

Musique et mathématiques : destinées parallèles ou influences mutuelles ?



Rouen, CIX
12 novembre 2014

Moreno Andreatta

Equipe Représentations Musicales /
IRCAM/CNRS UMR 9912





Mathématiques

Musique

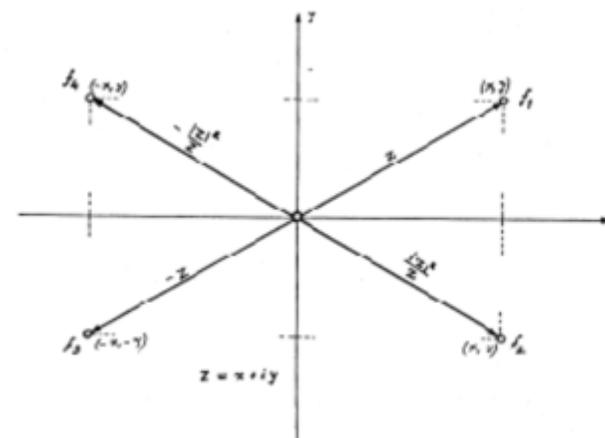
Iannis Xenakis,
« Le dépassement de soi »
(Mode Records, New York, 2015).
Avec le soutien de l'INA, MFA,
Grame de Strasbourg, CIX.

Musique et mathématiques : « prima la musica »!

MUSIQUE	MATHS
500 av. J. C. Relation hauteur/longueur corde. La musique est source d'inspiration pour la théorie des nombres et la géométrie.	Nombres naturels et rationnels.
<i>Pas de correspondance musicale.</i>	Nombres irrationnels, théorème de Pythagore.
300 a.J. Invention (théorique) de la gamme chromatique tempérée égale par Aristoxénos de Tarente) et prémonition de la théorie des groupes . Isomorphismes entre les logarithmes (intervalles musicaux) et les exponentiels (longueur d'une corde).	Les mathématiques ne réagissent pas.
1000 ap. J.C. Invention de la représentation bidimensionnelle des hauteurs.	<i>Aucune correspondance.</i>
1500 <i>Aucune reprise des concepts précédents.</i>	Nombres négatifs. Construction des rationnels.
1600 <i>Aucune relation.</i>	Nombres réels et les logarithmes. Invention des repères cartésiens.
1700 La fugue comme un automate abstrait. Manipulation inconsciente du groupe de Klein.	Nombres complexes (Euler, Gauss), les quaternions (Hamilton), continuité (Cauchy), structure de groupe (Galois, Abel).
1900 Libération de la prison de la tonalité (Loquin, Hauer, Schoenberg).	Nombres infinis et transfinis (Cantor). Axiomatique de Peano. Théorie de la mesure (Lebesgue, Borel).
1920 Formalisation radicale des macrostructures à travers le système sériel (Schoenberg).	<i>Aucun développement de la théorie des nombres.</i> Logique (contradictions de la théorie des ensembles).



Pythagore et le monochorde, VI^e-V^e siècle av. J. C.



Nombres complexes et groupe de Klein

La série et ses symétries

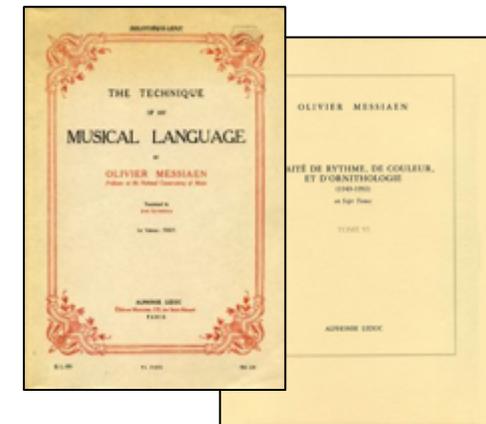
- *Musique. Architecture*, Casterman, 1971/1976
- *Arts/Sciences Alliages*, Casterman, 1979 (tr. *Arts/Sciences. Alloys*, Pendr. Press, 1985)
- « Les chemins de la composition musicale » (tr. Française E. Gresset, in *Musique et ordinateur*, Les Ulis, 1983)
- « Music Composition Treks », in *Composers and the Computer*, edited by C. Roads, MIT Press, Cambridge, Mass, 1985)

Autres développements de la musique (1930-1970)

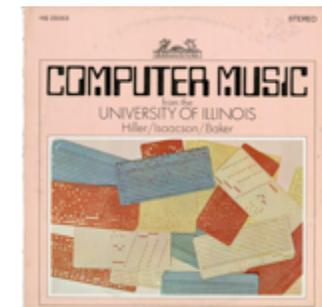
- **1930** Microtonalité, mais dans un esprit tonal (Wischnegradsky, Haba, Carrillo).
- **1950** Deuxième formalisation radicale des macrostructures (Messiaen).
- **1953** Introduction de l'échelle continue des hauteurs (Xenakis, avec calcul des probabilités, calcul logique et diverses structures de groupe).
- **1957** procédés stochastiques et chaînes de Markov (Hiller / Xenakis).
- **1960** Axiomatique des gammes à travers la théorie des cribles et utilisation nombres complexes dans la composition (théorie des arborescences).
- **1970** Nouvelles propositions dans la microstructure des sons (mouvements browniens).



L'orgue à 31 divisions de Fokker



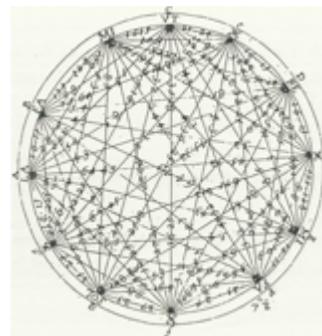
L. Hiller



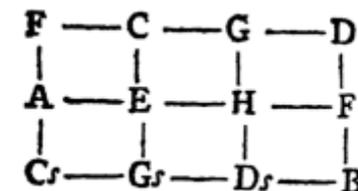
- *Musique. Architecture*, Casterman, 1971/1976
- *Arts/Sciences Alliages*, Casterman, 1979 (tr. *Arts/Sciences. Alloys*, Pendr. Press, 1985)
- « Les chemins de la composition musicale » (tr. Fr. E. Gresset, in *Musique et ordinateur*, Les Ulis, 1983)
- « Music Composition Treks », in *Composers and the Computer*, edited by C. Roads, MIT Press, Cambridge, Mass, 1985)

Musique et mathématiques : quelques oublis...

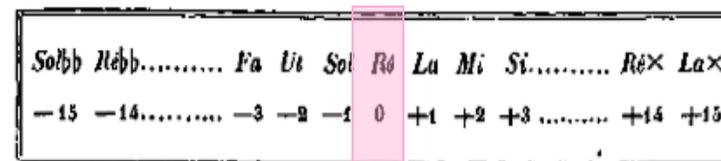
MUSIQUE	MATHS
500 av. J. C. Relation hauteur/longueur corde. La musique est source d'inspiration pour la théorie des nombres et la géométrie.	Nombres naturels et rationnels.
<i>Pas de correspondance musicale.</i>	Nombres irrationnels, théorème de Pythagore.
300 a.J. Invention (théorique) de la gamme chromatique tempérée égale par Aristoxénos de Tarente) et prémonition de la théorie des groupes . Isomorphismes entre les logarithmes (intervalles musicaux) et les exponentiels (longueur d'une corde).	Les mathématiques ne réagissent pas.
1000 ap. J.C. Invention de la représentation bidimensionnelle des hauteurs.	<i>Aucune correspondance.</i>
1500 <i>Aucune reprise des concepts précédents.</i>	Nombres négatifs. Construction des rationnels.
1600 <i>Aucune relation.</i>	Nombres réels et les logarithmes. Invention des repères cartésiens.
1648 Marin Mersenne : invention de la combinatoire musicale (<i>Harmonicorum Libri</i>)	Systématisation du calcul des probabilités par Bernoulli (<i>Ars Conjectandi</i> , 1713)
1700 La fugue comme un automate abstrait. Manipulation inconsciente du groupe de Klein.	Nombres complexes (Euler, Gauss), les quaternions (Hamilton), continuité (Cauchy), structure de groupe (Galois, Abel).
1773 Leonhard Euler : représentation géométrique des hauteurs (<i>Speculum Musicum</i>)	Invention de la théorie des graphes
1855 Camille Durutte : analyse harmonique, rythmique et mélodique	Développement en série d'une fonction (Wronski)
1900 Libération de la prison de la tonalité (Loquin, Hauer, Schoenberg).	Nombres infinis et transfinis (Cantor). Axiomatique de Peano. Théorie de la mesure (Lebesgue, Borel).
1920 Formalisation radicale des macrostructures à travers le système sériel (Schoenberg).	<i>Aucun développement de la théorie des nombres</i> . Logique (contradictions de la théorie des ensembles).
1937-1939 Ernst Krenek : les axiomes en musique	David Hilbert, <i>Les fondements de la géométrie</i> (1899)
1946 Milton Babbitt : théorie des groupes et système dodécaphonique	Rudolf Carnap, <i>The Logical Syntax of Language</i> (1937)



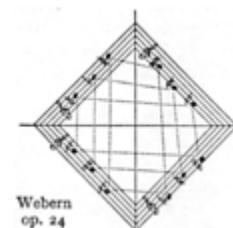
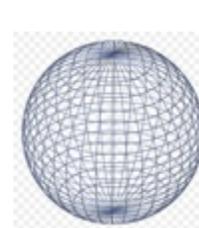
Mersenne, *Harmonicorum Libri* XII, 1648



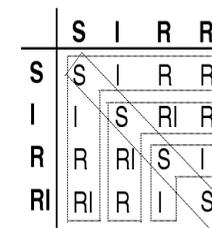
Euler, *Speculum musicum*, 1773



Durutte, *Technie, ou lois générales du système harmonique* (1855)



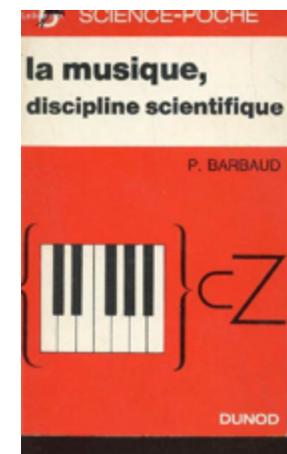
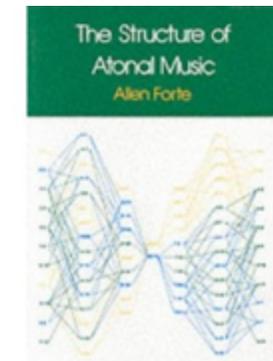
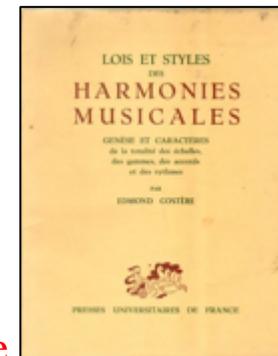
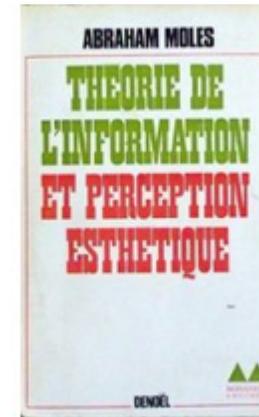
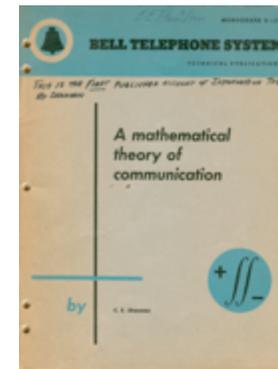
Webern op. 24



Krenek et Babbitt, technique dodécaphonique, axiomatique et groupe de Klein

Autres développements (1930-1990)

- **1930** Microtonalité, mais dans un esprit tonal (Wischnegradky, Haba, Carrillo).
- **1949** Théorie de l'information (Shannon & Weaver, *The mathematical theory of communication*)
- **1950** Deuxième formalisation radicale des macrostructures (Messiaen).
- **1953** Introduction de l'échelle continue des hauteurs (Xenakis, avec calcul des probabilités, calcul logique et diverses structures de groupe).
- **1954** Edmond Costère, *Lois et Styles des Harmonies Musicales*. Paris: Presses Universitaires de France.
- **1957** Procédés stochastiques et chaînes de Markov (Hiller / Xenakis).
- **1958** Abraham Moles, *Théorie de l'information et perception esthétique*.
- **1960** Axiomatique des gammes à travers la théorie des cribles et utilisation nombres complexes dans la composition (théorie des arborescences).
- **1960-1970** Musique algorithmique (Barbaud, Philippot) et naissance de la musicologie computationnelle (Riotte, Mesnage)
- **1970** Nouvelles propositions dans la microstructure des sons (mouvements browniens).
- **1973** *Set Theory* (Forte, Vieru, Carter, Estrada, Riotte, Mesnage, ...)
- **1980** Théories diatoniques (Clough, Clampitt, Carey,...)
- **1987** Théories transformationnelles (Lewin) et néo-riemanniennes (Cohn, Gollin)
- **1990** Théorie des catégories et des topoi en musique (Mazzola, Noll)



Marin Mersenne et la naissance de la combinatoire musicale

II 4. Marin Mersenne, *Harmonicorum Libri XII*, 1648

LIBER SEPTIMVS. DE CANTIBVS, SEV CANTILENIS, EARVMQ; NVMERO, PARTIBVS, ET SPECIEBVS.

