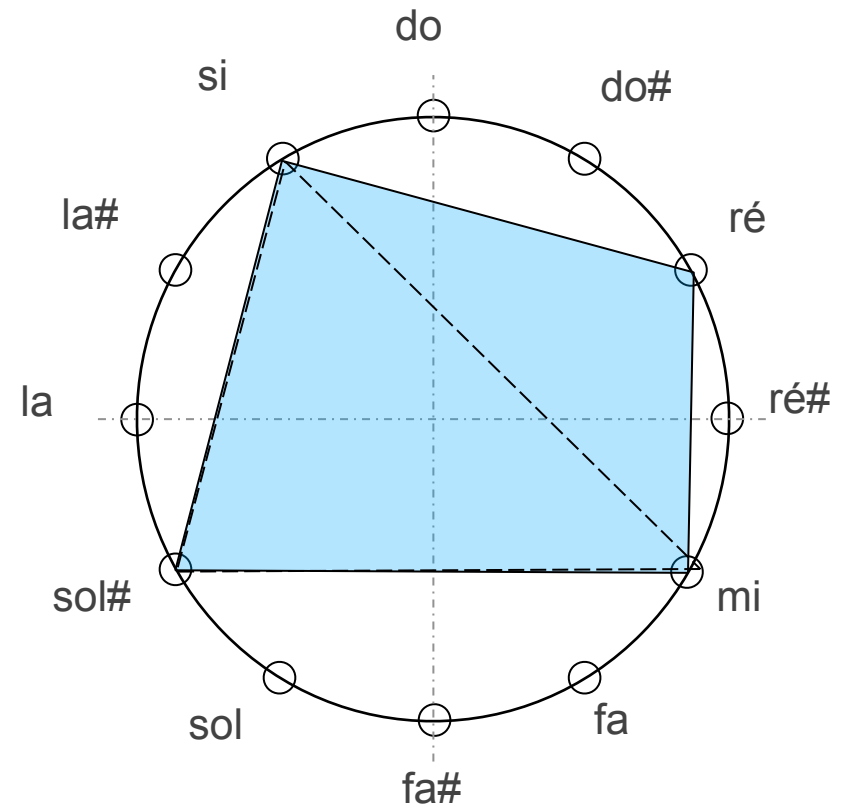
Corollaire. Un PK-net se 'réduit' à un K-net ssi sa forme R prend ses valeurs dans la sous-catégorie de Sets ayant pour objets les singletons.

EXEMPLES de PK-nets

Application n°1 : cardinalités différentes

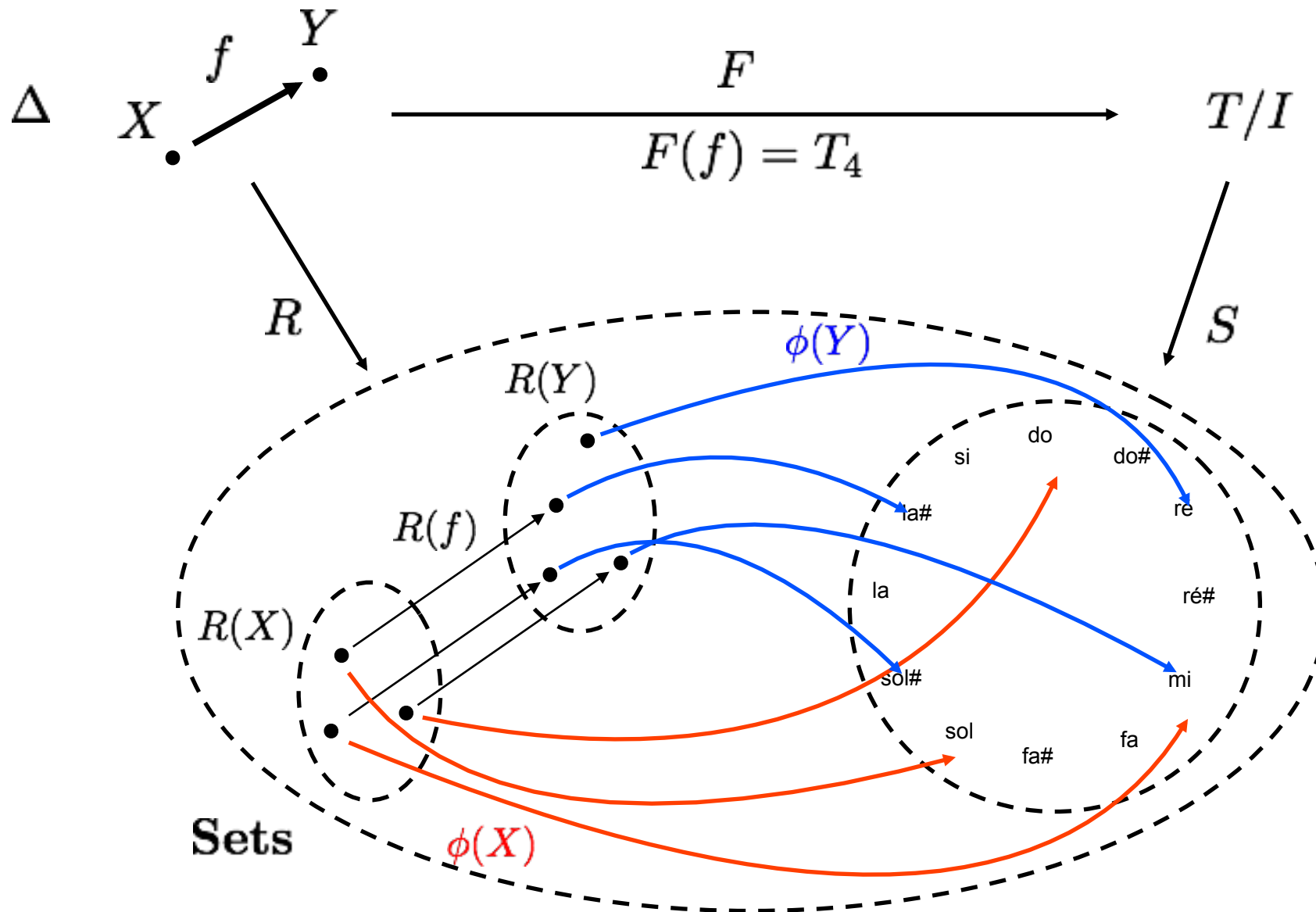


Accord majeur sur Do



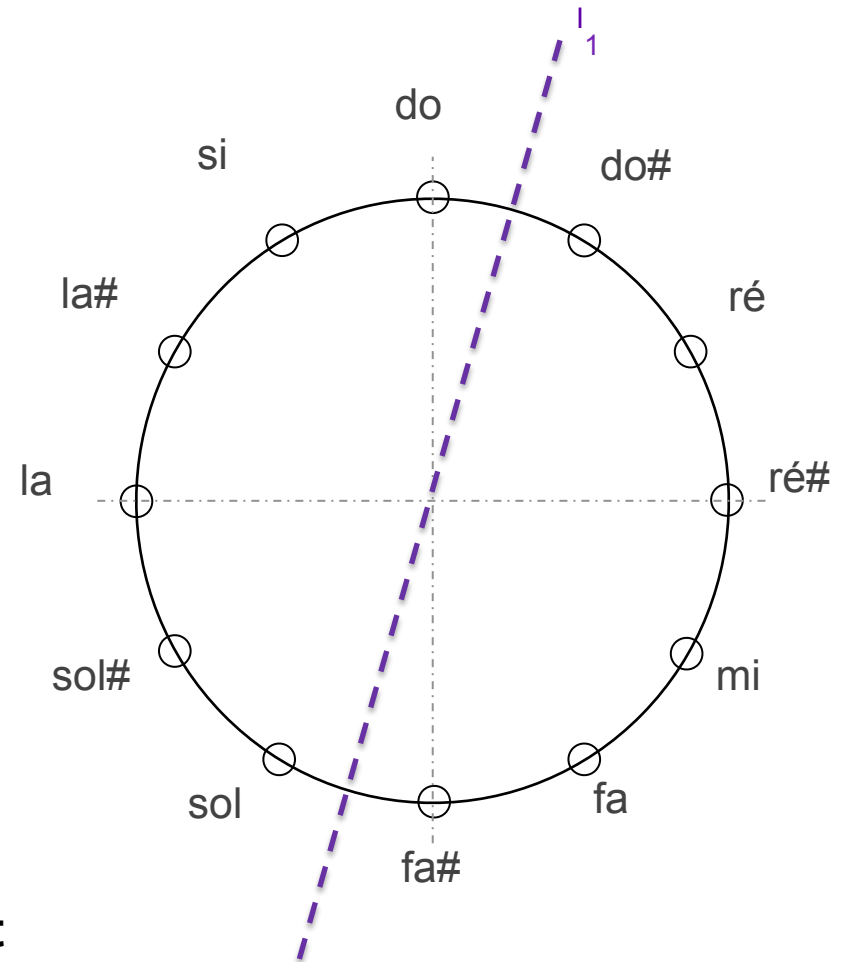
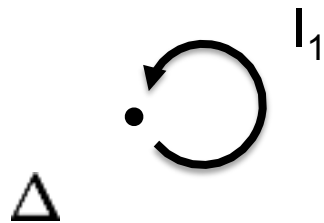
Accord de septième de dominante sur Mi

Formalisation en termes de PK-nets



Application n° 2 : PK-nets comme généralisation des K-nets

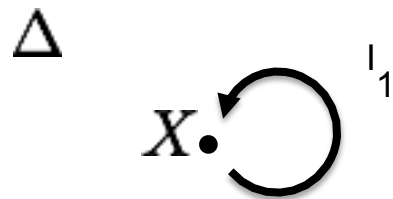
Soit le diagramme suivant :



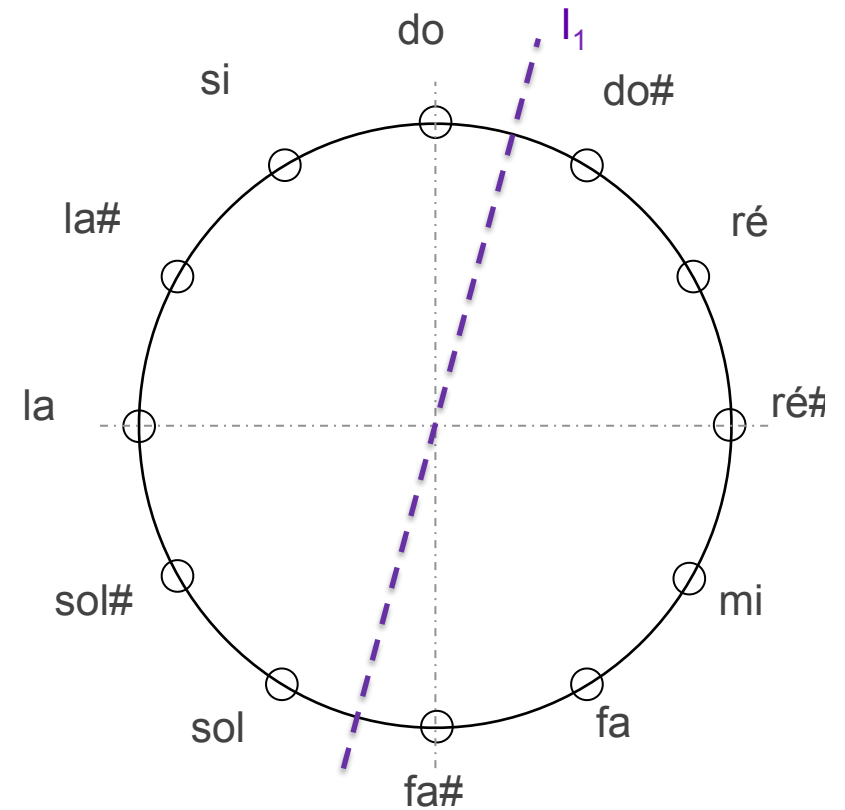
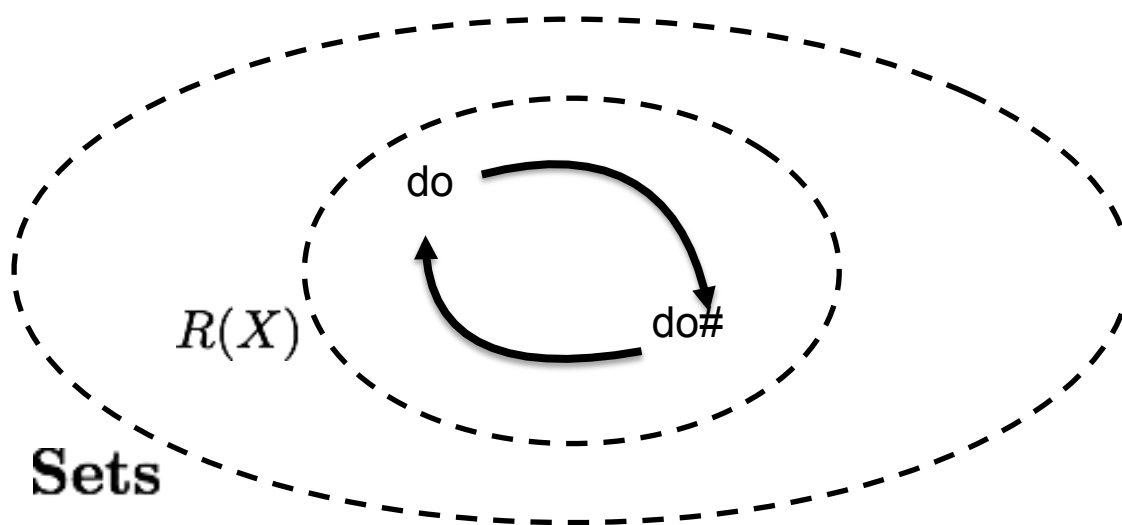
Aucun K-net possible car $x=1-x$ n'admet
pas de solution dans $\mathbb{Z}_{12}$

