[Version 16 septembre 2013]

Math'n pop : symétries et cycles hamiltoniens en chanson

Moreno Andreatta
Ircam/CNRS/UPMC

Qu'ont-ils en commun une chanson de Paolo Conte, telle *Madeleine,* la pièce *Easy Meat* de l'inclassable Frank Zappa et le morceau *Shake the Disease*, tube des années 1980 du groupe pop Depeche Mode ? Bien qu'évidemment très lointaines d'un point de vue stylistique, ces pièces partagent en réalité une même préoccupation en ce qui concerne l'organisation harmonique ou, plus exactement, la façon avec laquelle les accords consonants majeurs et mineurs se déploient dans l'espace tonal. Pour mettre en évidence ces similitudes, nous allons nous appuyer sur une représentation géométrique des accords, dont les origines lointaines remontent à Euler. En effet c'est dans la deuxième moitié du XVIIIe siècle que le mathématicien et théoricien de la musique suisse propose de considérer les notes et les tonalités comme des points d'un espace bidimensionnel, une représentation géométrique qu'il appelle le « speculum musicum ». En opposition à la représentation circulaire, introduite par Marin Mersenne plus d'un siècle auparavant, Euler considère l'espace tonal comme engendré par deux axes représentant les intervalles à partir desquels tout intervalle peut être calculé. Nous saurions par la suite, grâce au développement de la théorie des groupes et, notamment, au théorème de décomposition de Sylow, que les deux représentations sont *de facto* équivalentes, le groupe cyclique d'ordre 12, c'est-à-dire le cercle, étant isomorphe au tore en tant que produit des sous-groupes d'ordre 3 et 4 respectivement (voir fig. 1).

[insérer Fig 1]

Les lecteurs « aficionados » de *Tangente* ayant déjà une certaine familiarité avec la représentations circulaire des structures musicales (voir le HS n°11, Maths & musique. Des destinées parallèles…), nous allons utiliser surtout le deuxième type d'espace géométrique, auquel le cercle sera souvent associé afin de montrer comment ces deux espaces de hauteurs permettent de capturer de façon naturelle les propriétés de symétrie de certaines successions harmoniques. Pour s'en rendre compte, commençons par analyser le refrain de *Shake the Disease* du groupe Depeche Mode à l'aide des deux représentations géométriques (fig. 2).

[insérer Fig. 2]

Ce refrain est constitué de quatre accords qui se répètent cycliquement en déployant de multiples symétries. Une première transformation, en rouge, est celle reliant deux accords (Ré mineur et Fa mineur) ayant en commun une note (le *fa*). Une transformation similaire est celle, en bleu, reliant les deux accords majeurs (Réb majeur et Sib majeur) ayant la même note *fa* en commun. La transformation verte, ainsi que celle permettant de clore le cycle, est de nature différente car elle change la nature de l'accord (d'un accord mineur à un accord majeur, ou d'un accord majeur au premier accord mineur de la séquence harmonique). Dans les deux cas, l'accord et son transformé ont deux notes en commun et la troisième note est transformée dans sa symétrique par rapport à un axe de réflexion correspondant à l'un des diamètres du cercle). Cette symétrie, reliant les accords de Fa mineur et Réb majeur (ainsi que Sib majeur et Ré mineur), est l'une des trois transformations permettant de passer d'un accord majeur à un accord mineur (ou vice-versa) tout en gardant deux notes inchangées. Dans la tradition analytique américaine, inspirée des travaux de Riemann (le musicologue), ces trois transformations s'appellent le « parallèle » (opérateur indiqué par P), le « relatif » (R) et le « leading tone » (L). Elles sont déployées dans une portion du *Tonnetz* et représentées en Fig. 3.

[insérer Fig. 3]

On peut montrer que le groupe « néo-riemannien » engendré par ces transformations opère sur l'espace des triades consonantes de façon simplement transitive. De plus, cette action est en rapport de « dualité » avec celle du groupe diédral qui opère, lui aussi, de façon simplement transitive sur le même espace d'accords consonants.

Une progression harmonique nettement plus complexe est celle utilisée par Frank Zappa dans la partie instrumentale de la pièce *Easy Meat*. Il s'agit d'une progression qui comporte seize accords au total et qui peut se décomposer comme une répétition d'une même cellule de quatre accords. Chaque cellule déploie ainsi la même succession de transformations néo-riemanniennes, dont on lassera comme exercice au lecteur le soin d'en établir l'expression comme produit des transformations de base P, R et L. Les quatre parcours dans le *Tonnetz* sont indiqués en fig. 4.

[insérer Fig. 4]

On a la même impression de forte ressemblance entre des blocks d'accords à l'écoute de certaines chansons de Paolo Conte. C'est sans doute le cas de *Madeleine*, une chanson dans laquelle la progression harmonique de l'introduction, répétée plusieurs fois tout au long de la chanson, est également composée de quatre bloque de quatre accords chacun.
Les trois premiers blocks sont la répétition, transposée d'un intervalle de trois demi-tons (T_3), de la même progression d'accords. Le dernier block, constitué de cinq accords, déploie des nouvelles trajectoires dans l'espace jusqu'à l'accord final permettant de boucler la boucle et revenir ainsi à l'accord de départ. La suite complète d'accords est donnée en fig. 5.

