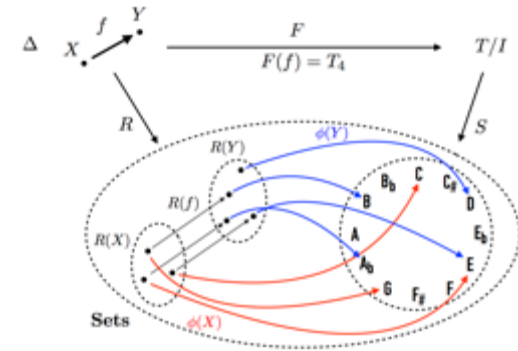
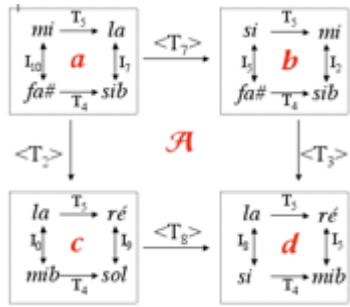


Séminaire *mamuphi*

Ircam, 12 décembre 2015



Théories des catégories en analyse musicale

Moreno Andreatta & Carlos Agon
Equipe Représentations Musicales
IRCAM-CNRS-UPMC

(En collaboration avec D. T. Vuza, G. Mazzola, E. Amiot, Th. Noll, F. Jędrzejewski, F. Acquistapace, J.-P. Allouche, R. Guitart, A. Ehresmann, A. Popoff, ...)

Du pouvoir des analogies dans la pensée mathématique

Alain Connes



Stanislas Dehaene



COLLÈGE
DE FRANCE
—1530—

AC : Prenez quelqu'un qui n'est pas **musicien** et qui voit dans le métro quelqu'un qui lit une **partition musicale**. Il ne comprendra rien. Prenez quelqu'un qui n'est pas mathématicien et qui voit dans le métro quelqu'un qui est en train de lire un article de mathématiques avec plein de formules. Il ne comprendra pas. Pourquoi est-ce que le mathématicien comprend ? Il comprend parce qu'il s'est déjà créé ce qu'on appelle **des images mentales**. Lorsqu'il regarde des formules mathématiques, ce n'est pas la formule mathématique qu'il voit. Il fait un lien absolument instantané avec ce que dans sa tête il a construit. Il n'a pu construire cette image mentale dans sa tête, que par un **acte actif**, pas de manière passive. Comment se manifeste l'intuition en mathématiques. De la manière la plus crue, elle se manifeste sous la forme suivante : le mathématicien dit « Il y a quelque chose là ». Il sent, de manière extrêmement diffuse qu'il y a quelque chose là. Il y a une force qui le met en mouvement comme un chasseur pour y aller voir. Mais il va voir avec toute sa rationalité, tout ce qu'il peut mettre de son intelligence. L'intuition, c'est donc une espèce de mise en mouvement. Mais après, l'intuition se manifeste tout à fait autrement. Elle se manifeste par un **sens esthétique**. Une des armes qu'a le mathématicien et que n'a pas encore l'ordinateur (je pense qu'il ne l'aura pas pendant des années et des années), c'est le pouvoir de ce qu'on appelle en mathématiques : **les analogies**. Vous allez avoir un domaine des mathématiques qui va se dérouler d'une certaine manière et une machine qui va exister. Cette machine, vous l'aurez en image mentale, vous l'aurez dans votre tête et puis vous allez rencontrer un autre problème qui a priori, n'a rien à voir avec l'autre problème, absolument rien, mais vous allez vous apercevoir petit à petit qu'il y a un certain nombre de choses qui ont l'air de marcher de la même manière. mais elles ne marchent pas exactement de la même manière. Elles marchent de manière différente.

L'algèbre (le temps) et la géométrie (l'espace) en musique

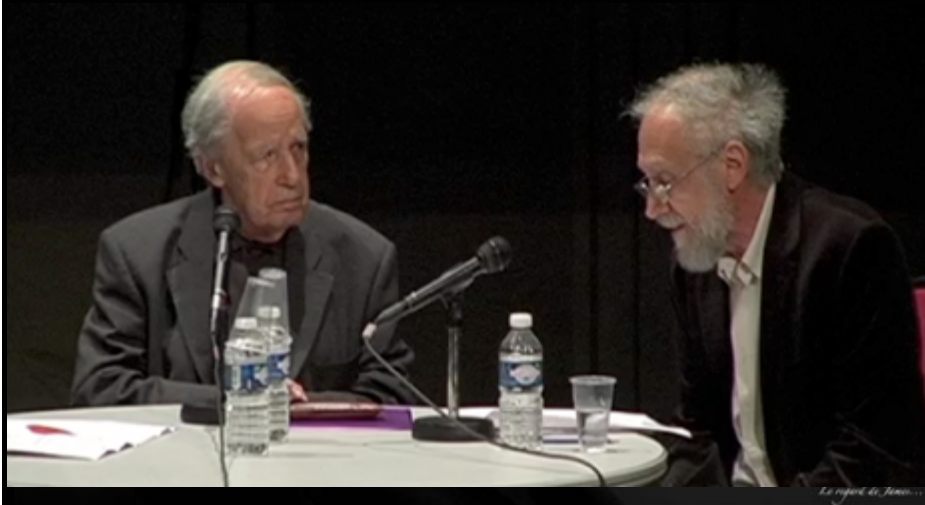
MATH / MUSIC MEETINGS

Creativity in Music and Mathematics

Pierre Boulez & Alain Connes

Encounter with two major figures of musical creation and contemporary mathematical research: Pierre Boulez and Alain Connes.

What is the role of intuition in mathematical reasoning and in artistic activities? Is there an aesthetic dimension to mathematical activity? Does the notion of elegance of a mathematical demonstration or of a theoretical construction in music play a role in creativity?



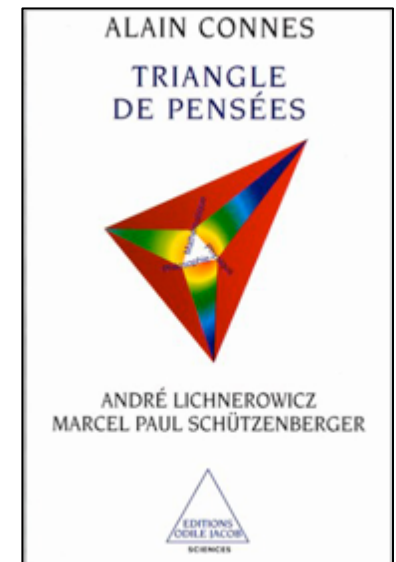
Gérard Assayag, director of the CNRS/IRCAM Laboratory for The Science and Technology of Music and Sound, will lead this dialogue on invention in the two disciplines.

Photo: Pierre Boulez © Jean Radel

Wednesday, June 15, 2011, 6:30pm / IRCAM, Espace de projection

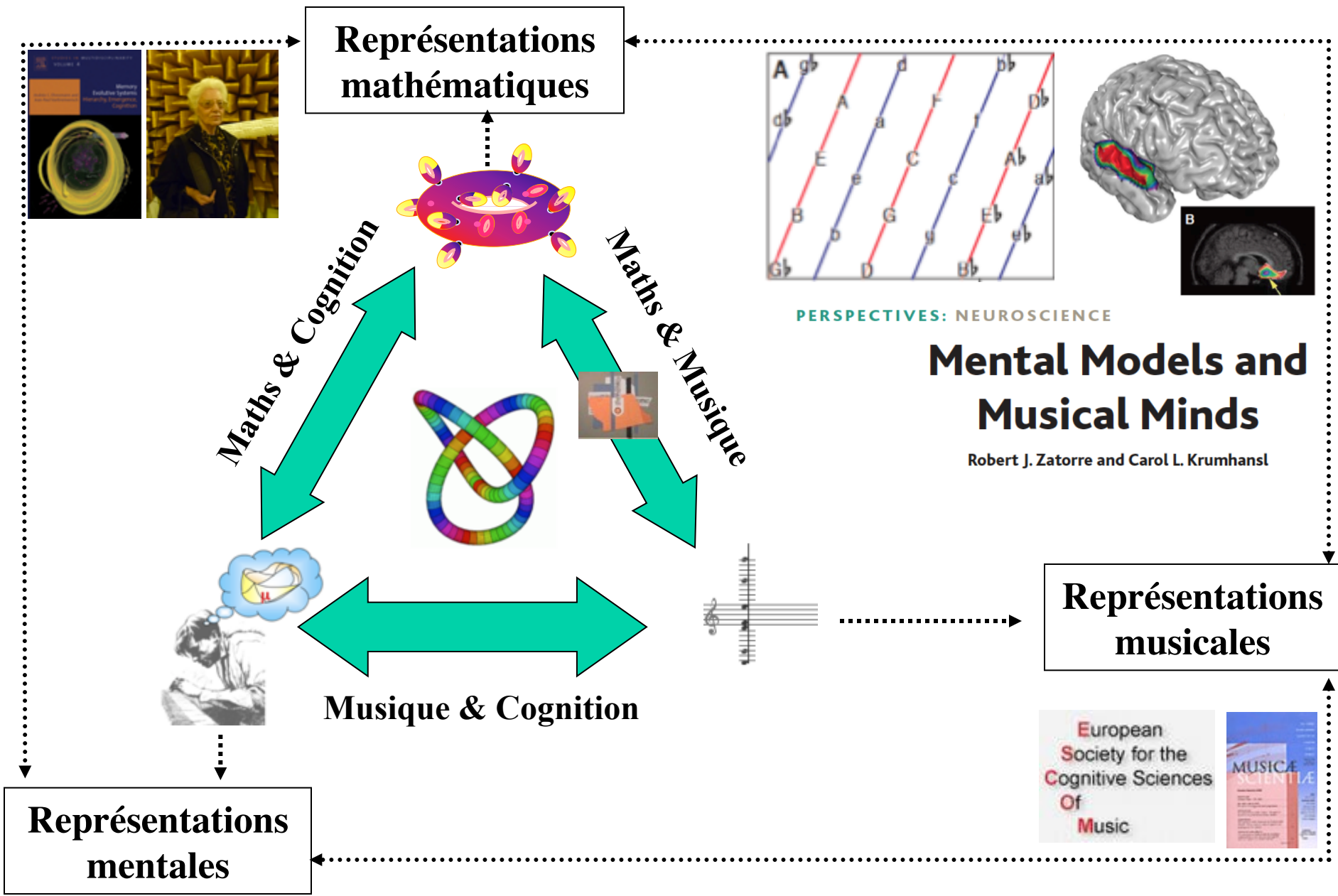
« La **musique** s'inscrit dans le temps exactement comme l'**algèbre** : dans les mathématiques, il y a cette dualité fondamentale entre d'un côté la **géométrie** qui correspond aux arts visuels, aux images mentales ; et de l'autre côté l'**algèbre**, qui inscrit une temporalité. Cela s'inscrit dans le temps, c'est le **calcul**, quelque chose qui est très proche du langage, et qui en a la précision diabolique.. »

(Alain Connes, dans “Créativité en musique et en mathématiques”, Ircam, Conférence MCM, 2011).



