1 Polynômes cyclotomiques

1.1 Définitions

À un rythme $A \subset \mathbb{N}$ fini, on associe un polynôme représentatif $A(X) \in \{0,1\}[X]$ défini par

$$A(X) = \sum_{a \in A} X^a.$$

Si (A, B) est un canon de $\mathbb{Z}_N$, la condition de pavage se réécrit

$$A(X) \cdot B(X) = 1 + X + \ldots + X^{N-1} \bmod (X^N - 1).$$

1.2 Exemple

$(A, B) = (\{0,1,4,5\}, \{0,2\})$ pave $\mathbb{Z}_8$, c'est à dire

$$(1 + X + X^4 + X^5) \cdot (1 + X^2) = 1 + X + X^2 + \ldots + X^7 \bmod (X^8 - 1).$$

1.3 Racines de l'unité

$$A(X) \cdot B(X) = 1 + X + \ldots + X^{N-1} = \frac{X^N - 1}{X - 1}$$

$\rightarrow \sharp A \times \sharp B = N$
$\rightarrow$ polynômes cyclotomiques.

1.4 Polynômes cyclotomiques

Soit $d \in \mathbb{N}^*$, le d-ième polynôme cyclotomique $\Phi_d \in \mathbb{C}[X]$ est le polynôme unitaire dont les racines sont exactement les racines *primitives* d-ièmes de l'unité, i.e. :

$$\Phi_d = \prod_{\substack{k \leq d \\ k \wedge d = 1}} \left(X - e^{2i\pi \frac{k}{d}} \right).$$

1.5 Exemples

$$\begin{array}{ll}
\Phi_1(X) = X - 1 & \Phi_5(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \\
\Phi_2(X) = X + 1 & \Phi_6(X) = X^2 - X + 1 \\
\Phi_3(X) = X^2 + X + 1 & \Phi_7(X) = X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \\
\Phi_4(X) = X^2 + 1 & \Phi_8(X) = X^4 + 1.
\end{array}$$

1.6 Propriétés

Pour tout $d, \alpha \in \mathbb{N}^*$, p premier,

- $\Phi_d \in \mathbb{Z}[X]$,
- $\deg \Phi_d = \phi(d)$ avec ϕ la fonction indicatrice d'Euler,
- $\Phi_{p^\alpha}(X) = 1 + X^{p^{\alpha-1}} + X^{2p^{\alpha-1}} + \ldots + X^{(p-1)p^{\alpha-1}}$,
- $\Phi_d(1) = \begin{cases} 0 & \text{si } d = 1 \\ p & \text{si } d = p^\alpha \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$
- Φ_d est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$.
- Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $X^N - 1 = \prod_{d|N} \Phi_d(X)$.

1.7 Attention

$\Phi_d \notin \{0, 1\}[X]$

$\Phi_6(X) = X^2 - X + 1$

$\Phi_{105}(X) = X^{48} + X^{47} + X^{46} - X^{43} - X^{42} - 2X^{41} - X^{40} - X^{39} + X^{36} + X^{35} + X^{34} + X^{33} + X^{32} + X^{31} - X^{28} - X^{26} - X^{24} - X^{22} - X^{20} + X^{17} + X^{16} + X^{15} + X^{14} + X^{13} + X^{12} - X^9 - X^8 - 2X^7 - X^6 - X^5 + X^2 + X + 1$

1.8 Contre-exemple

$(A, B) = (\{0, 2, 5, 7\}, \{0, 4, 8, 12, 16\})$ pavent $\mathbb{Z}_{20}$.

$A(X) = \Phi_2(X) \cdot \Phi_4(X) \cdot \Phi_{10}(X)$

$\Phi_5(X) \cdot \Phi_{20}(X) = X^{12} + X^{11} + X^8 - X^6 + X^4 + X + 1 \notin \{0, 1\}[X]$

$B(X) = \Phi_5(X) \cdot \Phi_{20}(X) \cdot (1 - X + X^2 - X^3 + X^4)$.

1.9 Exercice

Trouver un canon (A, B) tel que $A(X)$ et $B(X)$ soient des produits de polynômes cyclotomiques.

