

Formation ATIAM

Acoustique Traitement du Signal Informatique Appliqués à la Musique Parcours
multi-mentions du Master (M2) Sciences et Technologies de l'Université Pierre et
Marie Curie (Paris 6)

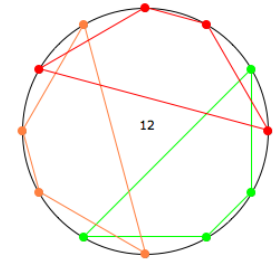
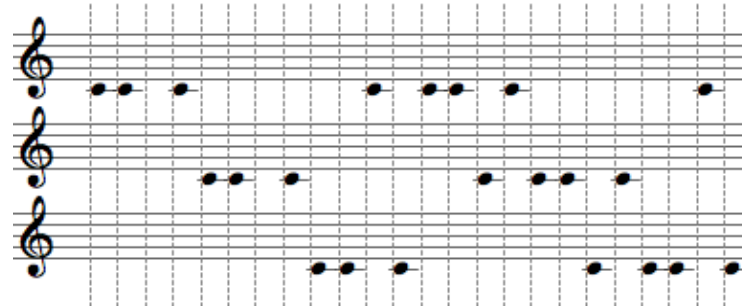
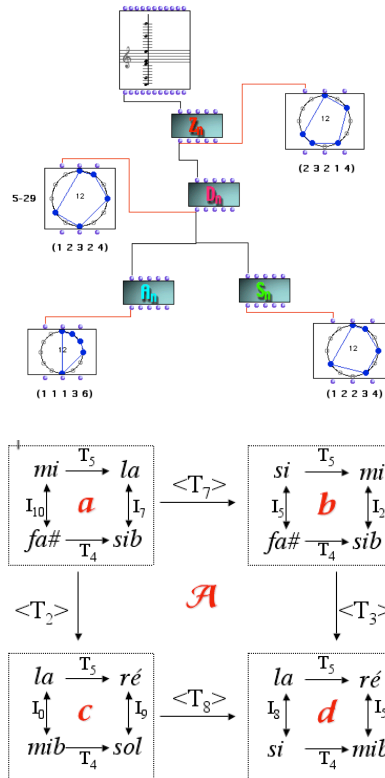
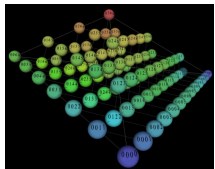
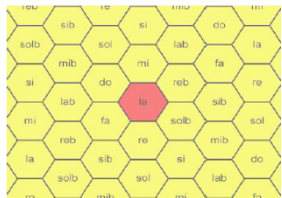
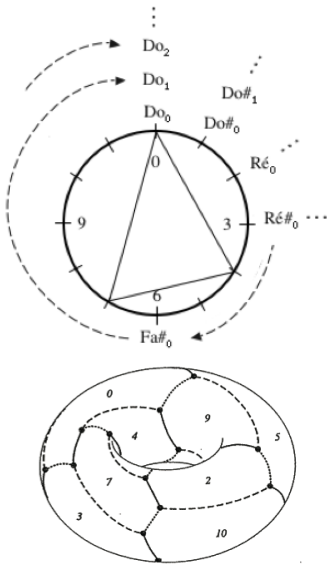
UE Méthodes mathématiques pour l'informatique musicale [MMIM] - 2013-2014

Moreno Andreatta
Equipe Représentations Musicales
IRCAM/CNRS/UPMC UMR 9912



Plan du cours : partie « structures algébriques ‘fortes’ »

- 1.) Représentation/formalisation et énumération/classification des structures musicales
- 2.) *Set Theory*, théories diatoniques, transformationnelles et néo-riemanniennes
 - Focus sur le *Tonnetz*, les orbifolds et le voice-leading (avec Mattia Bergomi, UPMC/Milan)
- 3.) Pavages en composition : la construction des canons rythmiques mosaïques
 - Focus sur les canons de Vuza et les représentations polynomiales (avec Hélianthe Caure, UPMC)



$$Df(x) = f(x) - f(x-1).$$

$$\begin{aligned}
 f &= 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \dots \\
 Df &= 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \dots \\
 D^2 f &= 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ 10 \ 11 \dots \\
 D^3 f &= 7 \ 5 \ 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \ 1 \ 8 \dots \\
 D^k f &= \dots
 \end{aligned}$$

Andreatta M. et M. Chemillier (2007), « Modèles mathématiques pour l'informatique musicale (MMIM): Outils théoriques et stratégies pédagogiques », Actes des Journées d'Informatique Musicale, Lyon, avril, p. 113-12

➔ <http://articles.ircam.fr/textes/Andreatta07b/index.pdf>

Le modèle des canons rythmiques mosaïques



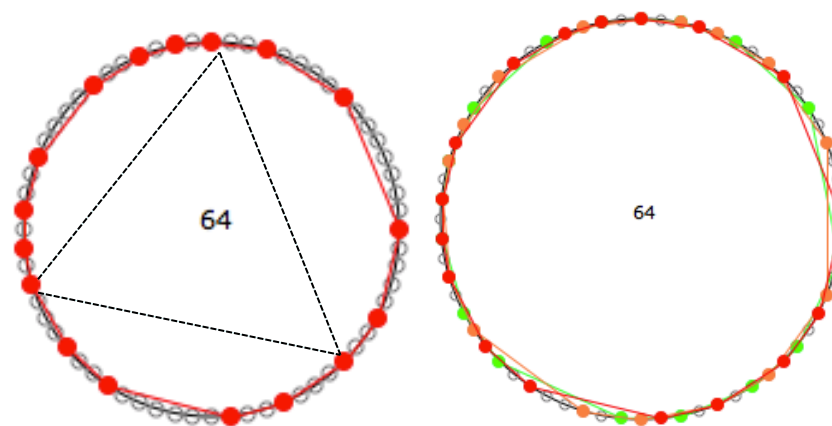
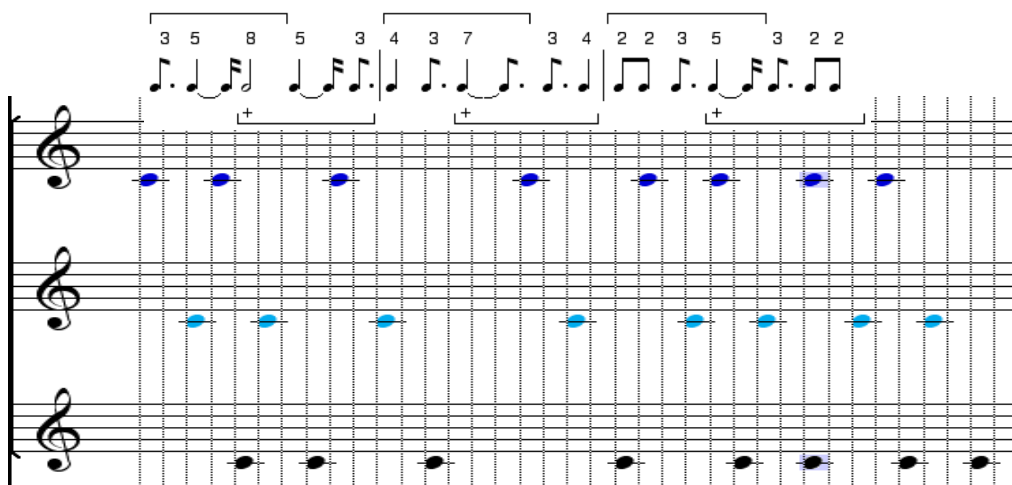
 *Harawi (1945)*



Visions de l'Amen (1943)



O. Messiaen

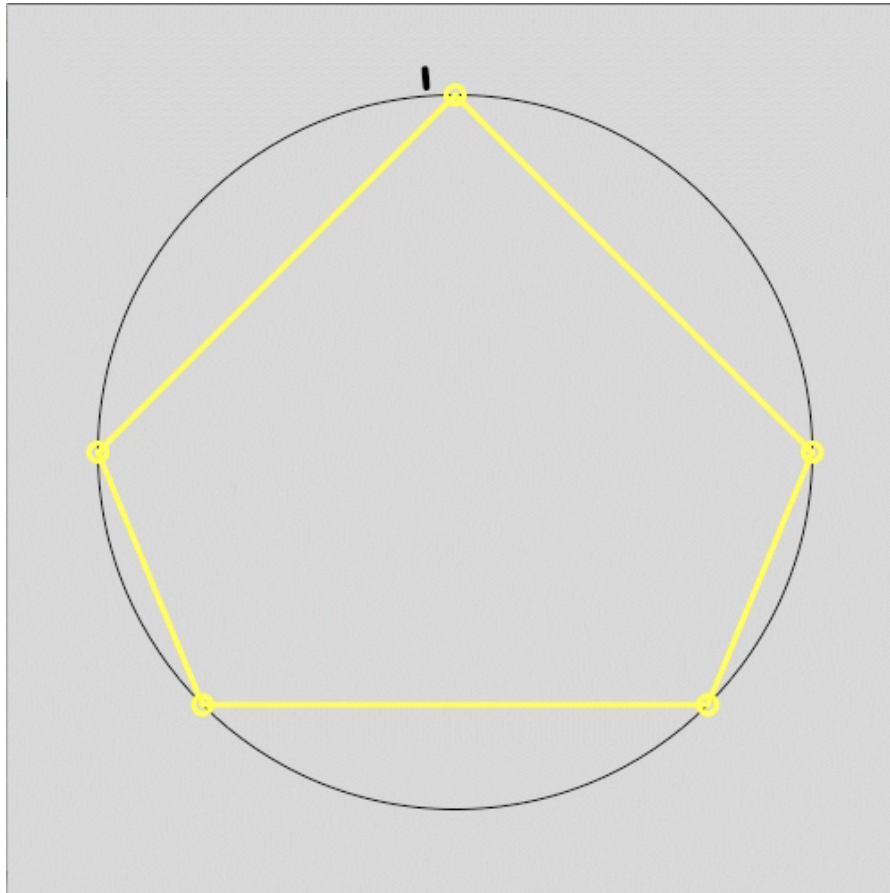


« ...il résulte de tout cela que les différentes sonorités se mélangent ou s'opposent de manières très diverses, jamais au même moment ni au même endroit [...]. C'est du désordre organisé »

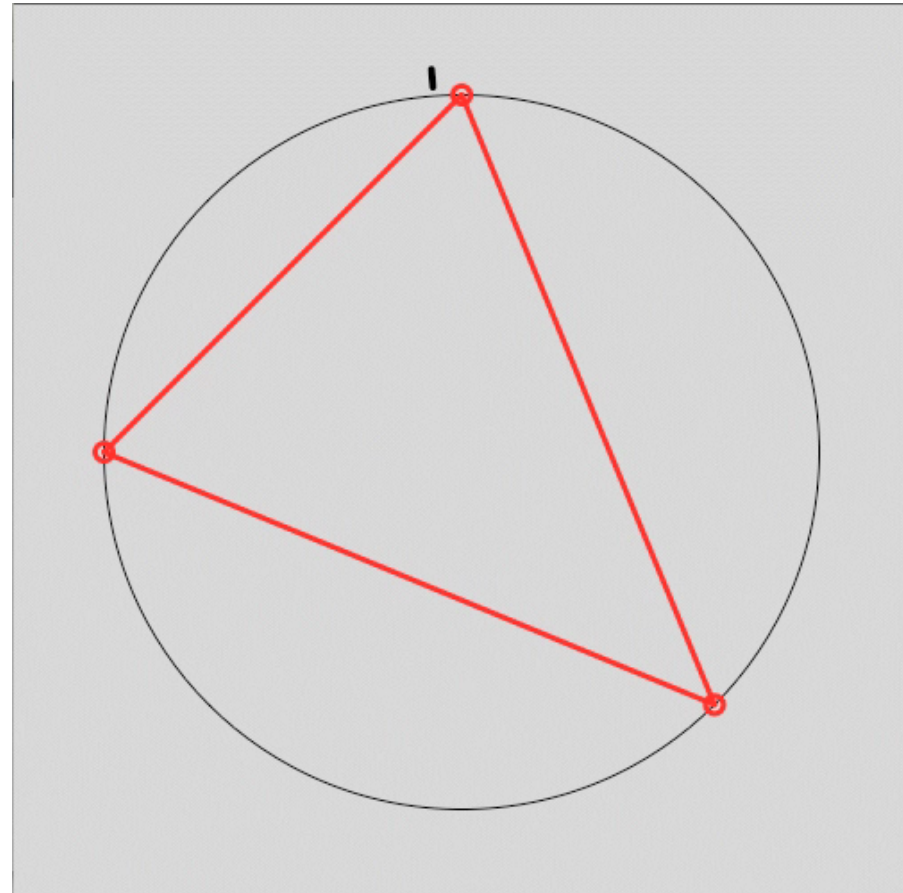
O. Messiaen : *Traité de Rythme, de Couleur et d'Ornithologie*, tome 2, Alphonse Leduc, 1992.