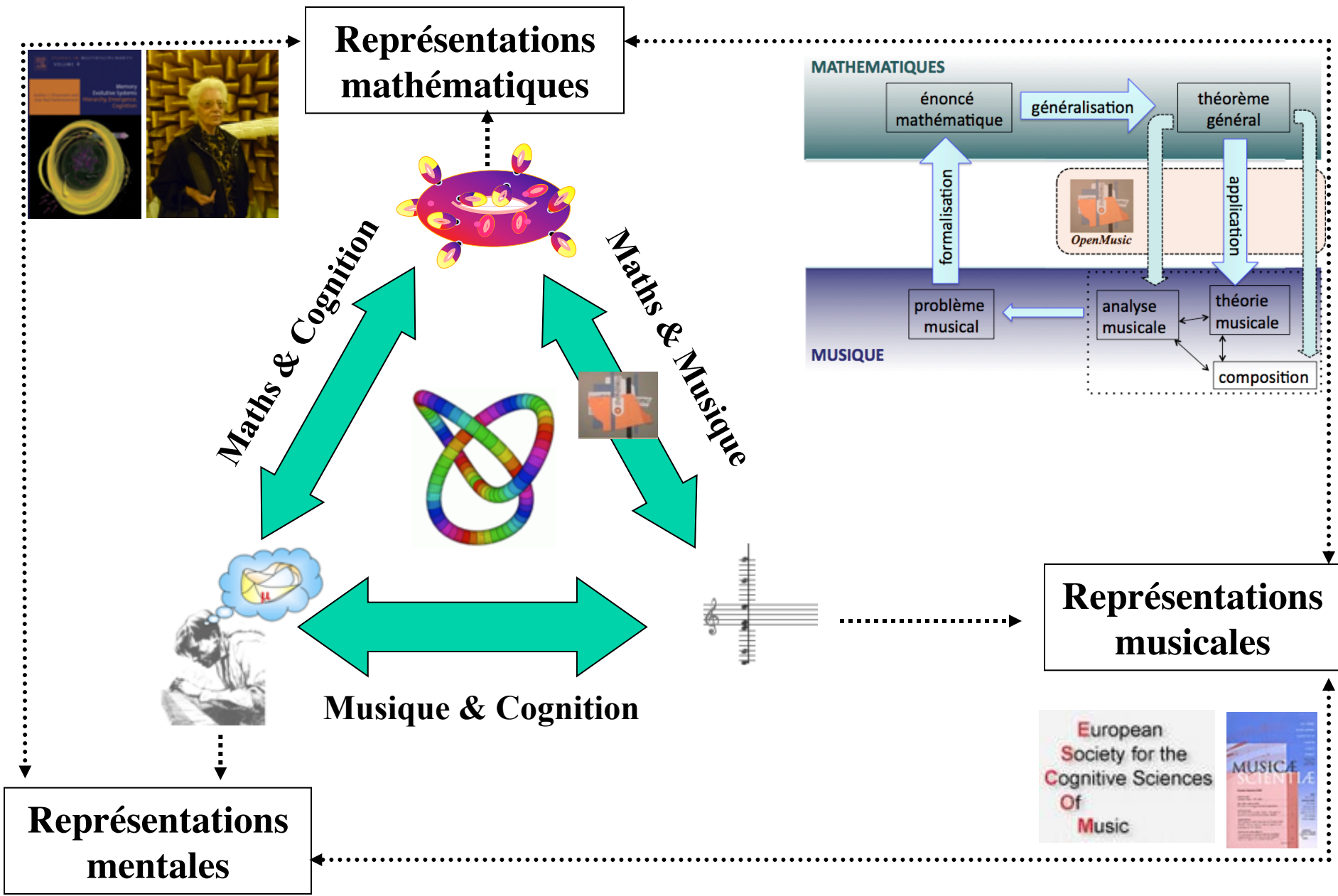
Le pouvoir des analogies dans la recherche mathématique

<http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/Cognition.html>



Le pouvoir des analogies dans la recherche mathématique

<http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/Cognition.html>



Double mouvement d'une dynamique mathémusicale

MATHEMATIQUES

énoncé
mathématique

généralisation

théorème
général

formalisation



OpenMusic

application

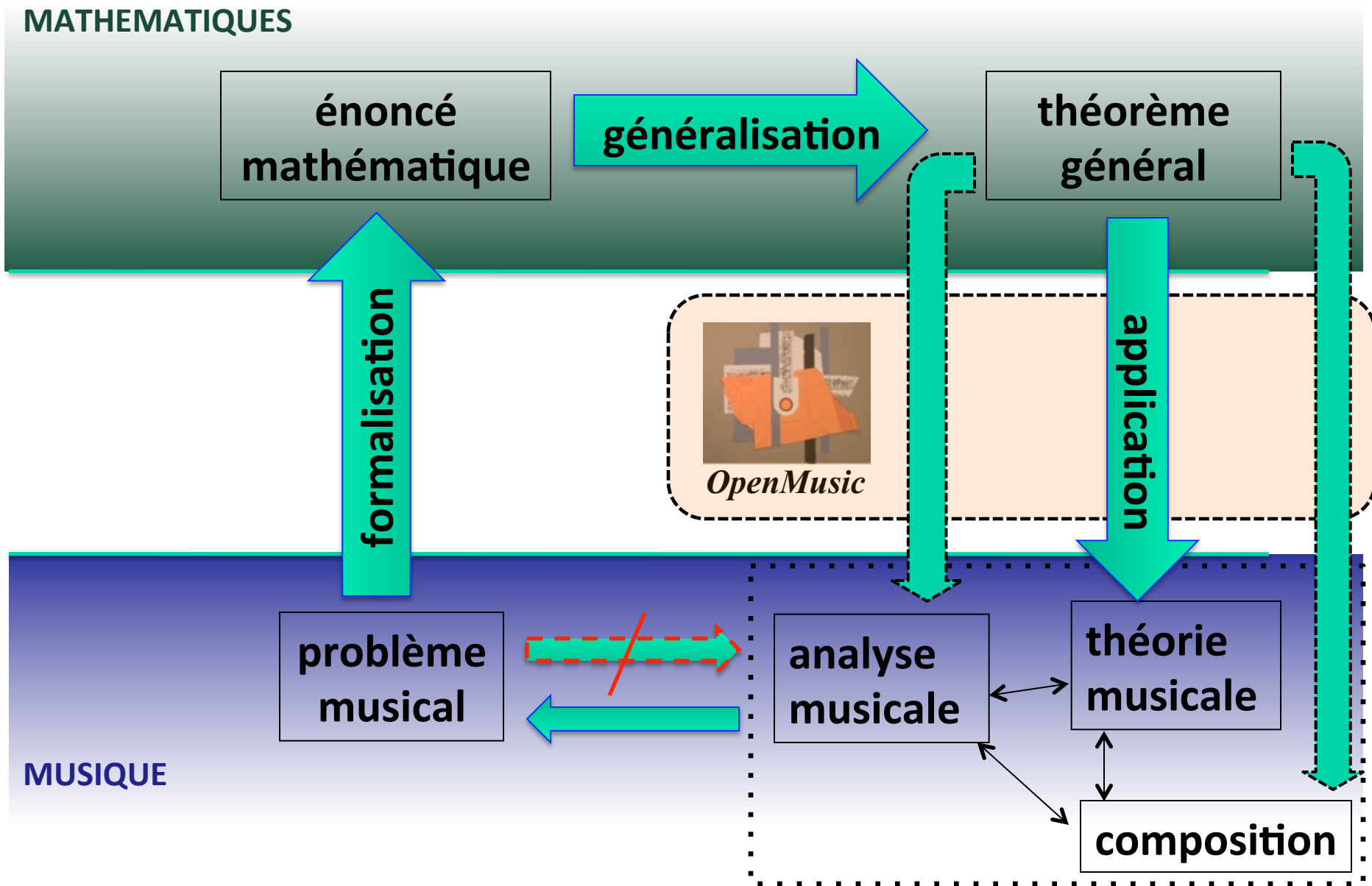
problème
musical

analyse
musicale

théorie
musicale

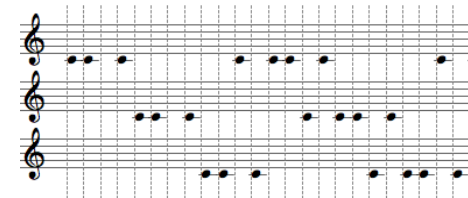
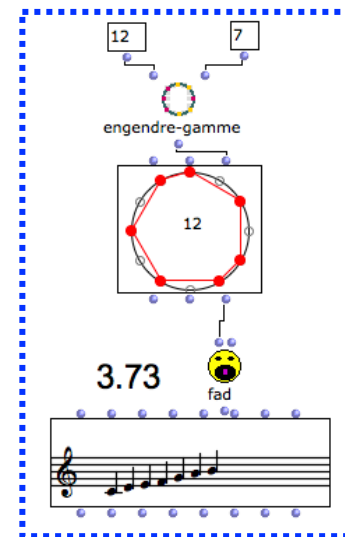
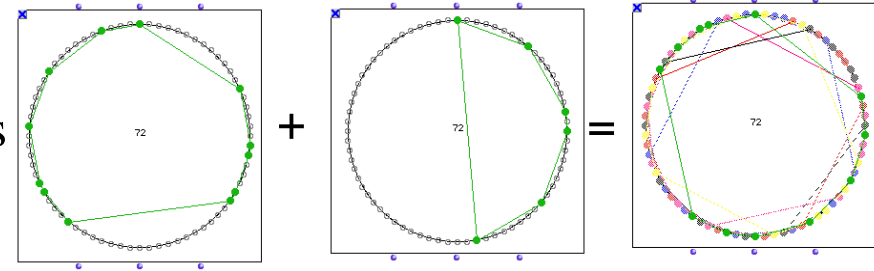
composition

MUSIQUE



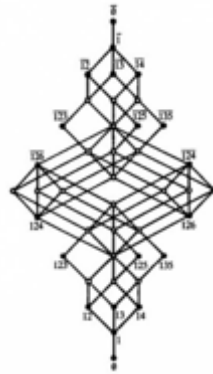
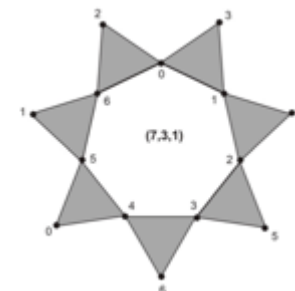
Quand la recherche musicale rencontre les mathéux...

- D. T. Vuza
 - Canons mosaïques et suites périodiques et calcul de différences finies
- G. Mazzola
 - Groupes, modules, fonceurs, gestes
- E. Amiot
 - Canons, DFT, mélodies autosimilaires
- Th. Noll
 - Canons mosaïques augmentés
- F. Jedrzejewski
 - Canons mosaïques de Vuza, block-design
- B. Ganter, S. Schmidt, T. Schlemmer
 - *Formal Concept Analysis* en musique
- F. Acquistapace
 - Canons de Vuza, espaces topologiques musicaux, treillis de Galois d'accords



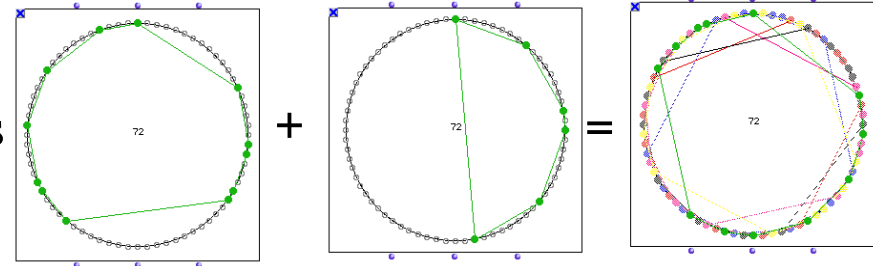
$$Df(x) = f(x) - f(x-1).$$

7 11 10 11 7 2 7 11 10 11 7 2 7 11...
 4 11 1 8 7 5 4 11 1 8 7 5 4 11...
 7 2 7 11 10 11 7 2 7 11 10 11...
 7 5 4 11 1 8 7 5 4 11 1 8...



Quand la recherche musicale rencontre les mathéux...