Application n° 2

Il est en revanche possible de trouver
des PK-Nets valides avec ce diagramme

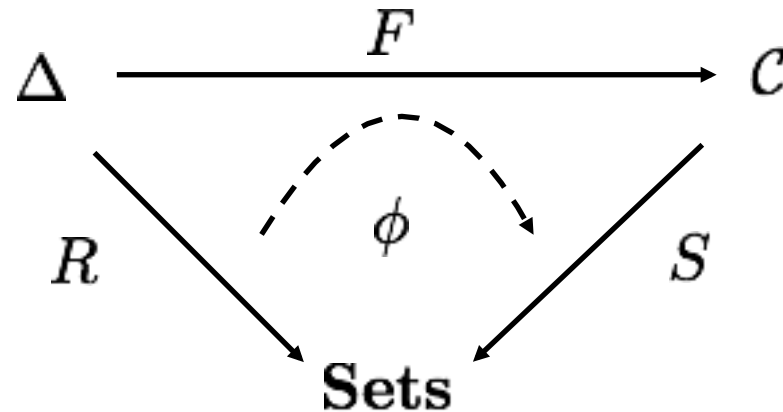


R



Application n° 3 : Analyse dans toutes catégories

Les PK-Nets ne sont pas limités aux transformations dans un groupe



Application: analyse de *time-spans*

Un *time-span* est un couple (t, δ) , avec $t \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$



Application n° 3 : Analyse dans toutes catégories

On considère l'ensemble **S** des time-spans *dyadiques*

$$(t, 2^\delta), t \in \mathbb{Z}[1/2], \delta \in \mathbb{Z}$$

Soit le monoïde

$$M = \{(u, 2^v), u \in \mathbb{Z}[1/2], u > 0, v \in \mathbb{Z}\}$$

Avec la loi de multiplication

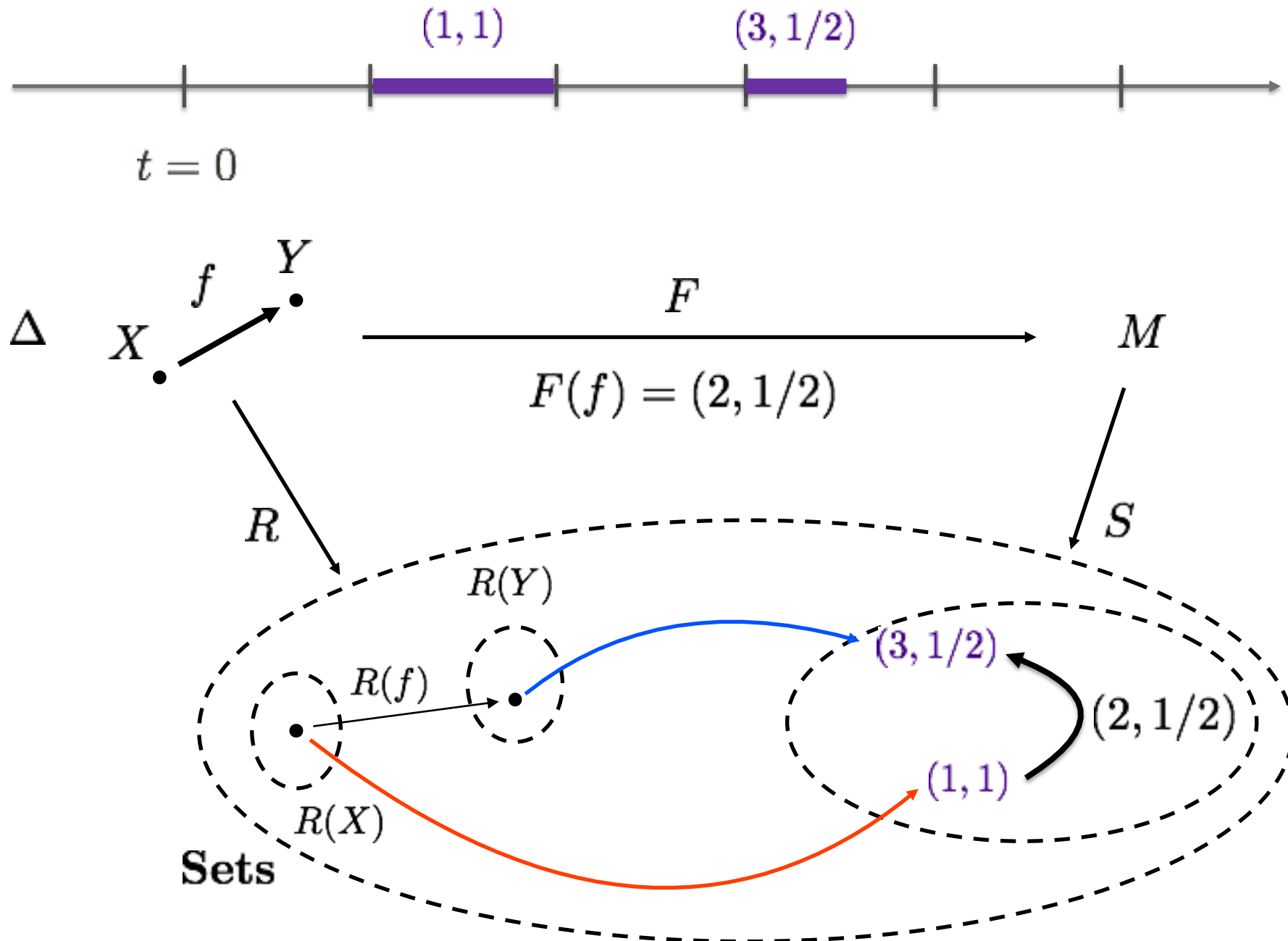
$$(u_1, 2^{v_1}) * (u_2, 2^{v_2}) = (u_2 + u_1 \cdot 2^{v_2}, 2^{v_1+v_2})$$

Ce monoïde est généré par (1,1) et (0,1/2)

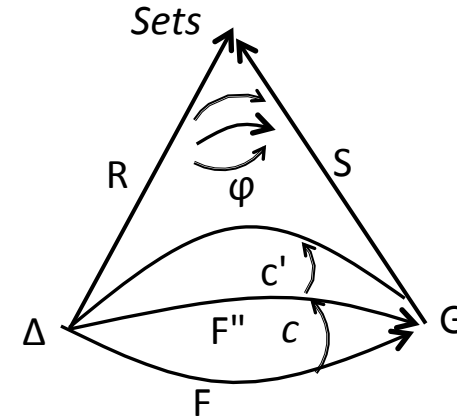
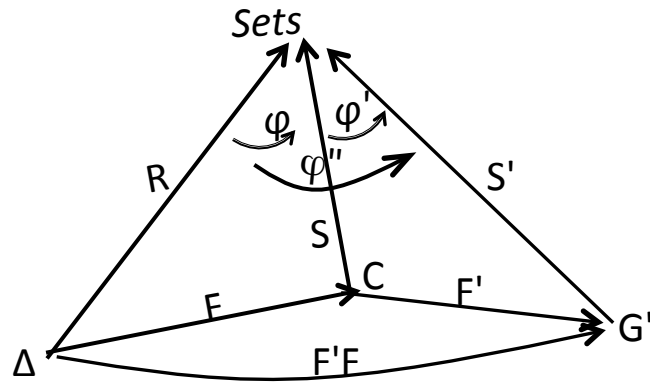
On donne également l'action sur **S** :

$$(u, 2^v) \cdot (t, 2^\delta) = (t + 2^\delta \cdot u, 2^{\delta+v})$$

Application n° 3 : Analyse dans toutes catégories

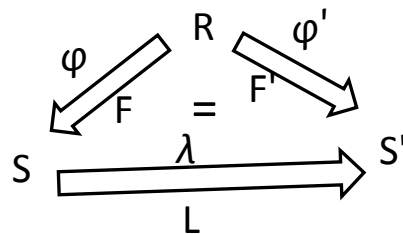
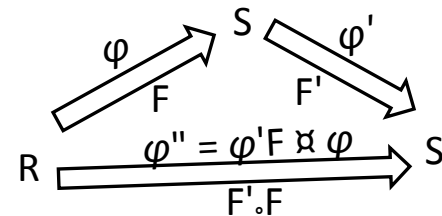


CATEGORIES DE PK-NETS



Les PK-nets en tant que morphismes de $\text{Diag}(\text{Sets})$ se composent. Dans la suite $\text{Diag}(\text{Sets})$ sera notée PKN et appelée *catégorie des PK-nets*. Elle s'étend en une 2-catégorie **PKN**.

La composition s'écrit en abrégé :



La **catégorie** PKN_R **des PK-nets de forme** R est la catégorie des objets de PKN au-dessous de R . Elle a pour objets les PK-nets de forme R , pour morphismes de $((F, \varphi): R \Rightarrow S)$ vers $((F', \varphi'): R \Rightarrow S')$ les $(L, \lambda): S \Rightarrow S'$ formant un triangle commutatif.

STRUCTURE DE PKN

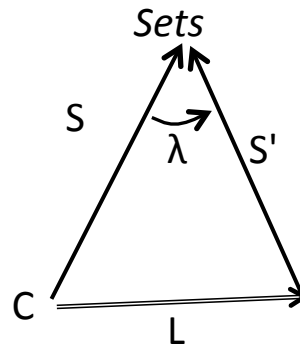
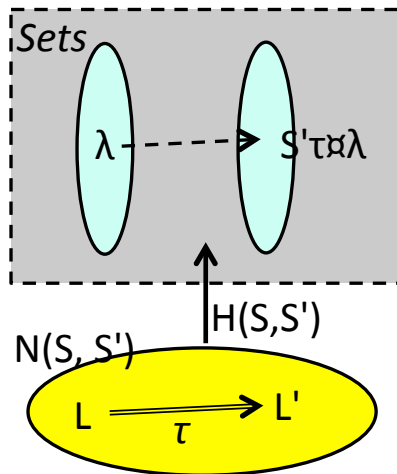
Théorème. 1° PKN est complète et cocomplète, les (co)limites étant préservées par le foncteur 'base' $B: \text{PKN} \rightarrow \text{Cat}: ((F, \varphi): R \Rightarrow S) \mapsto F$.

2° PKN_R est complète et admet des colimites inductives connexes.

3° PKN est cartésienne fermée.

1° Les limites et colimites se calculent par transport dans la catégorie équivalente *Fid* qui est une sous-catégorie pleine de Cat^2 .

2° Le résultat pour PKN_R se déduit du résultat pour PKN et du fait que c'est la catégorie des objets de PKN au-dessous de R .