1.10 Définition

Si $A \subset \mathbb{N}$ fini, on note l'ensemble de ses facteurs cyclotomiques premiers

$$S_A = \{p^\alpha, p \text{ premier }, \alpha \in \mathbb{N}^*, \Phi_{p^\alpha}(X) | A(X)\}.$$

1.11 Propriétés

Si (A, B) est un canon de $\mathbb{Z}_N$

- $S_A \bigcup S_B = S_{\mathbb{Z}_N} = \{p^\alpha | N\}$
- $S_A \bigcap S_B = \emptyset$

1.12 Conditions de Coven-Meyerowitz

Si $A \subset \mathbb{N}$ fini, on note les trois conditions suivantes conditions de Coven-Meyerowitz :

$$\begin{aligned}
&(T_0) : A \text{ pave} \\
&(T_1) : A(1) = \prod_{p^\alpha \in S_A} p = \prod_{p^\alpha \in S_A} \Phi_{p^\alpha}(1) \\
&(T_2) : \text{Si } p_1^\alpha, p_2^\beta, \ldots, p_r^\gamma \in S_A \text{ alors } \Phi_{p_1^\alpha \cdot p_2^\beta \cdot \ldots \cdot p_r^\gamma} | A(X)
\end{aligned}$$

où p_i premiers distincts.

1.13 Théorème de Coven-Meyerowitz

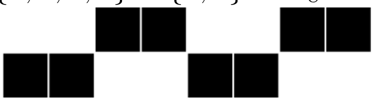
1. $(T_0) \Rightarrow (T_1)$
2. $(T_1) \wedge (T_2) \Rightarrow (T_0)$
3. Si $\sharp A$ a au plus deux facteurs premiers, alors $(T_0) \Rightarrow (T_1) \wedge (T_2)$

1.14 Conjecture de Coven-Meyerowitz

$$(T_0) \Longleftrightarrow (T_1) \wedge (T_2)$$

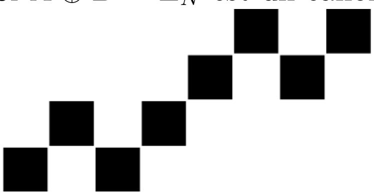
2 Transformations

$\{0, 1, 4, 5\} + \{0, 2\} = \mathbb{Z}_8$



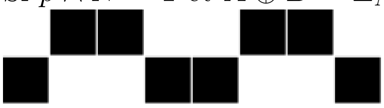
2.1 Dualité

Si $A \oplus B = \mathbb{Z}_N$ est un canon, alors $B \oplus A = \mathbb{Z}_N$ aussi.



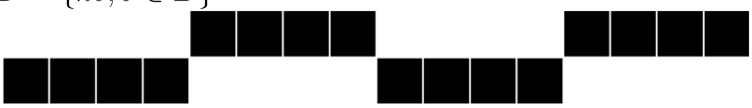
2.2 Transformation affine

Si $p \wedge N = 1$ et $A \oplus B = \mathbb{Z}_N$ est un canon, alors $pA \oplus B = \mathbb{Z}_N$ aussi.



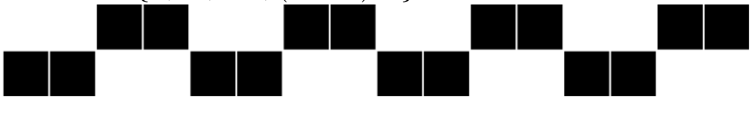
2.3 Dilatation

Si $A \oplus B = \mathbb{Z}_N$ est un canon, $k \in \mathbb{N}^*$ alors $\widetilde{A} \oplus \widetilde{B} = \mathbb{Z}_{kN}$ aussi, avec
$\widetilde{A} = \bigcup_{l=0}^{l=k-1} \{ka + l, a \in A\}$
$\widetilde{B} = \{kb, b \in B\}$



2.4 Concaténation

Si $A \oplus B = \mathbb{Z}_N$ est un canon, $k \in \mathbb{N}^*$ alors $\overline{A}^k \oplus B = \mathbb{Z}_{kN}$ aussi, avec
$\overline{A}^k = A \oplus \{0, N, \ldots, (k-1)N\}$



2.5 Périodicité

Un canon $A \oplus B$ de $\mathbb{Z}_N$ est dit *périodique* s'il existe $0 < k < N$ tel que $A + k = A$ ou $B + k = B$.

Un canon est dit de Vuza s'il n'admet pas de période.

2.6 Théorème [Hajós, László, Rédei, De Bruijn, Sands]

Il existe des canons de Vuza pour les N, et seulement pour ceux là, qui ne sont pas de la forme

$$N = p^\alpha, N = p^\alpha q, N = p^2 q^2, N = pqr, N = p^2 qr, N = pqrs$$

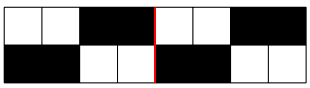
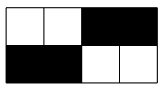
où p, q, r, s sont des premiers distincts.

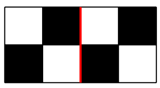
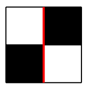
2.7 Théorème [Amiot]

Tout canon peut être déduit par concaténation et dualité du canon trivial $\{0\} \oplus \{0\}$ ou de canons de Vuza.