- D. T. Vuza **MAMUPHI** (2/12/2000)
 - Canons mosaïques et suites périodiques et calcul de différences finies



- G. Mazzola **MAMUPHI** (4/11/2000)

- Groupes, modules, foncteurs, gestes

- E. Amiot

- Canons, DFT, mélodies autosimilaires

- Th. Noll

- Canons mosaïques augmentés

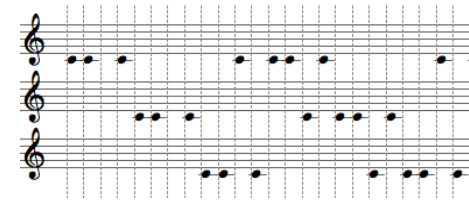
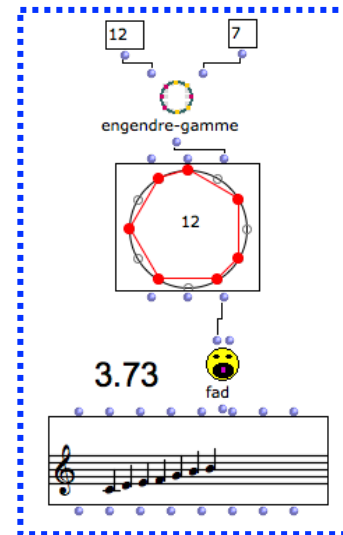
- F. Jedrzejewski

- Canons mosaïques de Vuza, block-design

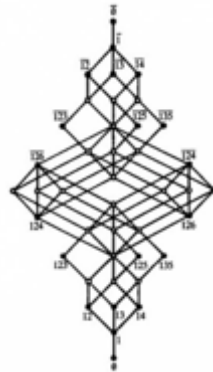
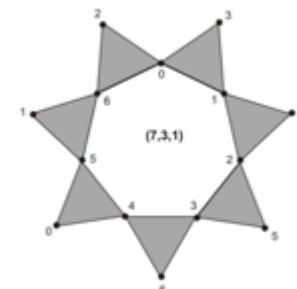
- B. Ganter, S. Schmidt, T. Schlemmer
 - FCA en musique **MAMUPHI** (2/2/2013)

- F. Acquistapace

- Canons de Vuza, espaces topologiques musicaux, treillis de Galois d'accords



$$Df(x) = f(x) - f(x-1).$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 7 & 11 & 10 & 11 & 7 & 2 & 7 & 11 & 10 & 11 & 7 & 2 & 7 & 11 & \dots \\ \swarrow & \searrow & \swarrow & & & & & & & & & & & & \\ 4 & 11 & 1 & 8 & 7 & 5 & 4 & 11 & 1 & 8 & 7 & 5 & 4 & 11 & \dots \\ & \swarrow & \searrow & & & & & & & & & & & \\ & 7 & 2 & 7 & 11 & 10 & 11 & 7 & 2 & 7 & 11 & 10 & 11 & \dots \\ & & \swarrow & \searrow & & & & & & & & & \\ & & 7 & 5 & 4 & 11 & 1 & 8 & 7 & 5 & 4 & 11 & 1 & 8 & \dots \end{array}$$


Le proto-mamuphi → <http://www.entrettemps.asso.fr/Seminaire/mamuphi.html>

Séminaire *Entretemps* "La musique ne pense pas seule"



Année 2000-2001

" Musique, mathématiques et philosophie "

En quel sens pensée musicale et pensée mathématique sont-elles *contemporaines* ? S'il ne s'agit pas seulement d'appliquer la seconde à la première, la *philosophie* est-elle requise pour que ces deux disciplines se confrontent et dialoguent sur un pied d'égalité ? Quel rôle exact l'*informatique* joue-t-elle dans un tel rapprochement entre *logiques* différentes (scientifique et artistique) de pensée ?

Partant des points de rencontre comme des points d'impasse entre mathématiques et musique, il s'agira de s'interroger sur *les conditions et les modalités* de ces croisements en sorte que la pensée musicale puisse approfondir son interlocution avec la pensée mathématique d'*aujourd'hui*.

Séminaire de travail tous les premiers samedis du mois de 9 h 30 à 12 h 30
Sous la direction de [Gérard Assayag](#), [Guerino Mazzola](#) et [François Nicolas](#)



Liste de discussion *mamuphi*



Salle Olivier-Messiaen
1, place Igor-Stravinsky 75 004.Paris

Samedi 7 octobre 2000

o François NICOLAS (compositeur) : *Musique, mathématiques et philosophie: Que vient faire ici la philosophie?*

- [Discussion collective](#) de l'exposé

o Gérard ASSAYAG (informaticien) : *De la calculabilité à l'implémentation musicale*

- [Discussion collective](#) de l'exposé

Samedi 4 novembre 2000

o Guerino MAZZOLA (mathématicien) : *Penser la musique dans la logique fonctorielle des topoi*

- [Discussion collective](#) de l'exposé

Samedi 2 décembre 2000 : *Journée d'étude autour d'Anatol VIERU (1926-1998)*

de 10h à 18h :

o Dan Tudor VUZA (mathématicien) : *Théorie modale et suites périodiques dans la pensée compositionnelle d'Anatol Vieru*



Dan Tudor Vuza



Anatol Vieru

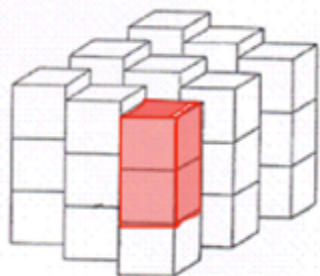


Les canons mosaïques et leur réseau d'analogies

Le problème de Minkowski/Hajos (1907/1942)



Dans un pavage simple [*simple lattice tiling*] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension $n-1$.

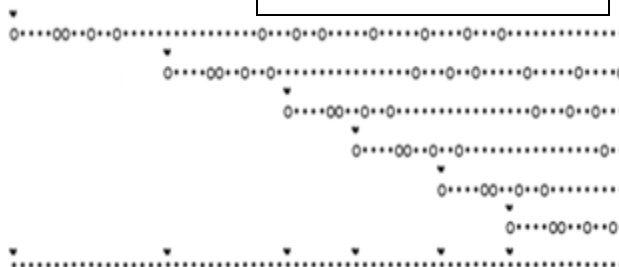


Les canons mosaïques de Vieru/Vuza (1991)



Un canon de Vuza est une factorisation d'un groupe cyclique en somme directe de deux sous-ensembles non-périodiques

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = R \oplus S$$



Lien entre Minkowski et Vuza (Andreatta, 1996)

Groupes de Hajós (*good groups*)

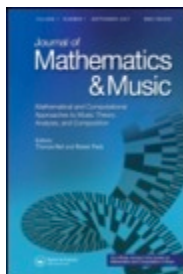
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \in \{p^\alpha, p^\alpha q, pqr, p^2q^2, p^2qr, pqrs\}$ où p, q, r, s , sont des nombres premiers distincts



Groupes non-Hajós (*bad groups*)

72
108 120 144 168 180
200 216 240 252 264 270 280 288
300 312 324 336 360 378 392 396
400 408 432 440 450 456 468 480
500 504 520 528 540 552 560 576 588 594
600 612 616 624 648 672 675 680 684 696
700 702 720 728 744 750 756 760 784 792
800 810 816 828 864 880 882 888...

M. Andreatta & C. Agon (eds), « Tiling Problems in Music », Special Issue of the *Journal of Mathematics and Music*, Vol. 3, Number 2, July 2009 (with contributions by E. Amiot, F. Jedrzejewski, M. Kolountzakis and M. Matolcsi)



Théorie de l'homométrie et reconstruction de la phase
(Patterson, 1939)

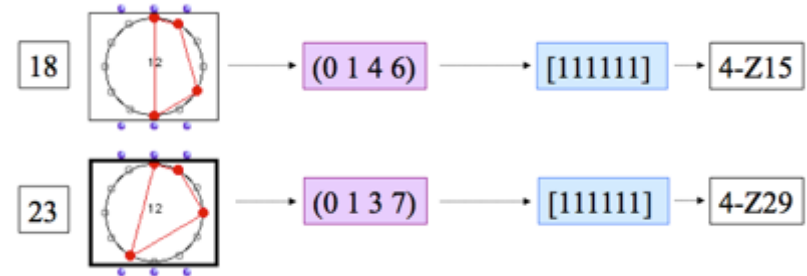
La conjecture spectrale de Fuglede
(1974)



Quand la recherche musicale rencontre les mathéux...

- J.-P. Allouche

- Théorie de l'inconstance, ensembles homométriques



- R. Guitart **MAMUPHI**

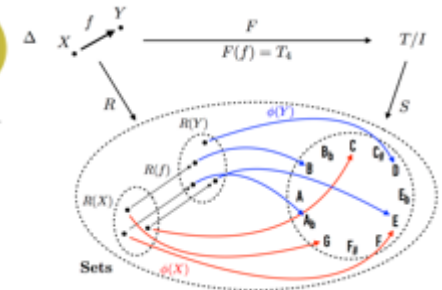
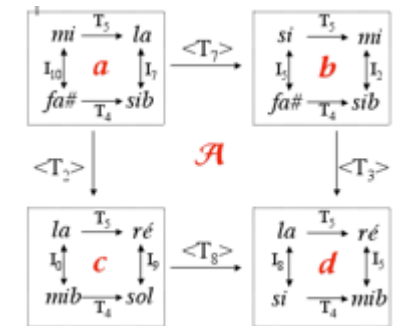
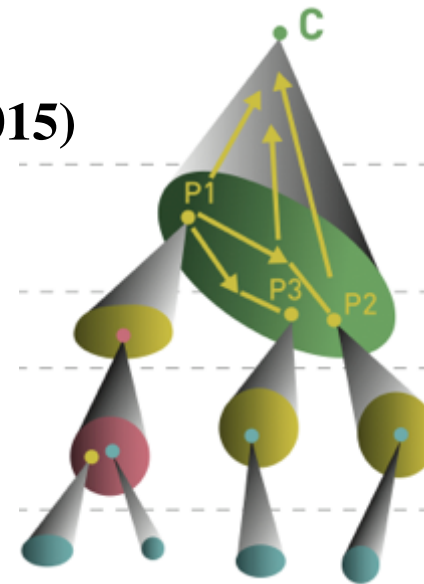
- Approche catégorielle à la créativité

- A. Ehresmann **MAMUPHI** (7/2/2015)

- Approche catégorielle à la créativité, généralisation de la théorie transformationnelle de D. Lewin

- A. Popoff **MAMUPHI** (7/2/2015)

- Généralisation de la théorie transformationnelle et des réseaux de Klumpenhouwer



Vers une théorie catégorielle de la créativité (en musique, en cognition et dans le discours)

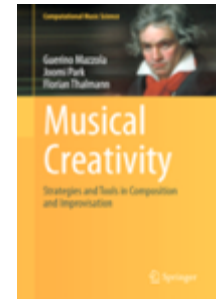
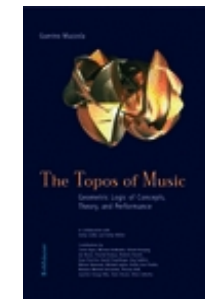
Abstract

This article presents a first attempt at establishing a **category-theoretical model of creative processes**. The model, which is applied to musical creativity, discourse theory, and cognition, suggests the relevance of the notion of “**colimit**” as a unifying construction in the three domains as well as the central role played by the **Yoneda Lemma** in the categorical formalization of creative processes.



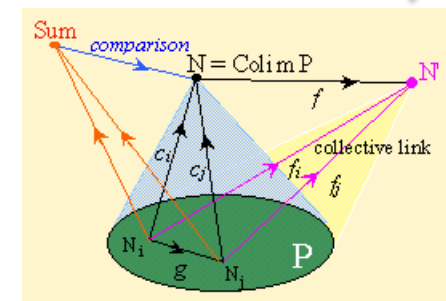
Andreatta M., A. Ehresmann, R. Guitart, G. Mazzola,
« Towards a categorical theory of creativity », Fourth
International Conference, MCM 2013, McGill University,
Montreal, June 12-14, 2013, Springer, 2013.