[insérer Fig. 5]

En regardant, ou plutôt en écoutant, plus attentivement la progression harmonique à la base de la *Madeleine*, on s'aperçoit d'une deuxième propriété remarquable de cette progression, à savoir celle de réaliser un *recouvrement* de l'espace chromatique avec douze transpositions d'une même triade consonante. Autrement dit, dans l'espace potentiel des douze accords majeurs, le musicien a trouvé un chemin harmonique lui permettant de passer une fois et une fois seulement pour chaque accord. C'est un premier exemple d'utilisation, probablement intuitive, d'une propriété d'hamiltonicité, propriété que nous allons expliciter en utilisant le *Tonnetz* comme espace et les opérateurs P, L et R comme symétries. En effet, comme nous l'avons montré, le *Tonnetz* est beaucoup plus riche car des symétries permettent de lier, de multiples façons, un accord majeur avec des accords mineurs ayant avec l'accord de départ deux notes en commun. Quel serait l'équivalent de la propriété que nous avons observée dans la chanson de Paolo Conte mais dans l'espace potentiel des vingt-quatre accords majeurs et mineurs ? Une telle démarche, que l'on qualifiera d'oumupienne et même d'oumu*pop*ienne, pour souligner le caractère « pop » des réalisations musicales, nous a permis de réaliser *Aprile,* une véritable « chanson hamiltonienne » sur un texte du poète italien décadent Gabriele D'Annunzio (1863-1938).

Aprile
(d'après Gabriele D'Annunzio)

Socchiusa è la finestra, sul giardino.	La fenêtre est entr'ouverte, sur le jardin.
Un'ora passa lenta, sonnolenta.	Une heure passe, lente, somnolente.
Ed ella, ch'era attenta, s'addormenta	Et elle, d'abord attentive, finit par s'endormir
a quella voce che già si lamenta,	A cette voix qui là-bas se lamente,
- che si lamenta in fondo a quel giardino.	Qui se lamente au fond de ce jardin.

[premier cycle hamiltonien]

Non è che voce d'acque su la pietra:	Ce n'est qu'une voix d'eau sur la pierre,
e quante volte, quante volte udita!	Et combien de fois, combien de fois entendue !
Quell'amore e quell'ora in quella vita	Cet amour et cette heure s'abîment dans cette vie
s'affondan come ne l'onda infinita	Comme s'abîment dans l'onde sans fin
stretti insieme il cadavere e la pietra.	Le cadavre et la pierre liés ensemble.

[deuxième cycle hamiltonien]

Ella stende l'angoscia sua nel sonno.	Elle détend son angoisse dans le sommeil.
L'angoscia è forte, e il sonno è così lieve!	Mais l'angoisse est forte, et le sommeil est si léger !
(Par la luce d'april quasi una neve	(La lumière d'avril ressemble presque à une neige
che sia tiepida.)	qui serait tiède.)
Ed ella certo deve soffrire,	Et certes elle doit souffrir,
vagamente, anche nel sonno.	Vaguement souffrir, aussi dans le sommeil.

[troisième cycle hamiltonien]

Comme indiqué dans le texte, la chanson utilise, dans les parties instrumentales uniquement, trois cycles hamiltoniens distincts dont le début est anticipé dans la suite d'accords utilisés dans la section introductive du morceau (Fig. 6).

[Insérer Fig. 6]

Le premier cycle hamiltonien est représenté en Fig. 7 en notation musicale traditionnelle et en indiquant le chemin à l'intérieur du *Tonnetz.*

[Insérer Fig. 7]

Les représentations géométriques du deuxième cycle hamiltonien (Fig. 8) ainsi que du cycle conclusif (Fig. 9) montrent clairement qu'il s'agit de chemins très différents, n'ayant en commun que les deux premiers accords.

[Insérer Fig. 8 et Fig. 9]

La figure suivante (Fig. 10) donne trois représentations géométriques alternatives du début du premier cycle hamiltonien utilisé dans *Aprile*, la première à l'aide de la simple représentation circulaire et les deux autres utilisant les visualisations proposées par Gilles Baroin dans son modèle Planet (en deux et quatre dimensions).

[Insérer Fig. 10]

Le caractère hamiltonien de tous ces trois cycles et le type de transformations géométriques utilisées, permettant de passer de façon « lisse » d'un accord à l'accord successif en gardant deux notes en commun, maintiennent l'auditeur dans une attente constante de l'accord qui va suivre. Au même temps, l'auditeur a l'impression d'une progression harmonique extrêmement « lisse », dans laquelle chaque accord est lié à l'accord suivant par ce qu'on appelle en jargon musical une « conduite parcimonieuse des voix » (*minimal voice leading*). Le lecteur pourra vérifier que les trois cycles hamiltoniens utilisés ne peuvent pas être décomposés en sous-cycles, ce qui leur donne une sorte de complexité maximale par rapport à d'autres cycles hamiltoniens qui constituent le catalogue, bien connu, de tous les cycles hamiltoniens possibles dans le *Tonnetz*. L'impression que plusieurs auditeurs ont à l'écoute de cette chanson est ainsi celle d'une variété harmonique maximale qui s'accompagne, cependant, à un sentiment de continuité dans la progression. Les maths, elles sont là, mais - à bien les écouter - elles ont peut-être fini par laisser la place à la musique (ce qui n'est pas non plus une mauvaise chose !)