Tabula Combinationis ab 1 ad 22.

I	1
II	2
III	6
IV	24
V	120
VI	720
VII	5040
VIII	40320
IX	362880
X	3628800
XI	39916800
XII	479001600
XIII	6127020800
XIV	87178291200
XV	1307674368000
XVI	20922789888000
XVII	335687418096000
XVIII	6402373705728000
XIX	121645100408832000
XX	24319020081766400000
XXI	510909421717094400000
XXII	1124000727776076800000

HARMONICORVM
LIBRI XII
IN QVIBVS AGITVR
DE SONORVM NATVRA,
CAVSIS, ET EFFECTIBVS: DE CONSONANTIS,
Diffofantis, Rationibus, Generibus, Modis, Cantibus, Com-
pofitione, orbifque totius Harmonicis Instrumentis.

Auctore F. M. MERSENNO Minimo.
Ad Illustr. V. HENRICVM LVDOVICVM HABEATVM
DE MONTMOR.

Laudate eum in cymbalis benefonantibus, laudate eum in cymbalis tubilodenis:
Omnes fpiritus laudet Dominum. PŒALM. 150.

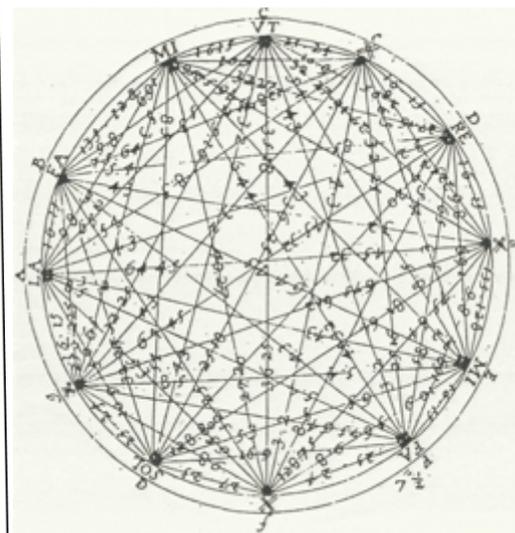
EDITIO. AVCTA.



LVTETIÆ PARISIORVM.
Sumpribus G VILLELMI BAVDRY, viâ Iacobzâ,
prope Collegium Pleffæum.

M. DC. XLVIII.

Cum Privilegio Regis Chriftianiff. et Approbatione Superiorum;



Varietas, seu Combinatio quatuor notarum.

De Mersenne à Edmond Costère : premiers catalogues d'accords

Edmond Costère, *Lois et Styles des Harmonies Musicales*. Paris: Presses Universitaires de France, 1954.

114

LIBER SEPTIMVS. DE CANTIBVS, SEV CANTILENIS, EARVMQ NVMERO, PARTIBVS, ET SPECIEBVS.

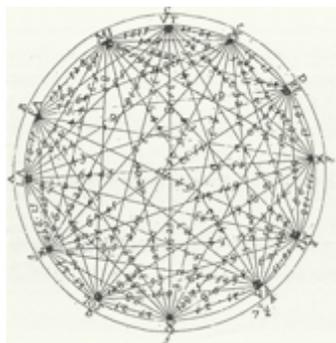


Tabella pulcherrima & vtilissima Combinationis duodecim Cantilenarum.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105
4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560
5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820	2380
6	21	56	126	252	462	792	1237	2002	3003	4368	6188	8400
7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564	26400
8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19449	31824	50388	73680
9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582	125970	184800
10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	91378	167960	293230	436800
11	66	286	1001	3003	8008	19449	43758	91378	184756	352716	646646	972400
12	78	364	1355	4368	12476	31824	75582	167960	352716	705432	1352078	2104156
13	91	455	1820	6188	18564	50388	125970	293230	646646	1352078	2704156	4112032
14	105	560	2380	8400	27132	77520	204490	497420	1144066	2496144	5200300	7924000
15	120	680	3060	11528	38760	116280	319770	817190	1961256	4457400	9657700	14738800
16	136	810	3876	15504	54264	170544	490314	1307504	3287670	7726600	17383860	27041560
17	153	969	4845	20349	74613	243157	735471	2042975	5311735	13037895	30421755	51895935
18	171	1140	5935	26334	100947	346104	1081575	3124550	8436285	21474180	51895935	97240000
19	190	1350	7315	33649	134596	480700	1562275	4686825	1312110	34597230	86493225	141120325
20	210	1540	8855	41504	177100	657800	2200075	6906900	20030010	54617300	141120325	225792840
21	231	1771	10626	53130	230230	888030	3108105	10015005	30045015	84672315	225792840	354817320
22	253	2024	12650	67800	296010	1184040	4292145	14307150	44552165	129024480	354817320	548354040
23	276	2300	14950	90730	376740	1560780	5852925	20160075	64512290	193536720	548354040	834451800
24	300	2600	17550	12180	475020	2035800	7888215	28048800	92561040	286097760	834451800	1251677700
25	325	2925	20470	16755	629575	2629575	10118300	38567100	131128140	417215900	1251677700	1848000000

THESAURUS - 115 - (0 1 3 7)

interval vector: <1 1 1 1 1>
 Tn/Tri type: [0 1 3 7]
 complementary: (0 2 3 4 6 7 8 9)
 isomers: (0 1 4 6) (0 2 5 6)

Tn-roughness: 4.06 fusion: 1.18
 tonicity: 9.38 phonility: 33.75+
 Costère number: 21 13 14 i = 0
 Forte number: 4-229

azimuth: -87.21*
 root: 15 11 (2) 15 (0 8 5) 10 (8 5 1 4)
 vertex: 10 12 (6) 11 (3 6 0) 18 (5 1 7 5)

cardinal: 3 2 (3) 1 (1 1 2) 2 (3 0 1 1)
 tonal M: (6 6 5 4 4 5 4 5 6 7 3 5 4 4)
 tonal m: 6 (6 4 4 4 4 7 4 6 5 4 4 6)

transpositional: 8 (9 5 5 5 9 6 9 5 5 5 9)
 inversions: (5 8 8 10 4 6 5 8 8 8 4 6)

Tn invariance: 4 1 1 1 1 1 1 2 1 1 1 1 1
 TnI invariance: 1 2 2 2 2 0 1 2 2 0 2 0

SUBSETS (0 1 3 5 6 7 8 9) (0 1 3 5 6 8 9)
 (0) (0 1 3 5 6 7 8 9)
 (0 1) (0 1 3 5 6 7 8 9)
 (0 2) (0 1 4 5 6 7 8 9)
 (0 3) (0 2 3 4 5 6 7 8 9)
 (0 4) (0 2 3 4 5 6 7 8 9)
 (0 5) (0 2 3 4 5 6 7 8 9)
 (0 6) (0 2 3 4 5 6 7 8 9)
 (0 1 3) (0 2 3 5 6 7 8 9)
 (0 2 6) (0 2 3 5 6 8 9)
 (0 3 7) (0 2 3 5 6 8 9)
 (0 5 6) (0 2 3 5 6 8 9)

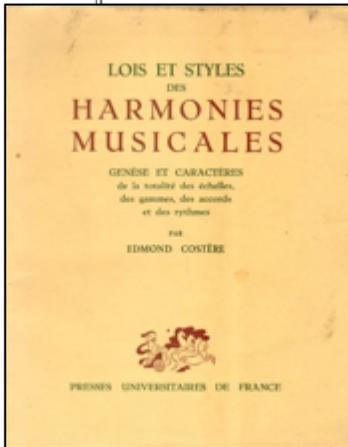
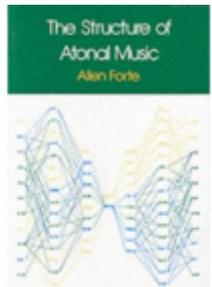
4 items

Asymmetrical relative: (0 4 6 7)
 integrally tonal-imitative Om [ab-bA]

Cardinally Transitive with balanced cardinal pole cardinal poles: 0 (2) (8)
 Tonal Minor
 Tonally Explosive
 Tonic m
 tonal poles: (8M) (5m)
 intrinsic tonic poles: 0m

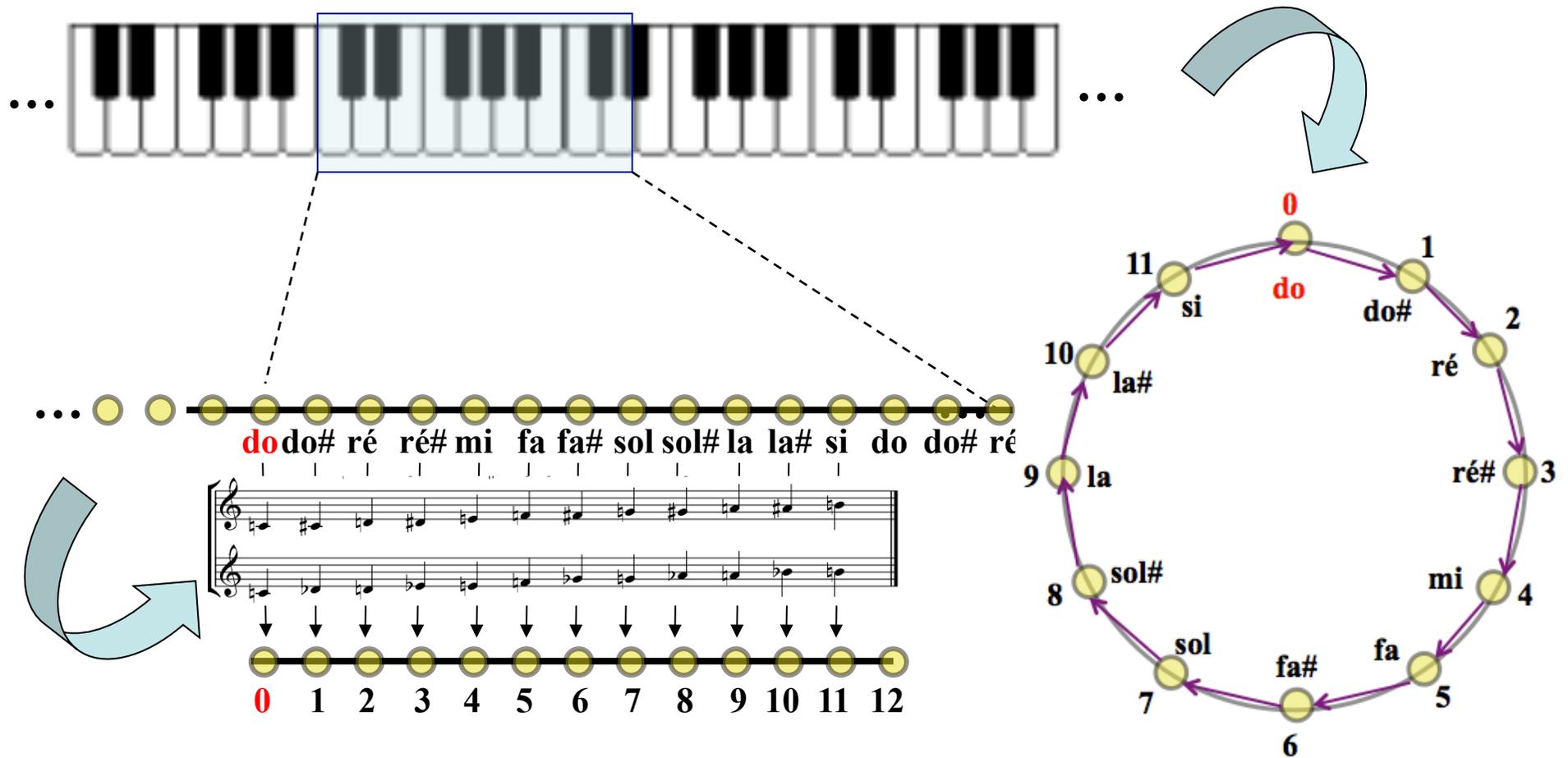
COMMONALITY
 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 e
 Tn: 100 28 36 32 36 39 54 39 36 32 36 28
 TnI: 35 47 43 51 44 24 38 57 54 20 69 23
 (0 4 7): 69 31 13 51 15 30 31 26 46 24 20 29
 (0 3 7): 79 23 15 28 25 34 28 31 30 22 28 12