➔ http://repmus.ircam.fr/_media/moreno/Andreatta_Creativity_MCM2013.pdf



MAMUPHI

Séminaire MaMux



De Piaget aux SEM (via le Conceptual Blending)



J. Piaget

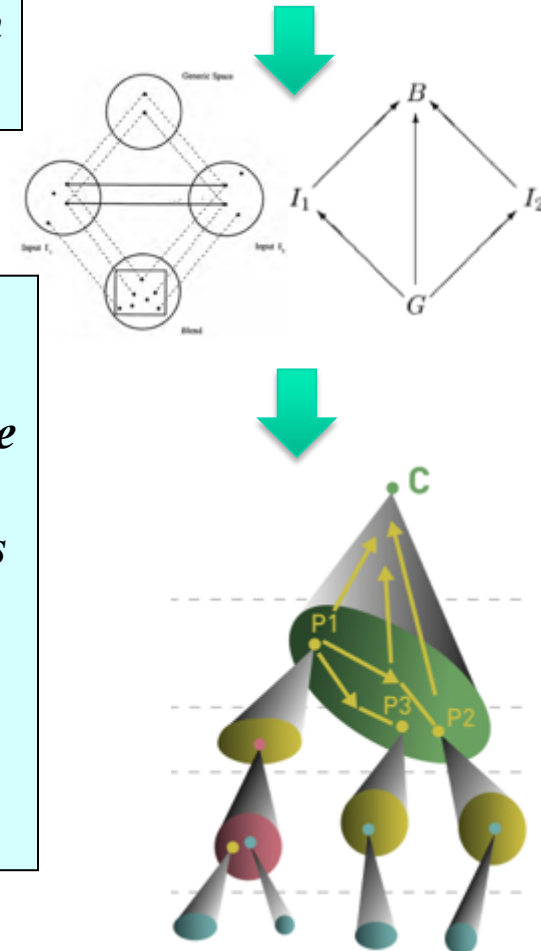
« La théorie des catégories est une théorie des constructions mathématiques, qui est macroscopique, et procède d'étage en étage. Elle est un bel exemple d'abstraction réfléchissante, cette dernière reprenant elle-même un principe constructeur présent dès le stade sensori-moteur. Le style catégoriel qui est ainsi à l'image d'un aspect important de la genèse des facultés cognitives, est un style adéquat à la description de cette genèse »

J. Piaget, G. Henriques et E. Ascher, *Morphismes et Catégories. Comparer et transformer*, 1990

« [...]L'émergence d'une œuvre d'art est l'expression d'une dynamique se développant dans un système hiérarchique de complexité croissante à multiples temporalités. Notamment, dans le cadre de notre modèle mathématique « les systèmes évolutifs à mémoire » (SEM), nous analysons l'existence d'objets multiformes émergeant dans le système sociétal d'un « monde artistique »; il pourrait s'agir de courants artistiques, issus de mouvements de pensée, de mouvements sociaux, culturels, scientifiques, technologiques. »

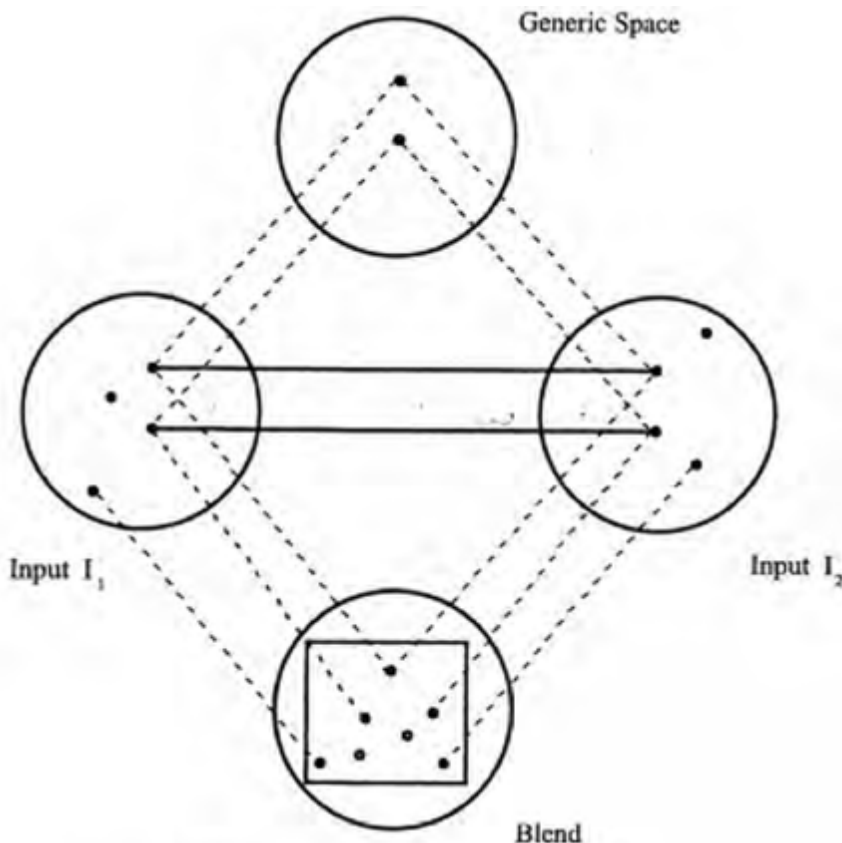
(« La Complexité dans les sciences et dans les arts », Ircam, 8-19 juin 2009)

A. Ehresmann et J.-P. Vanbreemsch, « Petite mathématique de la création », *L'étincelle*, n° 6, novembre 2009

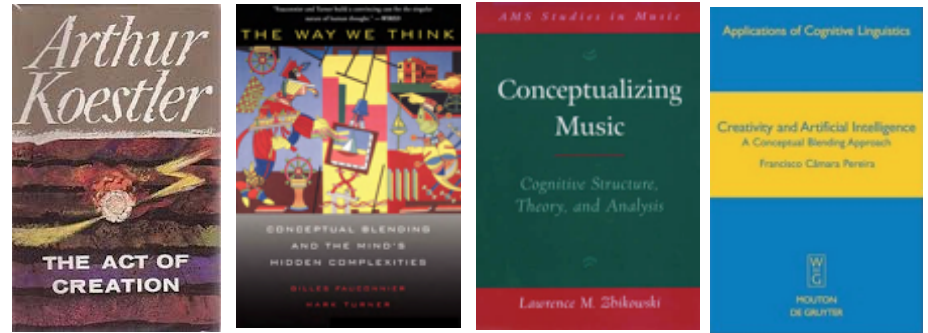


Processus créatif et blending conceptuel

- A. Koestler, *The act of creation*, 1964
- G. Fauconnier & M. Turner, *The Way We Think. Conceptual Blending and the Mind's Hidden Complexities*, 2002
- L. M. Zbikowski, *Conceptualizing Music: Cognitive Structure, Theory, and Analysis*, OUP, 2002
- F. C. Pereira, *Creativity and Artificial Intelligence - A Conceptual Blending Approach*, 2007



Minimal network for the *conceptual blending*
[Fauconnier & Turner, 2002]



[...] **Conceptual Blending** is as an elaboration of other works related to creativity, namely **Bisociation, Metaphor and Conceptual Combination**. As such, it attracts the attention of computational creativity modelers and, regardless of how Fauconnier and Turner describe its processes and principles, **it is unquestionable that there is some kind of blending happening in the creative mind.**

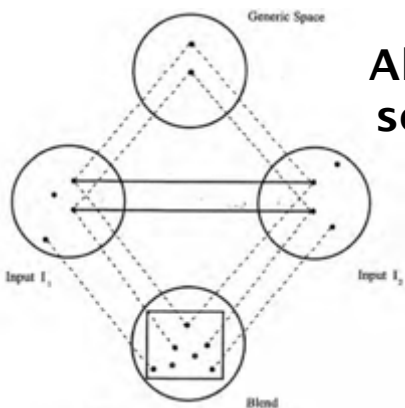
F. C. Pereira, *Creativity and Artificial Intelligence - A Conceptual Blending Approach*, 2007

Du blending conceptuel au blending *structurel*

- Joseph Goguen, « A Categorical Manifesto », *Math. Structures in Computer Science*, 1991.
- J. Goguen, « An Introduction to Algebraic Semiotics, with Applications to User Interface Design », 1999
- J. Goguen, « What is a Concept? », *International Conference on Comp. Science*, 2005
- J. Goguen and D. F. Harrell, « Style: A Computational and Conceptual Blending-Based Approach », in S. Dubnov et al. (ed.), *The Structure of Style*, 2009.

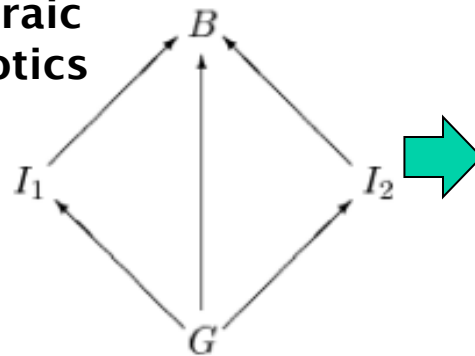


The **category of sign systems** with **semiotic morphisms** has some additional structure over that of a category: it is an **ordered category**, because of the orderings by quality of representation that can be put on its morphisms. This extra structure gives a richer framework for considering **blends**; I believe this approach captures what Fauconnier and Turner have called « emergent » structure, without needing any other machinery. [Goguen, 1999, p. 32]

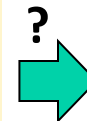
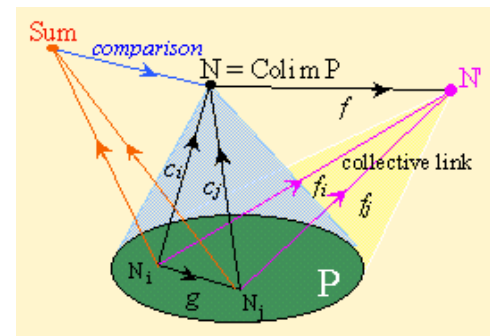


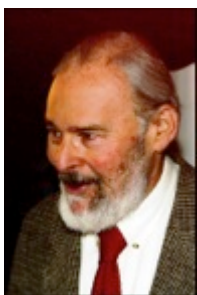
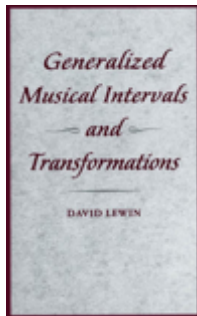
conceptuall blending

**Algebraic
semiotics**



structural blending





Système d'Intervalles Généralisés - Système Généralisé d'Intervalles David Lewin's *Generalized Interval System* [GMIT, 1987]

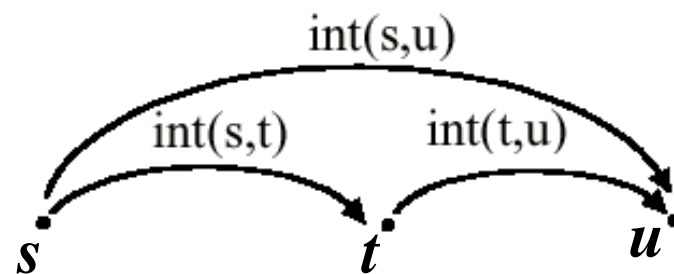
$$\text{GIS} = (S, G, \text{int})$$

S = ensemble

$(G, \bullet)$ = groupe d'intervalles

int = fonction intervallique

$$S \times S \xrightarrow{\text{int}} G$$

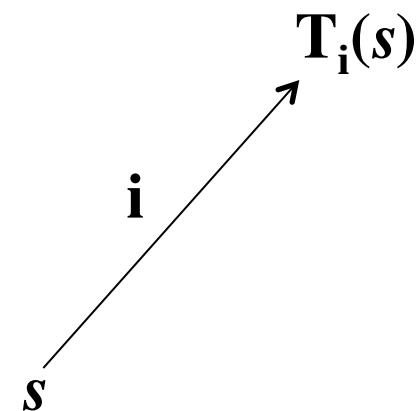


Action
simplement
transitive

1. Pour tous objets s, t, u dans S :

$$\text{int}(s, t) \bullet \text{int}(t, u) = \text{int}(s, u)$$

2. Pour tout objet s dans S et tout intervalle i dans G il y a un seul objet t dans S tel que
 $\text{int}(s, t) = i$



Soit $\tau = \{T_i ; i \in G\}$ le groupe des transpositions

$$\text{GIS} = (S, G, \text{int}) \Leftrightarrow \tau \times S \rightarrow S \text{ telle que } (T_i, s) \rightarrow T_i(s)$$

MAMUPHI

➔ Extension de la théorie transformationnelle aux groupoïdes et aux actions générales de groupoïdes (thèse de John Mandereau, 2011-2013)