Quelques références :

G. Albini et S. Antonini, « Hamiltonian Cycles in the Topological Dual of the Tonnetz », Proceedings of the Yale MCM Conference, Springer, LNCS, 2009.

Guy Capuzzo, « Neo-Riemannian Theory and the Analysis of Pop-Rock Music », *Music Theory Spectrum* 26(2), p. 177-199, 2004

L. Euler, « De harmoniae veris principiis per speculum musicum repraesentatis », in *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 18, 1774, p. 330-353.

Math & musique. Des destinées parallèles…, Tangente, HS n°11, Editions Pole (édition augmentée 2010).

Modèle *Planet* de Gilles Baroin
http://www.youtube.com/user/MatheMusic4D

Logiciel *Hexachord* de Louis Bigo
http://www.lacl.fr/~lbigo/recherche

Langage de programmation *OpenMusic*
http://repmus.ircam.fr/openmusic/home

Pour écouter la chanson *Aprile* (ainsi que d'autres expériences omoup(op)iennes)
http://repmus.ircam.fr/moreno/music

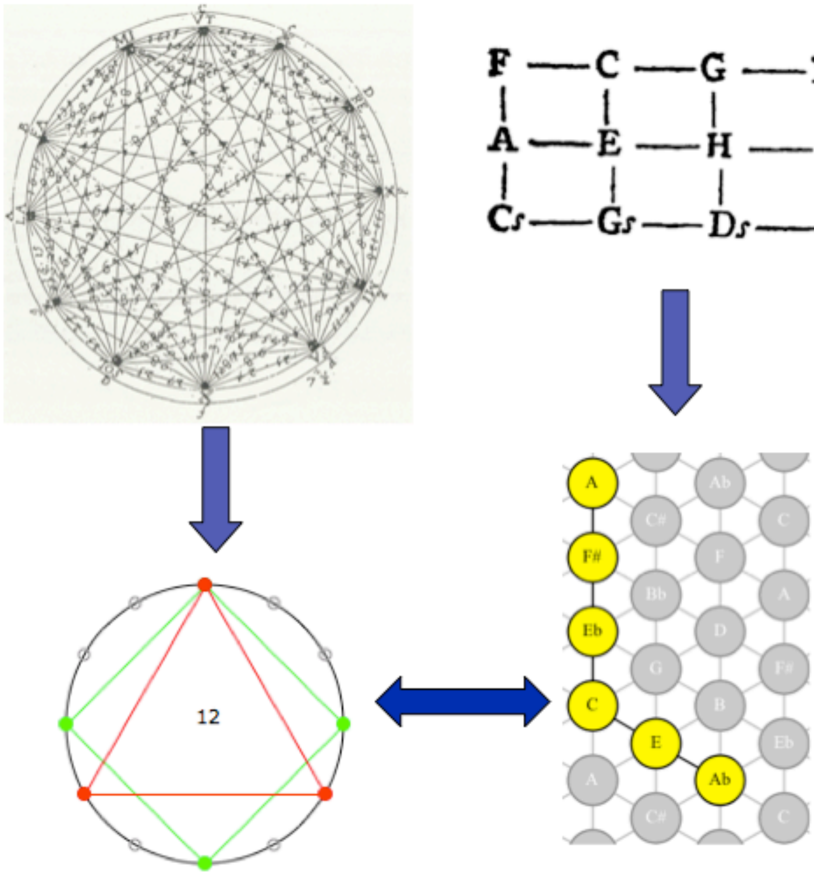

Fig. 1. Deux représentations équivalentes de l'ensemble des classes de hauteurs dans la division de l'octave en 12 parties égales : la représentation circulaire telle qu'on la retrouve chez Mersenne (à gauche) et le « speculum musicum » d'Euler, à l'origine du *Tonnetz* (à droite). Les représentations circulaires et le *Tonnetz* sont réalisées, respectivement, à l'aide de l'environnement de programmation *OpenMusic* et du logiciel *Hexachord*.