T0 T1 T2 T3 T4 T5 T6 T7 T8 T9 T10 T11



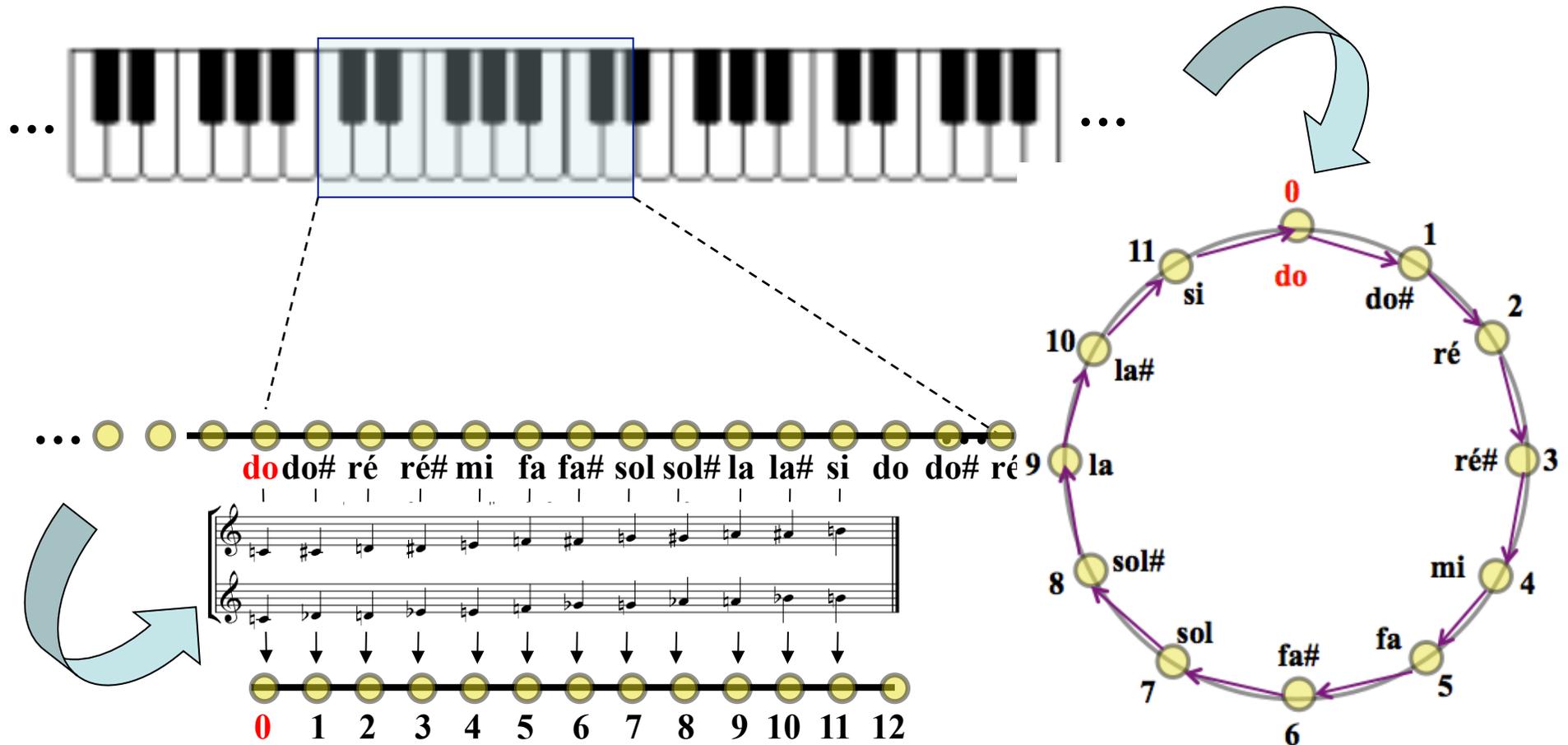
M. A. Bittencourt, « A computational model of E. Costère's music theories and Set-Theory implemented as an analytical calculator », SBCM 2007, São Paulo.

L'espace tempéré égal est un groupe cyclique



« L'ensemble des intervalles mélodiques est muni d'une **structure de groupe** avec comme loi de composition l'addition. [...] Or, cette structure n'est pas spécifique aux **hauteurs**, mais également aux **durées**, aux **intensités**, aux **densités** et à d'autres caractères des sons ou de la musique, comme par exemple le **degré d'ordre ou de désordre** »
(Xenakis, "La voie de la recherche et de la question", *Preuves*, 1965).

L'espace tempéré égal est un groupe cyclique

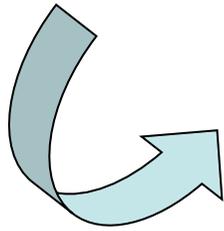
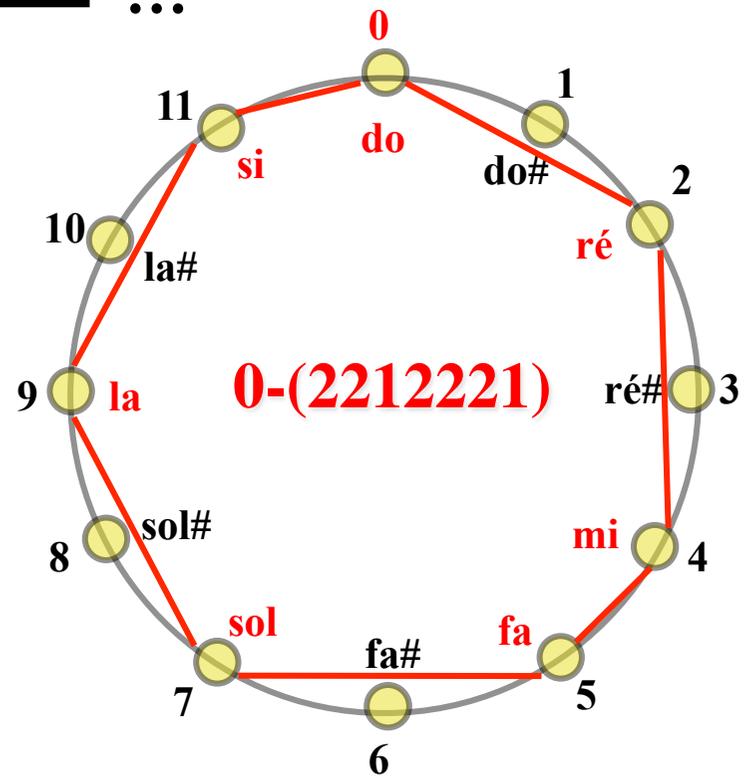
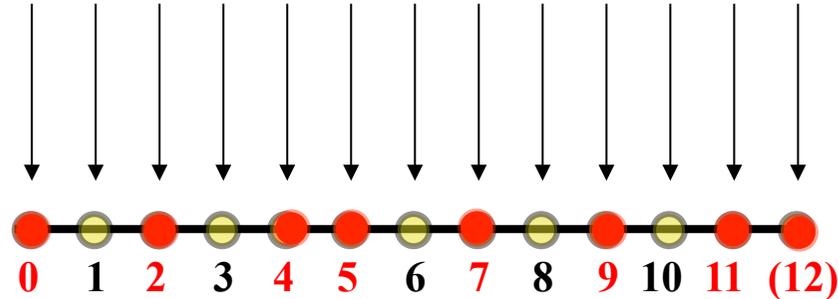
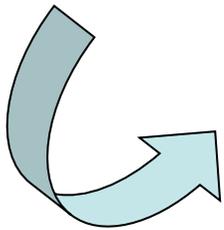


« [...] il faut aller plus profondément dans notre **mental musical**. Et c'est là que l'on découvre les **symétries**, les propriétés des sons ou les opérations qu'effectue l'auditeur ou le musicien sans le savoir. La musique, comme sans doute notre univers, est plongée dans l'idée de récurrence, de répétition plus ou moins fidèle, de symétrie en temps et hors-temps. C'est pourquoi l'on découvre les **structures de groupe** presque à fleur de peau. »
(Xenakis, "Problèmes actuels en composition musicale", Conférence à Saclay, 1983).

Une gamme est un polygone inscrit dans le cercle



Do maj = {0,2,4,5,7,9,11}



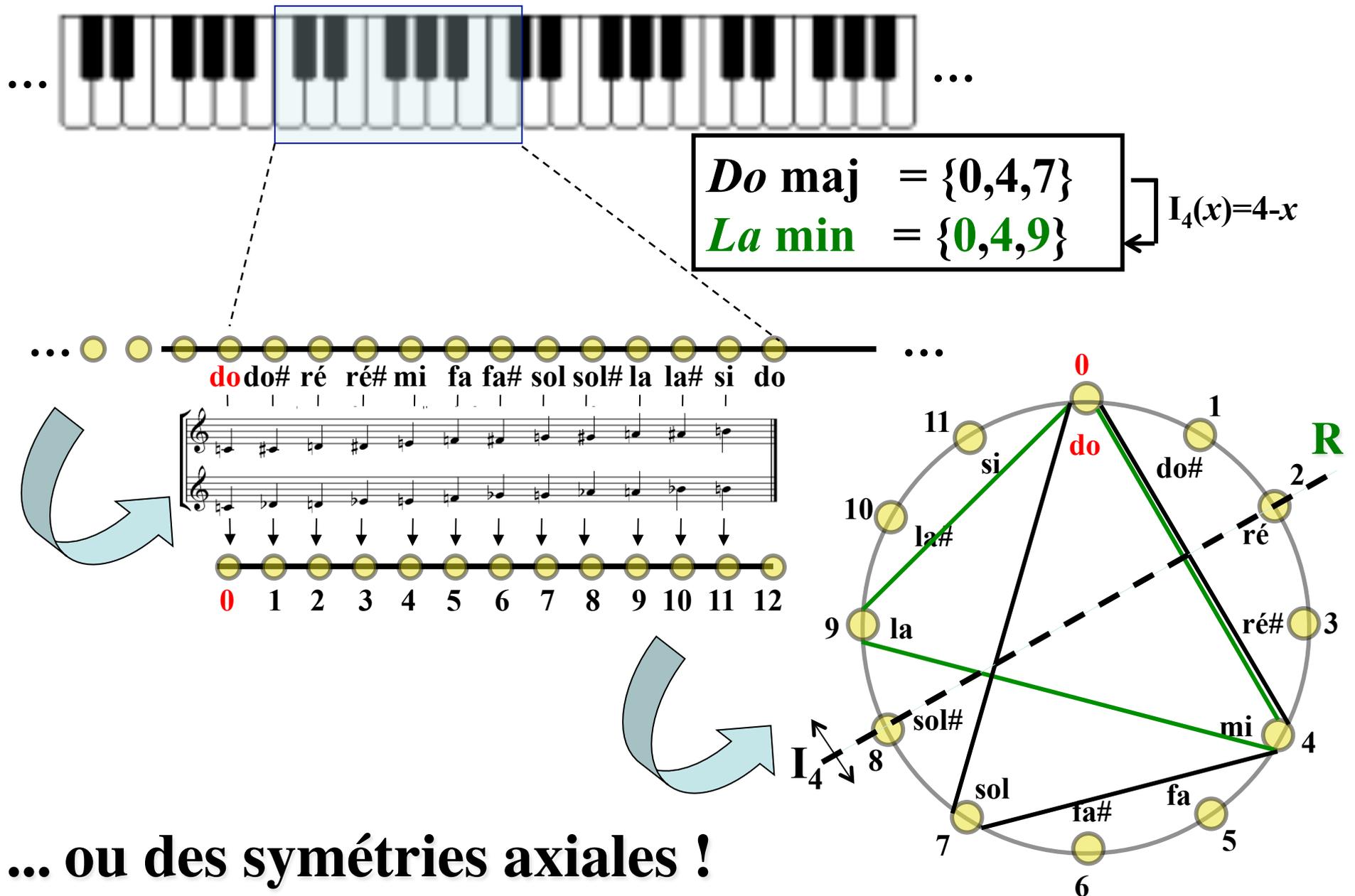
A. Riotte



M. Mesnage

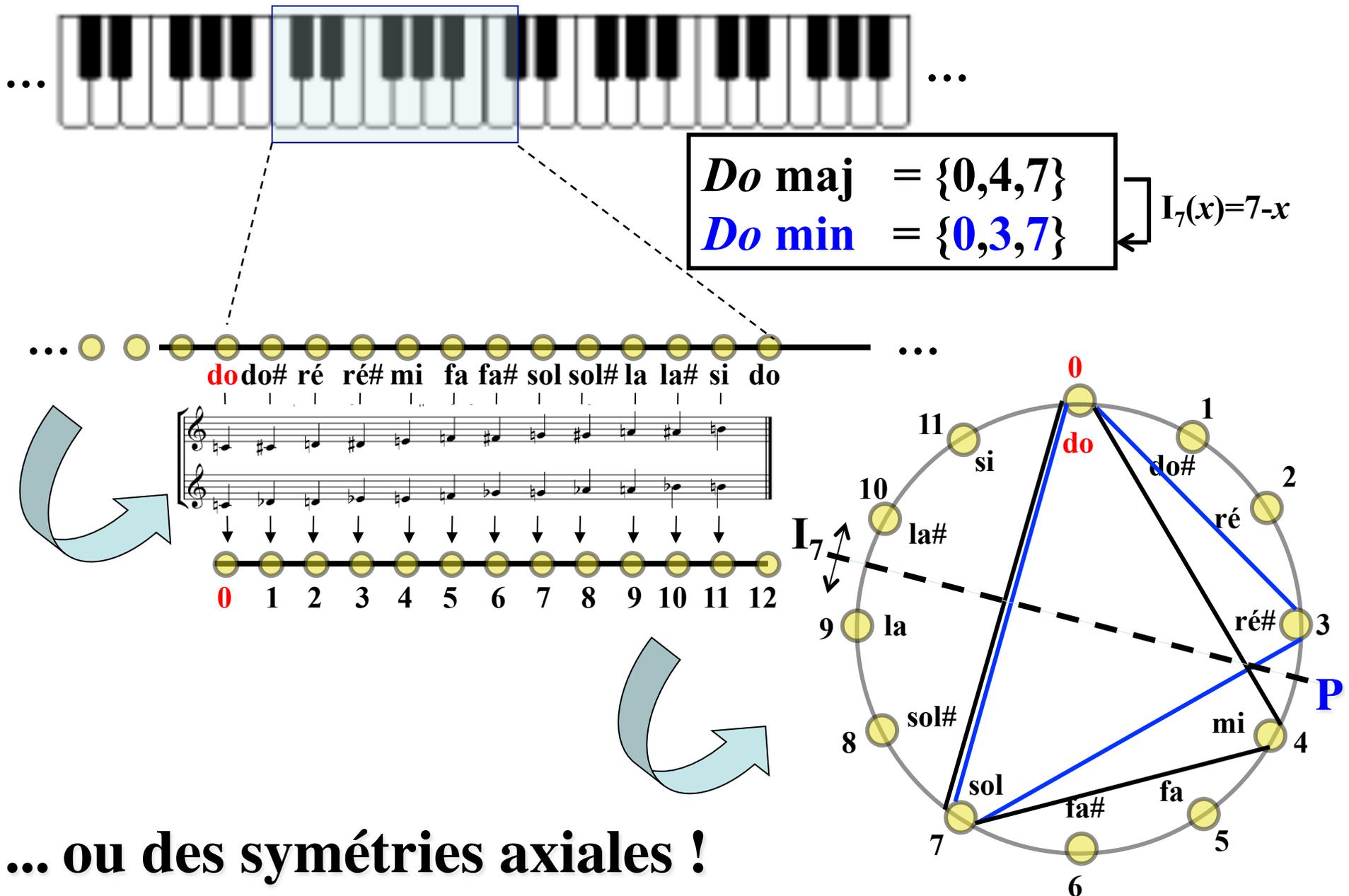


Les inversions sont des différences...