➔ 6/10/2007

➔ 4/2/2012

➔ 2/2/2013

Les K-nets : des graphes orientés + isographies

D. Lewin, A Tutorial on K-nets using the Chorale in Schoenberg's Op.11, N°2, JMT, 1994



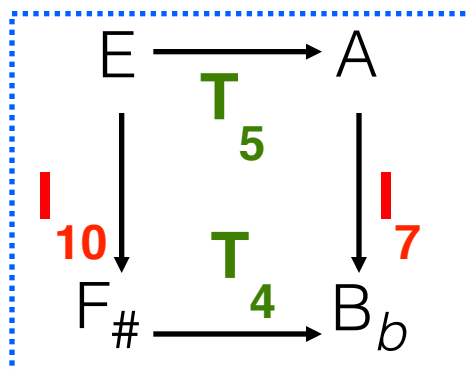
D. Lewin



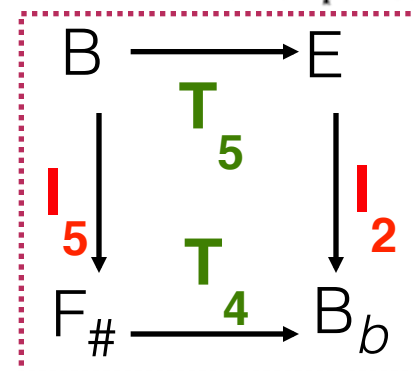
H. Klumpenhouwer

$$\langle T_k \rangle : T_m \rightarrow T_m$$

$$I_m \rightarrow I_{k+m}$$



$\langle T_7 \rangle$

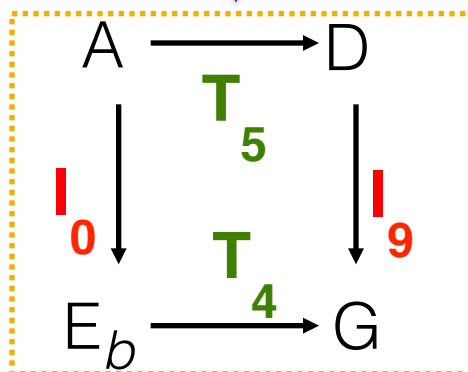


$\langle T_2 \rangle$

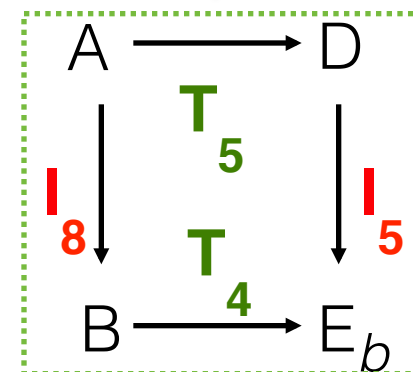
$\langle T_{10} \rangle$

$\langle T_3 \rangle$

$$\langle T_k \rangle \cdot \langle T_m \rangle = \langle T_{k+m} \rangle$$



$\langle T_8 \rangle$



Les K-nets : des graphes orientés + isographies

D. Lewin, A Tutorial on K-nets using the Chorale in Schoenberg's Op.11, N°2, JMT, 1994



D. Lewin



H. Klumpenhouwer

$$\langle T_k \rangle : T_m \rightarrow T_m$$

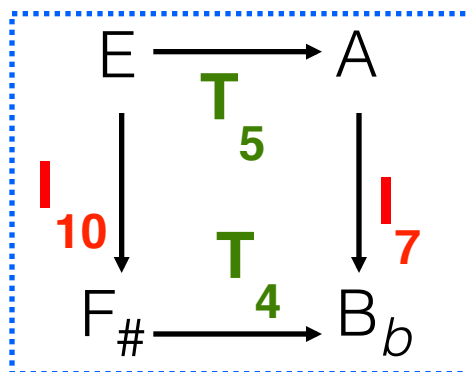
$$I_m \rightarrow I_{k+m}$$

$$\langle I_k \rangle : T_m \rightarrow T_{-m}$$

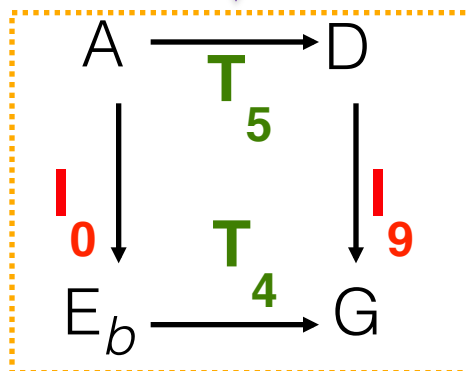
$$I_m \rightarrow I_{k-m}$$

$$\langle T_k \rangle \cdot \langle T_m \rangle = \langle T_{k+m} \rangle$$

$$\langle I_k \rangle \cdot \langle I_m \rangle = \langle T_{m-k} \rangle$$



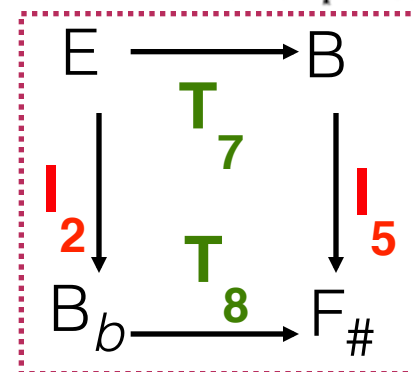
$\langle T_2 \rangle$



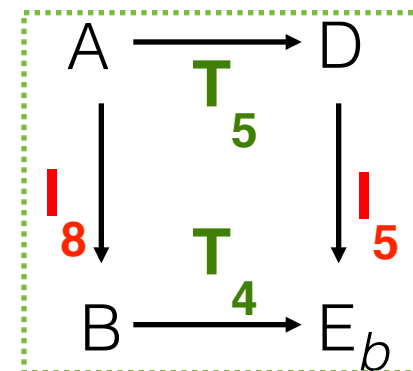
$\langle I_0 \rangle$

$\langle T_{10} \rangle$

$\langle T_8 \rangle$



$\langle I_{10} \rangle$



Les K-nets : des graphes orientés + isographies

D. Lewin, A Tutorial on K-nets using the Chorale in Schoenberg's Op.11, N°2, JMT, 1994



D. Lewin



H. Klumpenhouwer

$$\langle T_k \rangle : T_m \rightarrow T_m$$

$$I_m \rightarrow I_{k+m}$$

$$\langle I_k \rangle : T_m \rightarrow T_{-m}$$

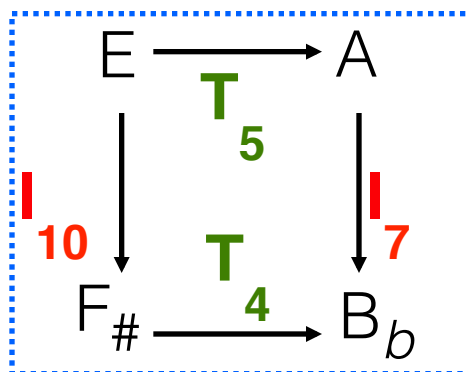
$$I_m \rightarrow I_{k-m}$$

$$\langle T_k \rangle \cdot \langle T_m \rangle = \langle T_{k+m} \rangle$$

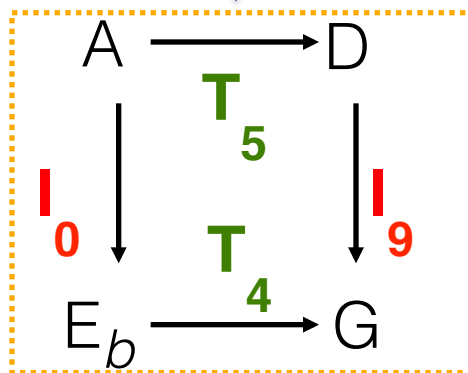
$$\langle T_k \rangle \cdot \langle I_m \rangle = \langle I_{m-k} \rangle$$

$$\langle I_m \rangle \cdot \langle T_k \rangle = \langle I_{k+m} \rangle$$

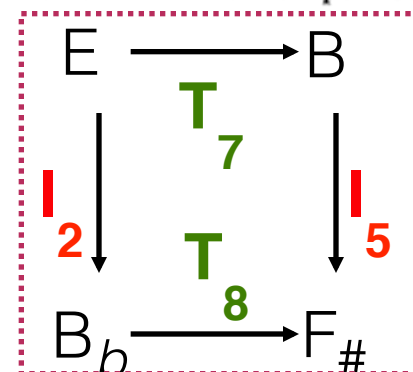
$$\langle I_k \rangle \cdot \langle I_m \rangle = \langle T_{m-k} \rangle$$