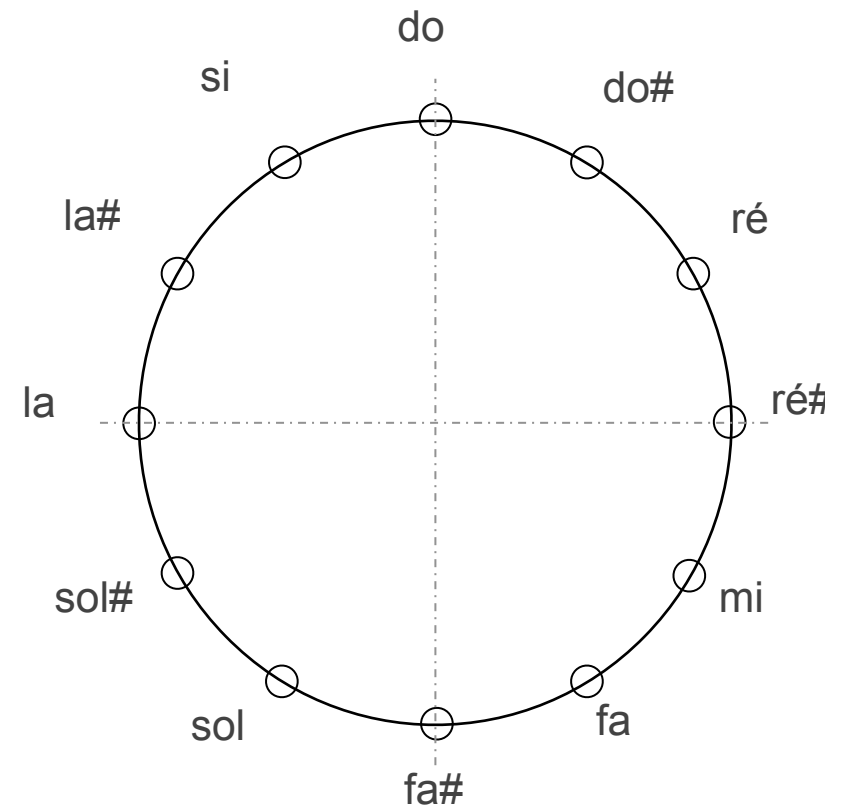
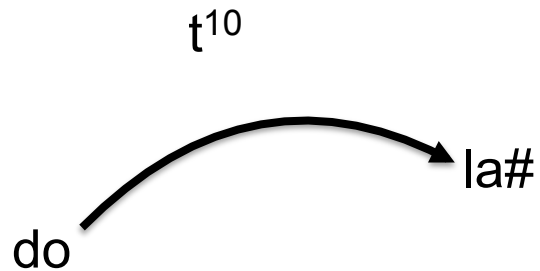
3° Pour $S: C \rightarrow \text{Sets}$, $S': C' \rightarrow \text{Sets}$, on a $\text{HOM}(S, S'): N(S, S') \rightarrow \text{Sets}$, où $N(S, S')$ est la sous-catégorie pleine de C'^C ayant pour objets les foncteurs $L: C \rightarrow C'$ tels qu'il existe des PK-nets $(L, \lambda): S \Rightarrow S'$;

$\text{HOM}(S, S')(L) = \{\lambda : S \Rightarrow S' \circ L\}$,
 $\text{HOM}(S, S')(\tau: L \Rightarrow L'): \lambda \mapsto S' \circ \tau \circ \lambda$.

AUTRES EXEMPLES

Application n°4 : morphismes de PK-Nets

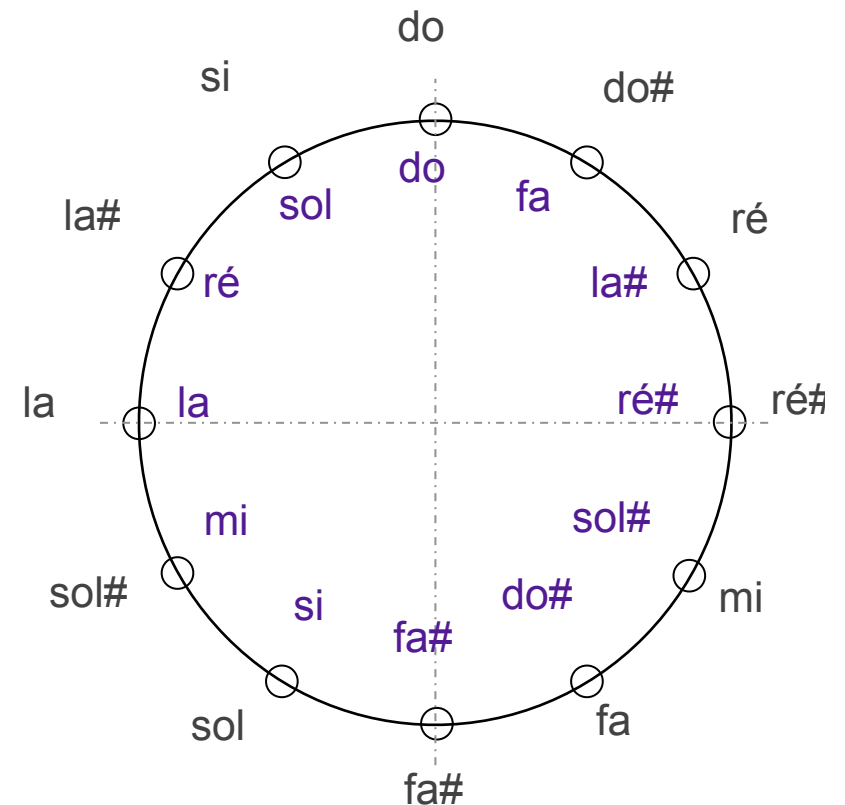
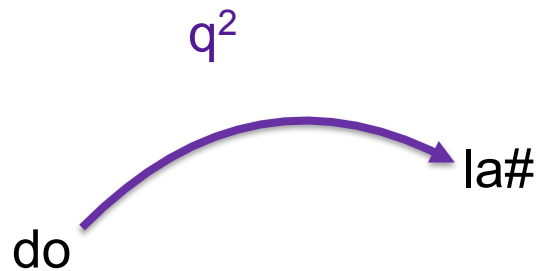
$\mathbb{Z}_{12} = \langle t \mid t^{12} = 1 \rangle$ agit sur l'ensemble des notes
(modulo l'octave) par transposition de demi-tons



Ceci définit un foncteur $S: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbf{Sets}$

Application n°4 : morphismes de PK-Nets

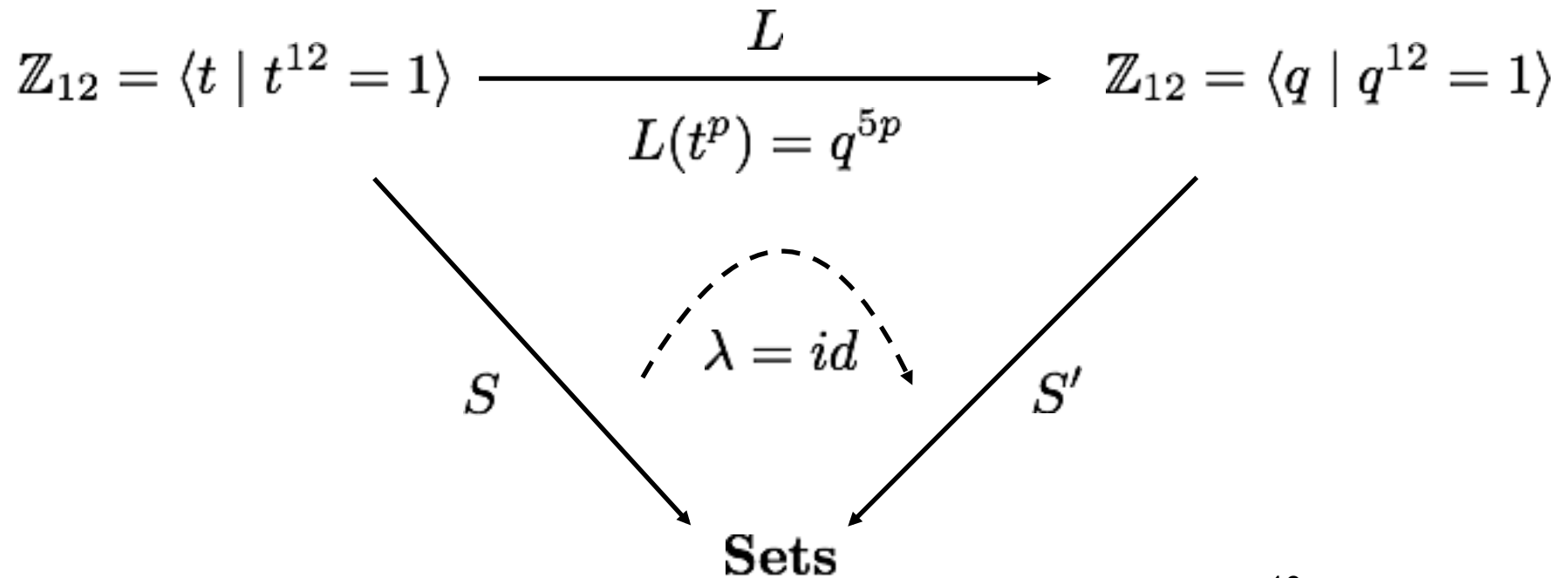
$\mathbb{Z}_{12} = \langle q \mid q^{12} = 1 \rangle$ agit également sur l'ensemble des notes (modulo l'octave) par transposition par **quartes**



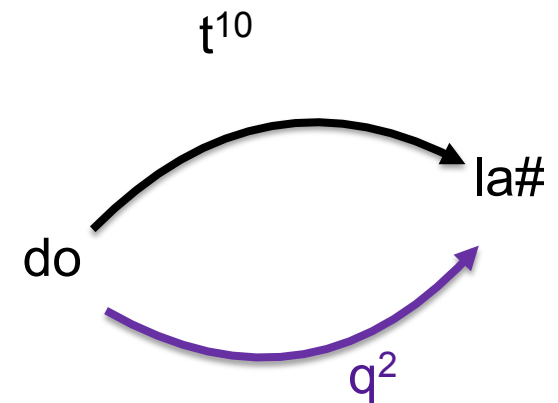
Ceci définit un autre foncteur $S' : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbf{Sets}$

Application n°4 : morphismes de PK-Nets

Le morphisme de PK-Net suivant:

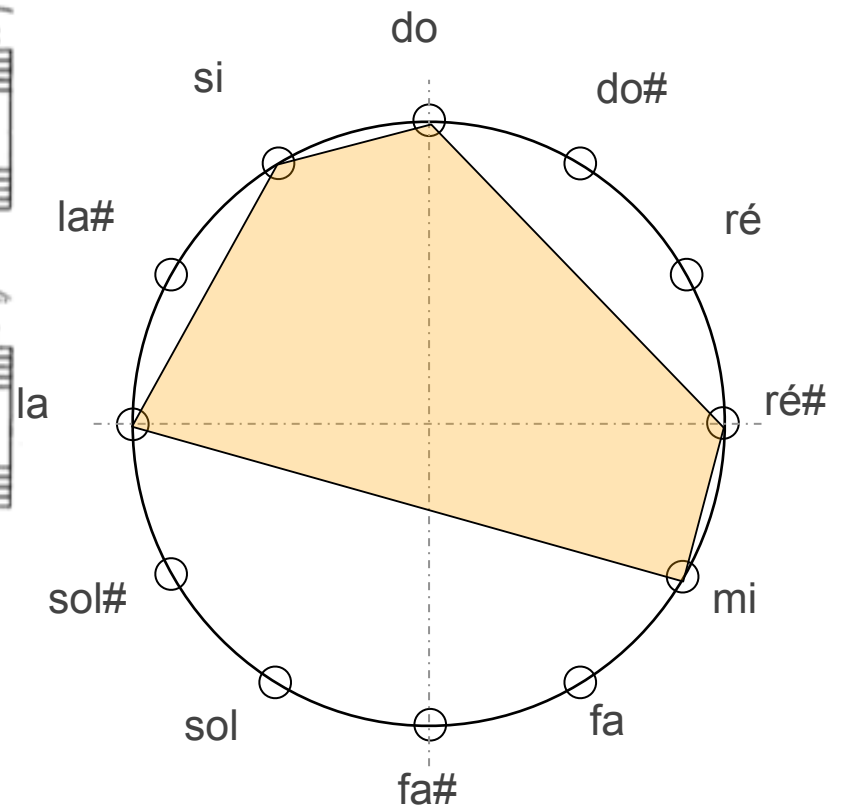


permet de transformer un PK-Net exprimé en transpositions par demi-tons en un PK-Net exprimé en transpositions par quartes