Deux rythmes traditionnels qui ne paivent pas

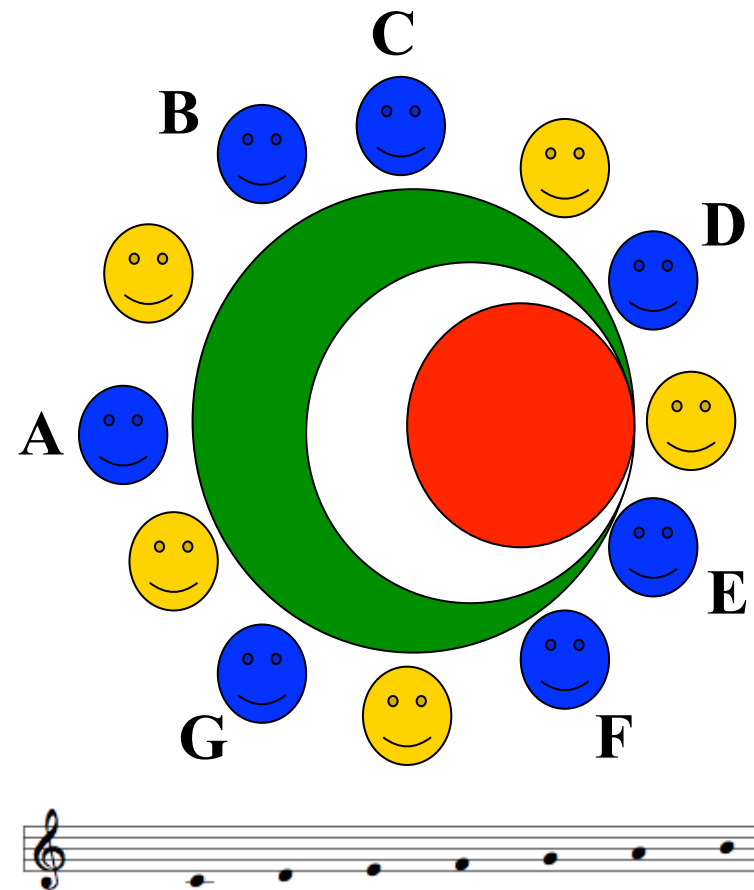
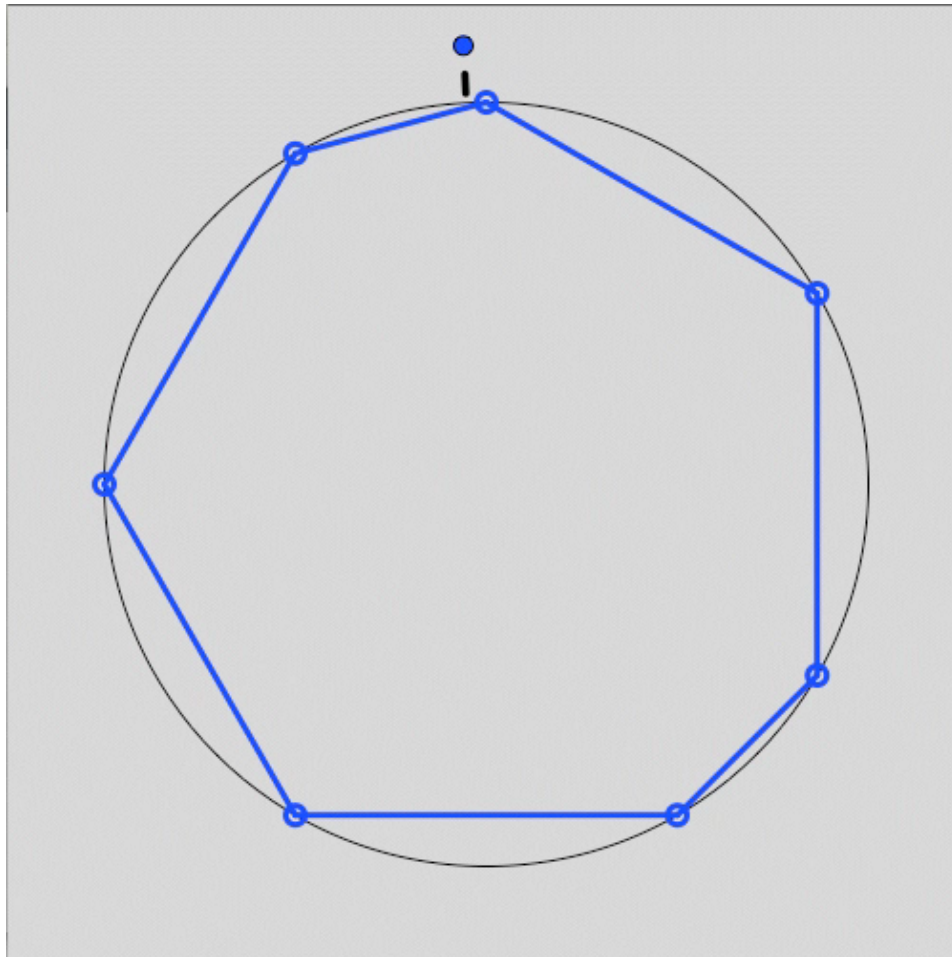
El cinquillo



El trecillo

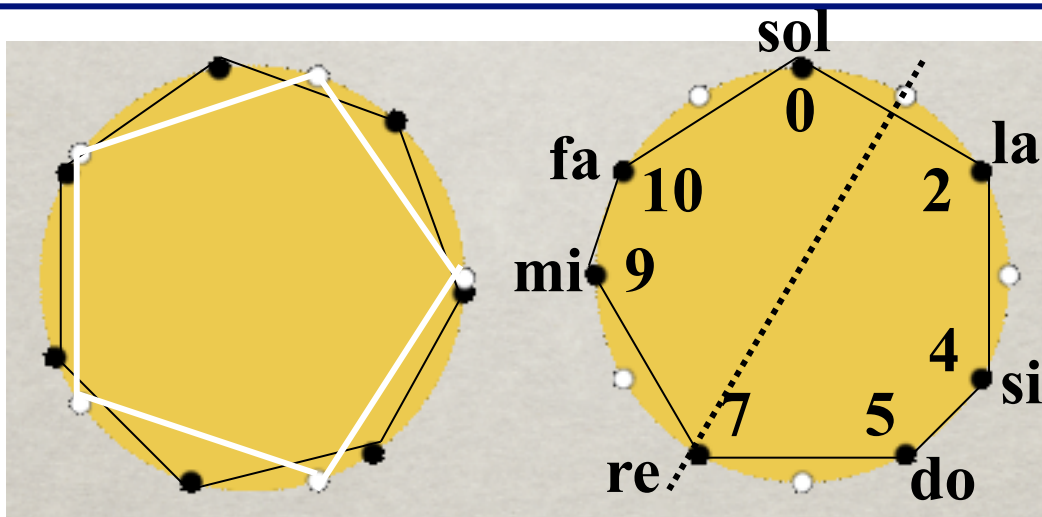


Abadja/Bembé ou rythme « diatonique »



Jack Douthett & Richard Krantz, "Energy extremes and spin configurations for the one-dimensional antiferromagnetic Ising model with arbitrary-range interaction", *J. Math. Phys.* 37 (7), July 1996

Ensembles bien repartis (ME sets)



Gamme diatonique:

{0, 2, 4, 5, 7, 9, 10}

Gamme pentatonique:

{1, 3, 6, 8, 11}

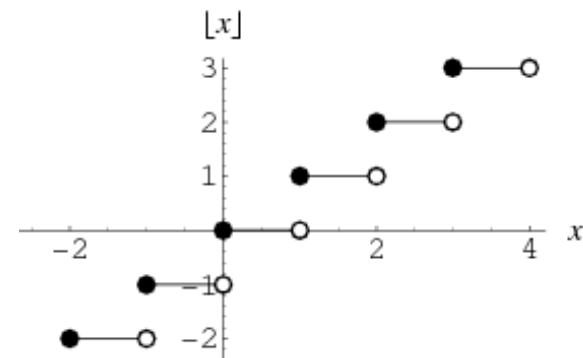
Definition (Clough-Myerson-Douthett) A set A with cardinality d in a given equal tempered space \mathbf{Z}_c is maximally even if $A = \{a_k\}$

$$a_k = J_{c,d}^\alpha(k) = \left\lfloor \frac{kc + \alpha}{d} \right\rfloor$$

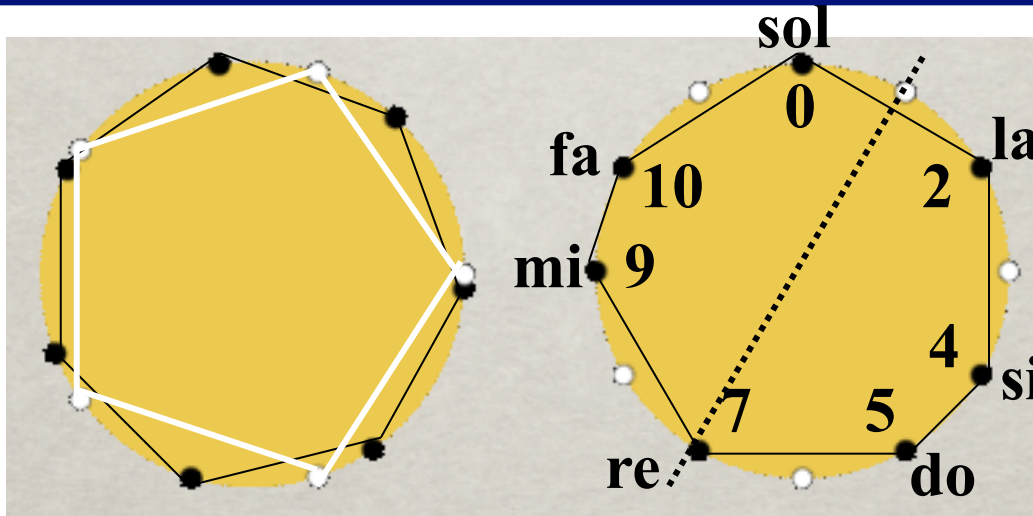
where $\alpha \in \mathbf{R}$

$\lfloor x \rfloor$ is the integer part of x

$$J_{12,7}^5 = \left\{ \left\lfloor \frac{12k + 5}{7} \right\rfloor \right\}_{k=0}^6 = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$$



Ensembles bien repartis (ME sets)



Gamme diatonique:

$\{0, 2, 4, 5, 7, 9, 10\}$

Gamme pentatonique:

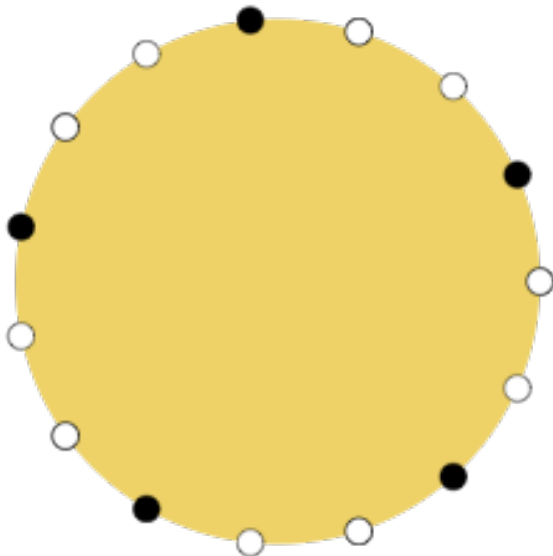
$\{1, 3, 6, 8, 11\}$

Definition (Amiot, 2005) A set A with cardinality d given equal tempered space \mathbf{Z}_c is maximally even if $|F_A(d)| \geq |F_B(d)|$ for all subsets B of cardinality d in \mathbf{Z}_c .