$\langle T_2 \rangle$

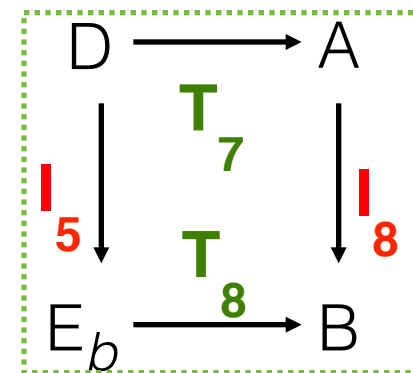


$\langle I_0 \rangle$



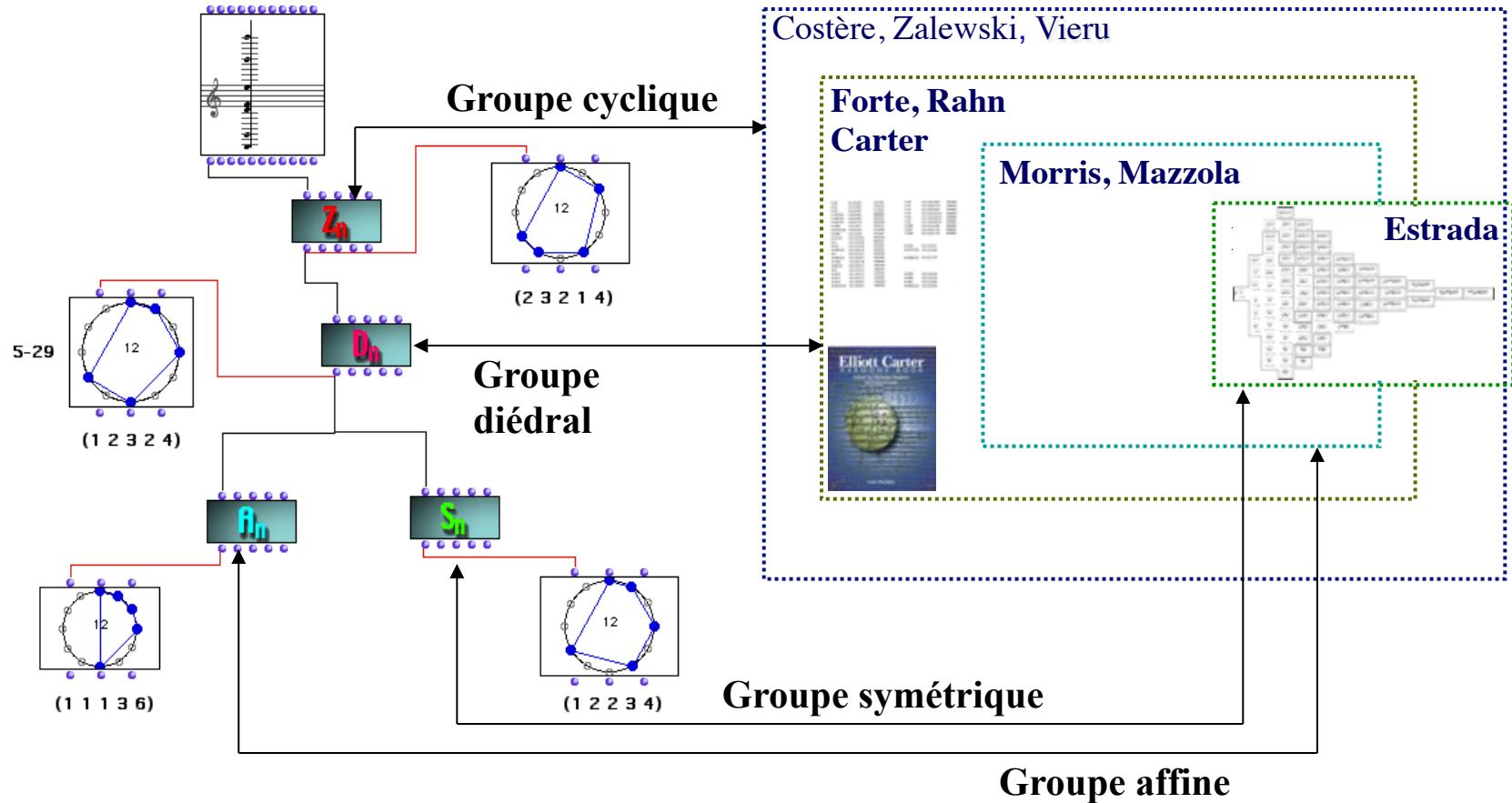
$\langle I_3 \rangle$

$\langle T_3 \rangle$

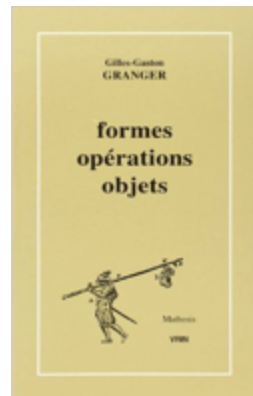


$\langle I_5 \rangle$

Dualité objectale/opératoire et approche paradigmatique

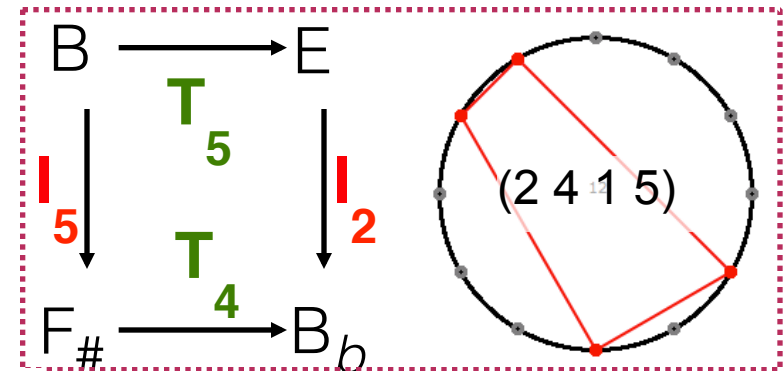
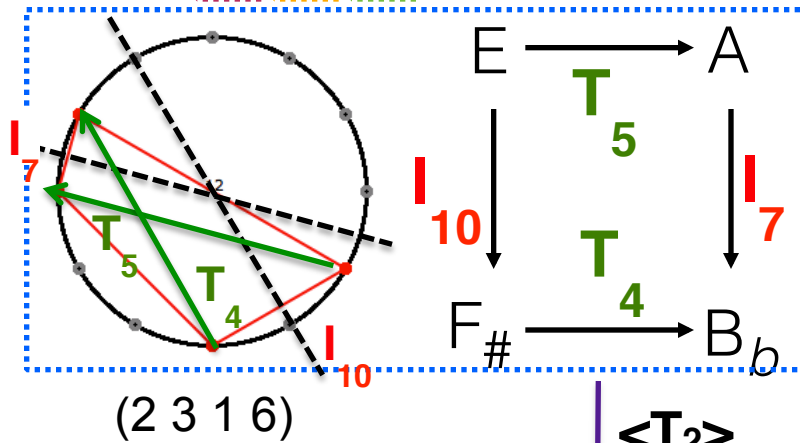
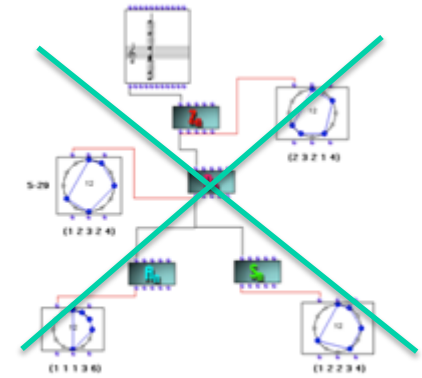


« [C'est la **notion de groupe** qui] donne un sens précis à l'idée de **structure** d'un ensemble [et] permet de déterminer les éléments efficaces des transformations en réduisant en quelque sorte à son **schéma opératoire** le domaine envisagé. [...] L'objet véritable de la science est le **système des relations** et non pas les termes supposés qu'il relie. [...] Intégrer les résultats - symbolisés - d'une expérience nouvelle revient [...] à créer un canevas nouveau, un **groupe de transformations** plus complexe et plus compréhensif » (G.-G. Granger : « Pygmalion. Réflexions sur la pensée formelle », 1947)

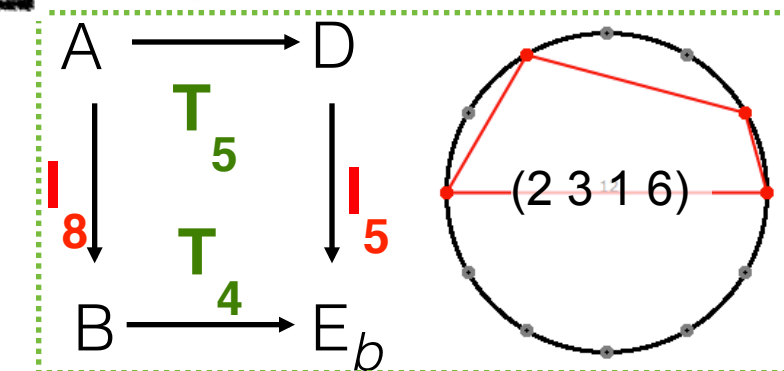
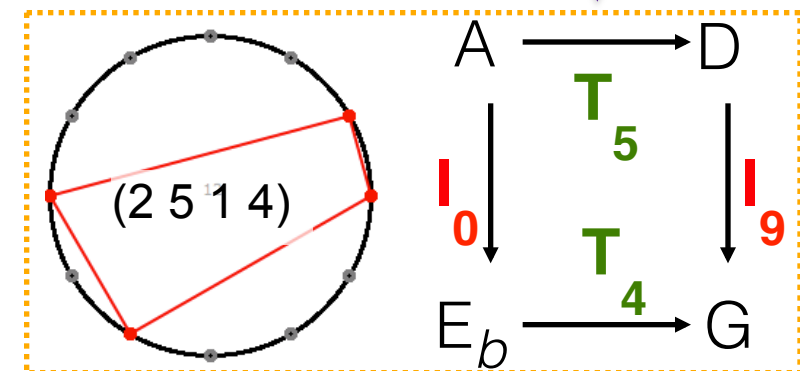


Approches transformationnelles vs approches paradigmatiques

D. Lewin, A Tutorial on K-nets using the Chorale in Schoenberg's Op.11, N°2, JMT, 1994



$$\langle T_k \rangle : T_m \rightarrow T_m \\ I_m \rightarrow I_{k+m}$$



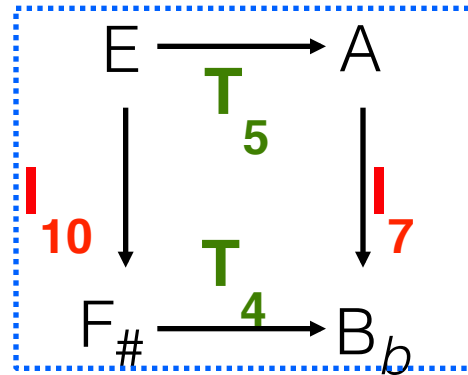
Premières généralisations via les isographies affines

$$\langle M_{5,k} \rangle : T_m \rightarrow T_{5m}$$

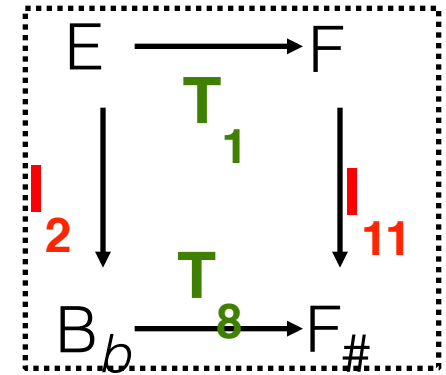
$$I_m \rightarrow I_{k+5m}$$

$$\langle M_{7,k} \rangle : T_m \rightarrow T_{7m}$$

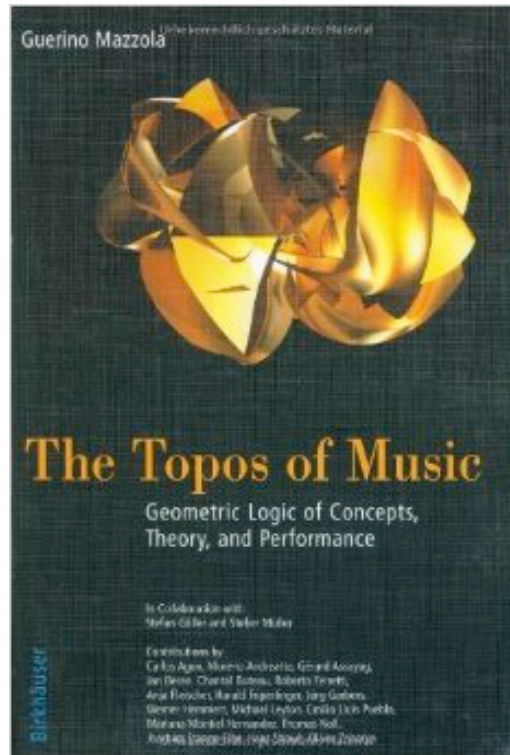
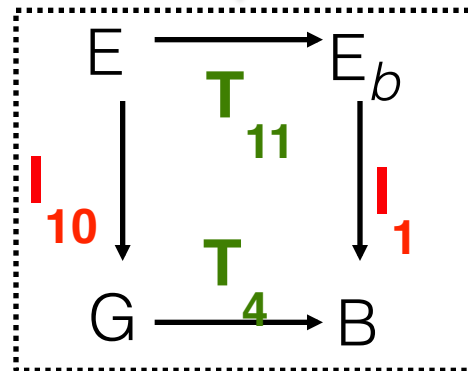
$$I_m \rightarrow I_{k+5m}$$



$\langle M_{5,0} \rangle$



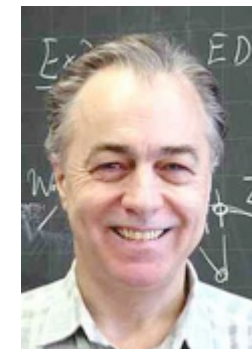
$\langle M_{7,0} \rangle$



D. Lewin

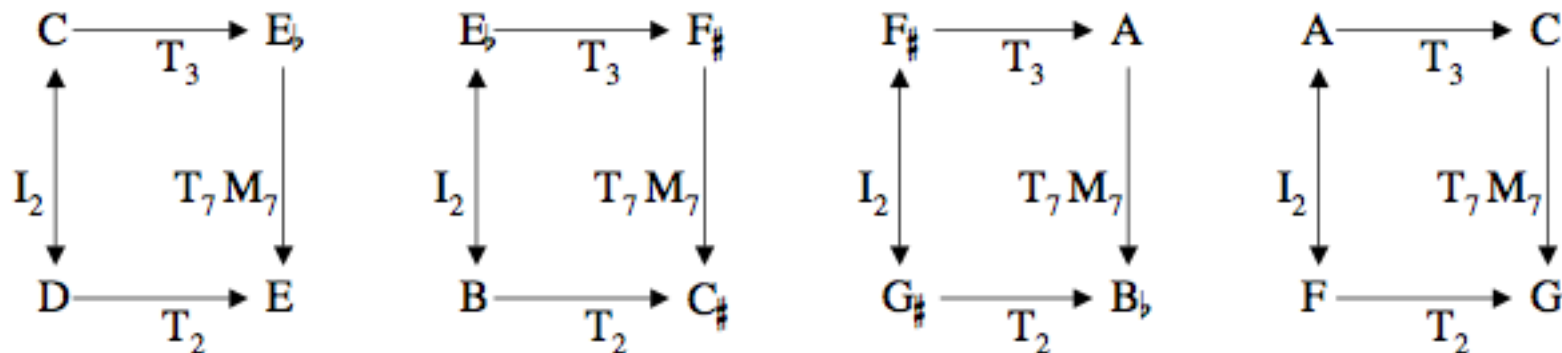
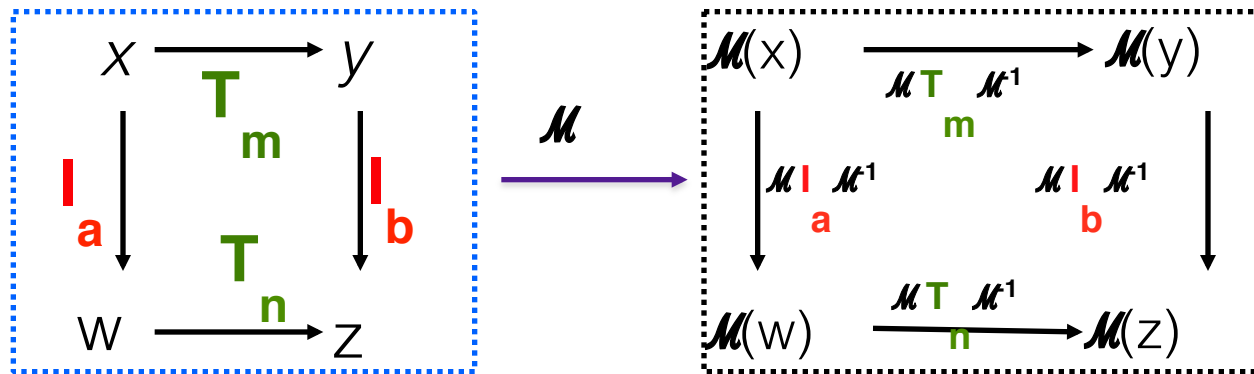