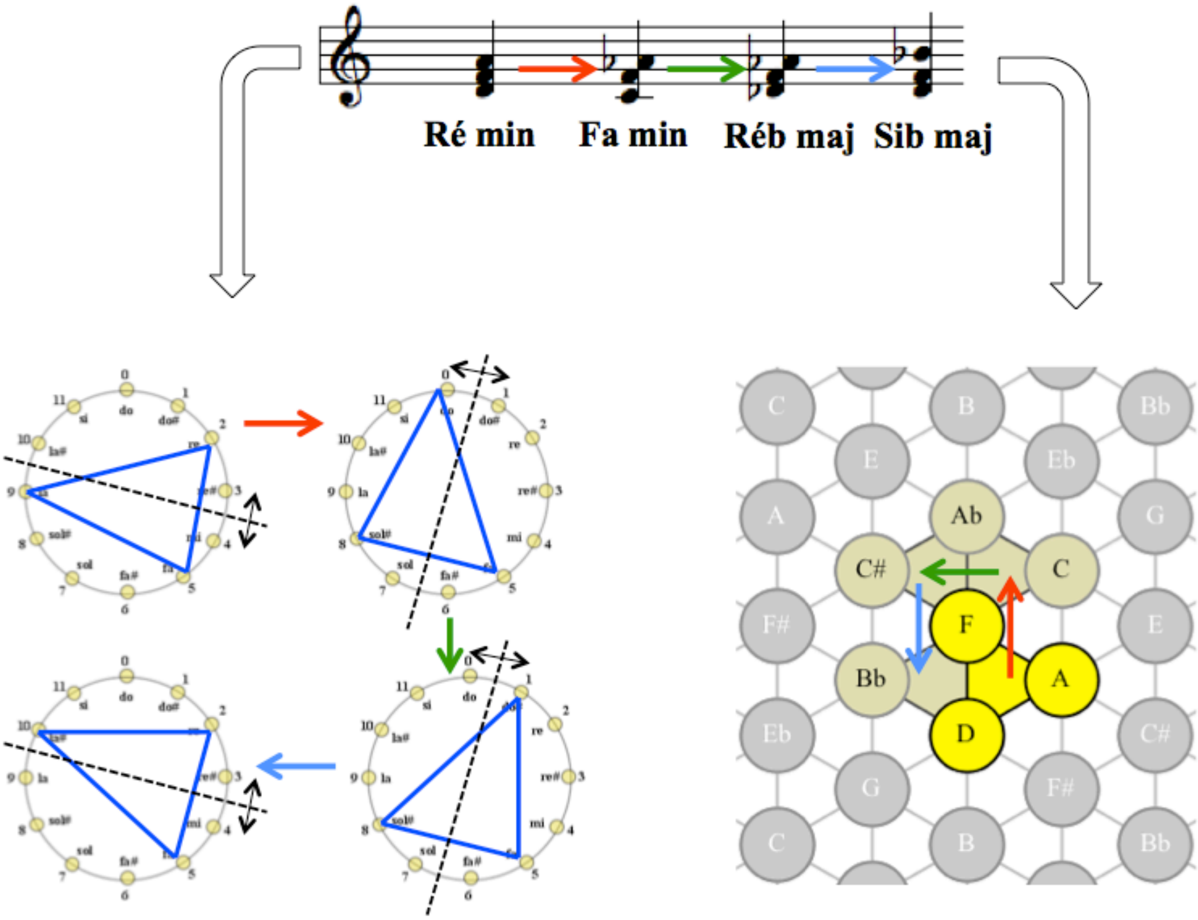

Fig. 2. Transformations géométriques à la base du refrain de *Shake the Disease* du groupe Depeche Mode. La progression harmonique, constituée de cinq accords, est formalisée à l'aide de la représentation circulaire (à gauche) et du *Tonnetz* (à droite). Dans les deux cas on voit apparaître clairement des symétries entre le premier et le dernier accord, ainsi qu'entre le deuxième et le troisième. Ces deux symétries miroir correspondent à la même transformation néo-riemannienne, appelée L (comme « leading tone »).