$$\text{where } F_{set}(t) := \sum_{k \in set} e^{2i\pi kt/12}$$

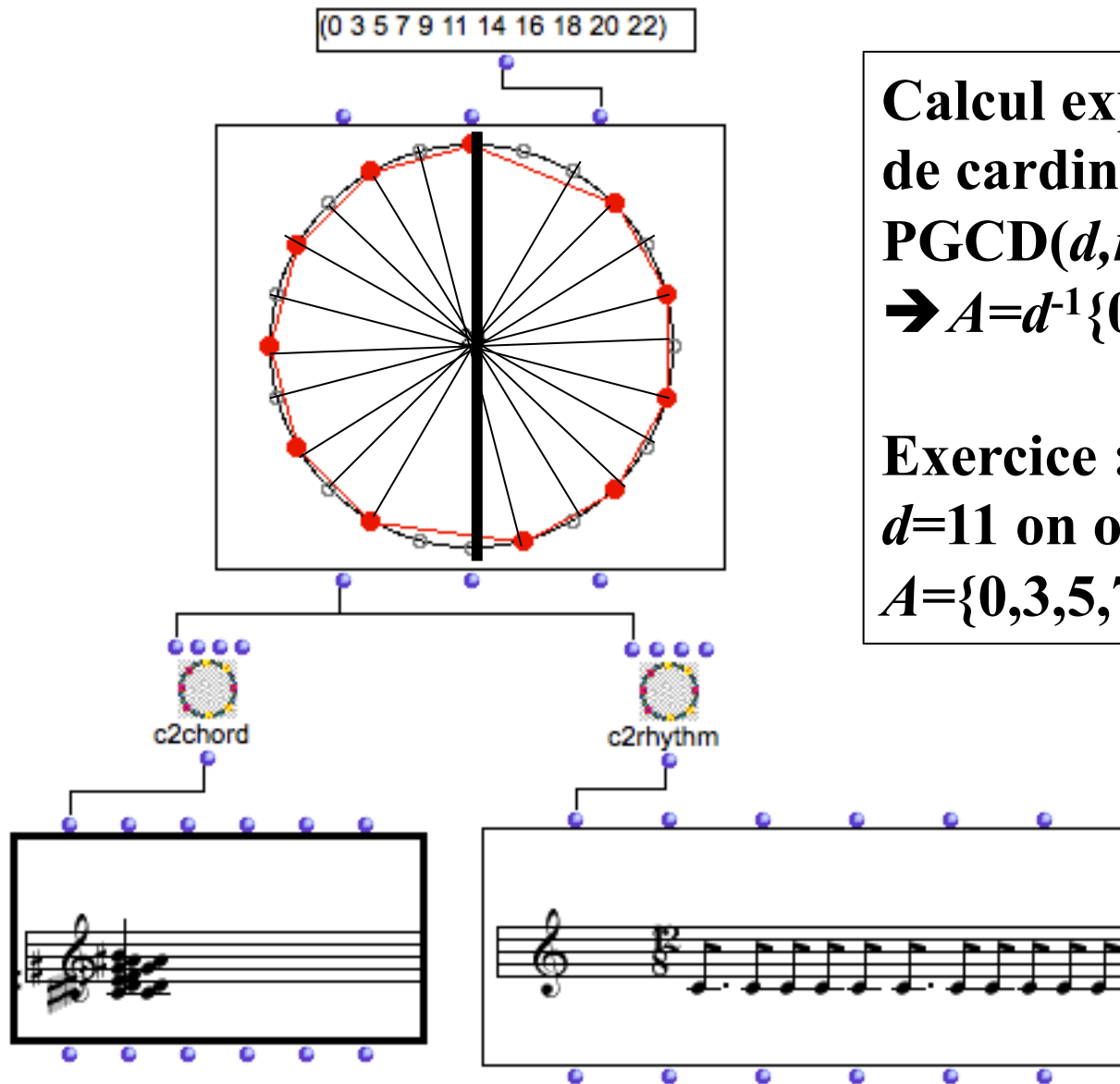
$$|F_A(5)| = 1+1+1+1+1=5$$

En général, $|F_A(t)| \leq \#A$



Rythmes asymétriques et ME-sets

(Simha Arom & Marc Chemillier)



Calcul explicite d'un ME-set A
de cardinalité d dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec
 $\text{PGCD}(d,n)=1$

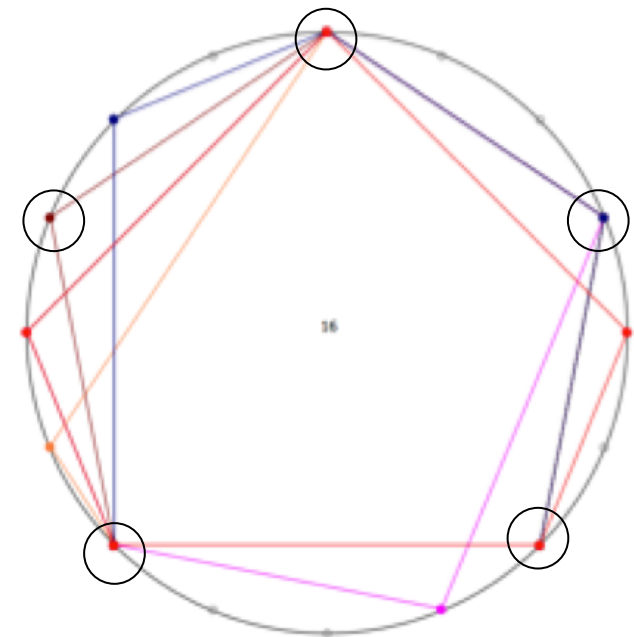
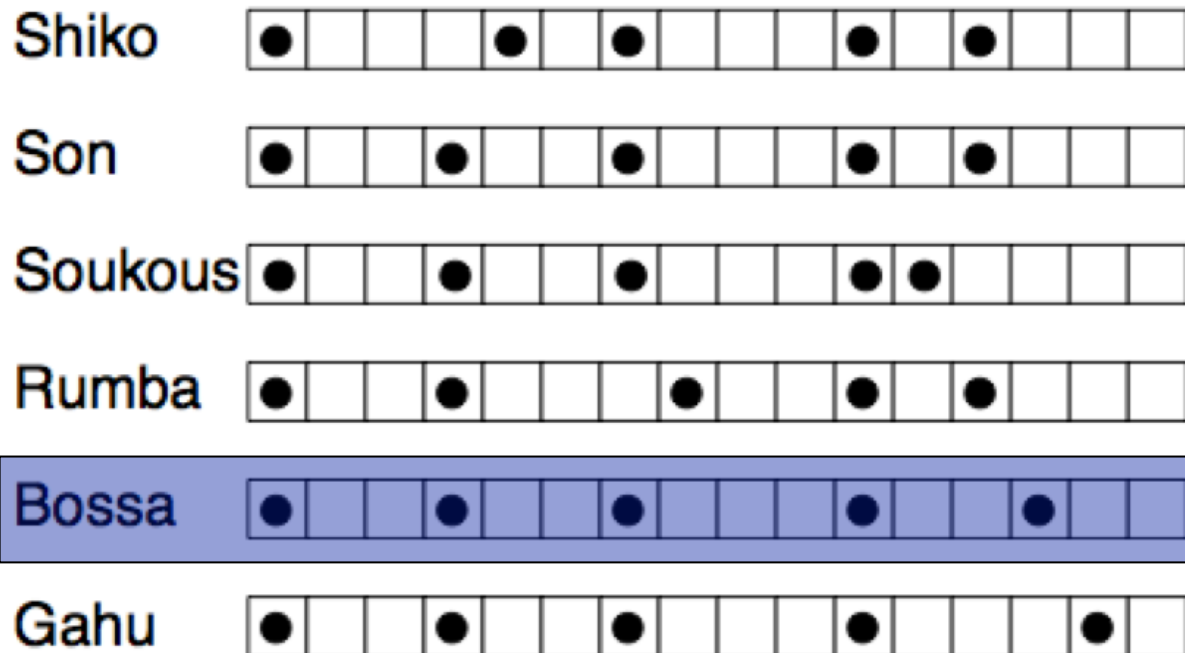
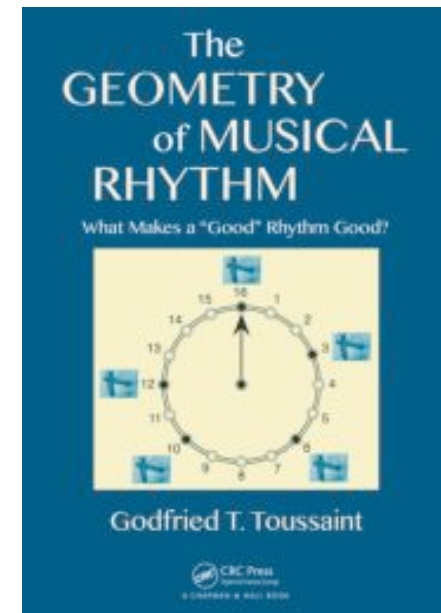
$$\rightarrow A = d^{-1}\{0, 1, \dots, d-1\}$$

Exercice : vérifier que pour
 $d=11$ on obtient :

$$A = \{0, 3, 5, 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 22\}$$

Autres exemples de rythmes qui ne pavent pas

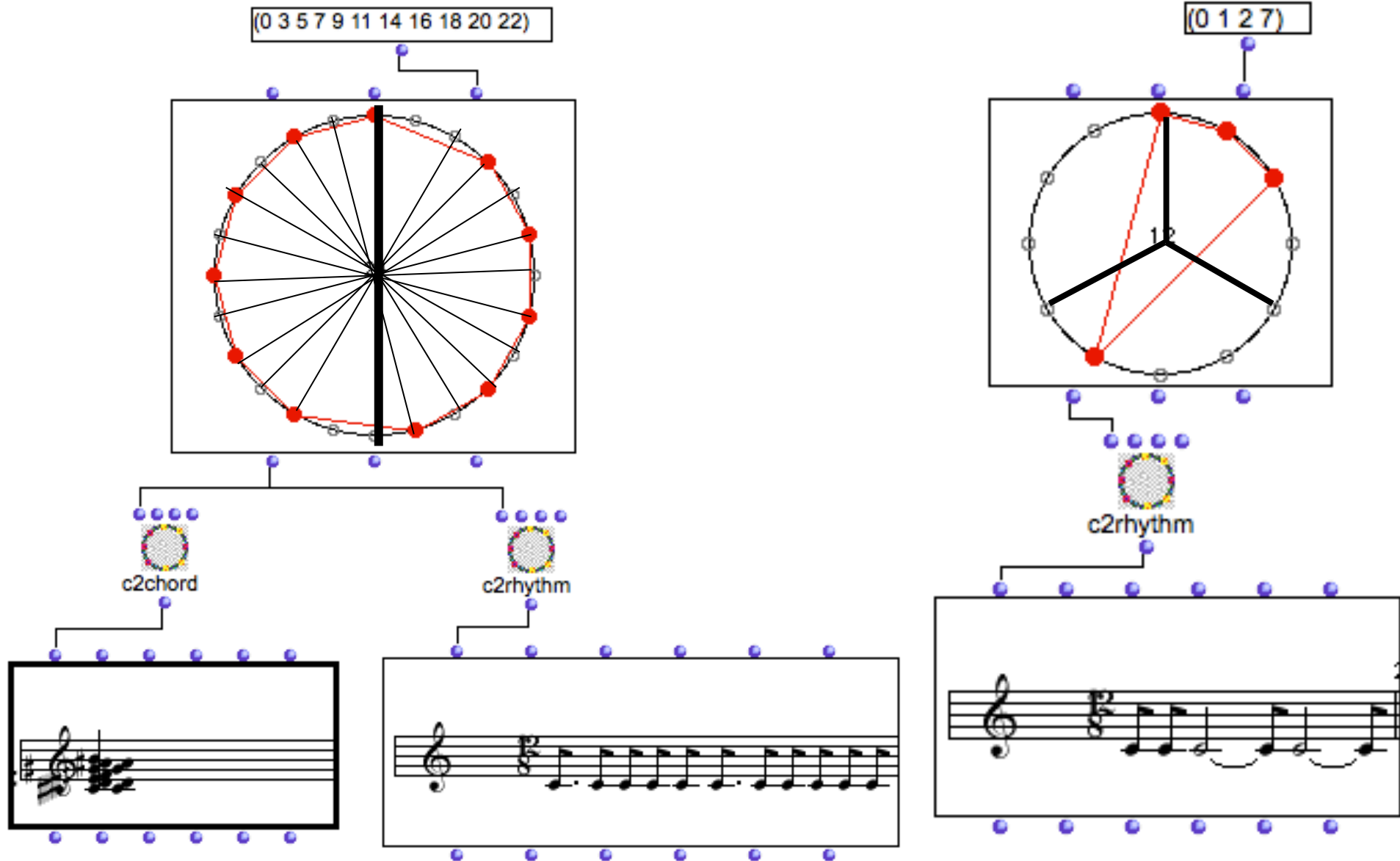
Godfried T. Toussaint, The Geometry of Musical Rhythm: What Makes a "Good" Rhythm Good?, Chapman and Hall/CRC, 2013