Application n°5 : morphismes de PK-Nets rythmiques et intervalliques

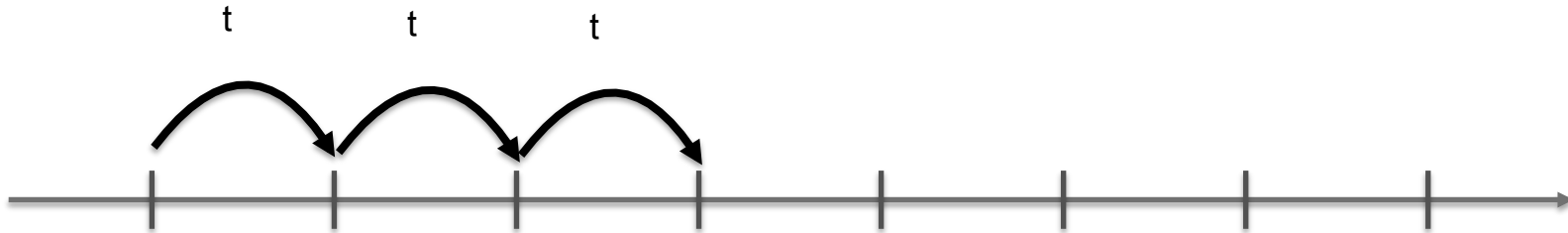
Extrait du finale de la sonate op. 58 de Chopin



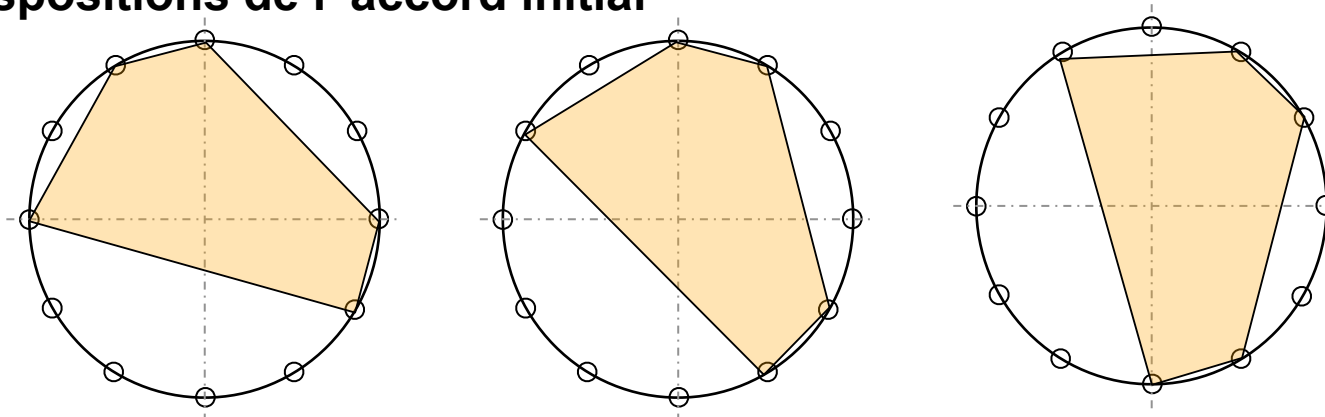
Le motif initial est transposé de deux demi-tons à chaque moitié de mesure

Morphismes de PK-Nets rythmiques et intervalliques

On dispose d'un foncteur $S: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbf{Sets}$ qui détermine l'action du groupe $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$ sur l'ensemble des temps équidistants d'une demi-mesure

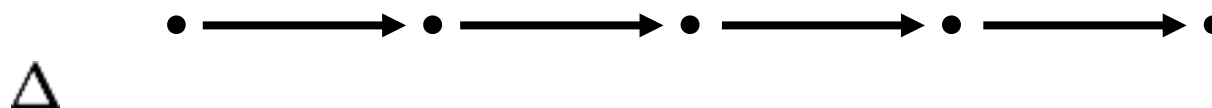


On dispose également d'un foncteur $S': \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbf{Sets}$ qui détermine l'action par transposition par demi-tons de $\mathbb{Z}_{12}$ sur l'ensemble des transpositions de l'accord initial

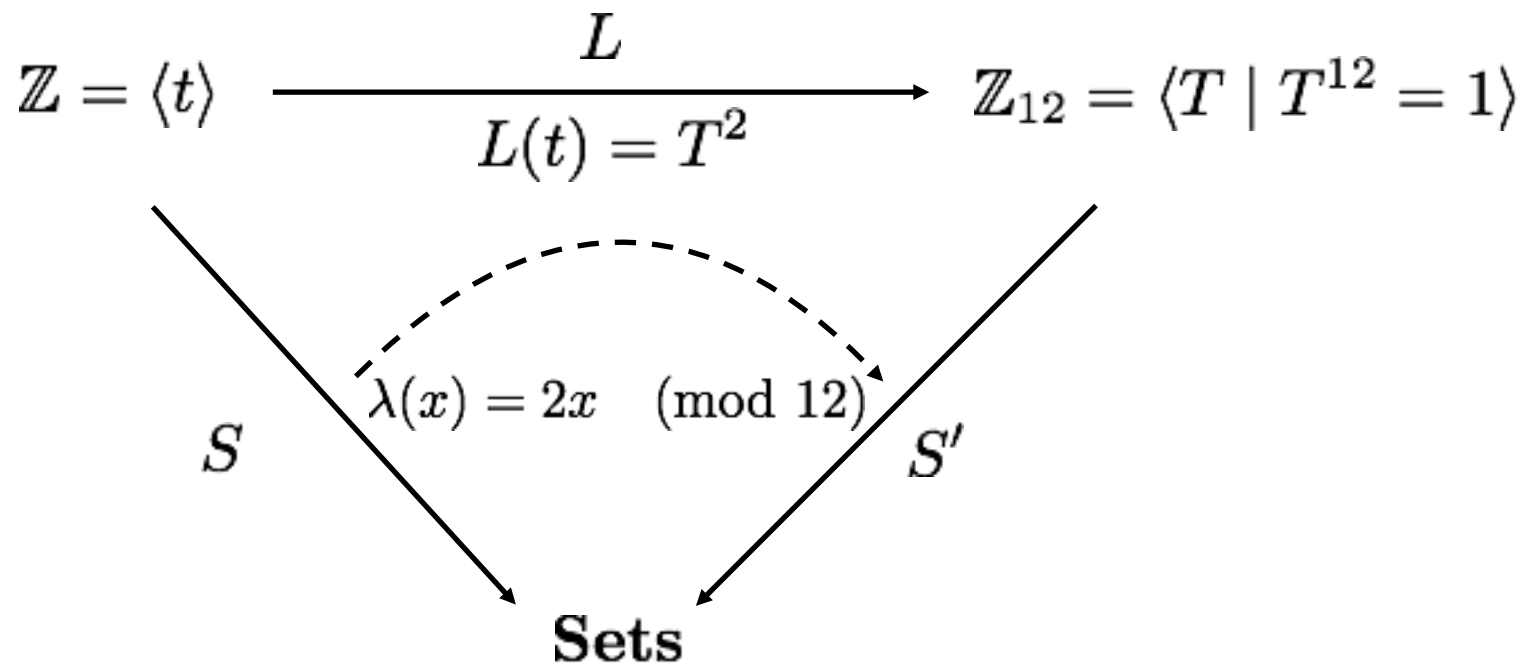


Morphismes de PK-Nets rythmiques et intervalliques

On considère le diagramme

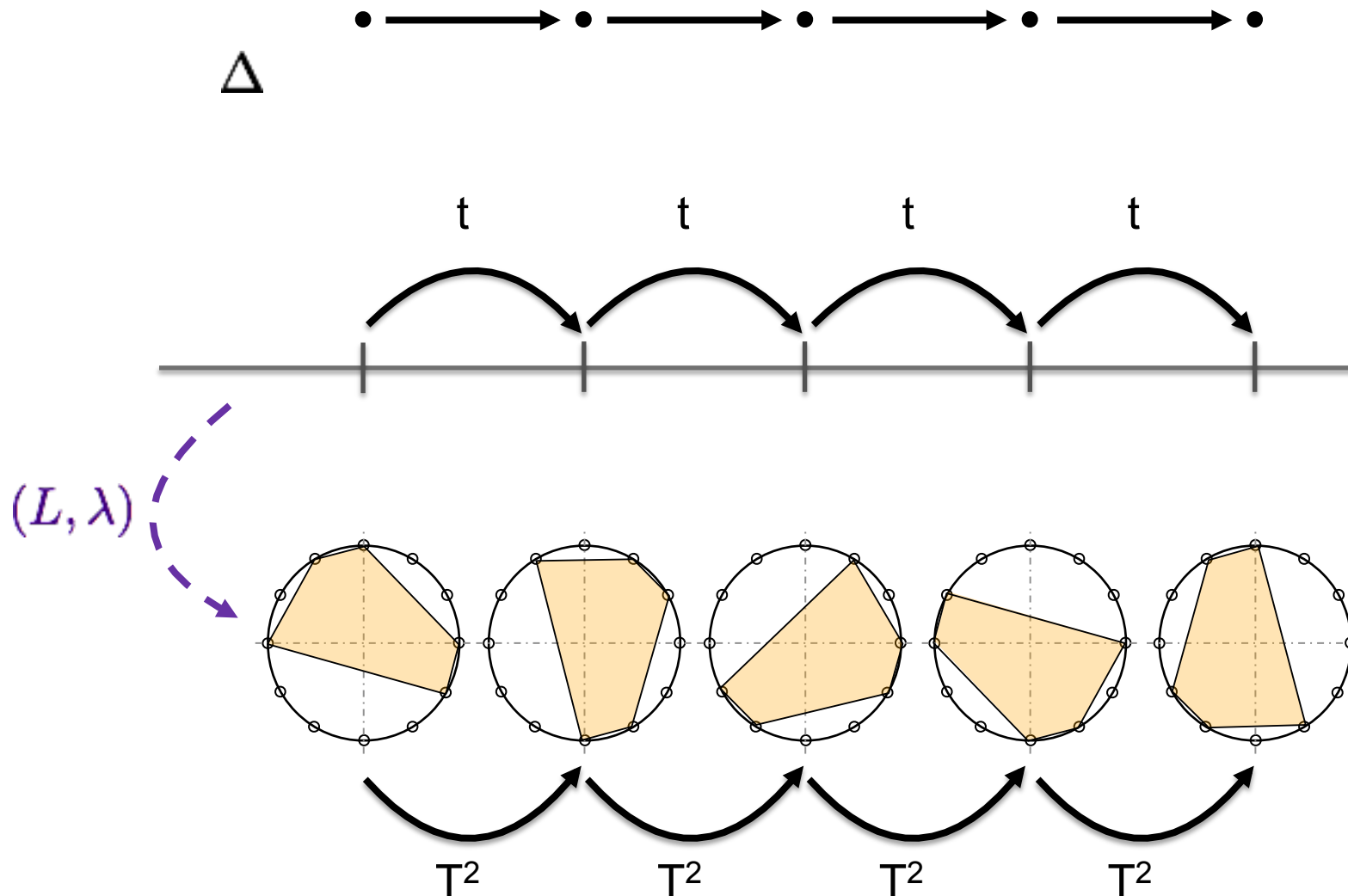


et le morphisme de PK-Nets suivant

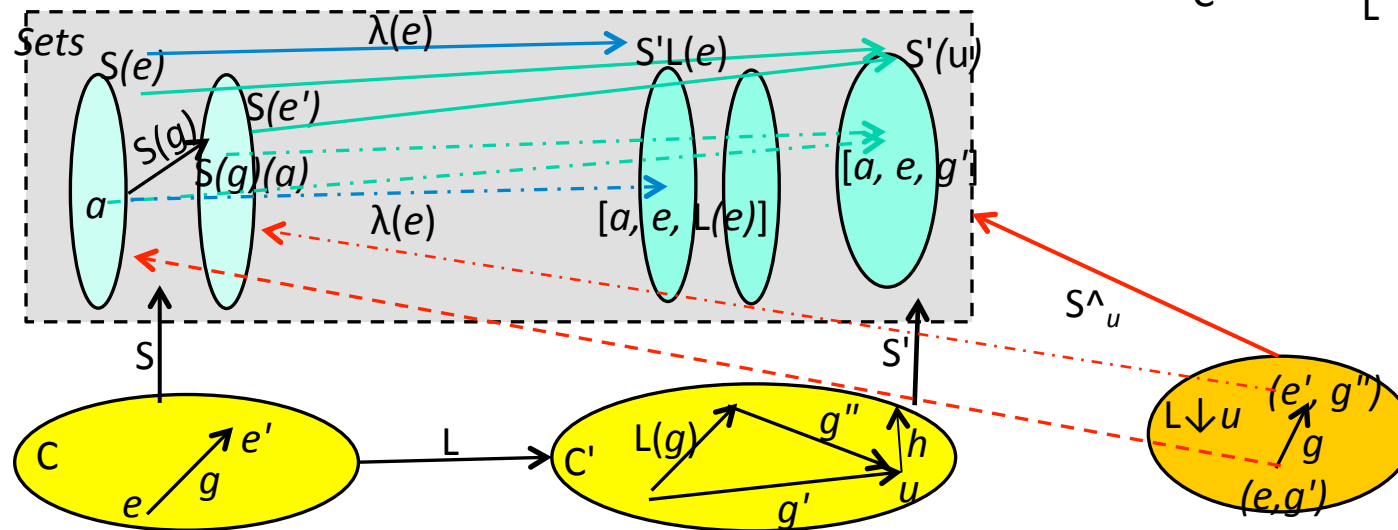
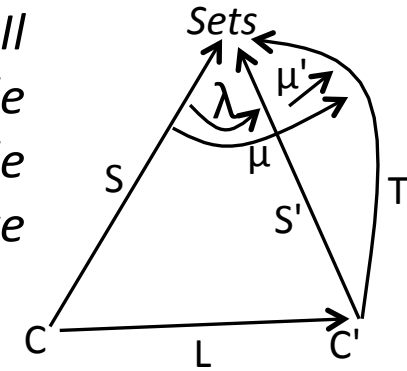


Morphismes de PK-Nets rythmiques et intervalliques

Ceci permet d'expliciter la relation rythme/accords dans le passage de Chopin



Théorème. Soit $L: C \rightarrow C'$ et $S: C \rightarrow \text{Sets des foncteurs}$. Il existe un PK-net 'initial' $(L, \lambda): S \Rightarrow S'$ dans les PK-nets de forme S et base L , où (S', λ) est l'extension de Kan de S le long de L ; il vérifie : pour tout PK-net $(L, \mu): S \Rightarrow T$, il existe une et une seule $\mu': S' \Rightarrow T$ telle que $\mu = \mu' L \bowtie \lambda$.