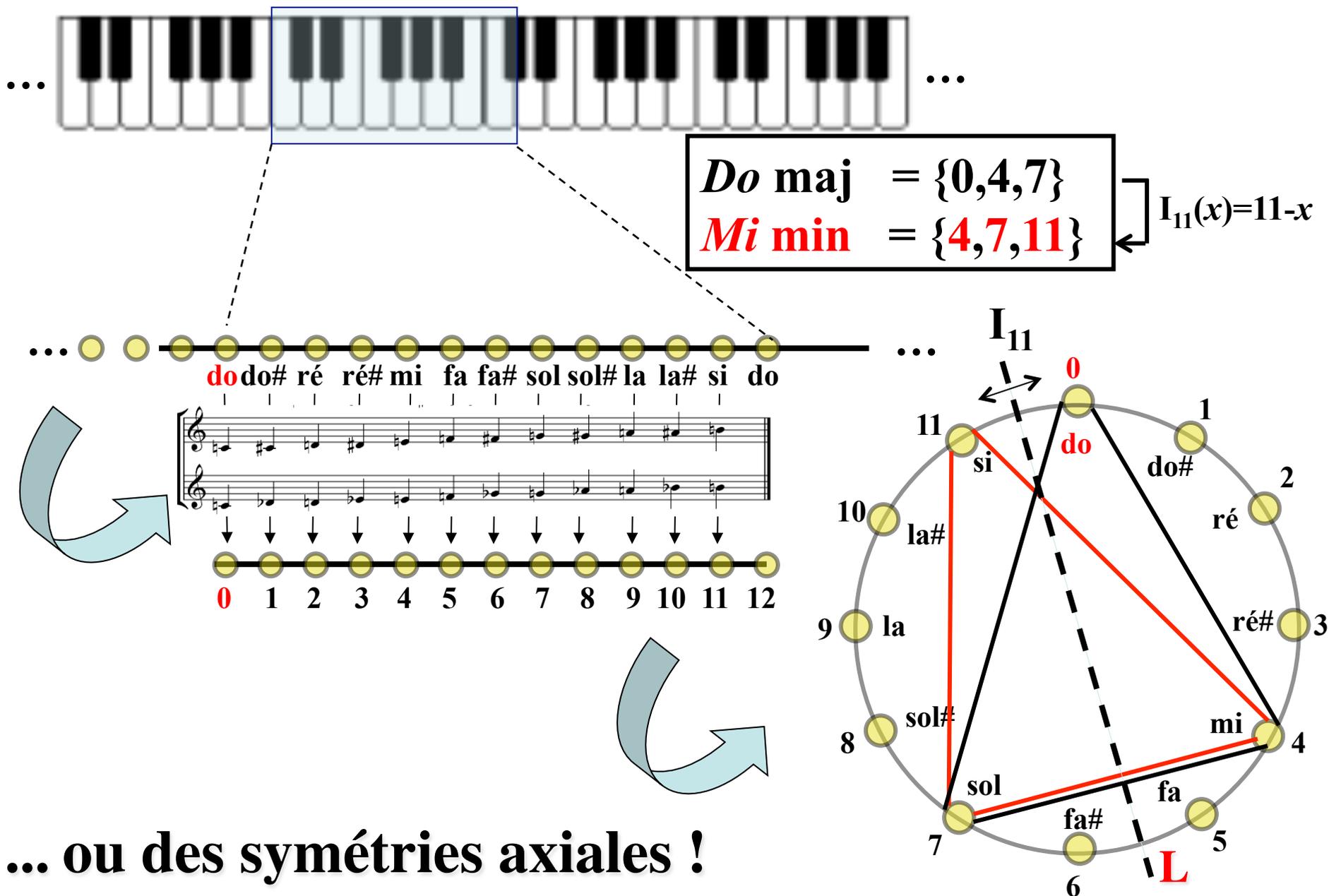
... ou des symétries axiales !

Les inversions sont des différences...



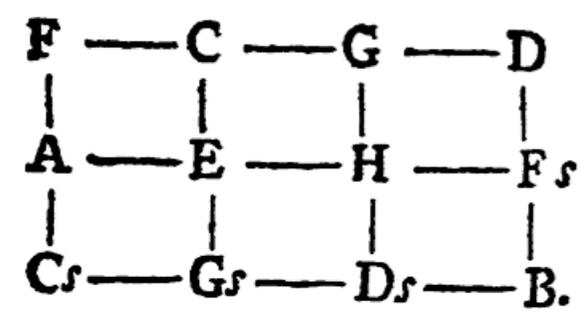
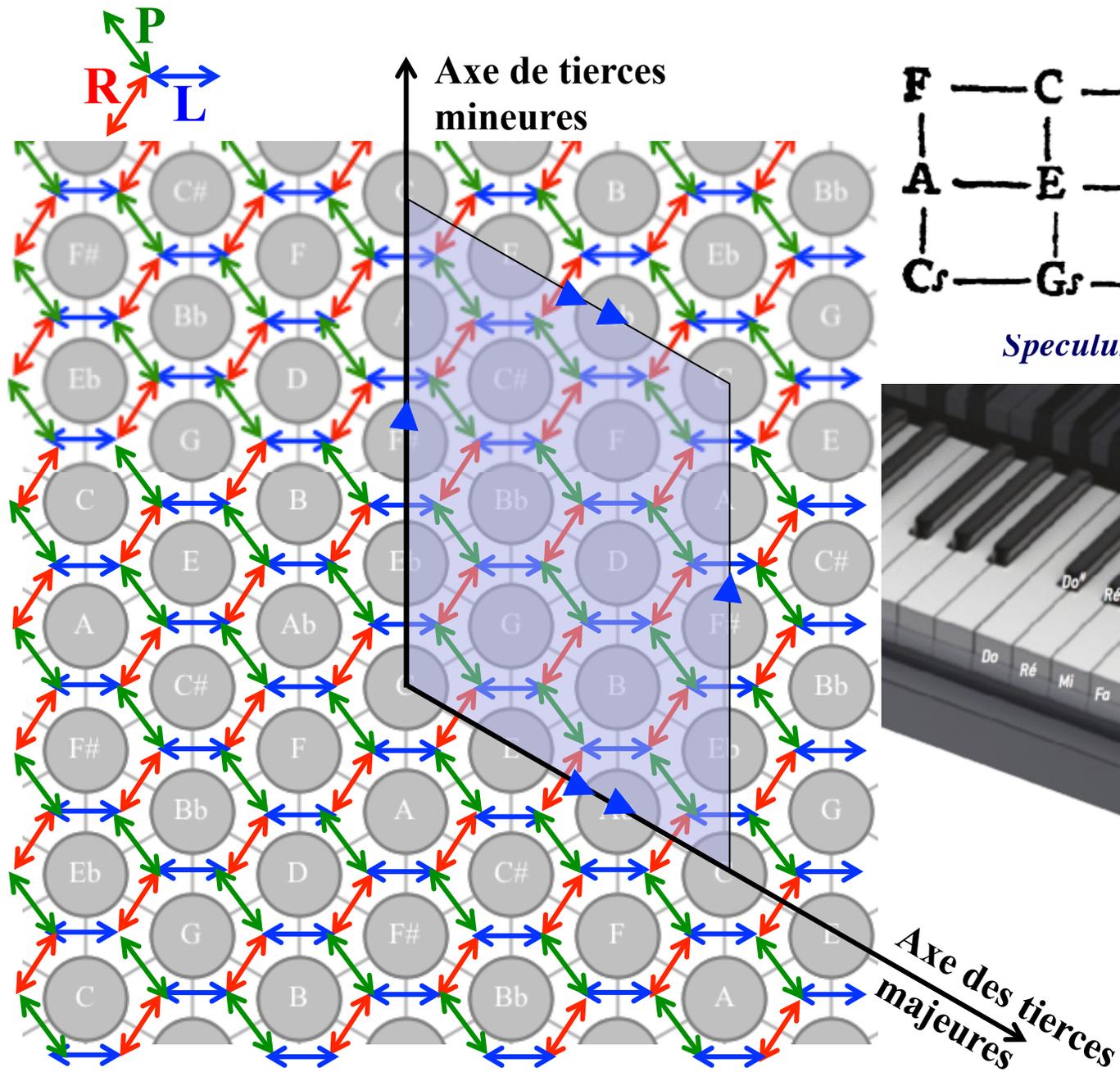
... ou des symétries axiales !

Les inversions sont des différences...

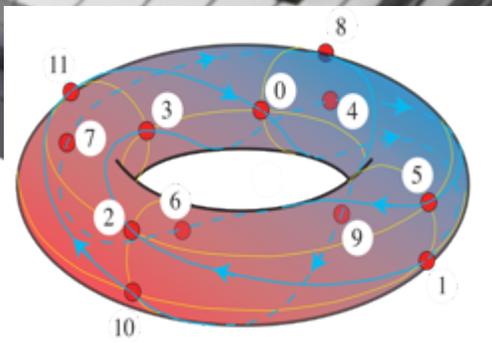
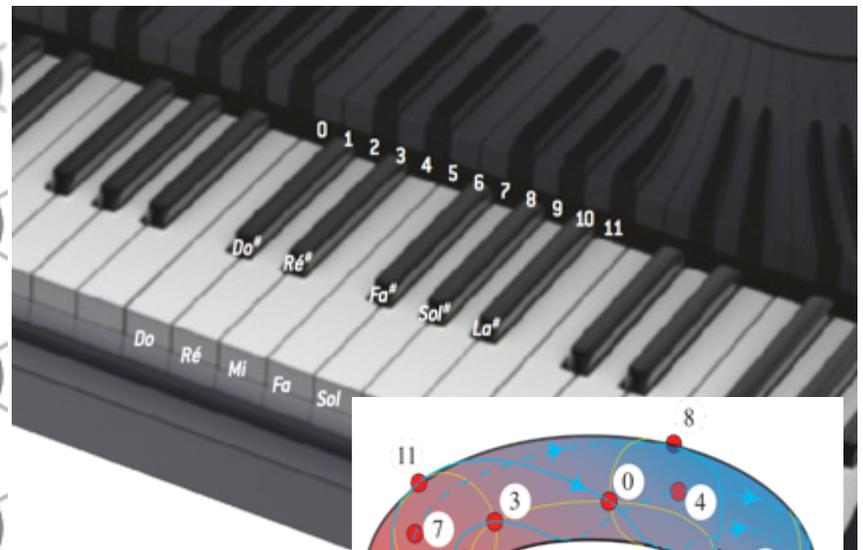


... ou des symétries axiales !