Rythmes k -asymétriques

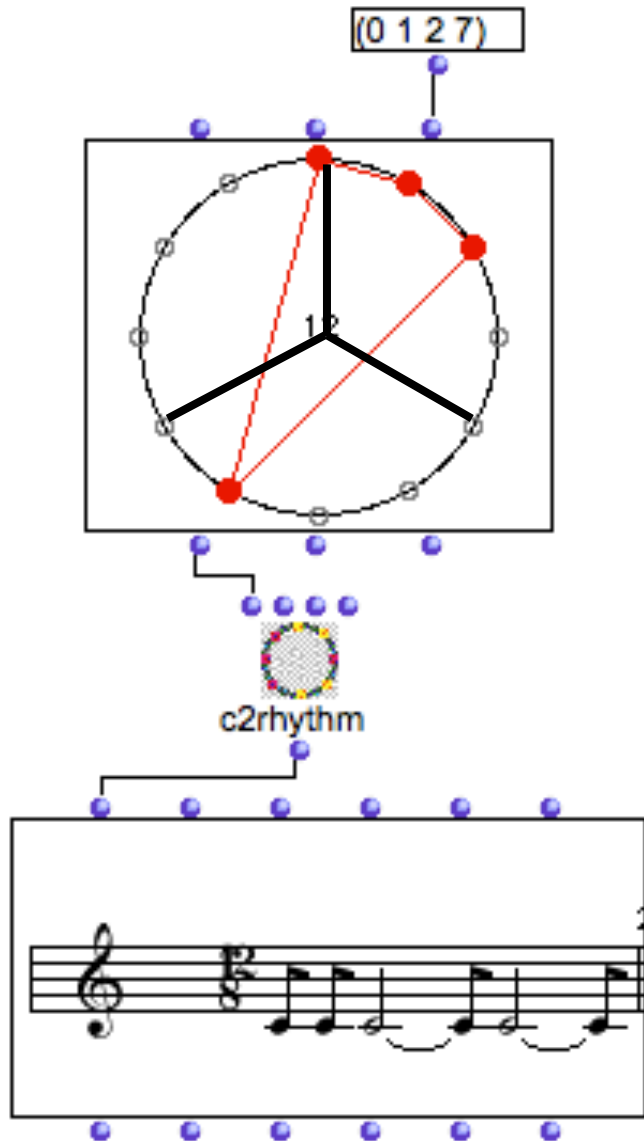
(Simha Arom & Marc Chemillier)

(Rachel W. Hall & P. Klingsberg)



Rythmes 3-asymétriques

(Rachel W. Hall & P. Klingsberg)



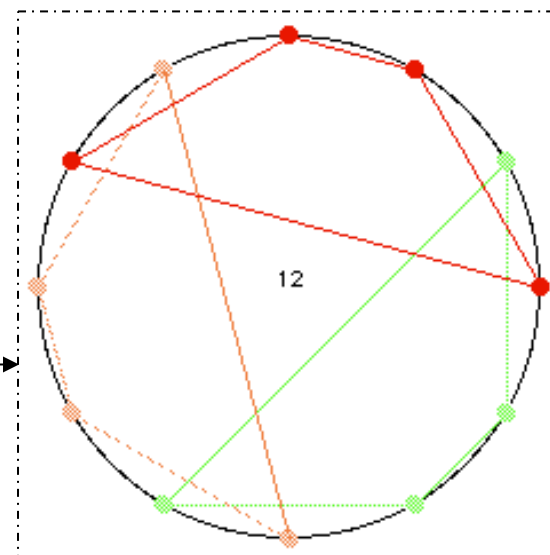
Un rythme périodique R de période kh est k -asymétrique s'il est tel que si une attaque de R occupe la position x alors toutes les autres positions y telles que

$$y \sim x \pmod{h}$$

ne correspondent pas à des attaques du rythme R .

Rythmes 3-asymétriques et pavage

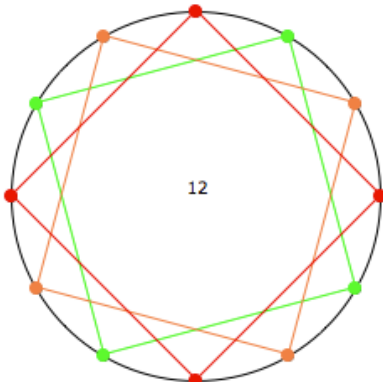
The diagram illustrates six examples of 3-asymmetric rhythms and their corresponding circle diagrams. Each example consists of a circle diagram with 12 points and a musical staff below it. The first three examples are in the top row, and the last three are in the bottom row. The bottom row is enclosed in a dashed box. The circle diagrams show various chords and lines connecting points, with the number '12' in the center. The musical staves show rhythmic notation in 12/8 time, with notes and rests corresponding to the points in the circle diagrams.

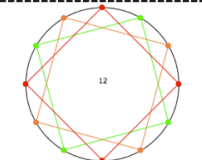


Quel est le rythme manquant ?

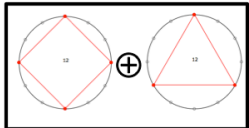
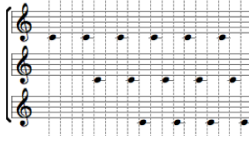
Factorisation de groupes et périodicités des facteurs

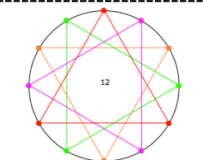
$A < \mathbb{Z}_n$
 $B < \mathbb{Z}_n$



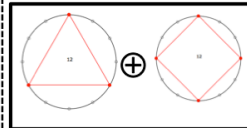
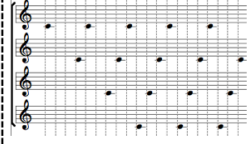


$\mathbb{Z}_{12} = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$

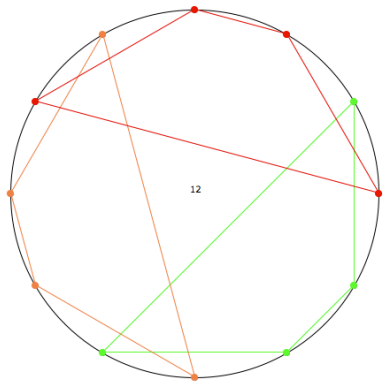



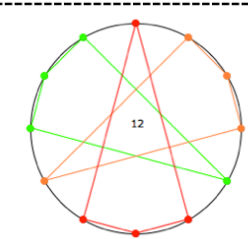
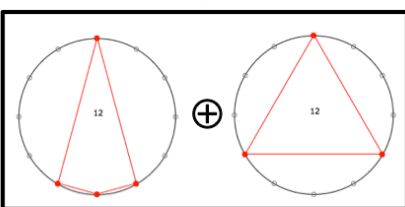
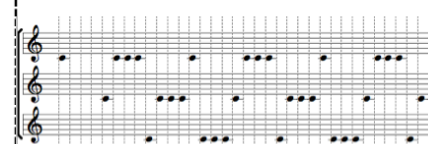


$\mathbb{Z}_{12} = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4$

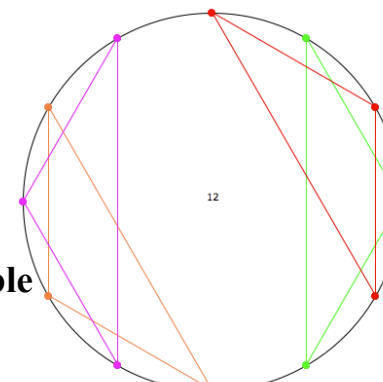



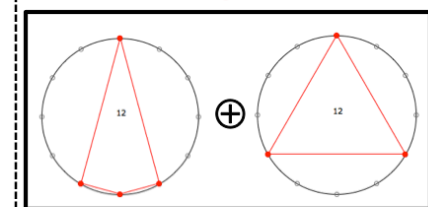
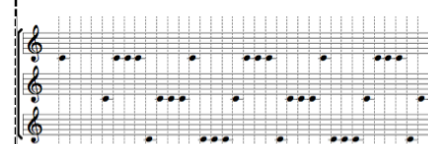
$A \subset \mathbb{Z}_n$
 $B < \mathbb{Z}_n$

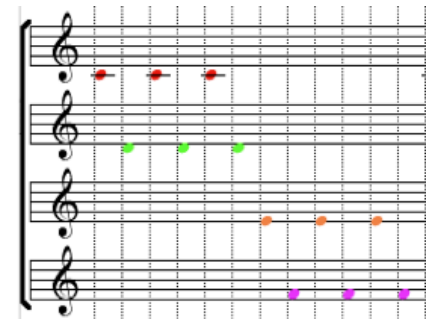


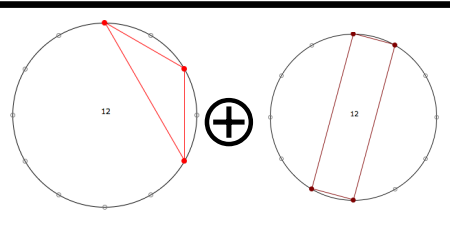
$A \subset \mathbb{Z}_n$
 $B \subset \mathbb{Z}_n$
 sous-ensemble périodique



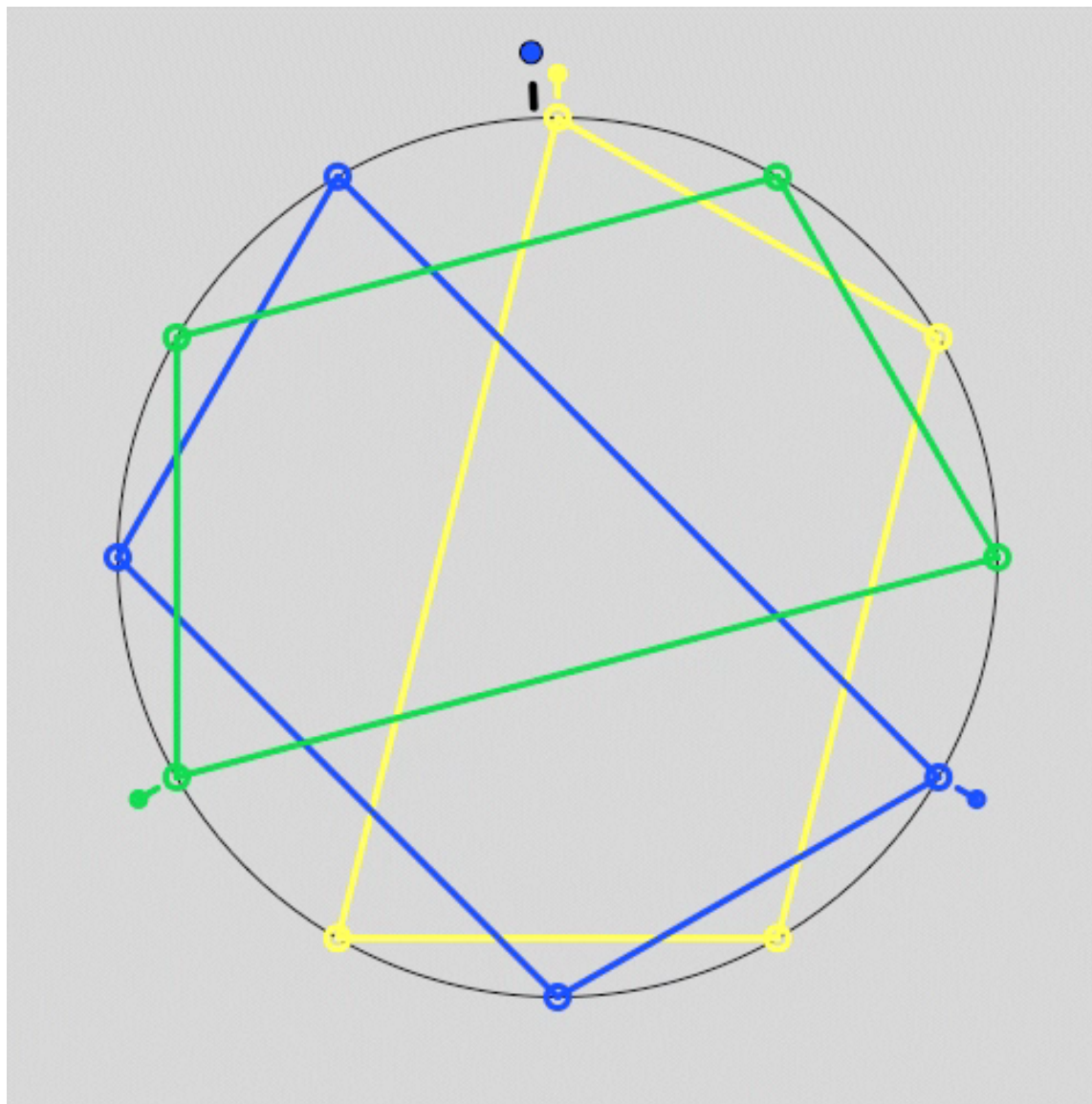
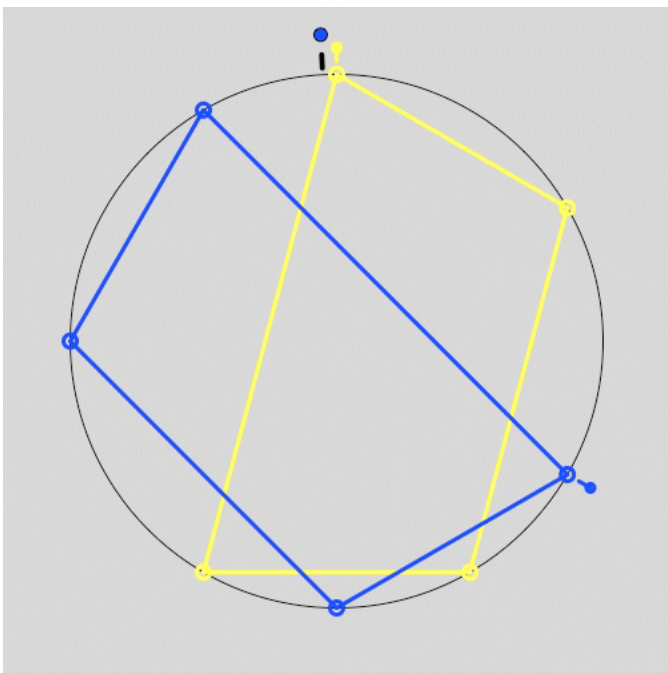
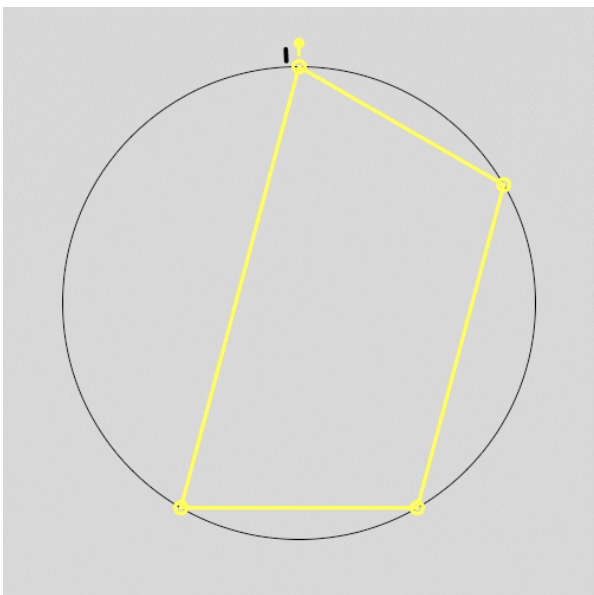