H. Klumpenhouwer



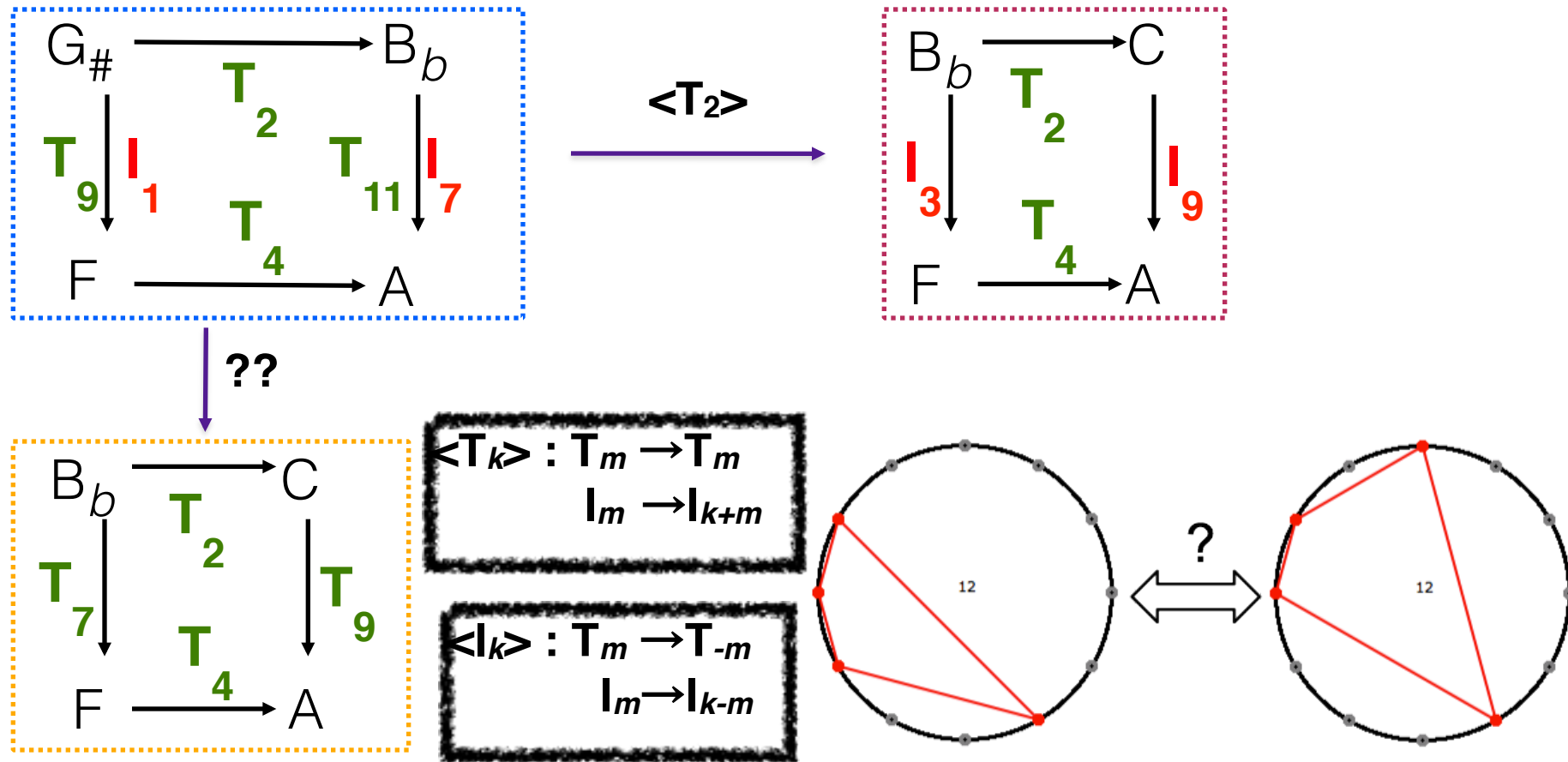
G. Mazzola

K-nets affines et énumération catégorielle



EXAMPLE 6: THE FOUR SOLUTIONS (STRONGLY ISOGRAPHIC K-NETS) OF THIS DIAGRAM ILLUSTRATE THAT THE CARDINALITY OF THE SOLUTION SET IS A DIVISOR OF 12. HERE, THE OPERATOR M_7 DENOTES THE MULTIPLICATION BY 7

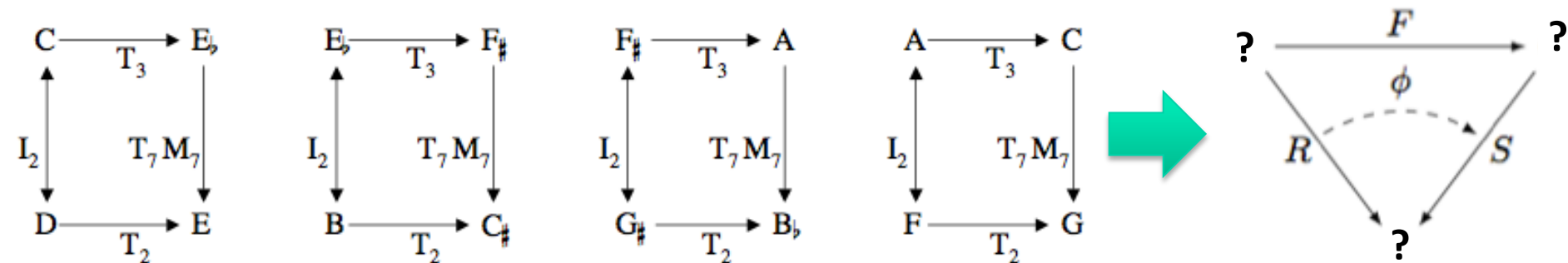
Un problème de cohérence : la dépendance du *labeling*



CONCLUSION

Il y a des K-nets qui ne sont pas toujours isographiques avec un K-net donné, i.e. les relations isographiques sont dépendantes du labeling des morphismes. Quelle définition permet de surmonter cette difficulté théorique ?

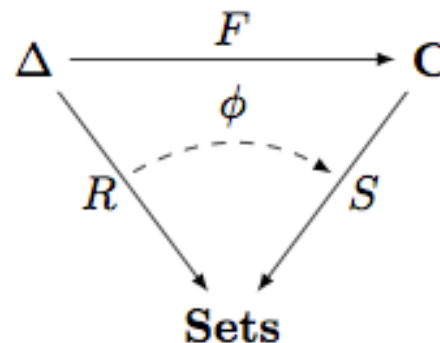
Des K-nets aux PK-Nets (Poly-K-nets)



Definition 1 Let $\mathbf{C}$ be a category, and S a functor from $\mathbf{C}$ to the category **Sets**. Let Δ be a small category and R a functor from Δ to **Sets**. A PK-net of form R and of support S is a 4-tuple (R, S, F, ϕ) , in which

- F is a functor from Δ to $\mathbf{C}$,
- and ϕ is a natural transformation from R to SF .

The definition of a PK-net is summed up by the following diagram:



Approche catégorielle à l'analyse transformationnelle (de **MA MUPHI** à MCM 2015)

Abstract

This article proposes a functorial framework for generalizing some constructions of **transformational theory**. We focus on **Klumpenhower Networks** for which we propose a categorical generalization via the concept of **set-valued poly-K-nets** (henceforth PK-nets). After explaining why K-nets are special cases of these category-based transformational networks, we provide several examples of the musical relevance of PK-nets as well as **morphisms** between them. We also show how to construct new PK-nets by using **some topos-theoretical constructions**.



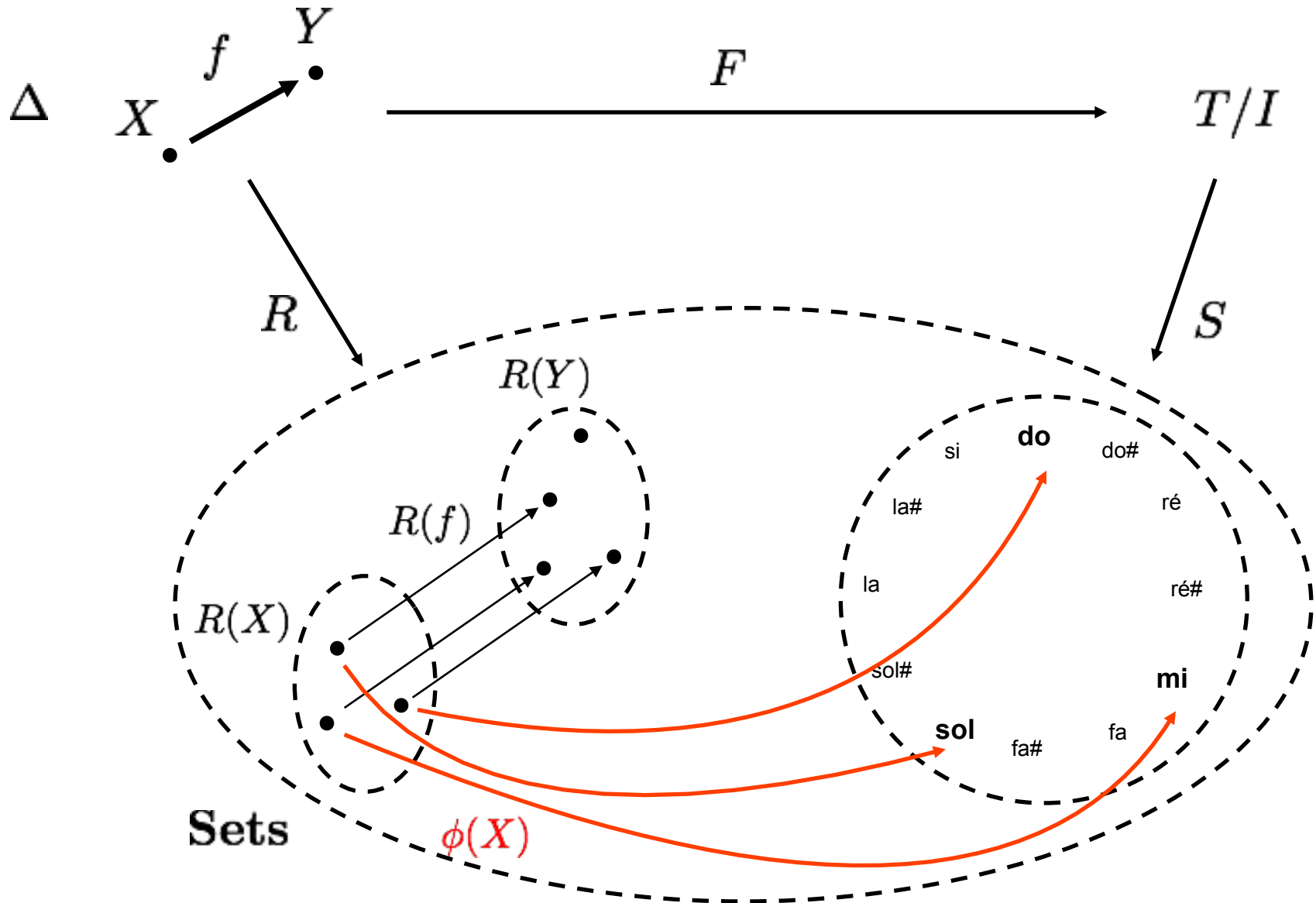
Popoff A., M. Andreatta, A. Ehresmann, (2015), « A Categorical Generalization of Klumpenhower Networks », Proceedings of the Conference MCM 2015, Queen Mary University, London, June 22-25, 2015. LNCS / LNAI, Springer, p. 303-314