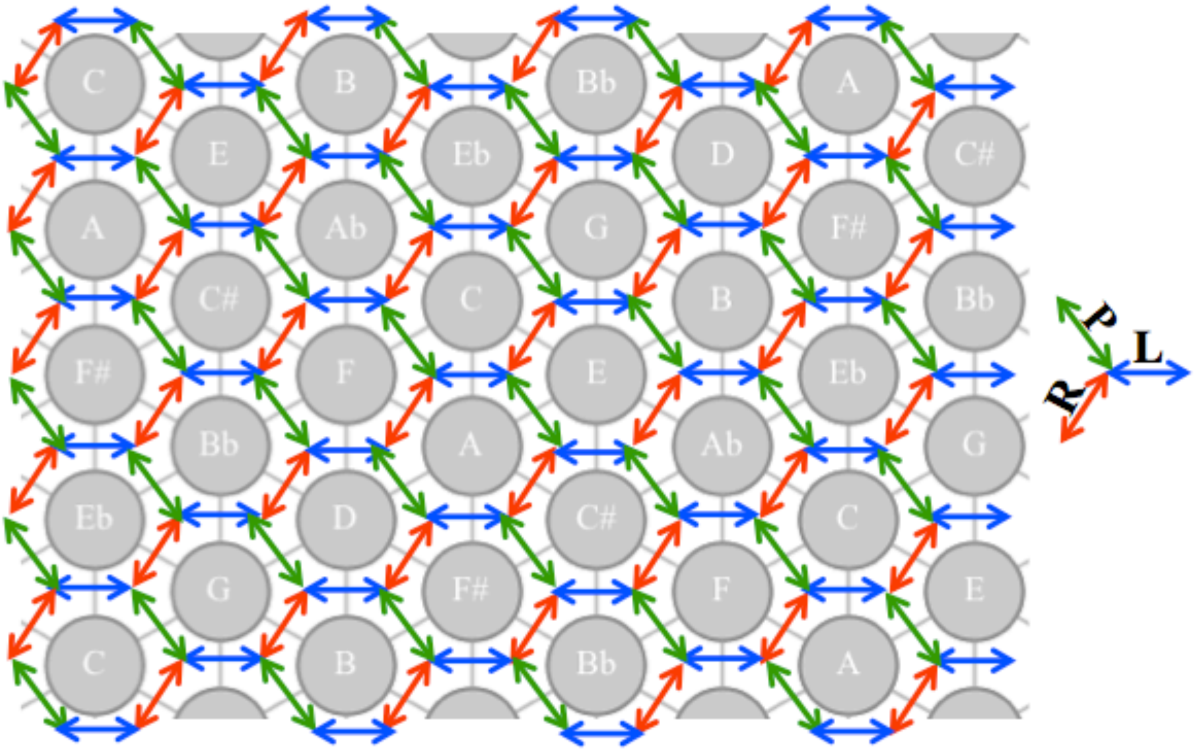

Fig. 3. Les trois transformations P (comme « parallèle »), R (comme « relatif ») et L (comme « leading tone ») permettant de passer d'une triade majeure à une triade mineure ayant avec l'accord de départ deux notes en commun.

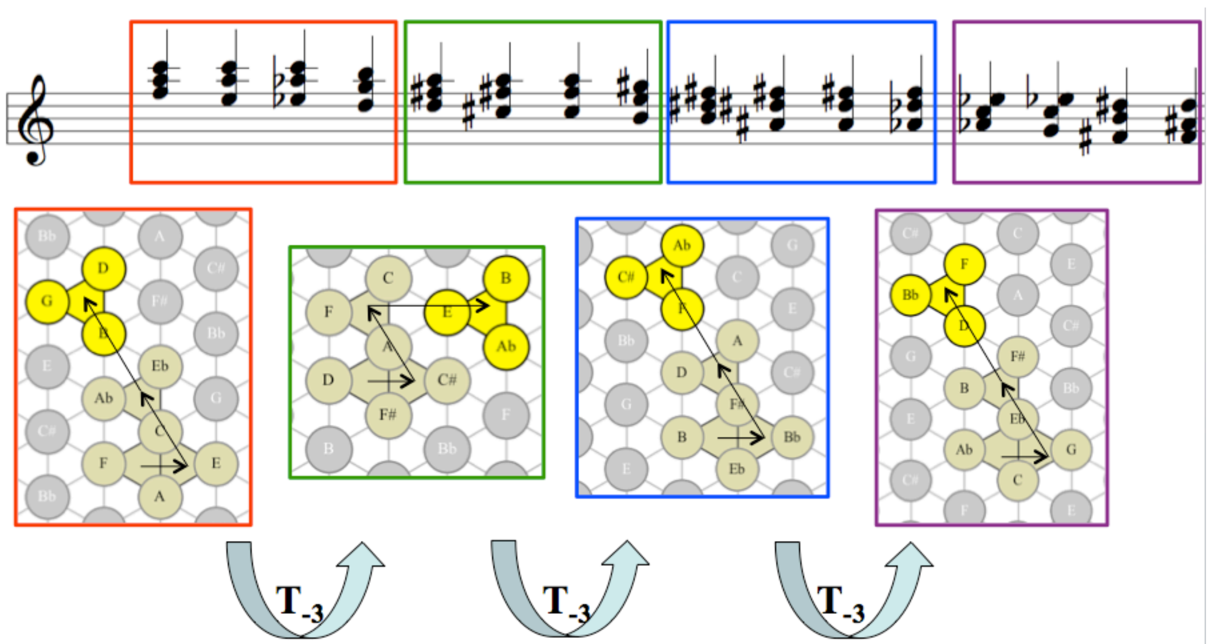

Fig. 4. Progression harmonique dans la pièce *Easy Meat* de Frank Zappa vue comme une série de transpositions (d'une tierce mineure descendante T_{-3}) d'une même cellule (en rouge). Les quatre cellules correspondent donc à la même trajectoire dans le *Tonnetz* (les différences n'étant qu'apparentes à cause de la structure toroïdale du *Tonnetz*).