$(a, e, g') \sim (a', e', g'')$ s'il existe $g \in C$ tel que $a' = S(g)(a)$ et $g' = g''L(g)$.

On a $S'(h): S'(u) \rightarrow S'(u'): [a, e, g'] \mapsto [a, e, hg']$. Et $\lambda: S \Rightarrow S'L$ est définie par
 $\lambda(e): S(e) \rightarrow S'L(e): a \mapsto [a, e, L(e)]$.

EXTENSION DE KAN D'UN PK-NET

1. Cas où C et C' sont des groupes : alors S définit une action du groupe C sur $M = S(u)$ et $S'(u)$ est le quotient M' de $M \times C'$ par l'équivalence :

$$(a, g') \sim (ga, g'L(g)^{-1}) \text{ pour tout } g \text{ dans } C.$$

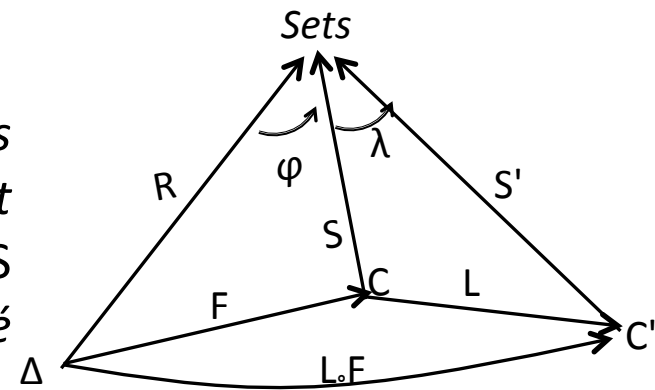
S' définit l'action $(h, [a, g']) \rightarrow [a, hg']$, et on a $\lambda(u): M \rightarrow M': a \rightarrow [a, u]$.

2. Cas où S est représentable. $S = \text{Hom}_C(o, -): C \rightarrow \text{Sets}$. Il existe un PK-net $(L, \mu): S \Rightarrow S''$ de support représentable :

$$S'' = \text{Hom}_C(L(o), -), \text{ avec } \mu(e) = \text{restriction de } L \text{ à } \text{Hom}_C(o, e).$$

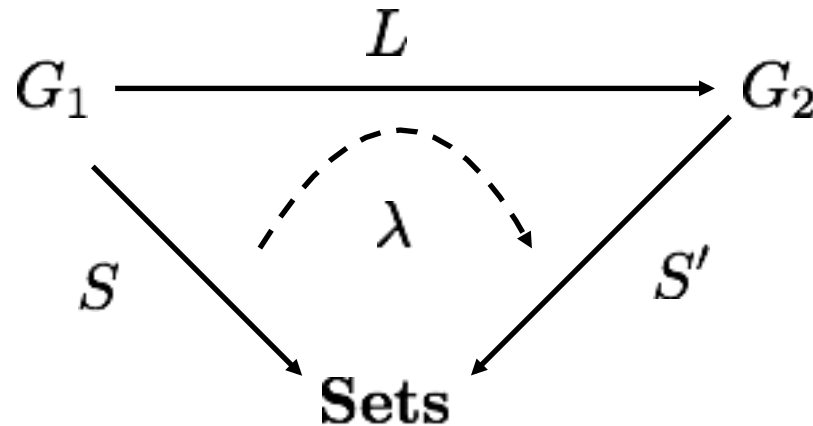
Proposition. Si S' est l'extension de Kan de S le long de L , on a une transformation naturelle $\mu': S' \Rightarrow S''$ définie par $\mu'(e): [a, e, g'] \mapsto g'L(a)$. Si C est un groupoïde, alors μ' est une équivalence et (S'', μ) est une extension de Kan de S le long de L .

Proposition. Soit $L: C \rightarrow C'$ et $S: C \rightarrow \text{Sets}$ des foncteurs. Par composition avec le PK-net initial $(L, \lambda): S \Rightarrow S'$, un PK-net $\mathbf{K} = (F, \varphi): R \Rightarrow S$ s'étend en un PK-net $(L \circ F, \lambda F \alpha \varphi): R \Rightarrow S'$, appelé **extension de Kan de $\mathbf{K}$ le long de L** .



Isographies complètes

Soit un morphisme de PK-Nets donné:



Quels que soient x et y dans G_1 tels que $y = S(f)(x)$, on a par définition:

$$\lambda(y) = \lambda(S(f)(x)) = S' L(f)(\lambda(x))$$

Isographies complètes

On suppose $G_1 = G_2 = D_{2n}$, et le foncteur $S: D_{2n} \rightarrow \mathbf{Sets}$ donné par l'action usuelle par transposition et inversion

Théorème: Soit $L: D_{2n} \rightarrow D_{2n}$ un automorphisme donné. Alors

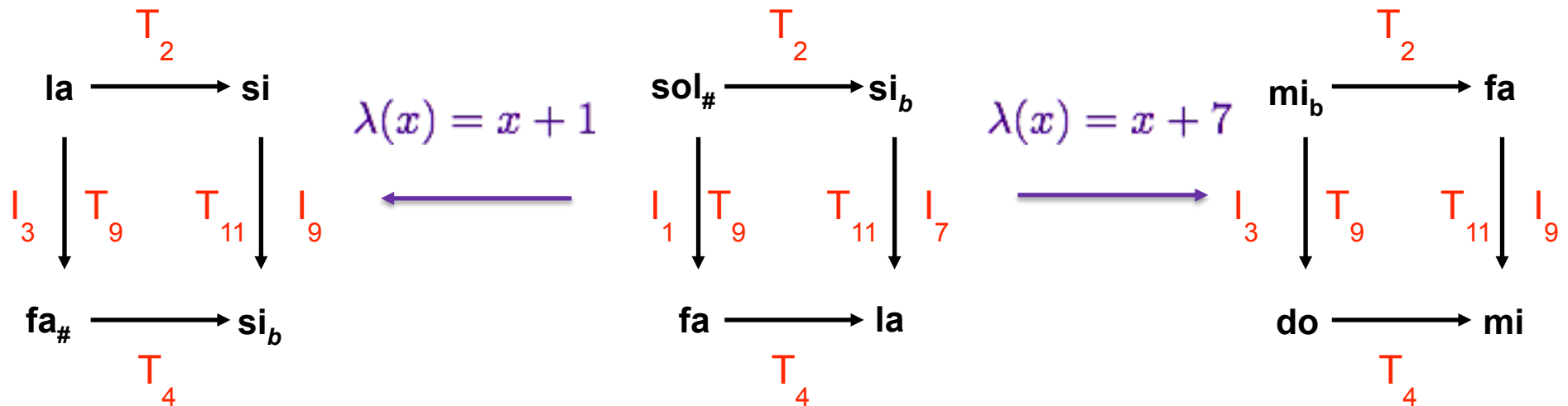
- Si n est pair, il existe 0 ou 2 transformations naturelles $\lambda: S \rightarrow SL$
- Si n est impair, il existe une seule transformations naturelles $\lambda: S \rightarrow SL$

Isographies complètes

Application au groupe T/I , isomorphe à D_{24}

Soit L l'automorphisme de T/I qui envoie $T_p \rightarrow T_p$ et $I_p \rightarrow I_{p+2}$

Par application du théorème précédent, il existe deux transformations naturelles $\lambda: S \rightarrow SL$



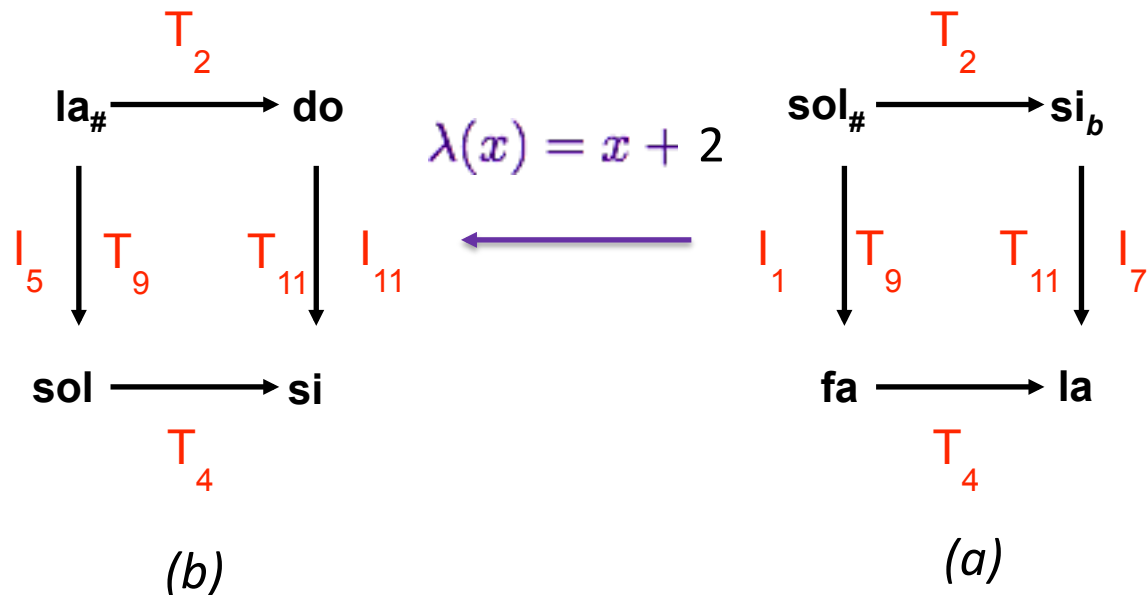
Isographies complètes

Application au groupe T/I , isomorphe à D_{24}

Soit L l'automorphisme de T/I qui envoie $T_p \rightarrow T_p$ et $I_p \rightarrow I_{p+2}$

Par application du théorème précédent, il existe deux transformations naturelles $\lambda: S \rightarrow SL$

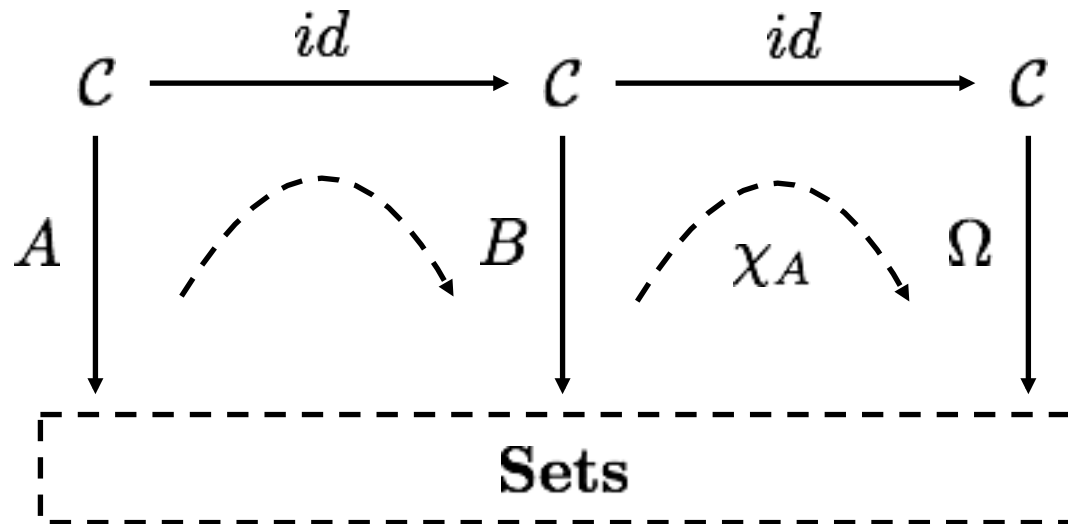
Note : le diagramme obtenu (b) est en isographie positive $\langle T_k \rangle$ avec le diagramme de départ (a) mais avec $k=4$ au lieu de $k=2$