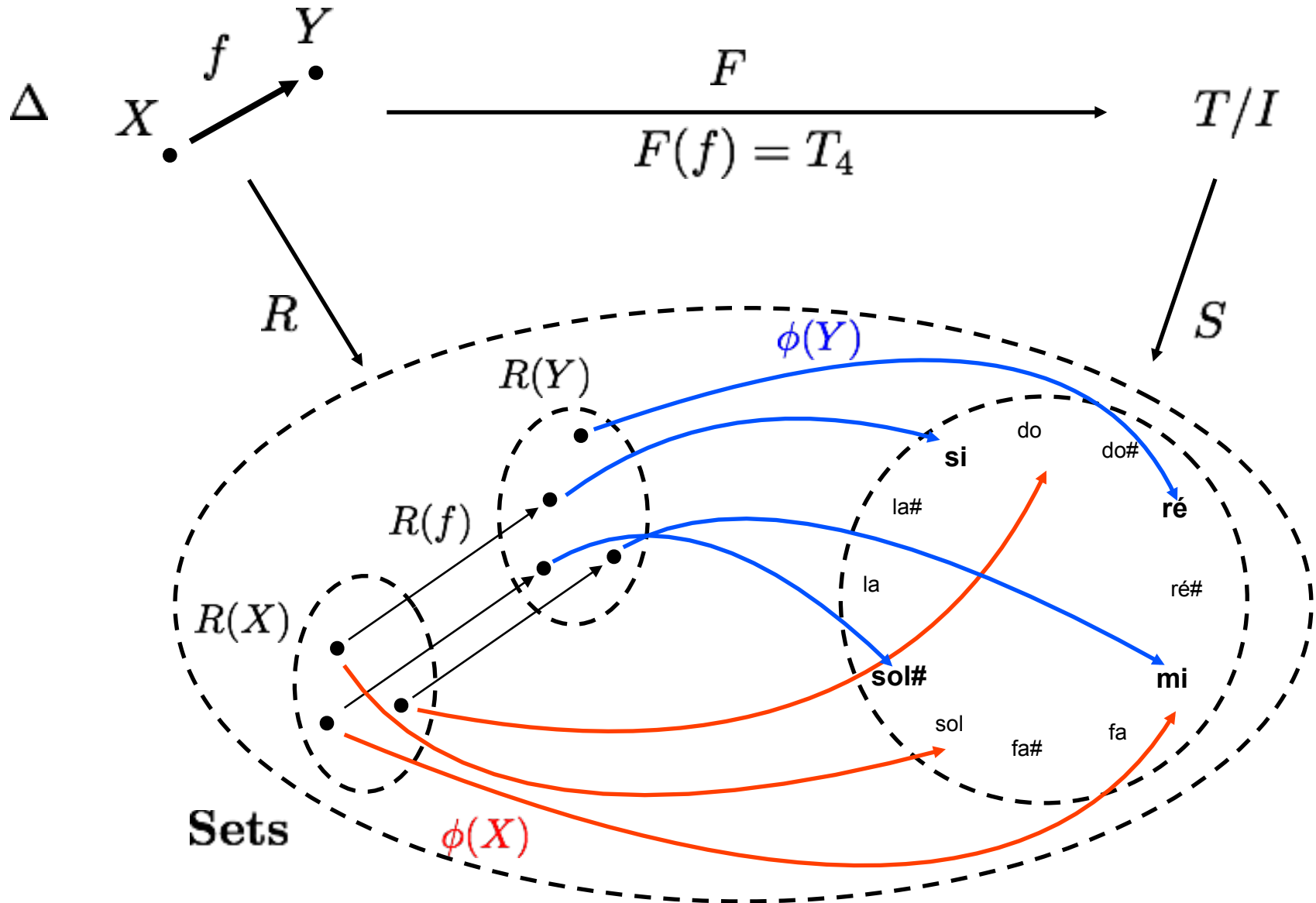
London
22-25 June 2015

Mathematics and Computation in Music

PK-nets sur des ensembles ayant cardinalité différente



PK-nets sur des ensembles ayant cardinalité différente



Morphismes de PK-Nets : dualité DIA/CHRO

Le morphisme de PK-Net suivant:

$$\mathbb{Z}_{12} = \langle t \mid t^{12} = 1 \rangle \xrightarrow[L(t^p) = q^{5p}]{L} \mathbb{Z}_{12} = \langle q \mid q^{12} = 1 \rangle$$

permet de
transformer un PK-Net
exprimé en
transpositions par demi-
tons en un PK-Net
exprimé en transpositions
par quarts

S

$$\lambda = id$$

S'

Sets

t^{10}

do

sib

q^2

« Le diatonisme et le chromatisme ne peuvent pas être envisagés en termes de simplicité ou de complexité, comme on le pensait jadis. Il s'agit plutôt d'une question d'unité des contraires dans le groupe $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ »



Anatol Vieru

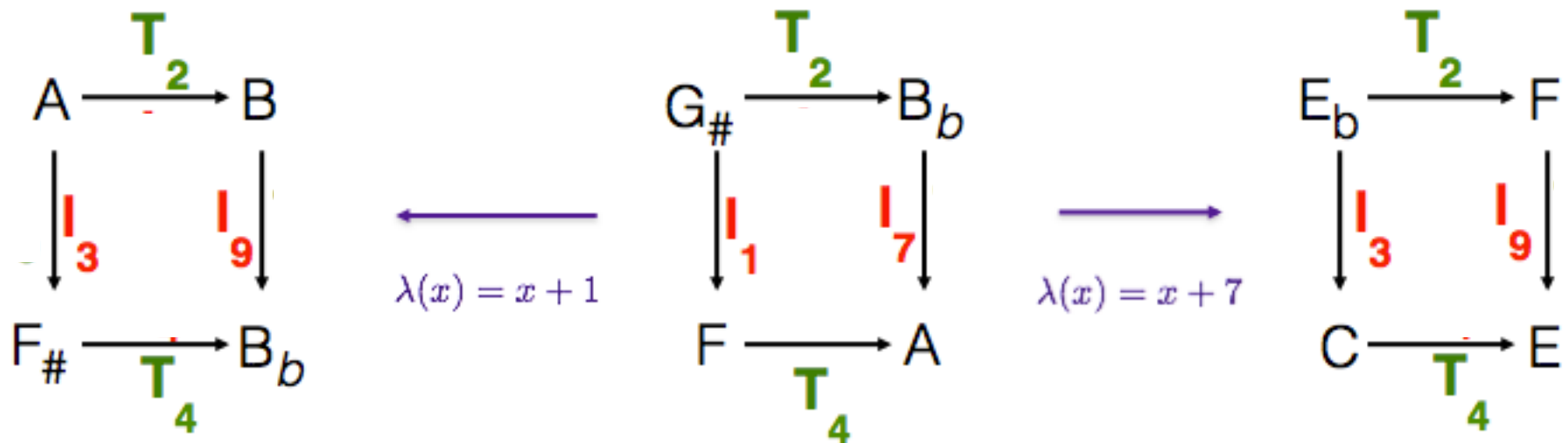


Isographies complètes

Application au groupe T/I , isomorphe à D_{24}

Soit L l'automorphisme de T/I qui envoie $T_p \rightarrow T_p$ et $I_p \rightarrow I_{p+2}$

On peut montrer qu'il existe deux transformations naturelles $\lambda: S \rightarrow SL$

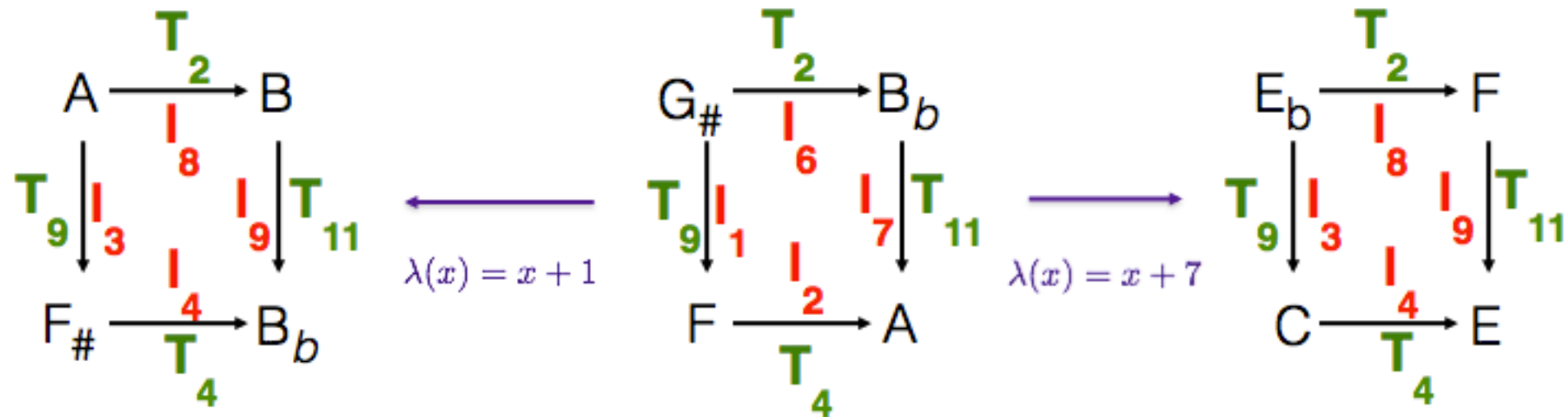


Isographies complètes

Application au groupe T/I , isomorphe à D_{24}

Soit L l'automorphisme de T/I qui envoie $T_p \rightarrow T_p$ et $I_p \rightarrow I_{p+2}$

On peut montrer qu'il existe deux transformations naturelles $\lambda: S \rightarrow SL$

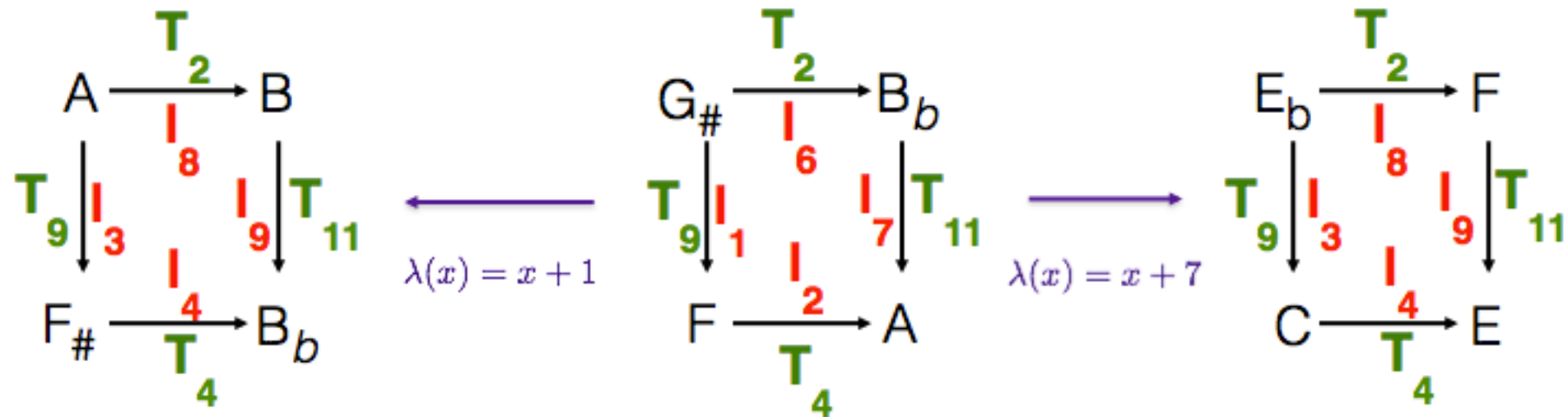


Isographies complètes

Application au groupe T/I , isomorphe à D_{24}

Soit L l'automorphisme de T/I qui envoie $T_p \rightarrow T_p$ et $I_p \rightarrow I_{p+2}$

On peut montrer qu'il existe deux transformations naturelles $\lambda: S \rightarrow SL$



➔ Vers une théorie générale des morphismes de PK-nets (via les [homographies](#))