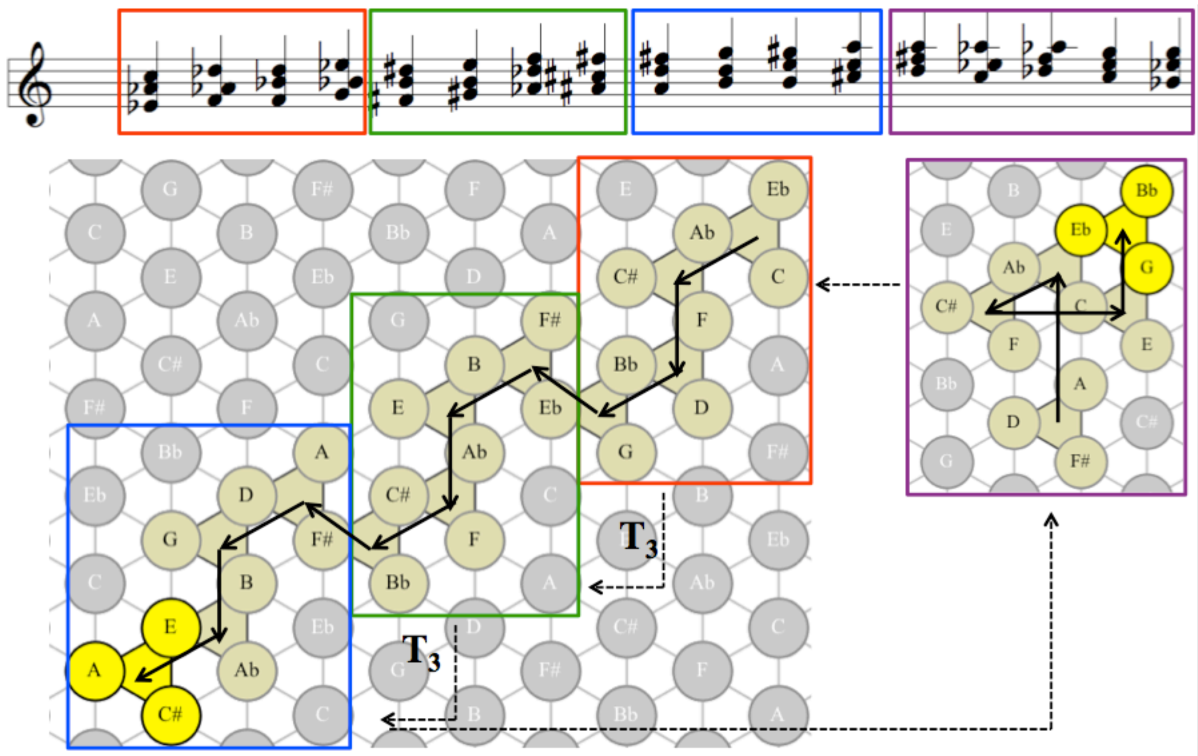

Fig.5. Progression harmonique à la base de la chanson *Madeleine* de Paolo Conte vue comme une série de transpositions d'une tierce mineure ascendante (T_3) d'une même cellule de quatre accords (cellule en rouge). Las derniers cinq accords de la progression, correspondants à la cellule violet, déploient une trajectoire spatiale complètement différente, leur fonction étant celle de permettre un retour à la tonalité initiale.

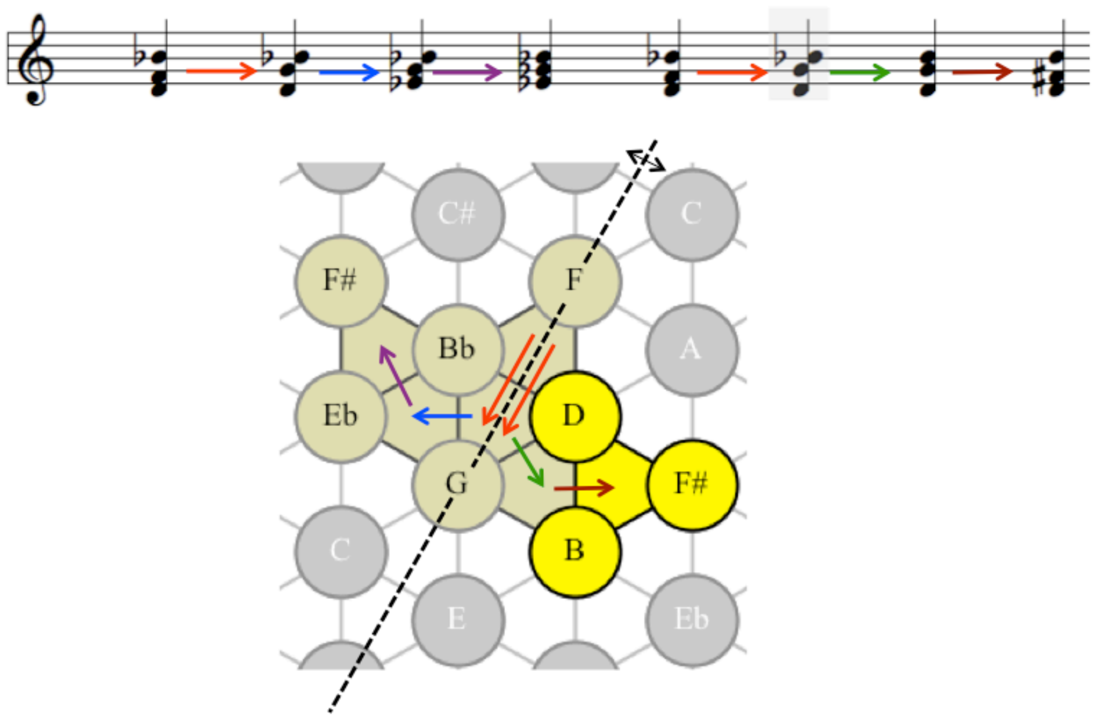

Fig. 6. Progression harmonique utilisée dans la section introductive du morceau *Aprile*, sur un texte du poète Gabriele D'Annunzio. Cette progression est composée de deux suites de cinq accords dont le jeu de symétries internes saute aux yeux dans le *Tonnetz*.