PK-Nets et topoi

Si $\mathcal{C}$ est une petite catégorie, la catégorie de pré-faisceaux $\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}}$ est un topos

Soit $A \in \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}}$ un sous-objet de $B \in \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}}$: il existe un morphisme caractéristique χ_A de B vers



Le morphisme caractéristique peut être considéré comme un
morphisme de PK-Nets

PK-Nets et topoi

Soit le monoïde

$$M = \{(u, 2^v), u \in \mathbb{Z}[1/2], u > 0, v \in \mathbb{Z}\}$$

Avec la loi de multiplication

$$(u_1, 2^{v_1}) * (u_2, 2^{v_2}) = (u_2 + u_1 \cdot 2^{v_2}, 2^{v_1+v_2})$$

Le classificateur de sous-objets de $\mathbf{Sets}^M$ est l'ensemble

$$\{p \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}], p \geq 0\} \cup \{x\}$$

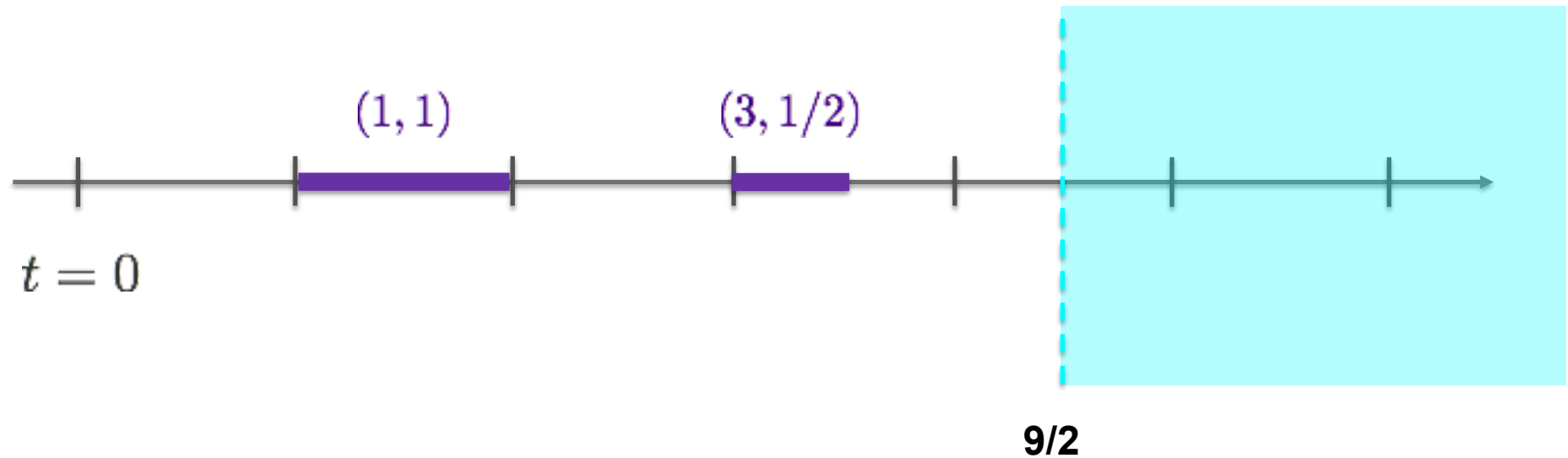
équipé de l'action des générateurs de M (x étant un point fixe)

$$(1, 1) \cdot p = \begin{cases} p - 1 & \text{si } p \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

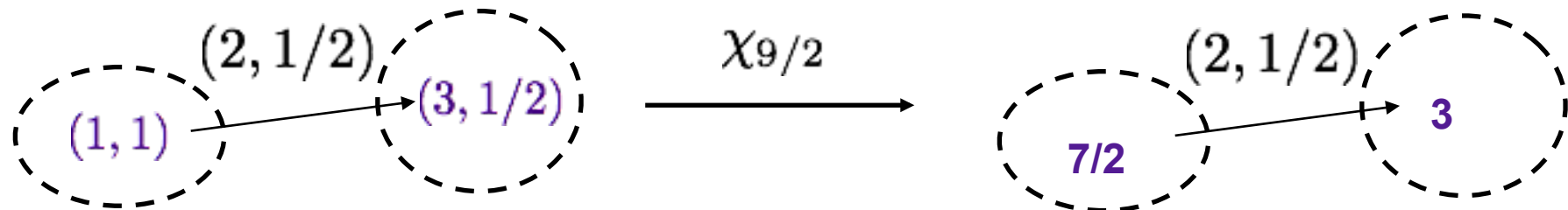
$$(0, 1/2) \cdot p = 2p$$

PK-Nets et topoi

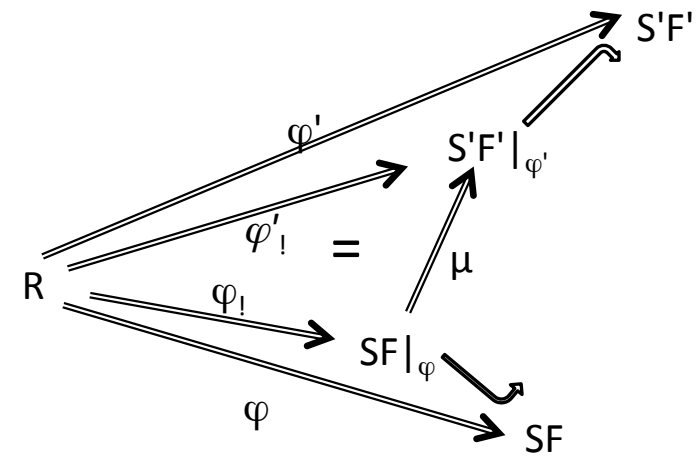
L'ensemble $\{(t, 2^\delta), t \geq 9/2, \delta \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-objet de l'ensemble des time-spans dyadiques



Par le morphisme de PK-Nets donné par le morphisme caractéristique $\chi_{9/2}$, on obtient un nouveau PK-Net



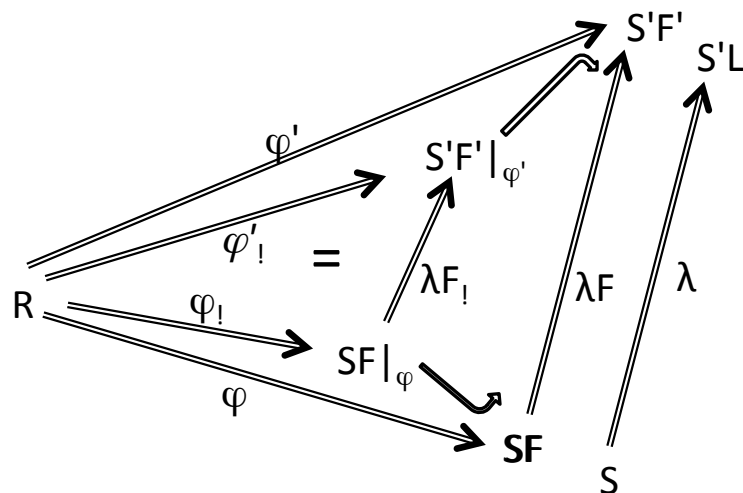
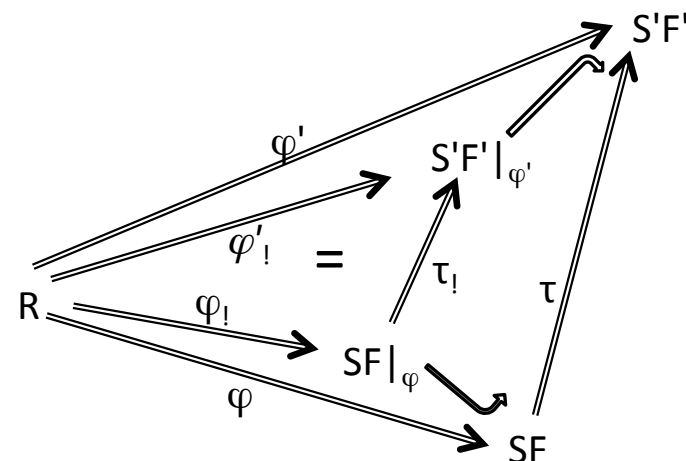
Soit $\mathbf{K} = (F, \varphi): R \Rightarrow S$ un PK-net. Le foncteur $S.F: \Delta \rightarrow \mathbf{Sets}$ a un sous-foncteur $SF|_{\varphi}: \Delta \rightarrow \mathbf{Sets}$ associant à $i \in |\Delta|$ l'ensemble $\text{Im}\varphi(i)$ et à $f: i \rightarrow j$ la restriction $SF|_{\varphi}(f): \text{Im}\varphi(i) \rightarrow \text{Im}\varphi(j)$ de $SF(f)$. Et $\varphi: R \Rightarrow S.F$ factorise via sa 'restriction' $\varphi!: R \Rightarrow SF|_{\varphi}$.



Définition. Deux PK-nets $\mathbf{K} = (F, \varphi): R \Rightarrow S$ et $\mathbf{K}' = (F', \varphi'): R \Rightarrow S'$ sont dits *PK-homograpes* s'il existe un foncteur $L: C \rightarrow C'$ et $\mu: SF|_{\varphi} \Rightarrow S'F'|_{\varphi'}$, tels que l'on ait $F' = L.F$ et $\varphi'_! = \mu \circ \varphi_!$. On appelle (L, μ) une *PK-homographie* de $\mathbf{K}$ vers $\mathbf{K}'$. C' est une *PK-isographie* si L est un isomorphisme et μ une équivalence.

CONSTRUCTION DE PK-HOMOGRAPHIES

S'il existe un PK-net un foncteur L et une transformation naturelle $\tau: S.F \Rightarrow S'.F'$ tels que $F' = L.F$ et $\varphi' = \tau \circ \varphi$, on obtient une PK-homographie $(L, \tau_!): \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}'$ en prenant pour $\tau_!: SF|_{\varphi} \Rightarrow S'F'|_{\varphi'}$ la 'restriction' de τ telle que $\tau_!(i): \text{Im}\varphi(i) \rightarrow \text{Im}\varphi'(i): a \mapsto \tau(i)(a)$.

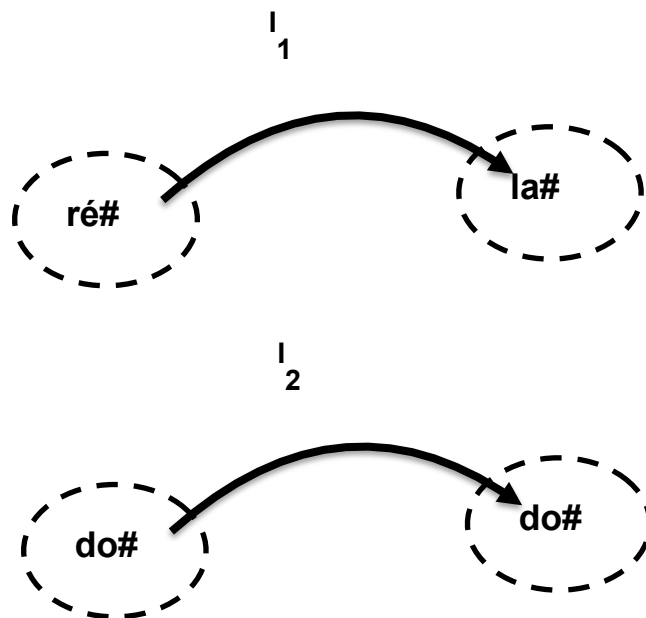


En particulier si on a un PK-net $(L, \lambda): S \Rightarrow S'$ avec $F' = L.F$ et $\varphi' = \lambda F \circ \varphi$ on en déduit une PK-homographie dite *complète* $(L, \lambda F_!): \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}'$.

Par exemple tout PK-net $\mathbf{K}$ est PK-homographe à son extension de Kan le long de tout foncteur $L: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$.