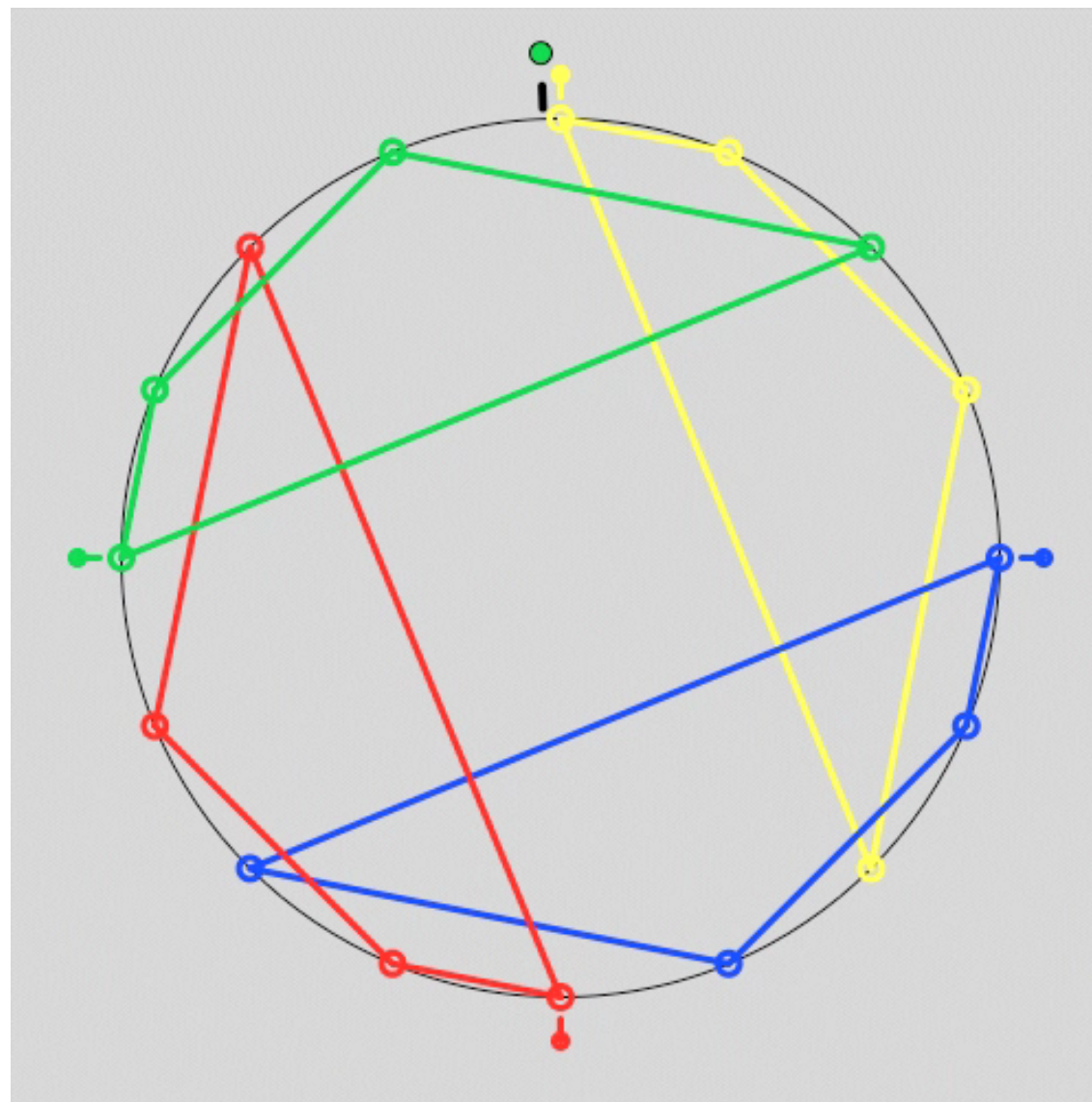
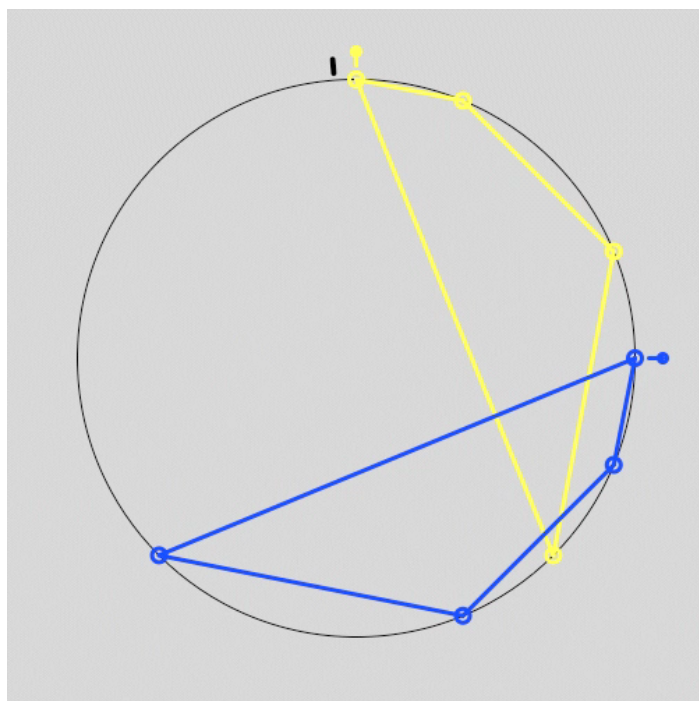
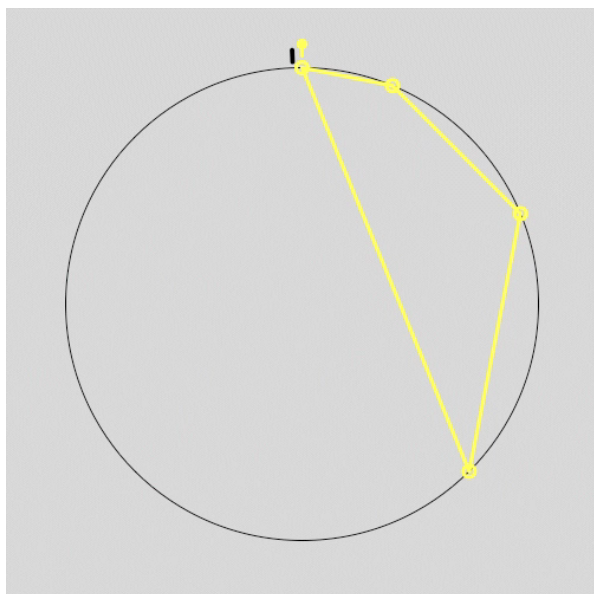
$\mathbb{Z}_n = A \oplus B$



Premiers exemples de canons rythmiques mosaïques



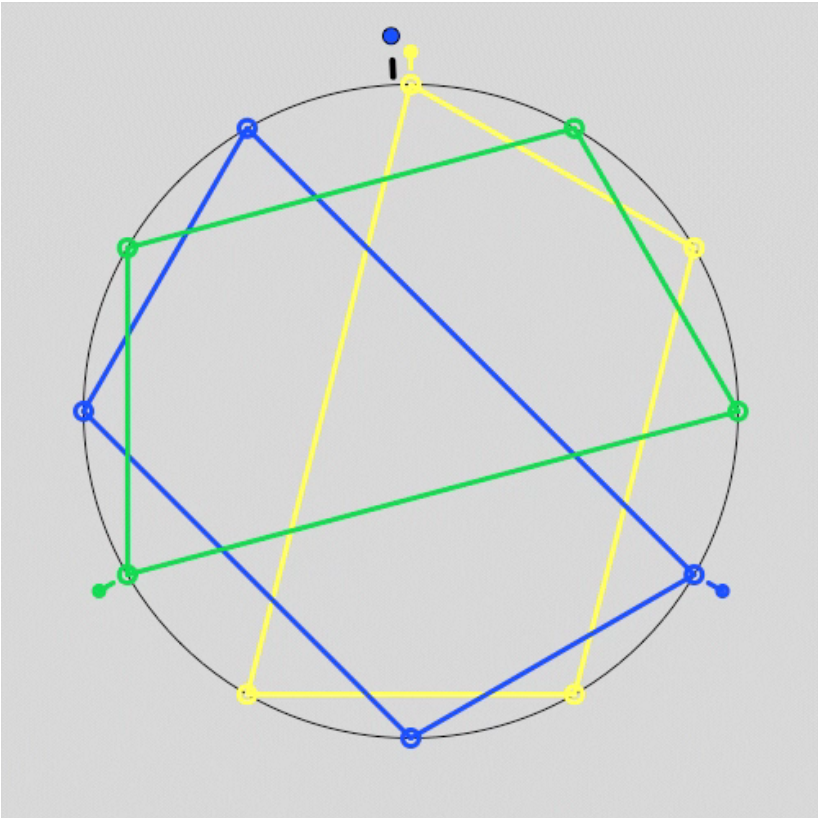
Canons mélodico-rythmiques mosaïques



Un canon rythmique mosaïque est une factorisation

The diagram illustrates the factorization of a 12-measure rhythmic canon. It is enclosed in a dashed border and consists of three parts:

- Top:** A circular diagram with 12 points on the circumference. A red triangle connects three points, and a green triangle connects another three points. The number "12" is written in the center.
- Middle:** Two circular diagrams, each with 12 points. Each contains a red triangle connecting three points. A plus sign (\oplus) is placed between them, indicating that the 12-measure canon is the sum of two 6-measure parts.
- Bottom:** A musical score with two staves. The top staff has a treble clef and the bottom staff has a bass clef. The notes are arranged in a way that corresponds to the rhythmic canon.