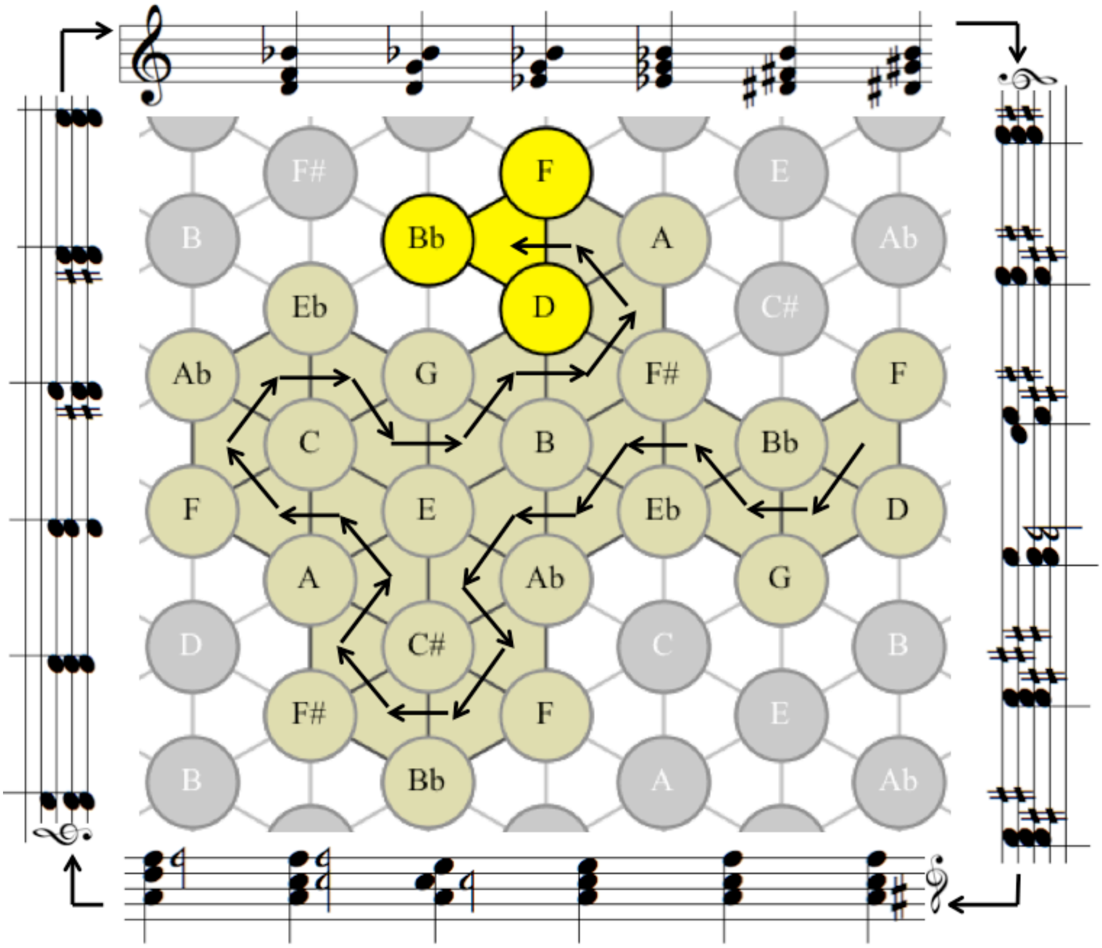

Fig. 7. Premier cycle hamiltonien utilisé dans la chanson *Aprile* en représentation musicale traditionnelle et en tant que chemin à l'intérieur du *Tonnetz*.

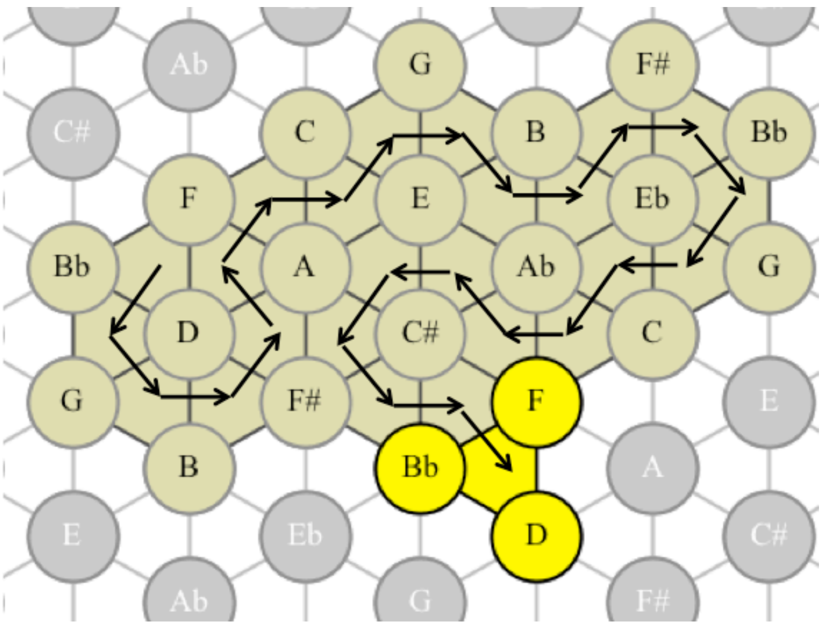

Fig. 8. Deuxième cycle hamiltonien d'*Aprile*.