Du miroir de la musique au *Tonnetz* neo-riemannien

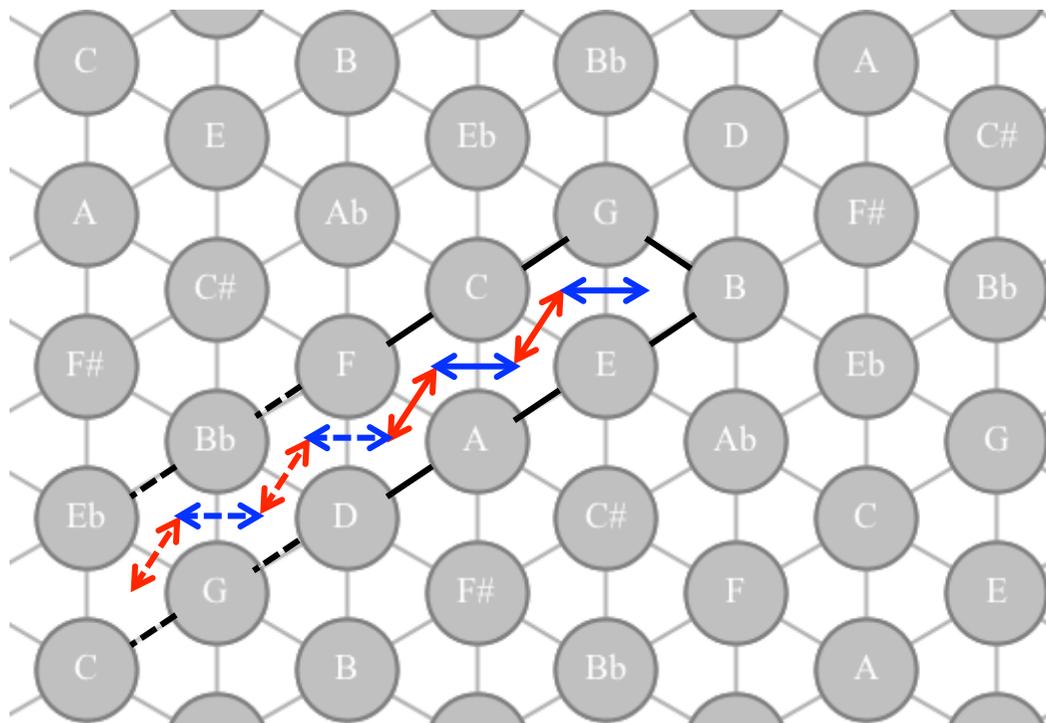
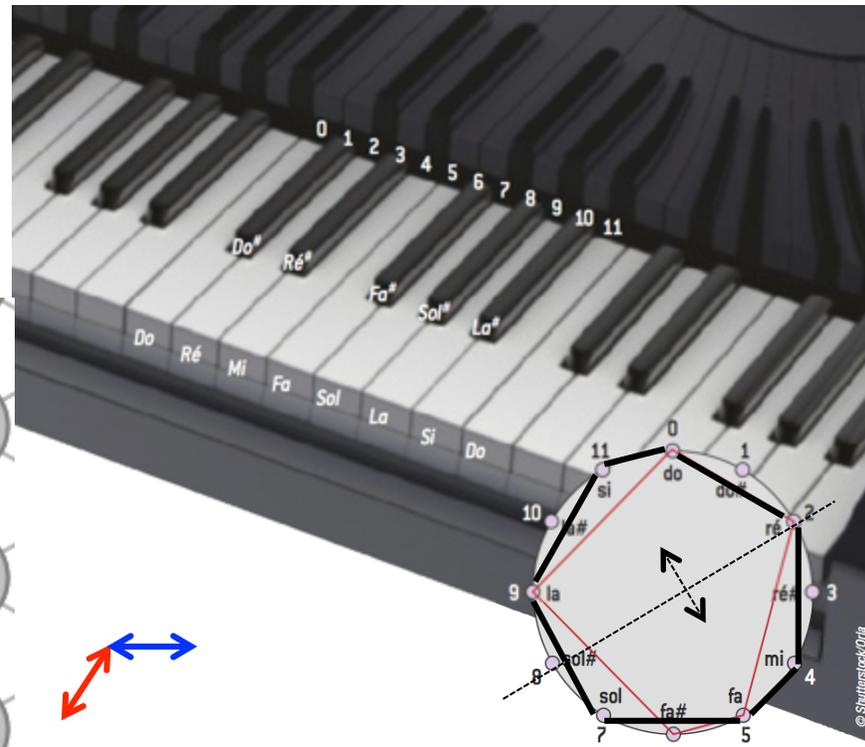
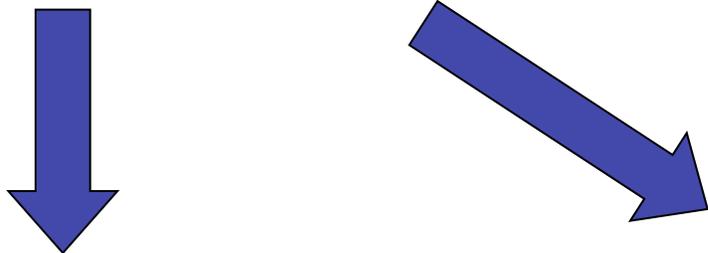
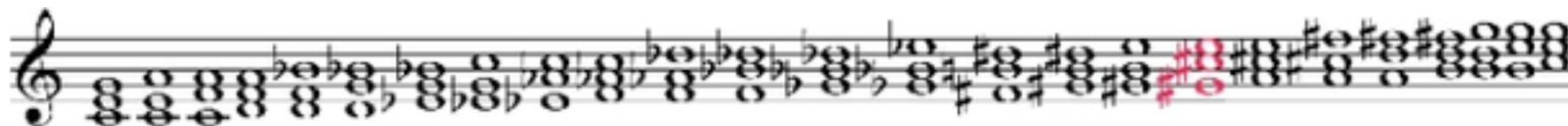


Speculum Musicum (Euler, 1773)

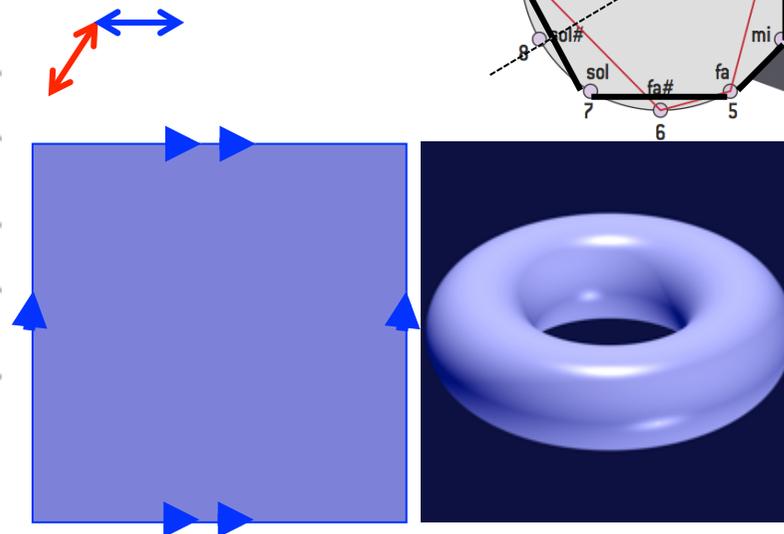


Tore des tierces (Mazzola, 1990)

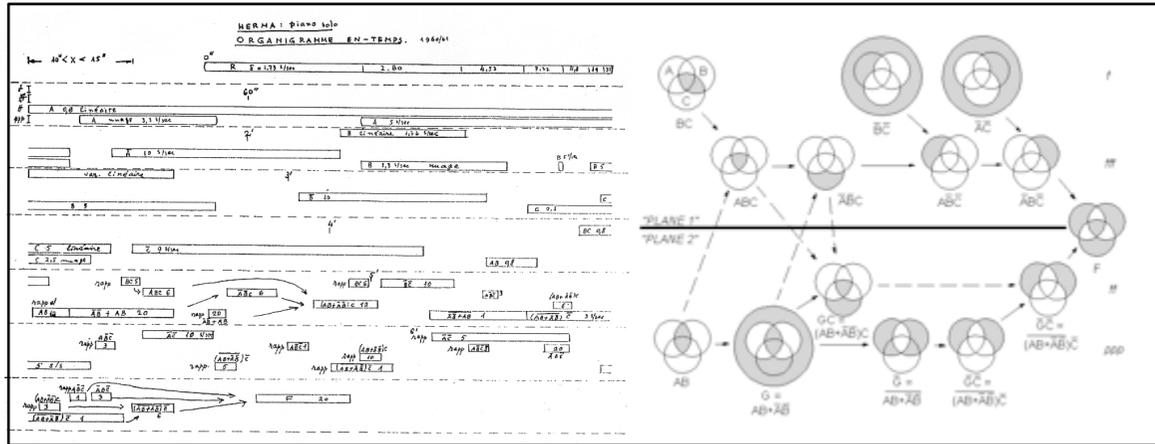
Progressions harmoniques comme trajectoires spatiales



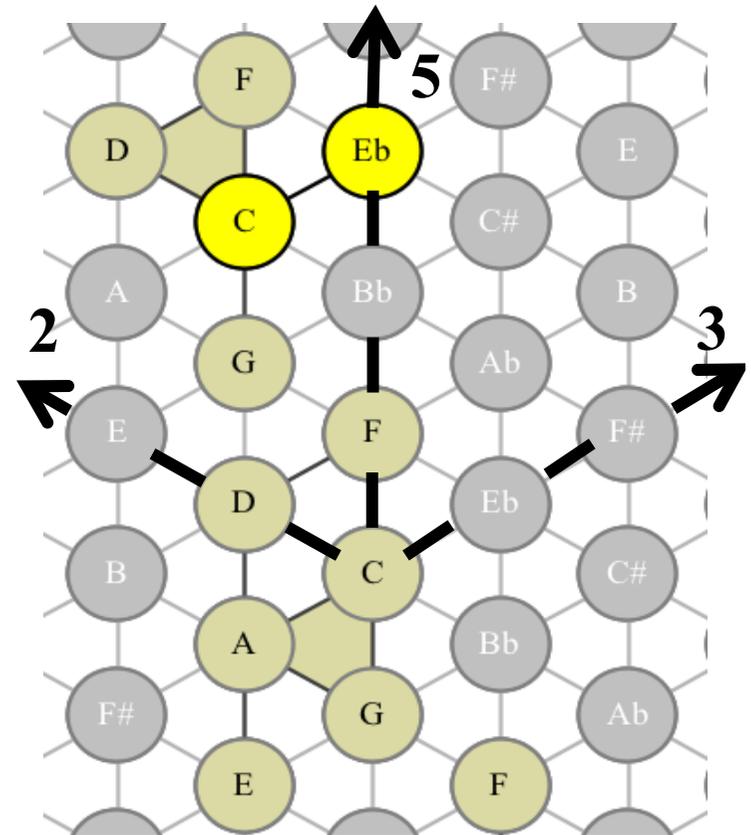
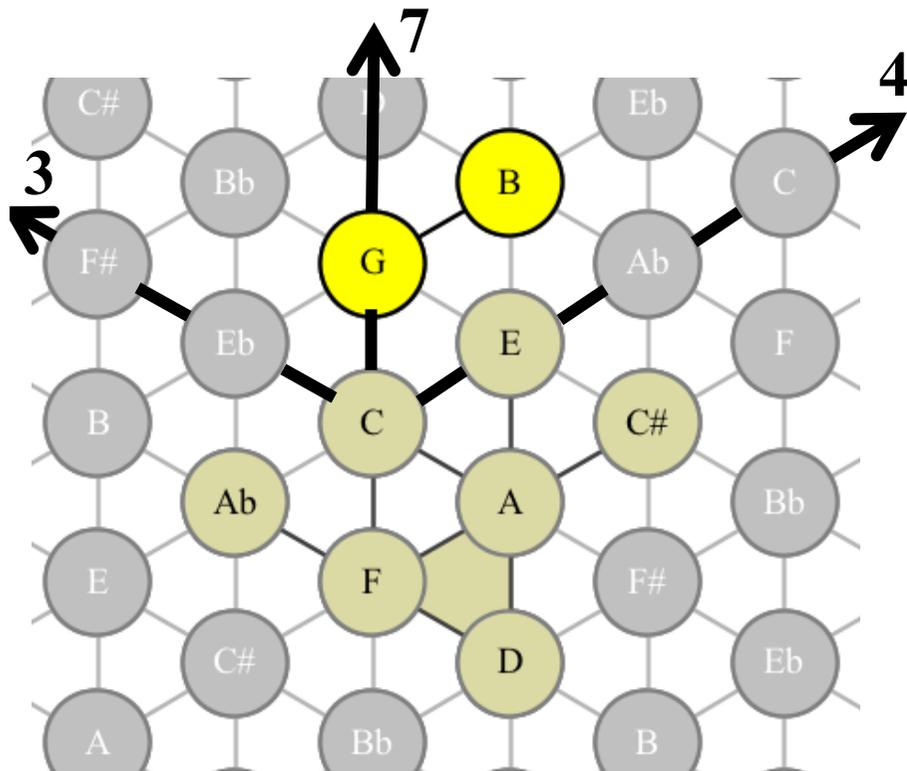
Hexachord (Louis Bigo, 2013)



Une analyse de *Herma* de Xenakis assistée par le *Tonnetz*



→ démo



Le style, c'est l'espace !

The diagram illustrates the concept of "style" as "space" in music. It shows two chord progressions, $T[3,4,7]$ and $T[2,3,7]$, on a chromatic scale grid. A central diagram shows a sequence of notes (C, G, E, B, D, A, F, C, G, D) with arrows indicating movement between them. Below the grids are musical notations for each progression, with speaker icons indicating audio playback.