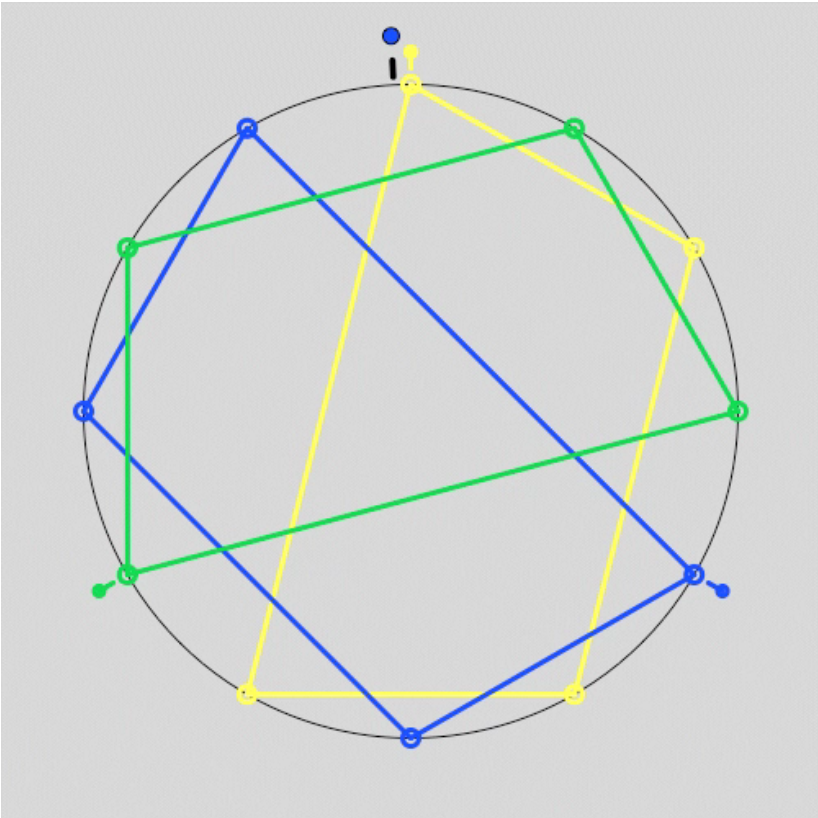
$$0 = 0 + 0$$

$$1 = 5 + 8$$

$$2 = ? + ?$$

Un canon rythmique mosaïque est une factorisation

The diagram illustrates the factorization of a 12-measure rhythmic canon. It shows a large circle with 12 points and colored chords (red, green, orange) representing the canon. Below it, a smaller circle with 12 points shows two red chords, with a plus sign between them, representing the factorization. At the bottom, a musical staff shows the corresponding rhythmic notation.



$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 \\ 1 &= 5 + 8 \\ 2 &= 6 + 8 \end{aligned}$$

Construction explicite d'un rythme k -asymétrique

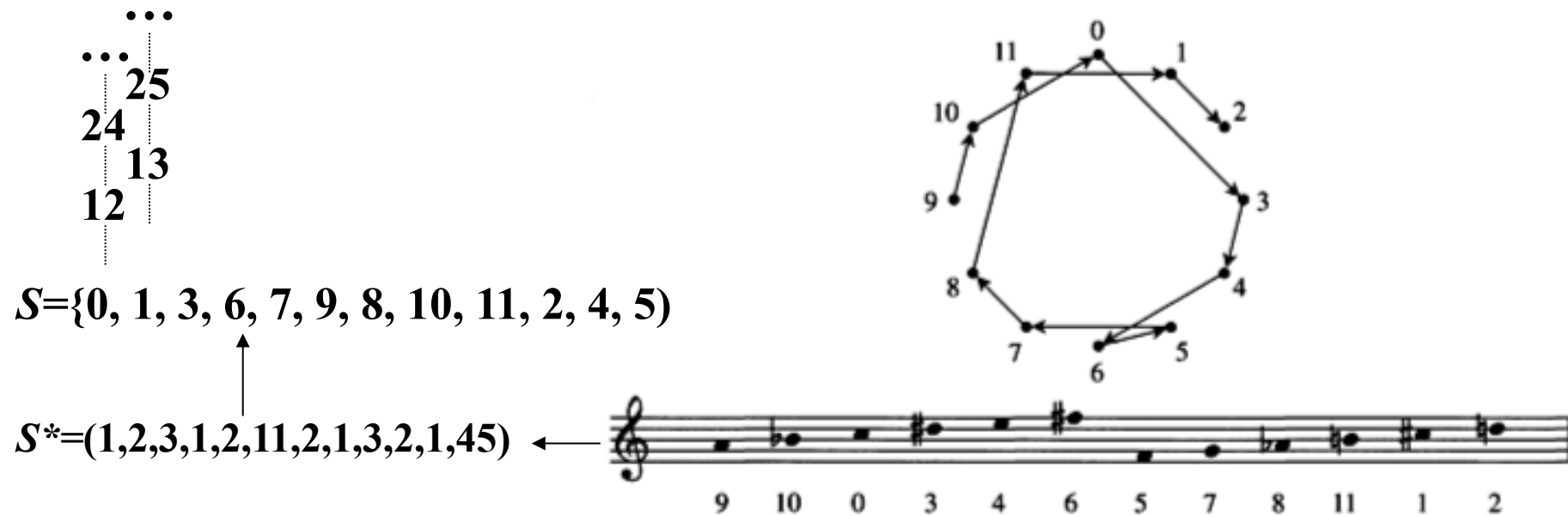
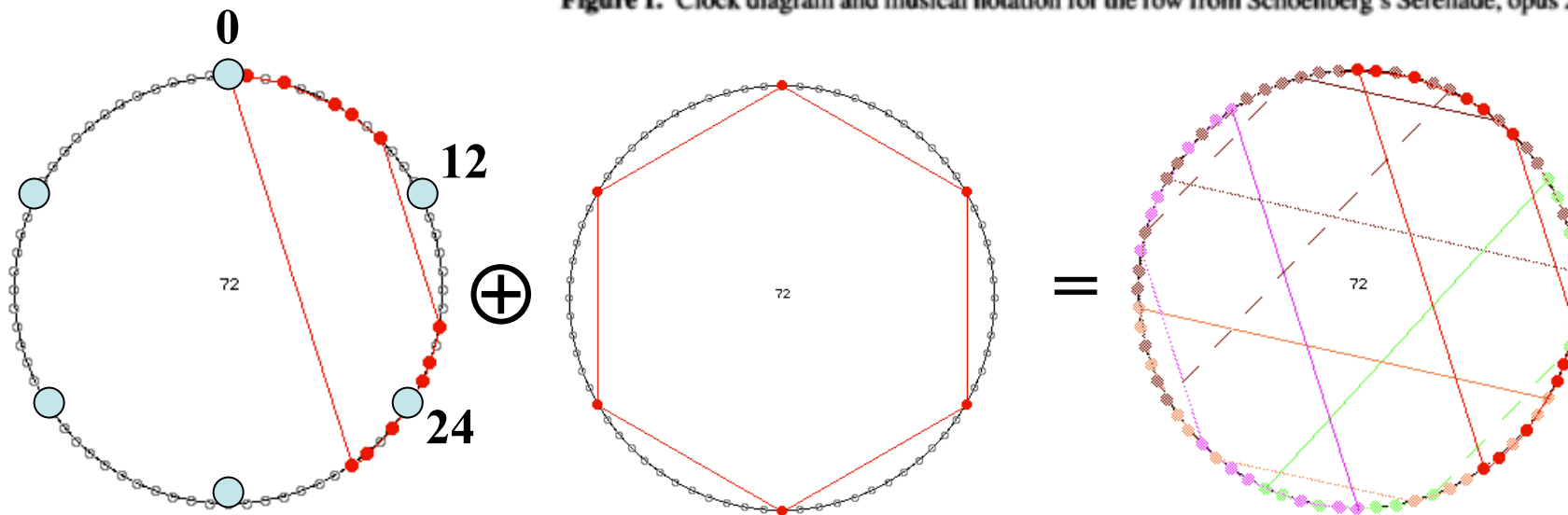
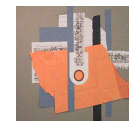
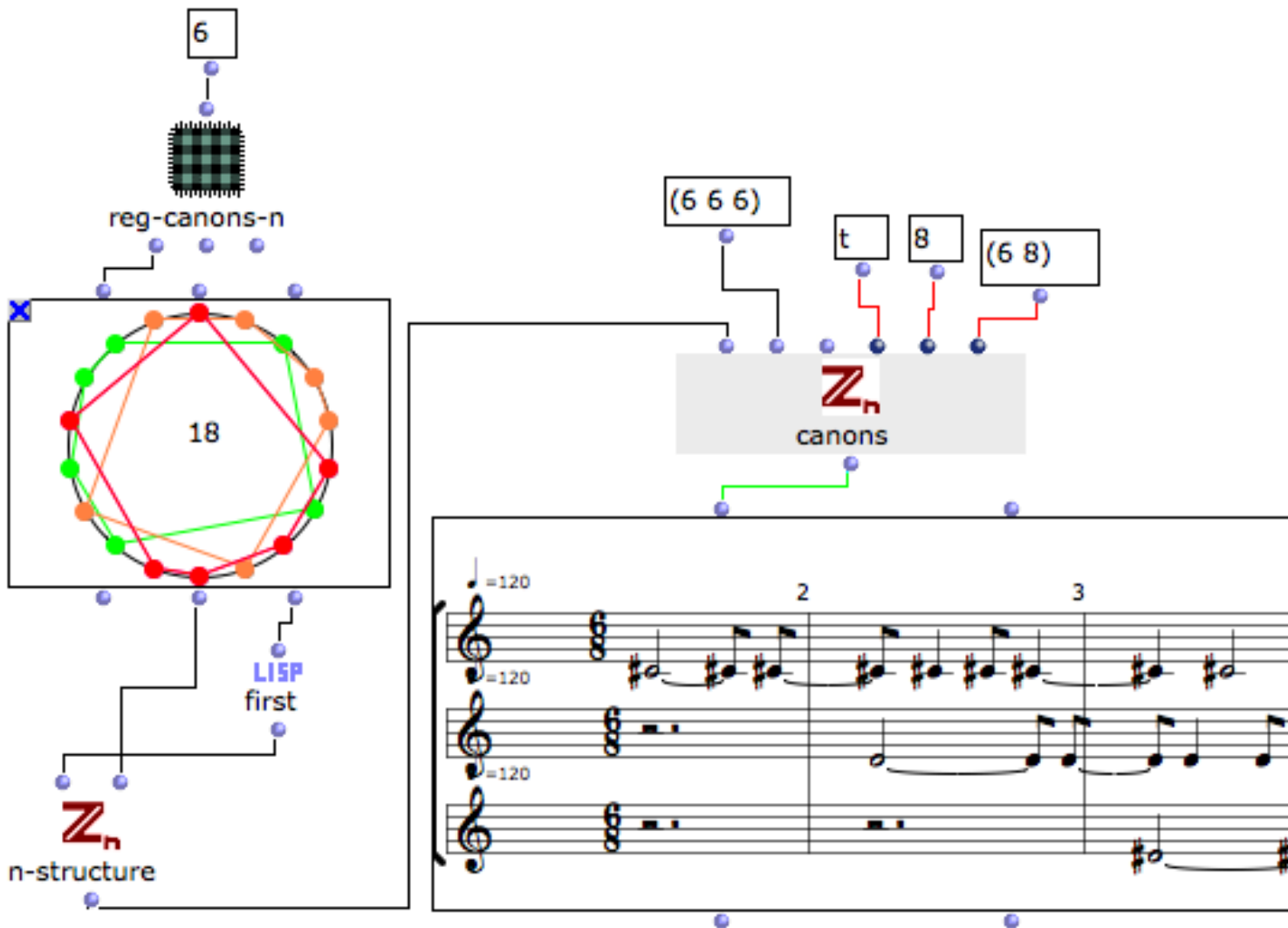


Figure 1. Clock diagram and musical notation for the row from Schoenberg's Serenade, opus 24, movement 5.