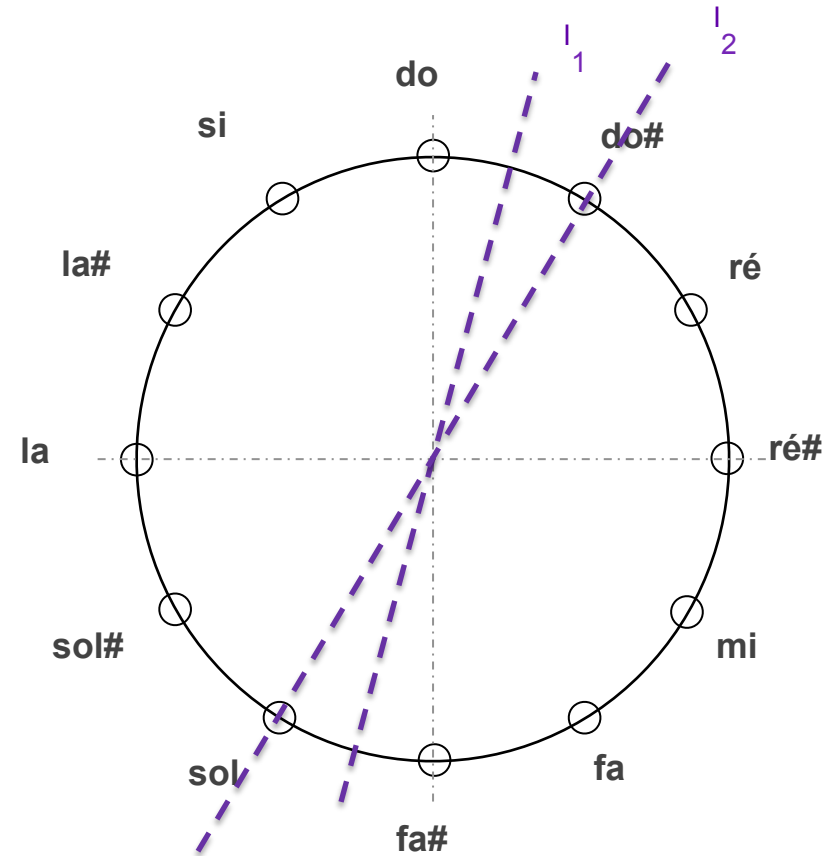
PK-Nets homographes

Il peut exister des PK-Nets homographes mais non-isographes



Ces deux PK-Nets sont reliés par
l'automorphisme de T/I tel que
et

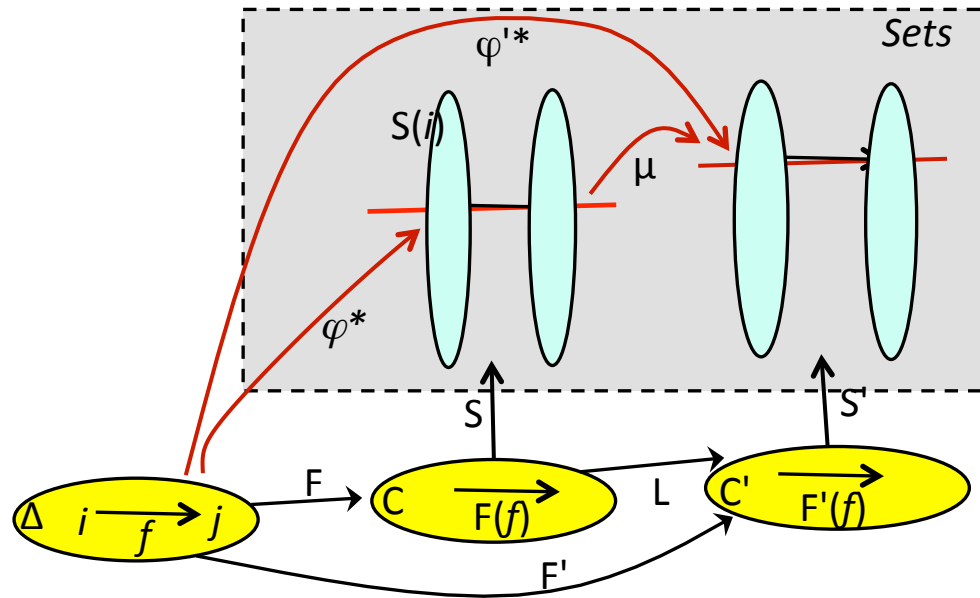
$$T_p \rightarrow T_p \quad I_p \rightarrow I_{p+1}$$



Cependant, la transformation naturelle entre les restrictions n'est pas bijective : **les PK-Nets sont homographes mais non-isographes**

PK-HOMOGRAPHIES ET PK-ISOGRAPIHES ENTRE K-NETS

Un K-net 'est' un PK-net $(F, \varphi): R \Rightarrow S$ où $R(i)$ est un singleton de sorte que $\text{Im}\varphi(i)$ est un singleton. Ainsi φ s'identifie à une application φ^* définie sur $|\Delta|$ vérifiant : $\varphi^*(i) \in SF(i)$ et $\varphi^*(j) = SF(f)(\varphi^*(i))$ pour $f: i \rightarrow j$. Ce K-net sera noté $(F, \varphi^*): \Delta \rightarrow S$.



Définition. Une *PK-homographie* du K-net $\mathbf{K} = (F, \varphi^*): \Delta \rightarrow S$ vers le K-net $\mathbf{K}' = (F', \varphi'^*): \Delta \rightarrow S'$ est un couple (L, μ) d'un foncteur $L: C \rightarrow C'$ et d'une application $\mu: \text{Im}\varphi^* \rightarrow \text{Im}\varphi'^*$ tels que $F' = L \circ F$ et $\varphi'^* = \mu \circ \varphi^*$. C'est une *PK-isographie* si L et μ sont des bijections.

PK-HOMOGRAPHIES ENTRE K-NETS DE MEME SUPPORT

Soient $\mathbf{K} = (F, \varphi^*): \Delta \rightarrow S$ et $\mathbf{K}' = (F', \varphi'^*): \Delta \rightarrow S$ deux K-nets de support S.

(i) **Cas où** $F = F'$. Alors $\mathbf{K}$ et $\mathbf{K}'$ sont toujours "*fortement isographes*" (au sens de Lewin), comme appartenant tous les 2 à la limite de S.F.

= Si φ^* est injectif, on définit une PK-homographie (Identité, μ): $\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}'$ par $\mu(\varphi^*(i)) = \varphi'^*(i)$; c'est une PK-isographie si φ'^* est aussi injectif ; sinon ce n'est pas toujours une PK-isographie.

= Si ni φ^* ni φ'^* n'est injectif, $\mathbf{K}$ et $\mathbf{K}'$ peuvent ne pas même être PK-homographes.

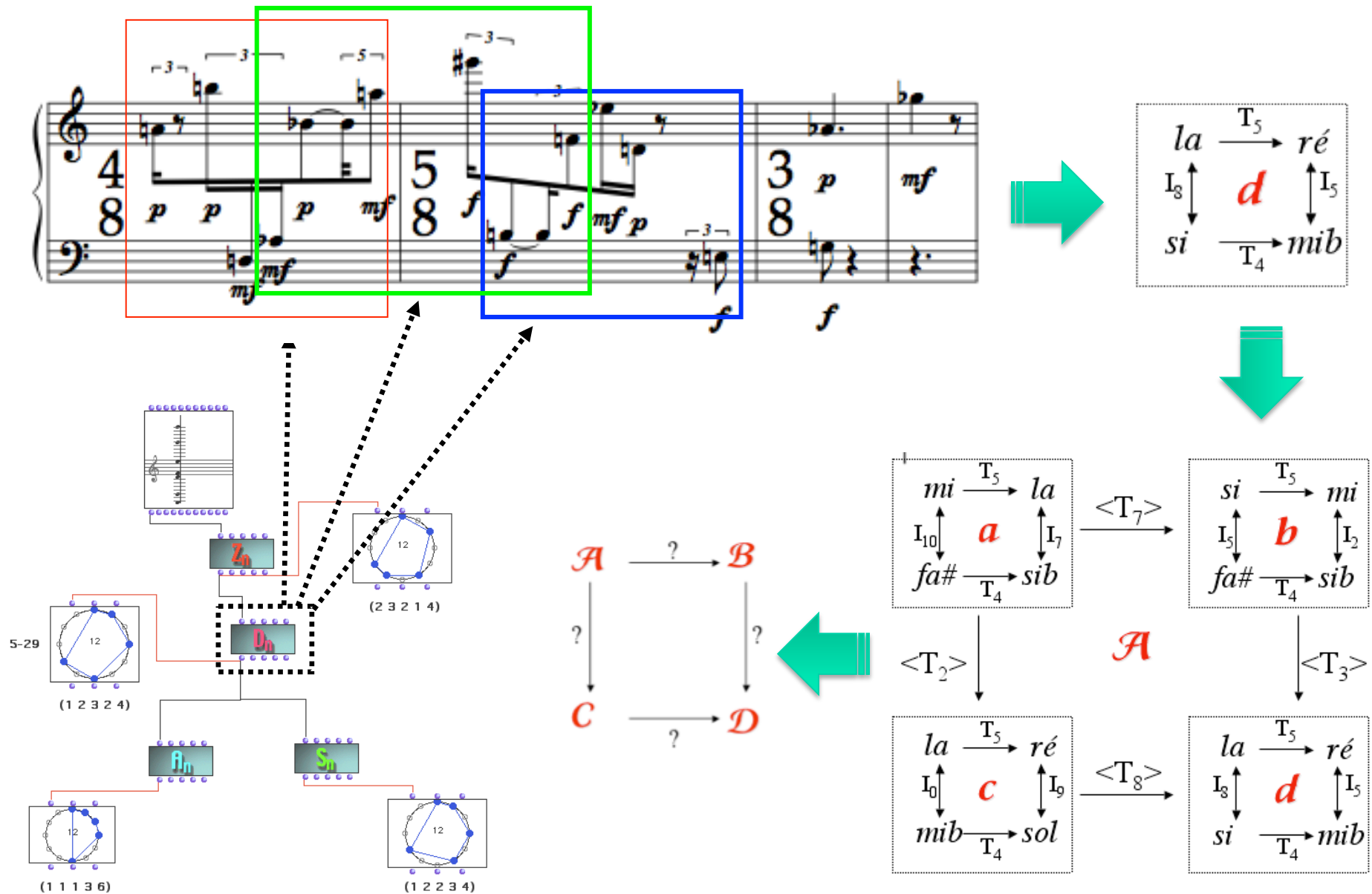
(ii) **Cas où C est un groupe.** Dans ce cas S est associé à l'opération de C sur $M = S(e)$ où e est l'unité de C et le K-net $\mathbf{K}$ est déterminé par la donnée d'une application $\varphi^*: \Delta \rightarrow M$ telle $\varphi^*(j) = F(f)\varphi^*(i)$ pour tout $f: i \rightarrow j$.

= Soit $L: C \rightarrow C$ l'automorphisme interne de C associé à un élément g de C. Alors $\mathbf{K}$ est PK-isographe au K-net $\mathbf{K}'$ tel que $\varphi'^*: i \mapsto g\varphi(i)$, la PK-isographie étant $(L, \mu): \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}'$ où μ est l'application $a \mapsto ga$.