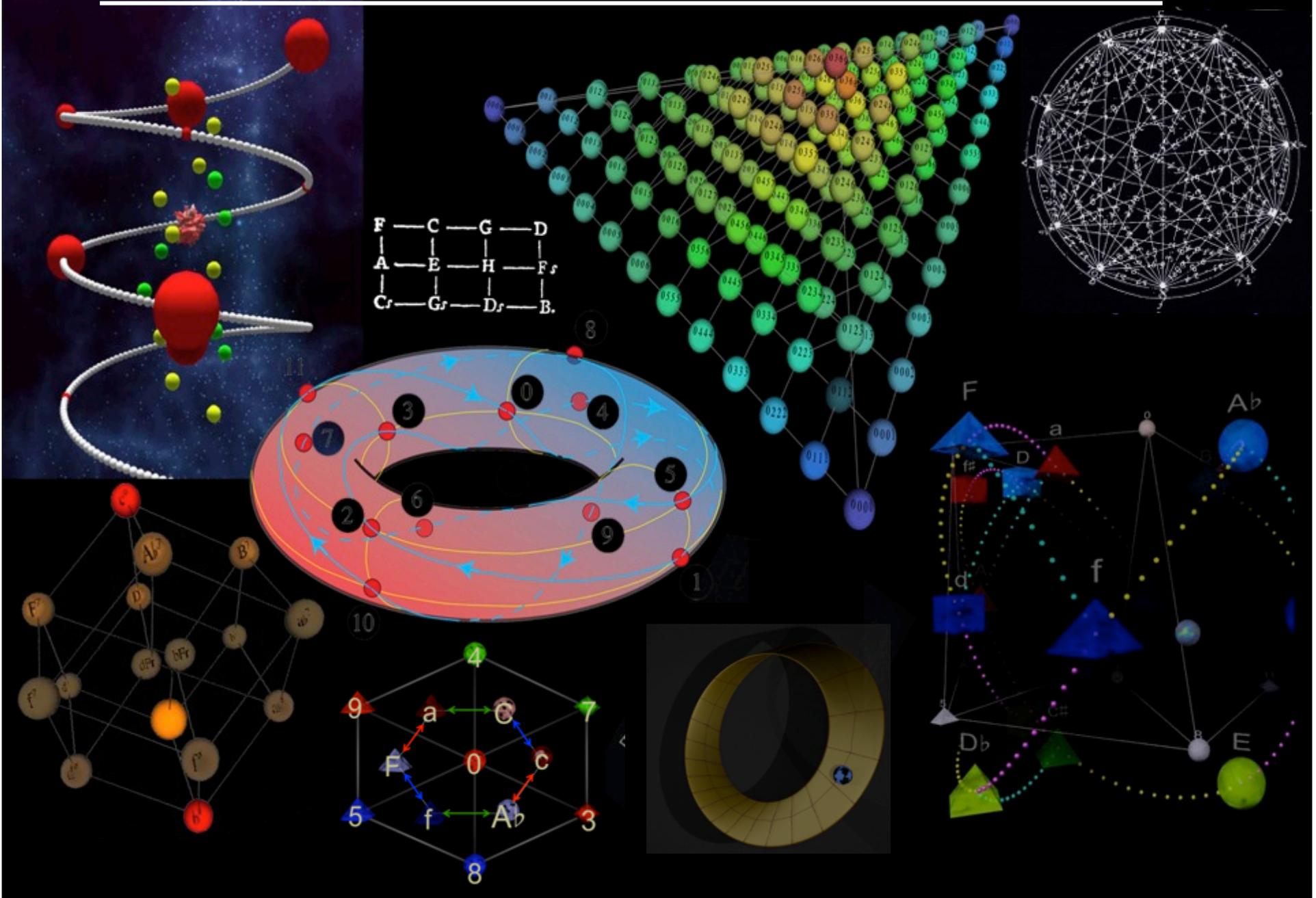


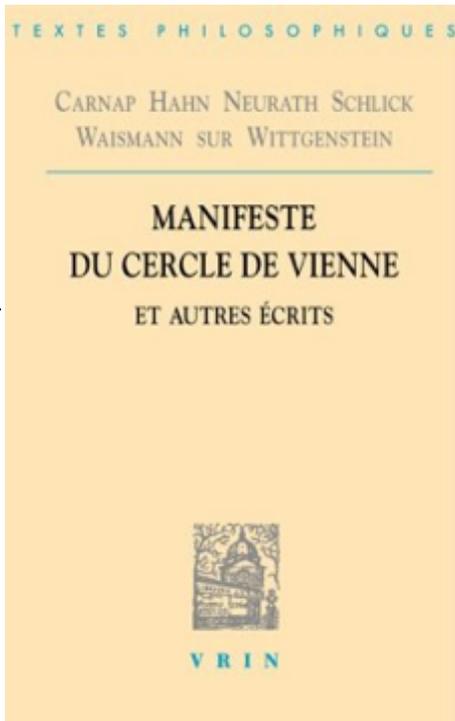
Généalogie morphologie de l'analyse structurale

The diagram illustrates the morphological evolution of structural analysis in music. It features two chromatic grids (left and right) with highlighted notes and arrows indicating transformations. The left grid is labeled $T[3,4,7]$ and the right grid is labeled $T[2,3,7]$. Between them is a book cover 'Forme et croissance' by Allen Tansman, a diagram of a fish-like shape, and a portrait of C. Lévi-Strauss. Below each grid is a musical score in C major.

« Il me semble que le **style** est l'un des outils opératoire majeurs dont nous disposons pour essayer de comprendre la corrélation entre la nature et la culture... Dans le domaine de la musique [...] il ne fait aucun doute, dans mon esprit, qu'il est possible de passer d'une mélodie classique à une mélodie moderne par une **transformation purement mathématique** dont les compositeurs sont, bien entendu, totalement ignorants. Mais le fait saillant à propos du style, c'est que l'esprit humain travaille inconsciemment dans une direction comparable à celle de la nature » (Lévi-Strauss, 1953 / tr. J.-J. Nattiez 1973).

La galaxie des modèles géométriques au service de la musique





*Physicists and mathematicians are far in advance of musicians in realizing that their respective sciences do not serve to establish a concept of the universe conforming to an **objectively existent nature**.*

*As the study of **axioms** eliminates the idea that axioms are something absolute, conceiving them instead as **free propositions of the human mind**, just so would this musical theory free us from the concept of major/minor tonality [...] as an irrevocable law of nature.*

Ernst Krenek : *Über Neue Musik*, 1937 (Engl. Transl. *Music here and now*, 1939)



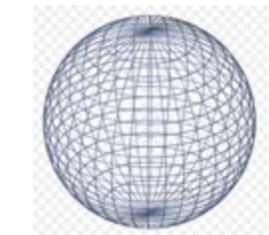
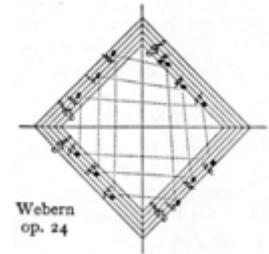
A. Schoenberg



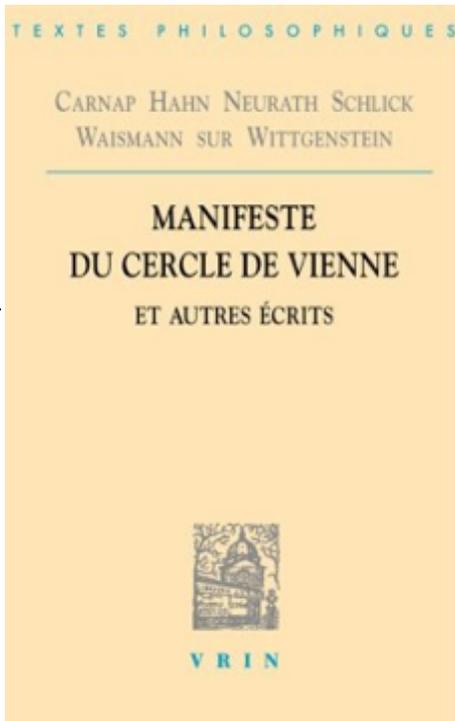
Ernst Krenek



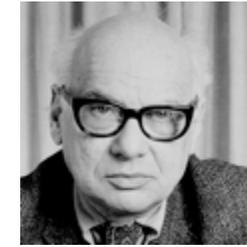
David Hilbert



M. Andreatta, « **Mathématiques, Musique et Philosophie dans la tradition américaine: la filiation Babbitt/Lewin** », dans *A la lumière des mathématiques et à l'ombre de la philosophie, Dix ans de séminaire mamuphi*, Ircam-Delatour France, 2012.



Le système dodécaphonique est « *un ensemble d'éléments, **relations** entre les éléments et **opérations** sur les éléments. [...] Une vraie mathématisation aurait besoin d'une formulation et d'une présentation dictées par le fait que le système dodécaphonique est un **groupe de permutations** qui est façonné [shaped] par la structure de ce modèle mathématique* »



Milton Babbitt

	S	I	R	RI
S	S	I	R	RI
I	I	S	RI	R
R	R	RI	S	I
RI	RI	R	I	S

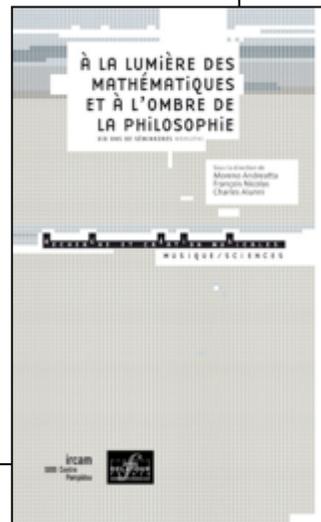
M. Babbitt: *The function of Set Structure in the Twelve-Tone System*, PhD (1946/1992)



M. Andreatta, « *Mathématiques, Musique et Philosophie dans la tradition américaine: la filiation Babbitt/Lewin* », dans *A la lumière des mathématiques et à l'ombre de la philosophie, Dix ans de séminaire mamuphi*, Ircam-Delatour France, 2012.



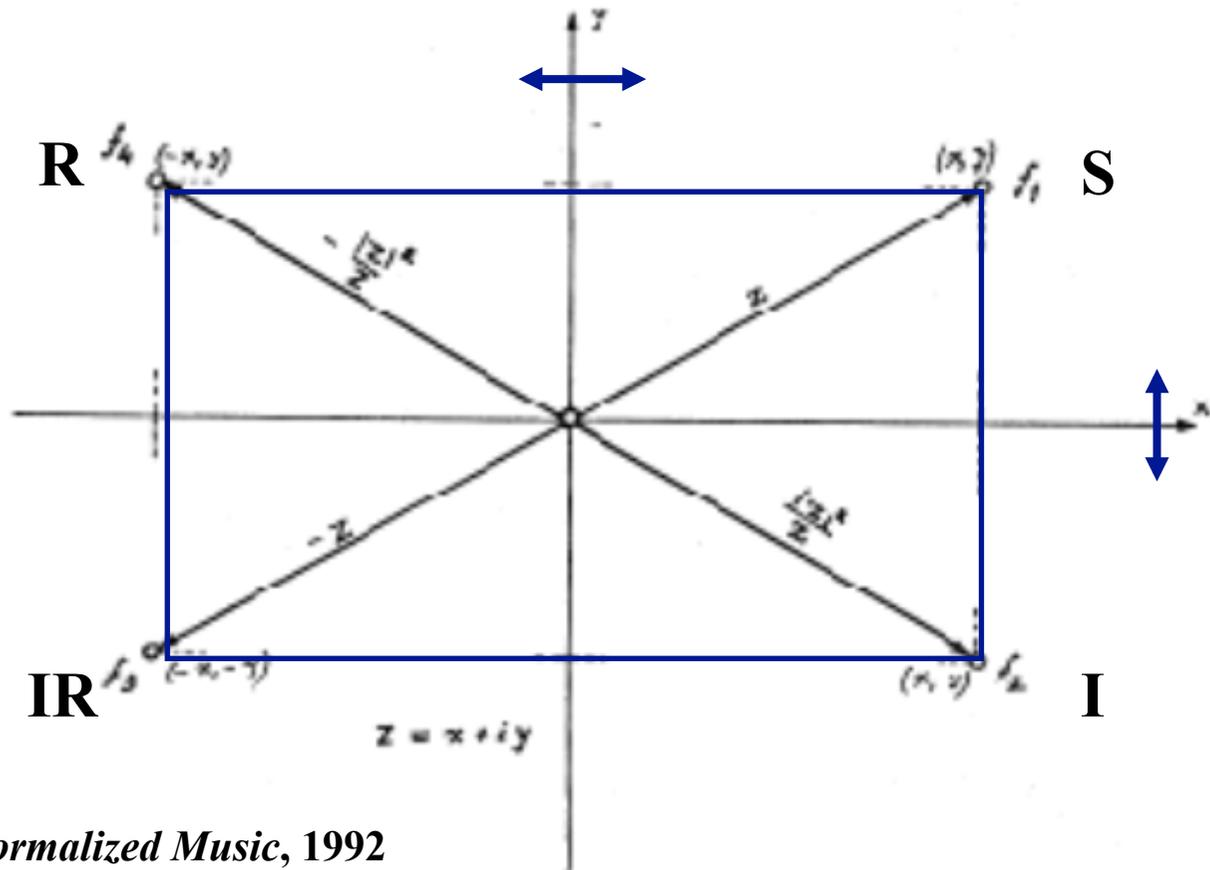
A. Schoenberg



Séries dodécaphoniques et structures algébriques

S		S	I	R	RI
I		S	I	R	RI
R		I	I	S	RI
IR		R	R	RI	S
		R	R	RI	S
		RI	RI	R	I

- Structure de groupe**
- Cloture
 - Existence de l'élément neutre
 - Existence de l'invers
 - Associativité



Felix Klein

Iannis Xenakis, *Formalized Music*, 1992

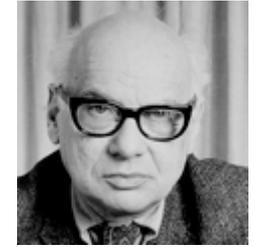
Articulation algèbre/géométrie en musique