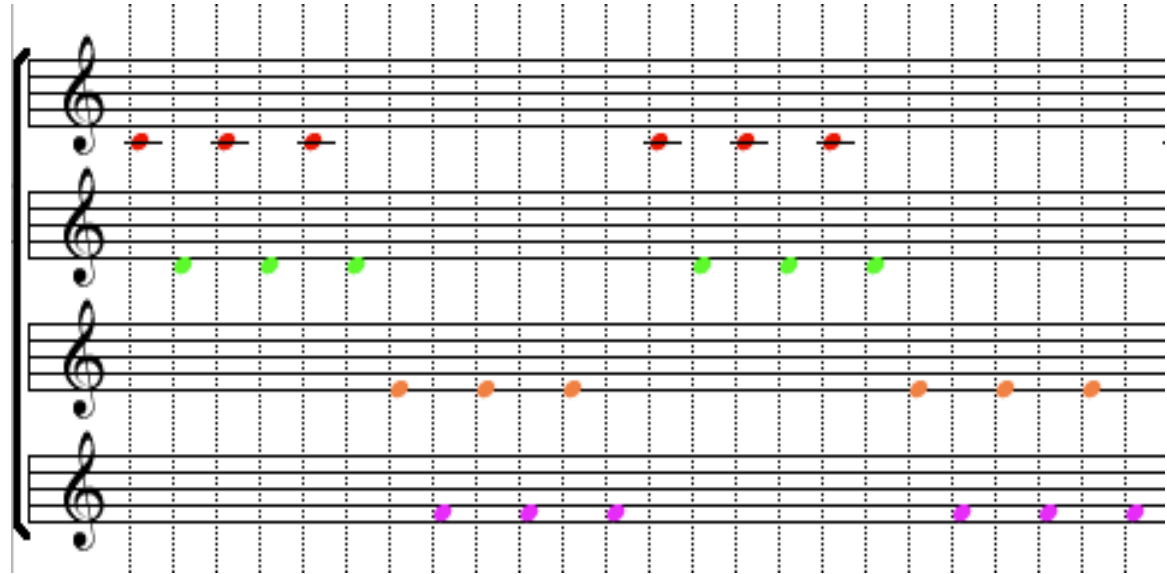
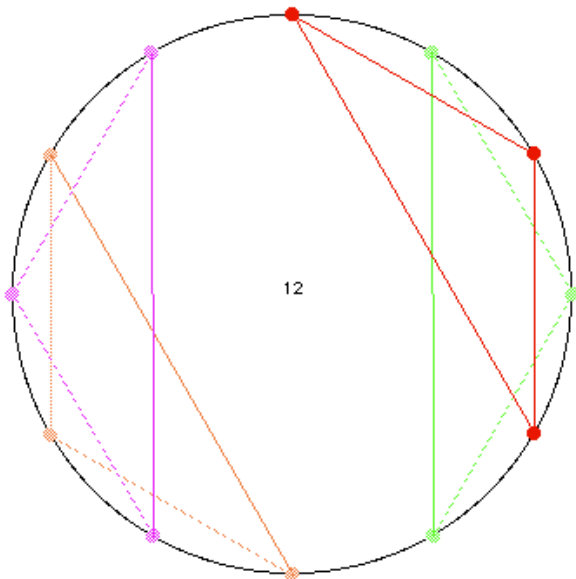


Pattern 8-asymétrique

Construction explicite d'un rythme k -asymétrique



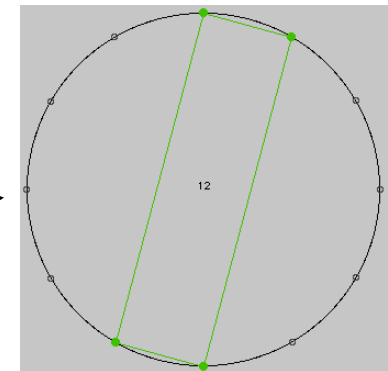
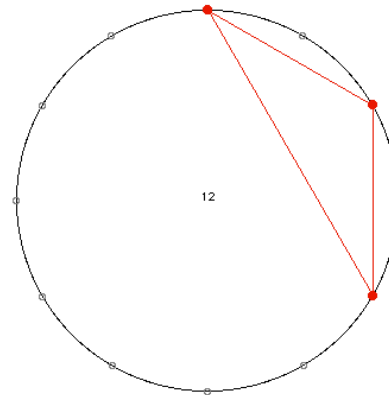
Canons mosaïques avec symétrie transpositionnelle



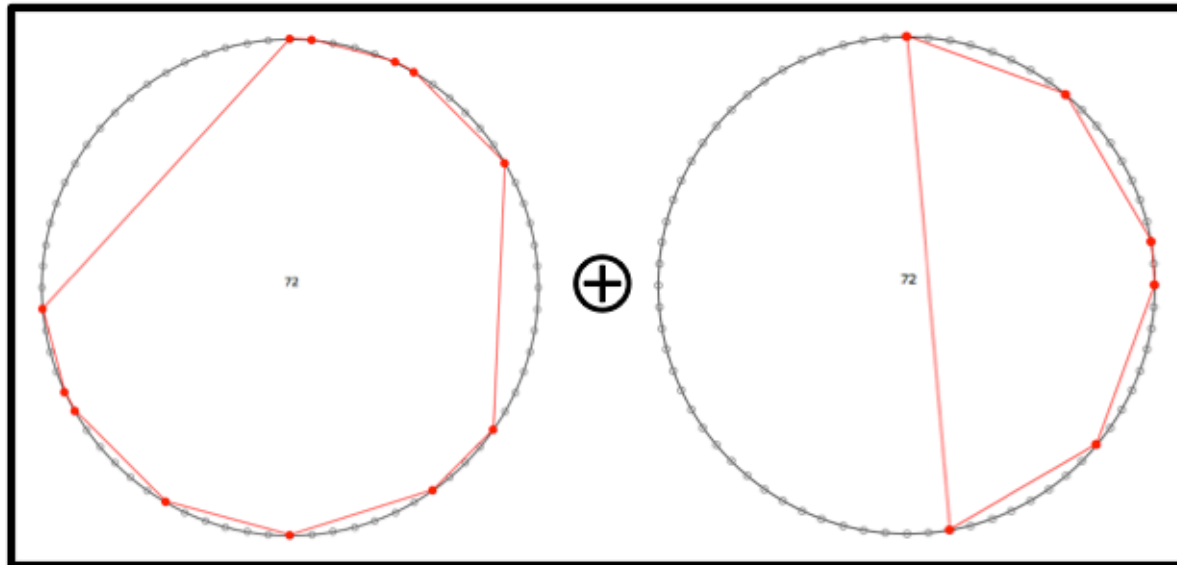
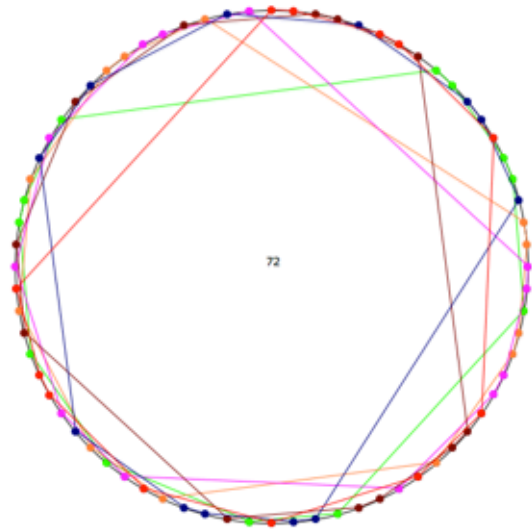
$$\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} = \{0, 2, 4\}$$

$$\mathbf{B} = \{0, 1, 6, 7\}$$



Canons rythmiques mosaïques sans périodicité interne



Dan Vuza

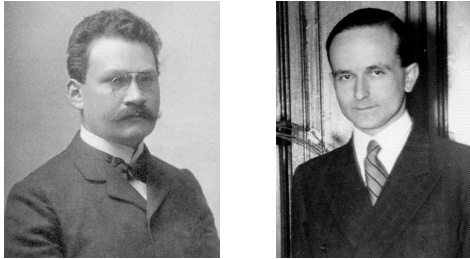


Anatol Vieru

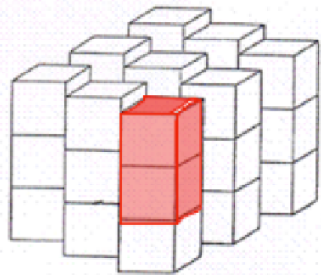


Les canons mosaïques comme problème « mathémusical »

Le problème de Minkowski/Hajos



Dans un pavage simple [*simple lattice tiling*] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension $n-1$.

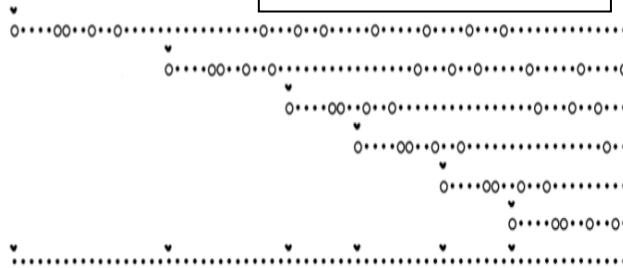


Les canons mosaïques de Vieru/Vuza



Un canon de Vuza est une factorisation d'un groupe cyclique en somme directe de deux sous-ensembles non-périodiques

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = R \oplus S$$



Lien entre Minkowski et Vuza (Andreatta, 1996)

Groupes de Hajós (*good groups*)

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \in \{p^\alpha, p^\alpha q, pqr, p^2q^2, p^2qr, pqrs\}$ où p, q, r, s , sont des nombres premiers distincts



Groupes non-Hajós (*bad groups*)

- 72
- 108 120 144 168 180
- 200 216 240 252 264 270 280 288
- 300 312 324 336 360 378 392 396
- 400 408 432 440 450 456 468 480
- 500 504 520 528 540 552 560 576 588 594
- 600 612 616 624 648 672 675 680 684 696
- 700 702 720 728 744 750 756 760 784 792
- 800 810 816 828 864 880 882 888...

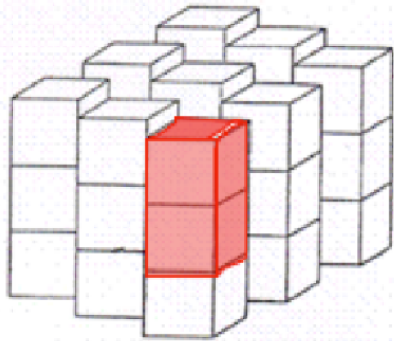
1907-1942

1991

1996

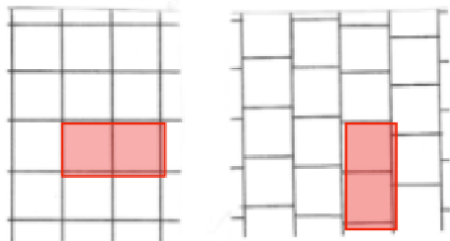
M. Andreatta, « Constructing and Formalizing Tiling Rhythmic Canons: a historical Survey of a “Mathemusical” Problem », Special Issue « Tiling Problems in Music », *Perspectives of New Music*, J. Rahn (ed.), University of Washington, Seattle (2011).

De la Conjecture de Minkowski aux groupes de Hajos



Conjecture de Minkowski (1896/1907)

Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension $n-1$.



(Cf. S. Stein, S. Szabó : *Algebra and Tiling*, 1994)

Théorème de Hajós (1942)

Soit G un groupe abélien fini et soient a_1, a_2, \dots, a_n n éléments de G . Si l'on suppose que le groupe admet comme factorisation la somme directe des sous-ensembles $A_1 \dots A_n$

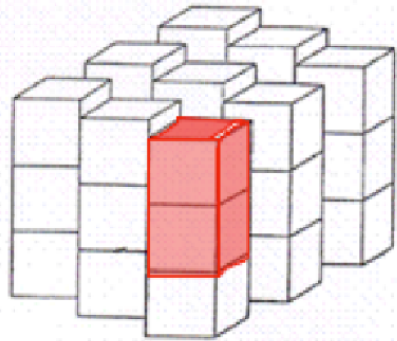
$$A_1 = \{1, a_1, \dots, a_1^{m_1-1}\}, A_2 = \{1, a_2, \dots, a_2^{m_2-1}\}, \dots, A_n = \{1, a_n, \dots, a_n^{m_n-1}\}$$

avec $m_i > 0$ pour tout $i=1, 2, \dots, n$, alors un des A_i est un groupe

Groupes de Hajos (good groups)

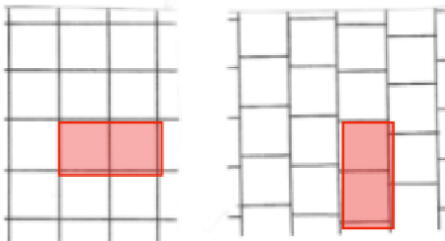
Rédei 1947	(p, p)	Sands 1962	$(p, 3, 3)$
Hajós 1950	\mathbb{Z}		$(p, 2^2, 2)$
	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n=p^\alpha$		$(p, 2, 2, 2, 2)$
De Bruijn 1953	(p^α, q)		$(p^2, 2, 2, 2)$
	(p, q, r)		$(p^3, 2, 2)$
			$(p, q, 2, 2)$
Sands 1957	(p^2, q^2)		
	(p^2, q, r)		
	(p, q, r, s)	Sands 1964 Q	$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
			$\mathbb{Q} + \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
Sands 1959	$(2^2, 2^2)$		
	$(3^2, 3)$		
	$(2^n, 2)$		

Quelques versions faibles de la conjecture de Minkowski



Conjecture de Minkowski (1896/1907)

Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension $n-1$.