2.8 Exemple

$\{0, 1, 4, 5\} \oplus \{0, 2\} = \mathbb{Z}_8$ est concaténé de $\{0, 1\} \oplus \{0, 2\} = \mathbb{Z}_4$, lui même concaténé de $\{0, 1\} \oplus \{0\} = \mathbb{Z}_2$ concaténé du canon trivial.

 concaténé de 

dual de  concaténé de 

concaténé du canon trivial : 

2.9 Propriété

La transformation de concaténation préserve la condition (T_2).

2.10 Corollaire

La conjecture de Coven-Meyerowitz $(T_0) \iff (T_1) \wedge (T_2)$ est vraie si et seulement si elle est vraie pour les canons de Vuza.

3 Transformée de Fourier

3.1 Remarque

$$A \oplus B = \mathbb{Z}_N \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \star \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_N},$$

où $\mathbb{1}_A$ est la fonction caractéristique de l'ensemble A, et $\star$ est le produit de convolution défini par $(f \star g)(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_N} f(k)g(n-k)$.

3.2 Définition

On définit la transformée de Fourier discrète de $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ par $\widehat{f} : x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}_N} f(k)e^{-2i\pi kx/N}$.

3.3 Propriété

$\widehat{f \star g} = \widehat{f} \times \widehat{g}$.

3.4 Définition

Si $A \subset \mathbb{N}$ fini, on note $Z_A = \left\{k \in \mathbb{Z}_N, \widehat{\mathbb{1}_A}(k) = 0\right\}$, l'ensemble des zéros de la transformée de Fourier de la fonction caractéristique de A.

3.5 Propriétés

- $A \oplus B = \mathbb{Z}_N \Leftrightarrow Z_A \bigcup Z_B = \mathbb{Z}_N \setminus \{0\}$ et $\sharp A \times \sharp B = N$.
- Si $A \subset \mathbb{N}$ fini, si $x \in Z_A$, alors Z_A contient tous les éléments du groupe $(\mathbb{Z}_N, +)$ du même ordre que x, c'est à dire les kx avec $k \wedge N = 1$, $k \in \mathbb{Z}_N$.

3.6 Corollaire

A est périodique dans $\mathbb{Z}_N$ ssi le complémentaire de Z_A est inclus dans un sous-groupe de $\mathbb{Z}_N$.

3.7 Exemple

Dans $\mathbb{Z}_8$, $A = \{0, 1, 4, 5\}$ est 4-périodique.
$\widehat{\mathbb{1}_A}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_8} \mathbb{1}_A(k)e^{-2i\pi kx/8} = \sum_{a \in A} e^{-2i\pi ax/8} = A(e^{-2i\pi x/8})$
$Z_A = \{1, 3, 4, 5, 7\}$ donc $Z_A^c = \{0, 2, 6\} \subset 2\mathbb{Z}_8$

3.8 Exercice

Montrer que $A = \{0, 5, 8, 13\}$ est périodique dans $\mathbb{Z}_{16}$.

3.9 Transformée de Fourier et polynômes cyclotomiques

Si $\Phi_d | A \subset \mathbb{Z}_N$, comme $\widehat{\mathbb{1}_A}(x) = A(e^{-2i\pi x/N})$ alors les racines primitives $d$ièmes de l'unité sont dans Z_A.

3.10 Exercice

$A = \{0, 2, 5, 7\}$ qui pave $\mathbb{Z}_{20}$. Donner des zéros de la TF de A.

4 Algorithme de Kolountzakis et Matolcsi

4.1 Le principe de l'algorithme

Soit $N = p^\alpha q^\beta$ avec $(\alpha, \beta) > (2, 2)$, on cherche à renvoyer tous les canons de Vuza pour une telle période. On travaille sur les couples (S_A, S_B) avant de fournir les canons possibles qui leur sont associés afin de gagner du temps de calcul.

Pour ces N, on sait que $\sharp A$ a au plus 2 facteurs premiers, donc on peut utiliser les conditions de Coven-Meyerowitz comme CNS.

Sur $N = 144 = 2^4 3^2$

4.2 Partitionnement

Les puissance premiers de 144 sont $S = \{2, 4, 8, 16, 3, 9\}$ et sont réparties dans S_A et S_B.

On commence par produire toutes les partitions $(H, H^c) \sim (H^c, H)$ de S : 32.

4.3 Élimination par condition T_2

La partition $\{\{2, 4\}, \{8, 16, 3, 9\}\}$ ne peut pas fournir de pavage non périodique :

Si $S_B = \{8, 16, 3, 9\}$, alors Φ_3, Φ_8, Φ_9, Φ_{16} et aussi Φ_{24}, Φ_{48}, Φ_{72}, Φ_{144} divisent $B(X)$

Φ_8 : $\widehat{\mathbb{1}_B}(x)$ s'annule aux 1,3,5,7ième racines 8ièmes de l'unité, c'est à dire aux 18,54,90,126ièmes racines 144ième de l'unité.