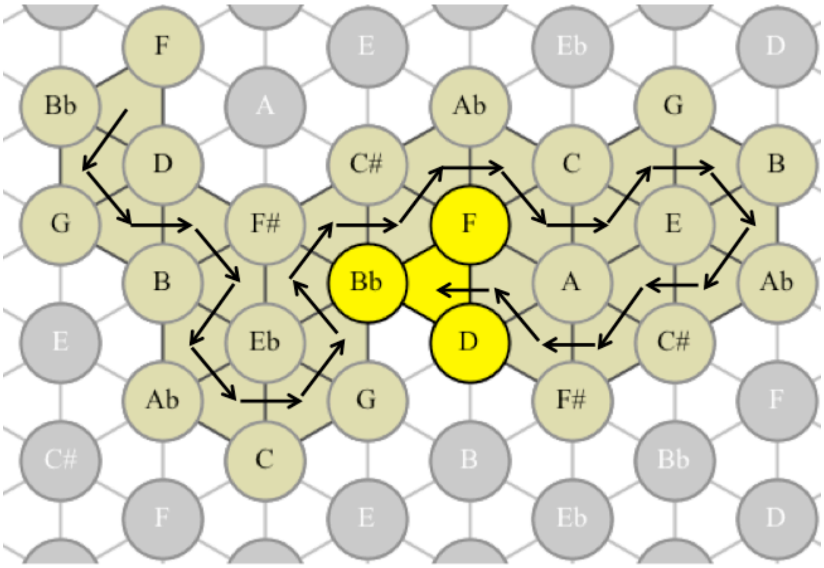

Fig. 9. Troisième et dernier cycle hamiltonien utilisé dans la coda instrumentale de la chanson *Aprile*.

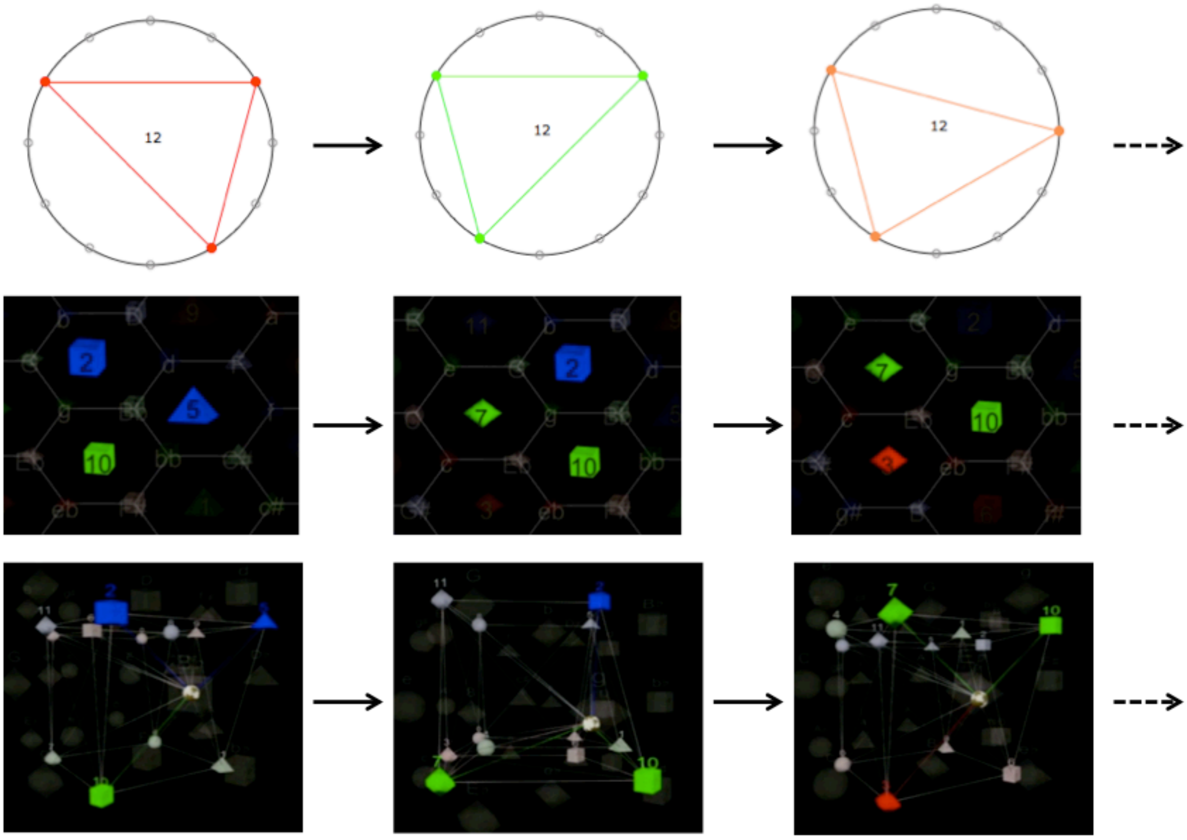

Fig. 10. trois représentations géométriques alternatives du début du premier cycle hamiltonien utilisé dans *Aprile*, la première à l'aide de la simple représentation circulaire (en *Openmusic)* et les deux autres utilisant les visualisations proposées par Gilles Baroin dans son modèle Planet (respectivement en deux et quatre dimensions).