- *Les quatre conditions de la Conjecture de Minkowski*
 - [1] Les cubes sont tous obtenus par translation
 - [2] Les vecteurs de translations forment un réseau [lattice]
 - [3] Les parties internes des cubes sont disjointes
 - [4] Tout point de l'espace qui n'est pas dans le bord d'un cube est contenu exactement dans un cube

- *Conjecture de Keller (1930) = Minkowski – [2]*
 - Vraie pour $n \leq 6$ (Perron, 1940)
 - Fausse pour $n \geq 10$ (Lagarias et Shor, 1992)
 - Fausse pour $n=8$ et $n=9$ (Mackey, 2000)
 - Ouverte pour $n=7$

- *Conjecture de Furtwangler = Minkowski – [3 et 4] + nouvelle condition :*
 - [4'] Tout point de l'espace qui n'est pas dans le bord de chaque cube est contenu dans exactement k cubes
 - La conjecture est vraie ssi $n \leq 3$ (Hajos 1941)

- *Conjecture semi-périodique de Hajos (1950) : toute factorisation d'un groupe $G = A+B$ est semipériodique i.e. $B=B_1, \dots, B_m$ et s'il existe un sousgroupe $G'=\{g_1, \dots, g_m\}$ telle que $A+B_i=g_i+A+B_1$.*

Groupes non Hajós et Canons de Vuza

Groupes non-Hajós (bad groups)

72
 108 120 144 168 180
 200 216 240 252 264 270 280 288
 300 312 324 336 360 378 392 396
 400 408 432 440 450 456 468 480
 500 504 520 528 540 552 560 576 588 594
 600 612 616 624 648 672 675 680 684 696
 700 702 720 728 744 750 756 760 784 792
 800 810 816 828 864 880 882 888...

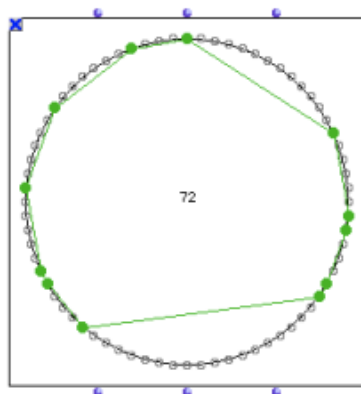
Groupes Hajós (good groups)

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec

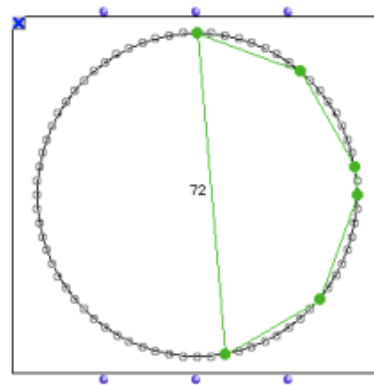
$n \in \{p^\alpha, p^\alpha q, pqr, p^2q^2, p^2qr, pqrs\}$

où p, q, r, s , sont des nombres premiers distincts

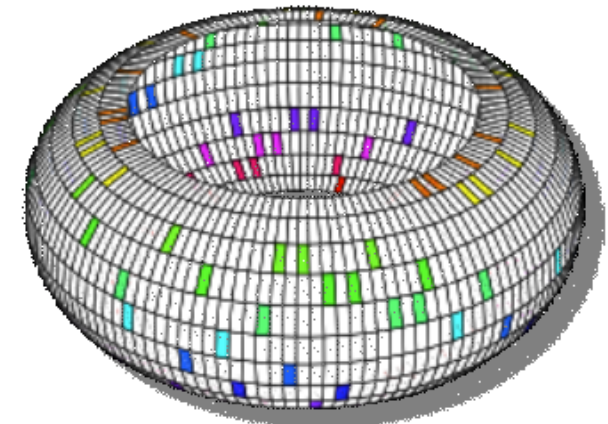
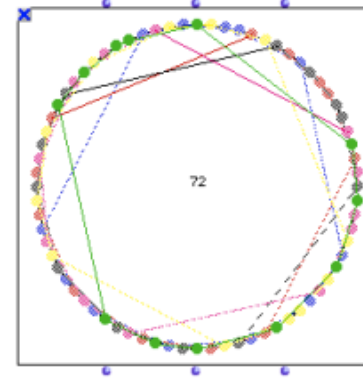
Problème ouvert : Trouver un algorithme qui permet d'obtenir toutes les factorisations d'un groupe cyclique non-Hajós en somme directe de deux sous-ensembles non périodiques (i.e. classifier tous les Canons de Vuza).



+



=



Classification « paradigmatique » des canons mosaïques de Vuza

Résultat : uniquement deux « types » de canons différents (à une transformation affine près, i.e. $f: \mathbb{Z}_{72} \rightarrow \mathbb{Z}_{72}$ t.q. $f(x)=ax+b$ avec $a \in (\mathbb{Z}_{72})^*$ et $b \in \mathbb{Z}_{72}$)



• R. Tijdeman: “Decomposition of the Integers as a direct sum of two subsets”, *Number Theory*, Cambridge University Press, 1995. The fundamental Lemma: R pave $\mathbb{Z}_n \Rightarrow aR$ pave \mathbb{Z}_n $\langle a, n \rangle = 1$

$\{Z_n\}$
R
(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
(20 3 1 5 6 9 4 11 6 3 3 1)
(1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
(6 13 4 7 6 6 1 4 19 1 4 1)
(1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)
(3 3 17 4 3 6 6 5 4 15 5 1)

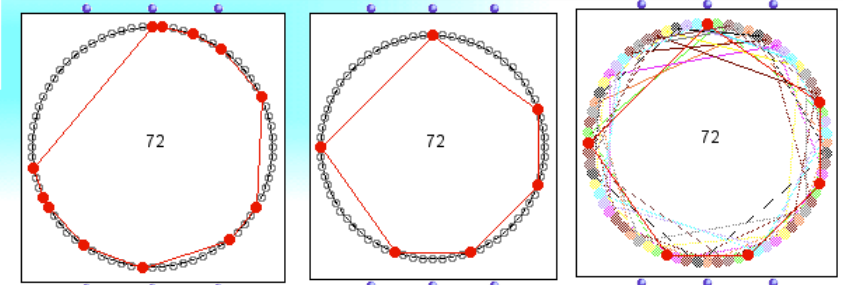
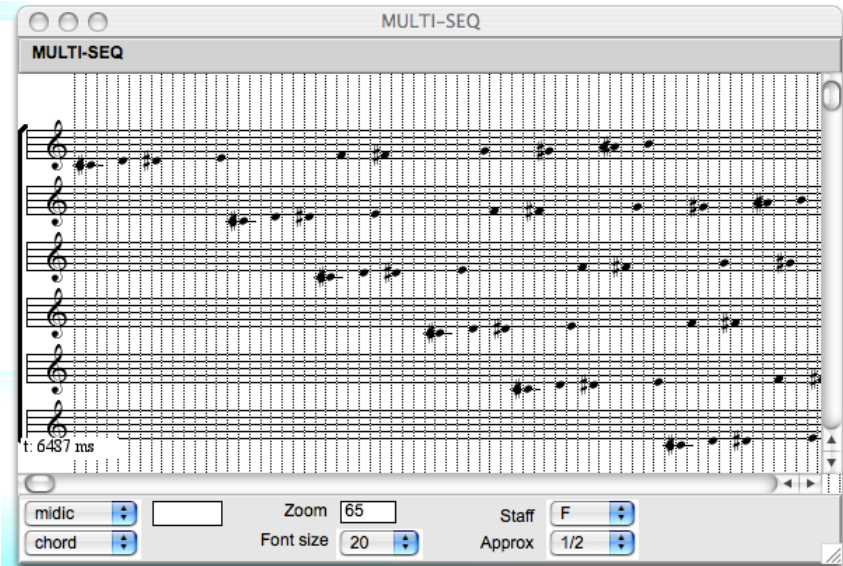
S
(8 8 2 8 8 38)
(16 2 14 2 16 22)
(14 8 10 8 14 18)

$\{O_n\}$
R
(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
(1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
(1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)

S
(8 8 2 8 8 38)
(16 2 14 2 16 22)
(14 8 10 8 14 18)

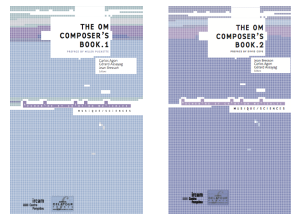
$\{Af_n\}$
R
(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
(1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)

S
(14 8 10 8 14 18)



$\mathbb{Z}/72\mathbb{Z} = R \oplus S$

Collection « Musique/ Sciences » (dir. J.-M. Bardez & M. Andreatta)



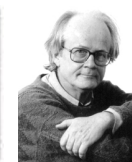
F. Lévy



G. Bloch



M. Lanza



T. Johnson

1999



18-Catalogue-Z72

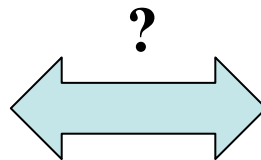
Conjecture spectrale et problème de Minkowski/Hajos

La conjecture de Fuglede

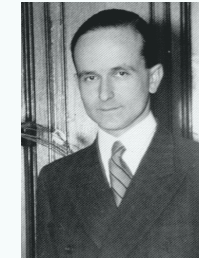


Un sous-ensemble de \mathbb{R}^n pave par translation ssi il est spectral (i.e. il admet une décomposition hilbertienne d'exponentiels complexes)
J. Func. Anal. 16, 1974.

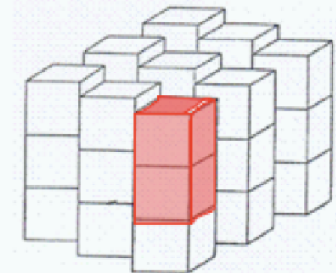
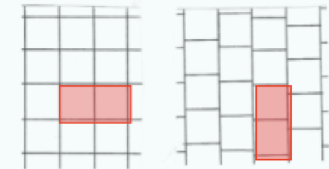
Fausse en dim. $n \geq 3$
 Ouverte en dim. 1 et 2



Le problème de Minkowski/Hajos



Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension $n-1$.



DEFINITION 6 A subset A of some vector space (say \mathbb{R}^n) is spectral iff it admits a Hilbert base of exponentials, i.e. if any map $f \in L^2(A)$ can be written

$$f(x) = \sum f_k \exp(2i\pi \lambda_k \cdot x)$$

for some fixed family of vectors $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ where the maps $e_k : x \mapsto \exp(2i\pi \lambda_k \cdot x)$ are mutually orthogonal (i.e. $\int_A \bar{e}_k e_j = 0$ whenever $k \neq j$).



(M. Andreatta et C. Agon, eds 2009)

Conjecture spectrale et canons de Vuza

La conjecture de Fuglede



Un sous-ensemble de \mathbb{R}^n pave par translation ssi il est spectral (i.e. il admet une décomposition hilbertienne d'exponentiels complexes)

J. Func. Anal. 16, 1974.

Fausse en dim. $n \geq 3$
Ouverte en dim. 1 et 2

Canons de Vuza de période n

- $n = p_1 p_2 n_1 n_2 n_3$
- $\langle p_1 n_1, p_2 n_2 \rangle = 1$
- $n_3 > 1$

72

108 120 144 168 180

200 216 240 252 264 270 280 288

300 312 324 336 360 378 392 396

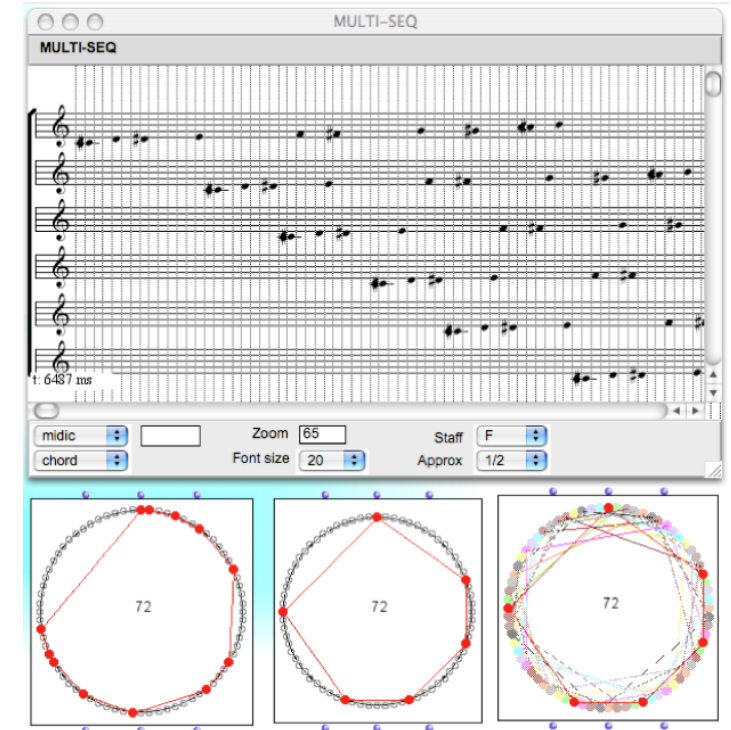
400 408 432 440 450 456 468 480

500 504 520 528 540 552 560 576 588 594

600 612 616 624 648 672 675 680 684 696

700 702 720 728 744 750 756 760 784 792

800 810 816 828 864 880 882 888...



Résultat (Amiot 2009) :

Si A pave mais il n'est pas spectral
 $\Rightarrow A$ est le rythme d'un canon de Vuza



Problème ouvert : Trouver un algorithme qui permet d'obtenir toutes les factorisations d'un groupe cyclique non-Hajos en somme directe de deux sous-ensembles non périodiques