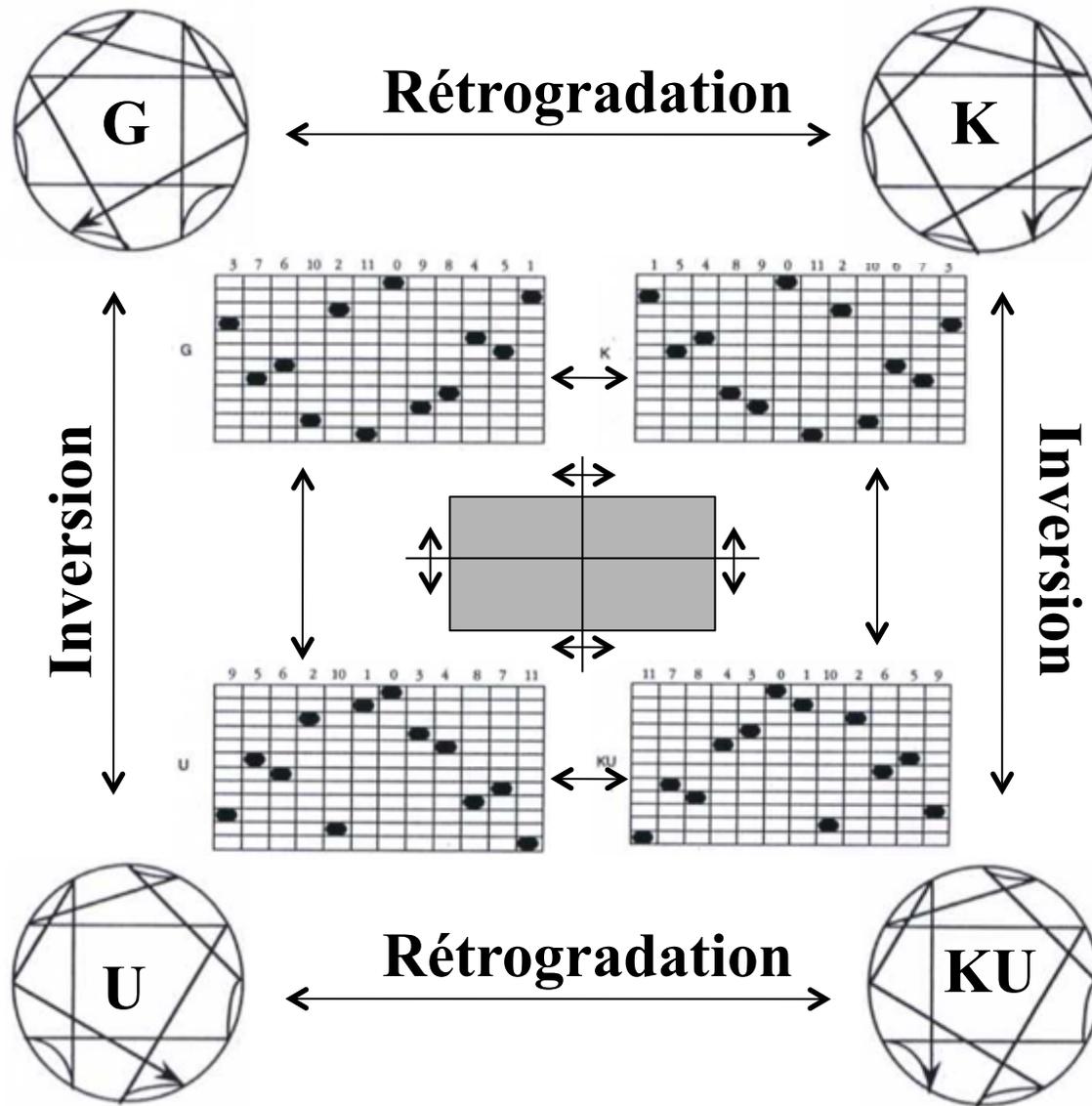
Felix Klein



Ernst Krenek



Milton Babbitt



« [...] Si nous représentons les permutations G, K, U et KU par leurs « écussons », nous aurons les figures suivantes dont « l'air de famille » **saute aux yeux, comme il saute aux oreilles** sous son aspect sonore. [...] *Lorsqu'on étudie, sur les nouvelles structures (de la pensée logique, des mathématiques, de la théorie physique...), la pensée des mathématiciens ou des physiciens de notre époque, on mesure, assurément, quel immense chemin les musiciens doivent encore parcourir avant d'arriver à la **cohésion d'une synthèse générale.** »*



Pierre Barbaud

Schoenberg, Editions Main d'Œuvre, 1997. Orig. 1963)

Théorème de l'hexachorde, relation Z et homométrie

« Here the basic hierarchical scope of the (twelve-tone) system is contained essentially in the simple theorem that:

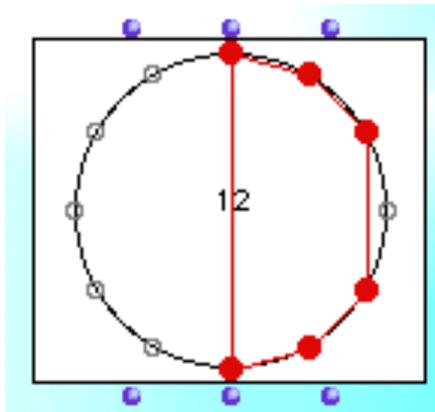
Given a collection of pitches (pitch classes), the multiplicity of occurrence of any interval (...) determines the number of common pitches between the original collection and the transposition by the interval »

(M. Babbitt, *Past and Present Concepts of the Nature and Limits of Music*, 1961)



Milton Babbitt

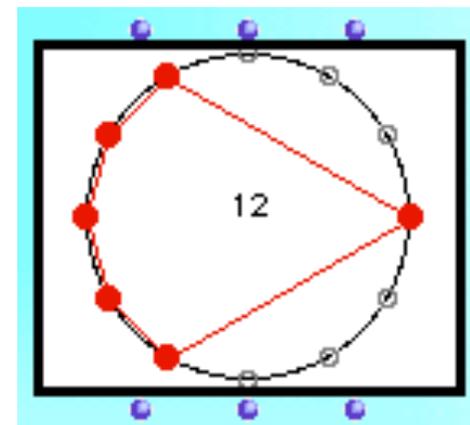
A



Z-relation

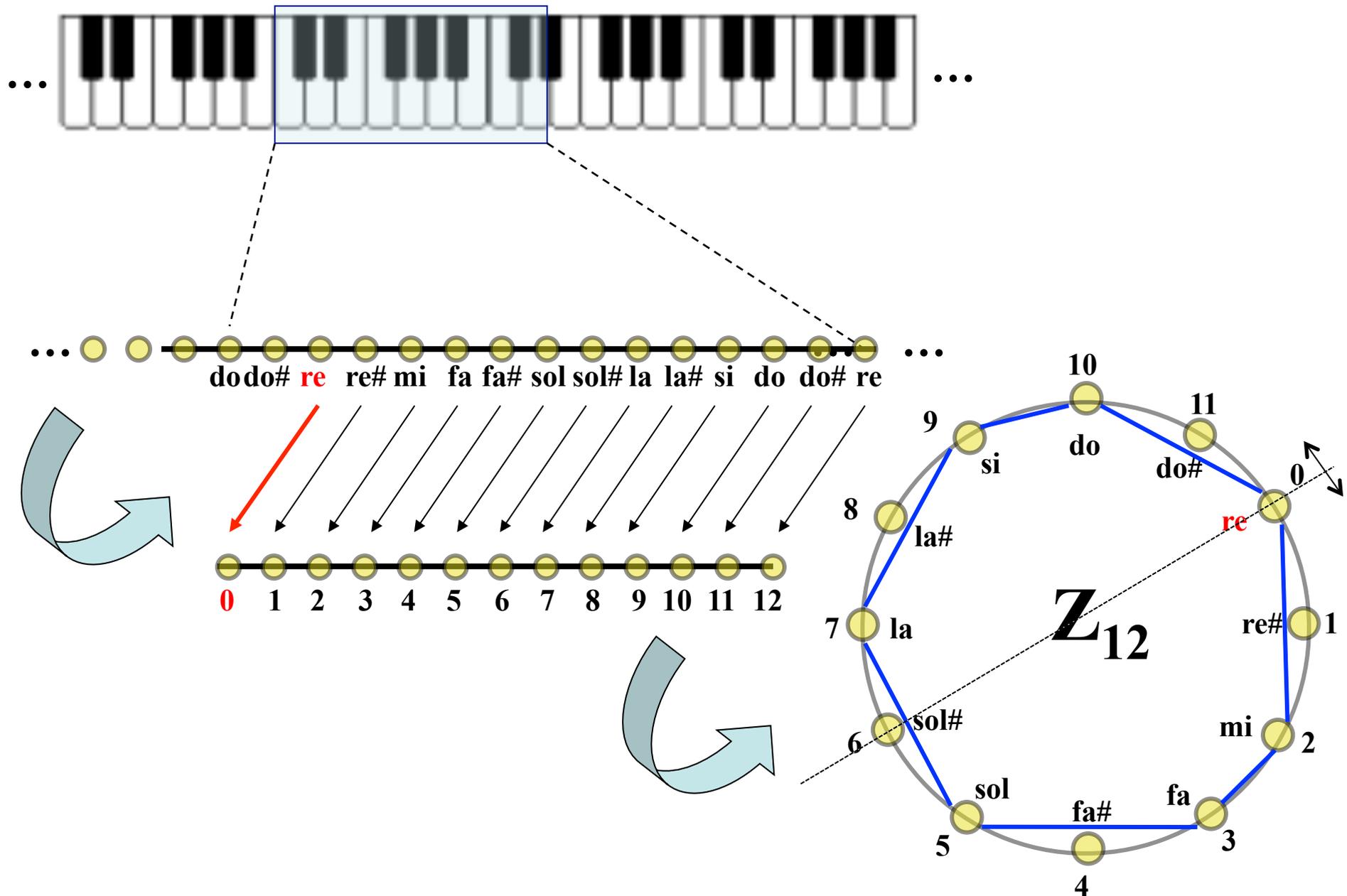
$$IC_A = IC_{A'}$$

homométrie



A'

La symétrie du *ré* : une découverte ancienne !



La symétrie du ré chez Camille Durutte



C. Durutte

*à m^r Nordlinges souvenir amical
C. Durutte*

ESTHÉTIQUE MUSICALE.

TECHNIE

ou

LOIS GÉNÉRALES DU SYSTÈME HARMONIQUE,

par le Comte CAMILLE DURUTTE, d'Ypres,

Compositeur, ancien Directeur de l'École polytechnique, Membre de l'Académie impériale de Metz.



PARIS,
MALLET-BACHELIER,
IMPRIMERIE-LIBRAIRIE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
quai des Grands-Augustins, 35.

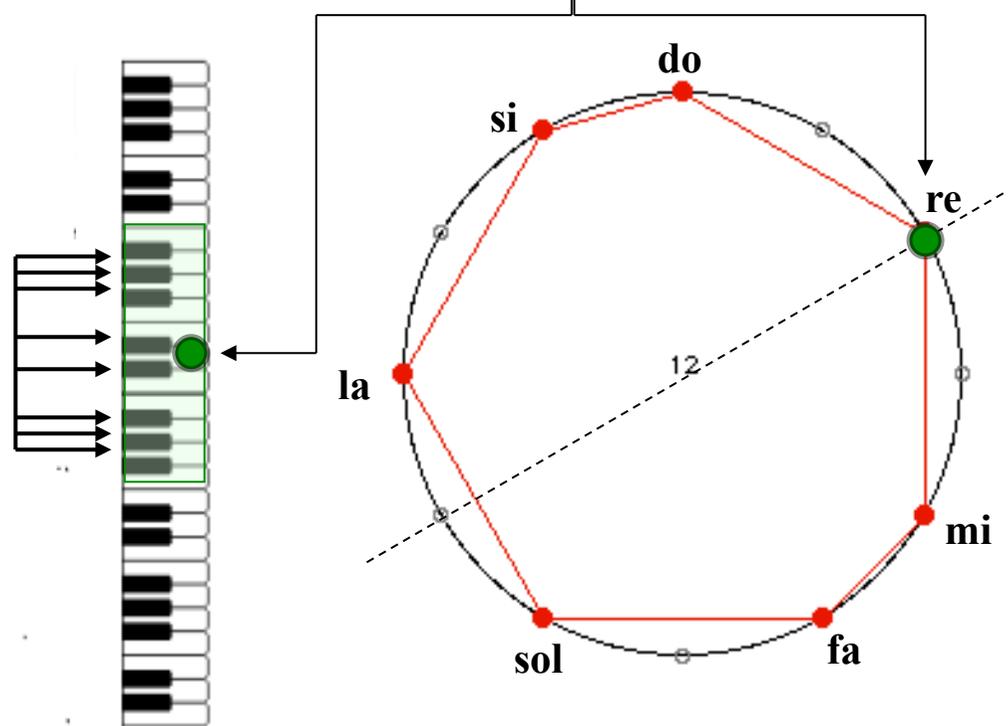
E. GIROD,
BOUCHERON DE MARAIS BARBÉ,
boulevard Mazarin, 16.

NETZ,
Typographie de ROUSSEAU-PALLEZ, Éditeur,
IMPRIMERIE DE MONSIEUR L'ÉVÊQUE,
rue des Clercs, 16.

1855.

- *Technie, ou lois générales du système harmonique (1855)*
- *Résumé élémentaire de Technie harmonique, et complément de cette Technie (1876)*

So	bb	Re	bb	Fa	Ut	Sol	Re	La	Mi	Si	Re \times	La \times
-15	-14	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+14	+15		



La symétrie du ré chez Camille Durutte



C. Durutte

*à m^r Nordlinges souvenir amical
C. Durutte*

ESTHÉTIQUE MUSICALE.

TECHNIE

ou

LOIS GÉNÉRALES DU SYSTÈME HARMONIQUE,

par le Comte CAMILLE DURUTTE, d'Ypres,

Compositeur, ancien Directeur de l'École polytechnique, Membre de l'Académie impériale de Metz.