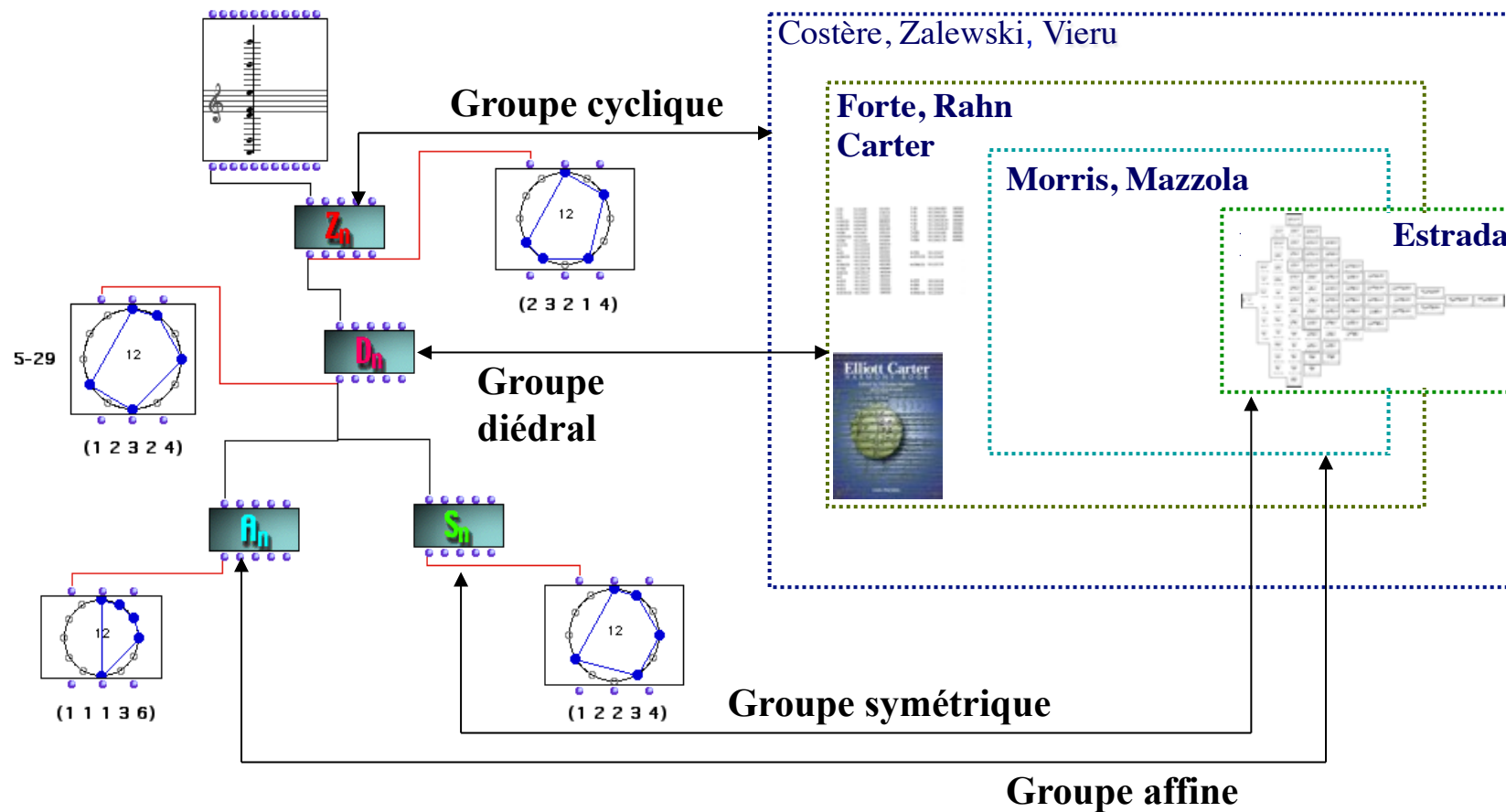
= Les *isographies positives* (resp. *négatives*) de Lewin et les *isographies complètes* sont de cette forme, dans le cas 'classique' où $C = T/I$ et S est le foncteur définissant l'opération de T/I sur $\mathbf{Z}_{12}$.

CONCLUSIONS et PERSPECTIVES

Théorie transformationnelle et dualité objectal/opératoire



Regard épistémologique sur la dualité objectal/opératoire



« [C'est la **notion de groupe** qui] donne un sens précis à l'idée de **structure** d'un ensemble [et] permet de déterminer les éléments efficaces des transformations en réduisant en quelque sorte à son **schéma opératoire** le domaine envisagé. [...] L'objet véritable de la science est le **système des relations** et non pas les termes supposés qu'il relie. [...] Intégrer les résultats - symbolisés - d'une expérience nouvelle revient [...] à créer un canevas nouveau, un **groupe de transformations** plus complexe et plus compréhensif » (G.-G. Granger : « **Pygmalion. Réflexions sur la pensée formelle** », 1947)



G.-G. Granger

De Piaget aux Systèmes évolutifs à mémoire

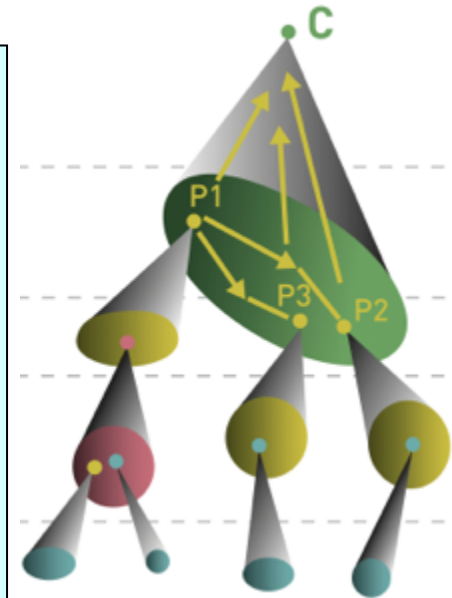
« La théorie des catégories est une théorie des constructions mathématiques, qui est macroscopique, et procède d'étage en étage. Elle est un bel exemple d'abstraction réfléchissante, cette dernière reprenant elle-même un principe constructeur présent dès le stade sensori-moteur. Le style catégoriel qui est ainsi à l'image d'un aspect important de la genèse des facultés cognitives, est un style adéquat à la description de cette genèse »



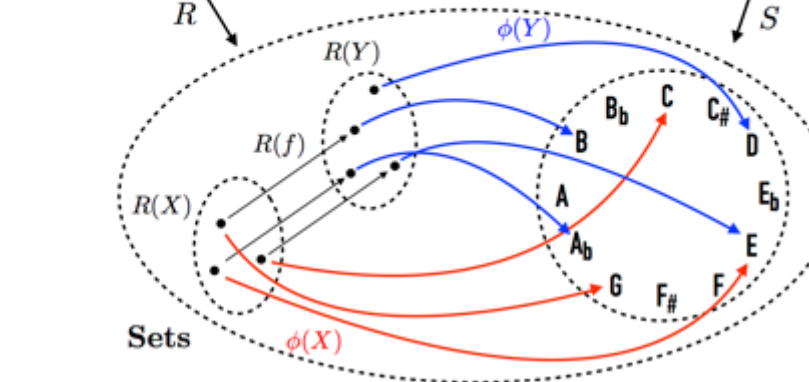
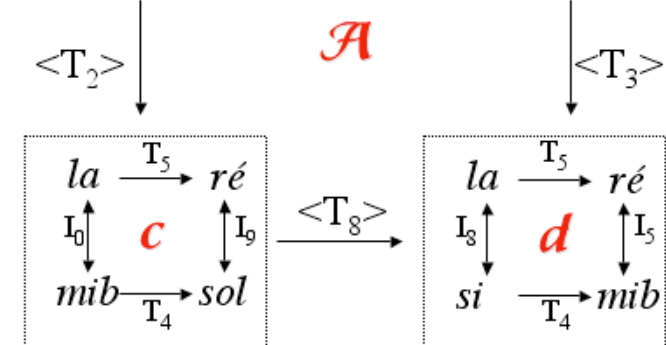
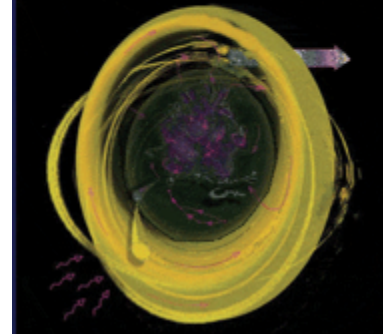
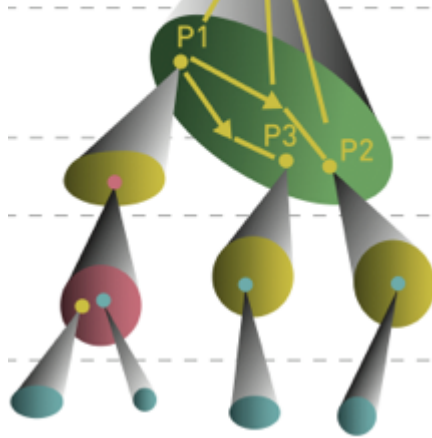
J. Piaget

Jean Piaget, Gil Henriques et Edgar Ascher, *Morphismes et Catégories. Comparer et transformer*, 1990

« [...]L'émergence d'une œuvre d'art est l'expression d'une dynamique se développant dans un système hiérarchique de complexité croissante à multiples temporalités. Notamment, dans le cadre de notre modèle mathématique « les systèmes évolutifs à mémoire » (SEM), nous analysons l'existence d'objets multiformes émergeant dans le système sociétal d'un « monde artistique »; il pourrait s'agir de courants artistiques, issus de mouvements de pensée, de mouvements sociaux, culturels, scientifiques, technologiques. » (Colloque « Complexité dans les sciences et dans les arts », Ircam, 8-19 juin 2009)



A. Ehresmann et J.-P. Vanbremeersch, « Petite mathématique de la création », *L'étincelle*, n° 6, novembre 2009



Exercices d'écoute : « do you hear it? » vs « can you hear it? »

m. 1 1-2 2 2-3 2-5 2-5

P0 p0 p6 P6 p9 P8

m. 5-7 5-7 5-7 5-7 8-10 8-10 8-10

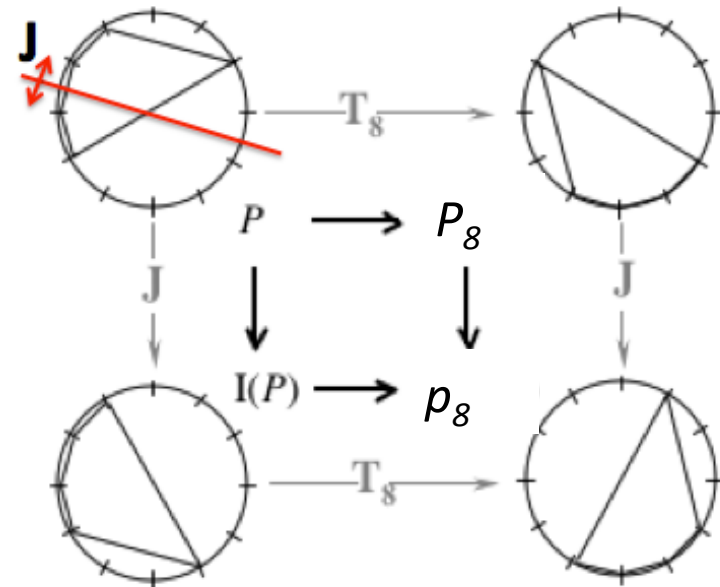
P6 p6 P0 p0 p8 P8 P9

m. 9-11 10-11 11-12 11-12 11-13 12-13 13-14 13-15

P1 P2 p8 P9 p6 p5 Pc p2

Example 2.7. An ear-training aid for listening to P/p forms and their interrelations.

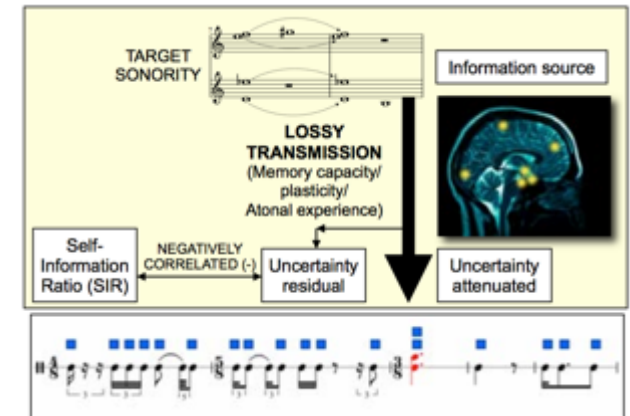
« I take the question ‘Can you hear it’ to mean something like this: After studying the analysis in examples 2.5 and 2.6, do you find it possible to **focus your aural attention** upon aspects of the **acoustic signal** that seem to engage the signifiers of that analysis? [...] **It is important to ask those questions about any systematic analysis of any musical composition** ».



« Yes, we can! »

Figure 5 displays six target sonorities used for Phase I pitch-detection tasks, arranged in two sections: I and V. Each section shows three target sonorities (P0, p6, P8 in section I; P9, p5, p2 in section V) and a corresponding melodic excerpt. The target sonorities are shown in dashed-line boxes. The melodic excerpts are shown in staff notation with notes and dynamics. The sonorities are labeled as P0, p6, P8, P9, p5, and p2. The melodic excerpts are labeled as I and V.

FIGURE 5. Six target sonorities used for Phase I pitch-detection tasks (circled in dashed-line boxes): Single Pentachords appeared in form of either 'st' or 'ts' according to Lewin's ear-training aid (*MFT*, Example 2.7, p. 42). Their corresponding melodies are either Excerpt I or V.



« A cognitive model is derived to show that singleton-tetrachord interaction is salient in facilitating the **mental formation of common-tone-preserving percepts**, and it serves as perceptual information that determines the acquisition of implicit pitch pattern knowledge for pitch-detection tasks, **but only for atonally well-trained musicians.** »