4.4 Élimination par condition T_2 en pratique

$\Phi_{3,8,9,16,24,48,72,144}$

$\cancel{0}$	$\cancel{1}$	$\cancel{2}$	$\cancel{3}$	$\boxed{4}$	$\cancel{5}$	$\cancel{6}$	$\cancel{7}$	$\boxed{8}$	$\cancel{9}$
$\cancel{10}$	$\cancel{11}$	$\boxed{12}$	$\cancel{13}$	$\cancel{14}$	$\cancel{15}$	$\cancel{16}$	$\cancel{17}$	$\cancel{18}$	$\cancel{19}$
$\boxed{20}$	$\cancel{21}$	$\cancel{22}$	$\cancel{23}$	$\boxed{24}$	$\cancel{25}$	$\cancel{26}$	$\cancel{27}$	$\boxed{28}$	$\cancel{29}$
$\cancel{30}$	$\cancel{31}$	$\cancel{32}$	$\cancel{33}$	$\cancel{34}$	$\cancel{35}$	$\cancel{36}$	$\cancel{37}$	$\cancel{38}$	$\cancel{39}$
$\boxed{40}$	$\cancel{41}$	$\cancel{42}$	$\cancel{43}$	$\cancel{44}$	$\cancel{45}$	$\cancel{46}$	$\cancel{47}$	$\cancel{48}$	$\cancel{49}$
$\cancel{50}$	$\cancel{51}$	$\cancel{52}$	$\cancel{53}$	$\cancel{54}$	$\cancel{55}$	$\boxed{56}$	$\cancel{57}$	$\cancel{58}$	$\cancel{59}$
$\boxed{60}$	$\cancel{61}$	$\cancel{62}$	$\cancel{63}$	$\cancel{64}$	$\cancel{65}$	$\cancel{66}$	$\cancel{67}$	$\cancel{68}$	$\cancel{69}$
$\cancel{70}$	$\cancel{71}$	$\boxed{72}$	$\cancel{73}$	$\cancel{74}$	$\cancel{75}$	$\cancel{76}$	$\cancel{77}$	$\cancel{78}$	$\cancel{79}$
$\cancel{80}$	$\cancel{81}$	$\cancel{82}$	$\cancel{83}$	$\boxed{84}$	$\cancel{85}$	$\cancel{86}$	$\cancel{87}$	$\boxed{88}$	$\cancel{89}$
$\cancel{90}$	$\cancel{91}$	$\boxed{92}$	$\cancel{93}$	$\cancel{94}$	$\cancel{95}$	$\cancel{96}$	$\cancel{97}$	$\cancel{98}$	$\cancel{99}$
$\boxed{100}$	$\cancel{101}$	$\cancel{102}$	$\cancel{103}$	$\boxed{104}$	$\cancel{105}$	$\cancel{106}$	$\cancel{107}$	$\boxed{108}$	$\cancel{109}$
$\cancel{110}$	$\cancel{111}$	$\cancel{112}$	$\cancel{113}$	$\cancel{114}$	$\cancel{115}$	$\boxed{116}$	$\cancel{117}$	$\cancel{118}$	$\cancel{119}$
$\boxed{120}$	$\cancel{121}$	$\cancel{122}$	$\cancel{123}$	$\boxed{124}$	$\cancel{125}$	$\cancel{126}$	$\cancel{127}$	$\cancel{128}$	$\cancel{129}$
$\cancel{130}$	$\cancel{131}$	$\cancel{132}$	$\cancel{133}$	$\cancel{134}$	$\cancel{135}$	$\boxed{136}$	$\cancel{137}$	$\cancel{138}$	$\cancel{139}$
$\boxed{140}$	$\cancel{141}$	$\cancel{142}$	$\cancel{143}$						

4.5 Élimination par condition T_2 en pratique

Donc $Z_B^c \subset 2\mathbb{Z}_{144}$ et tout B associé à un tel S_B sera forcément périodique.

4.6 Reconstruction par condition T_1

On reconstruit ensuite par (T_1) les ensembles associés à ces H plus petits, puis on cherche les compléments B non périodiques.

4.7 Références

- *Tiling the intergers with translates of one finite set*, Ethan Coven, Aaron Meyerowitz (Journal of Algebra, 1999)
- *Rhythmic canons and Galois theory*, Emmanuel Amiot, (Citeseer,2005)
- *Algorithms for translational tiling*, Mihail N. Kolountzakis, Máté Matolcsi (Journal of Mathematics and Music, 2009)