PARIS,
MALLET-BACHELIER,
IMPRIMERIE-LIBRAIRIE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
quai des Grands-Augustins, 35.

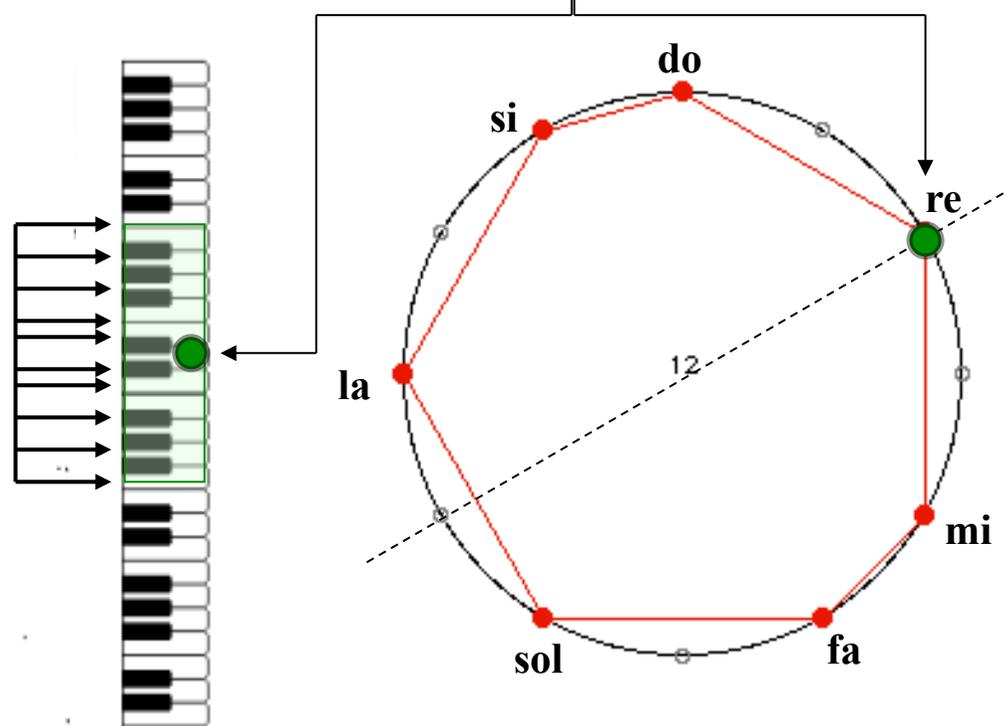
E. GIROD,
BOUCHERON DE MARAIS BARON,
boulevard Mazarin, 16.

NETZ,
Typographie de ROUSSEAU-PALLEZ, Éditeur,
IMPRIMERIE DE MONSIEUR L'ÉVÊQUE,
UNION DE L'ÉCOLE NORMALE,
rue des Clercs, 16.

1855.

- *Technie, ou lois générales du système harmonique* (1855)
- *Résumé élémentaire de Technie harmonique, et complément de cette Technie* (1876)

So	bb	Re	bb	Fa	Ut	Sol	Re	La	Mi	Si	Re \times	La \times
-15	-14	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+14	+15		



La théorie des cribles ou les structures d'ordre en musique

« [Une] théorie qui annexe les congruences modulo z et qui est issue d'une axiomatique de la structure universelle de la musique » (I. Xenakis, descriptif de la pièce *Nomos Alpha* pour violoncelle solo, 1966)

1₀

module

origine

... -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 ...

2₀

... -4 -2 0 2 4 6 8 10 ...

$$1_0 = 2_0 \cup 2_1$$

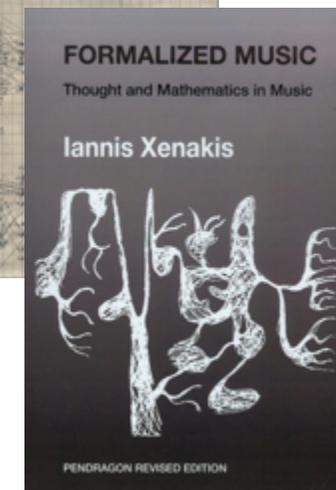
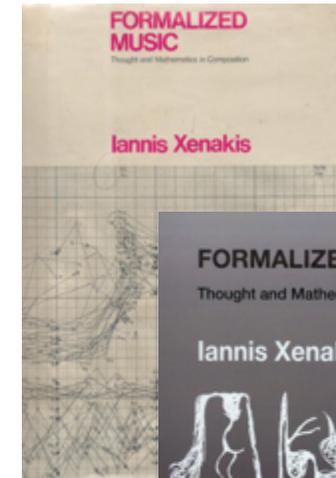
$$2_0 \cap 2_1 = \emptyset$$

2₁

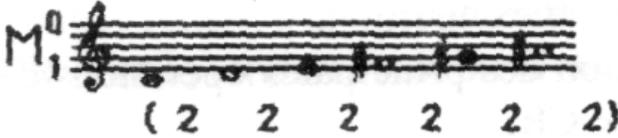
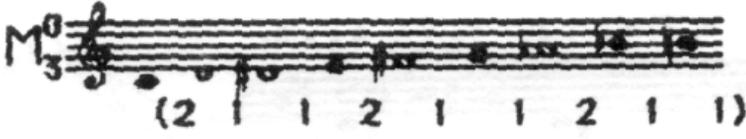
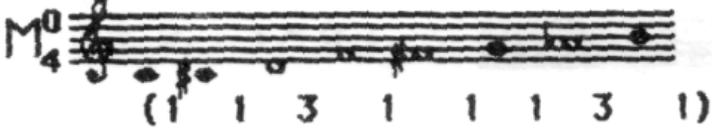
... -3 -1 1 3 5 7 9 ...

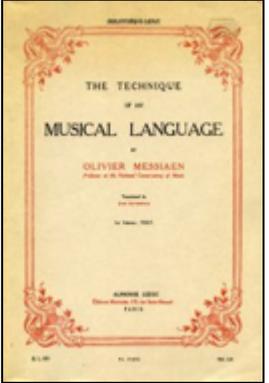
$$(2_0)^c = 2_1$$

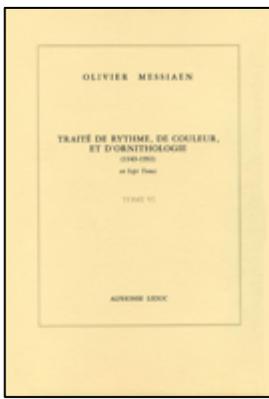
$$(2_1)^c = 2_0$$



Théorie des cribles et modes à transpositions limitées

 <p>M_1 (2 2 2 2 2 2)</p>	$2_0 = 4_0 \cup 4_2$ 2 transpositions		
 <p>M_2 (1 2 1 2 1 2 1 2)</p>	$3_0 \cup 3_1 = \overline{3_2}$ 3 transpositions		
 <p>M_3 (2 1 1 2 1 1 2 1 1)</p>	$4_0 \cup 4_2 \cup 4_3 = \overline{4_1}$ 4 transpositions		
 <p>M_4 (1 1 3 1 1 1 3 1)</p>	$6_0 \cup 6_1 \cup 3_2 = \overline{6_3 \cup 6_4}$ 6 transpositions		





A. Riotte, “L’utilisation de modèles mathématiques en analyse et en composition musicales”,
 Quadrivium musiques et sciences, éditions ipmc, Paris, 1992.

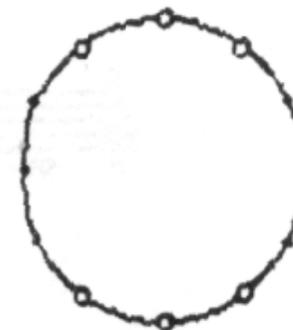
Théorie des cribles et modes à transpositions limitées

M_5^0


 (1 4 1 1 4 1)

$$6_0 \cup 6_1 \cup 6_5 = \overline{M_5^3}$$

6 transpositions



M_6^0


 (2 2 1 1 2 2 1 1)

$$2_0 \cup 6_5 = \overline{6_1 \cup 6_3}$$

6 transpositions



M_7^0


 (1 1 1 2 1 1 1 1 2 1)

$$\overline{6_4} = 6_0 \cup 6_2 \cup 2_1$$

6 transpositions



A. Riotte, "L'utilisation de modèles mathématiques en analyse et en composition musicales",
 Quadrivium musiques et sciences, éditions ipmc, Paris, 1992.

« Cribles » / Messiaen

Catalogue

(1 ₀)	(3 ₀)	6 ₀ ∪ 6 ₁
(2 ₀)	(4 ₀)	6 ₀ ∪ 6 ₂
	(6 ₀)	

6₀ ∪ 6₁ ∪ 6₅

Mode n.5

3₀ ∪ 3₁

Mode n.2

4₀ ∪ 4₂ ∪ 4₃

Mode n.3

2₀ ∪ 6₅

Mode n.6

6₀ ∪ 6₁ ∪ 3₂

Mode n.4

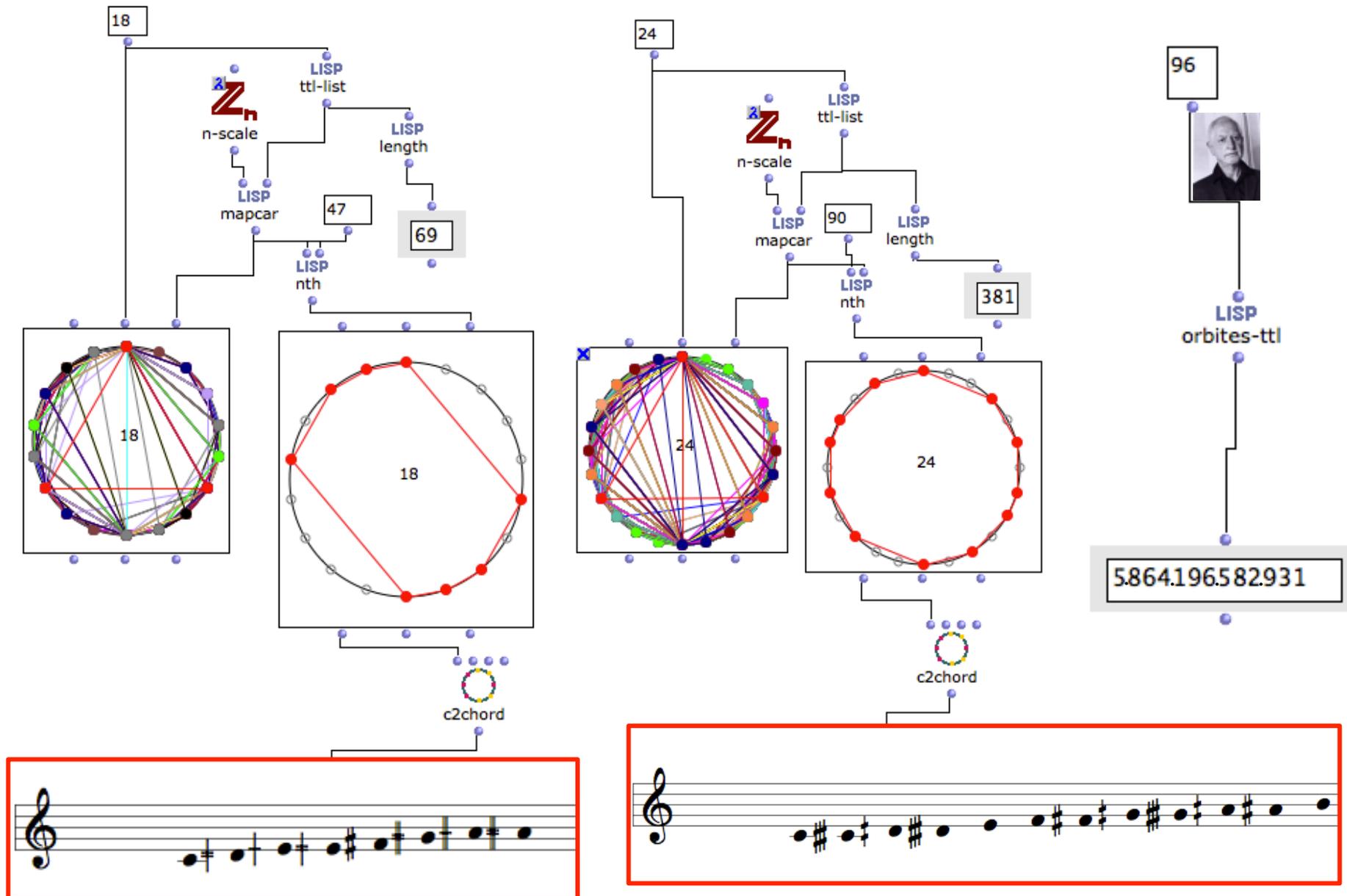
2₁ ∪ 6₀ ∪ 6₂

Mode n.7

Mode n.8

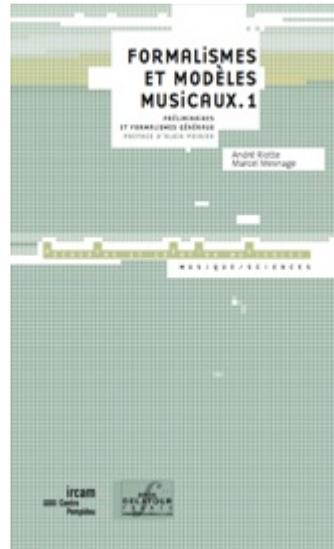
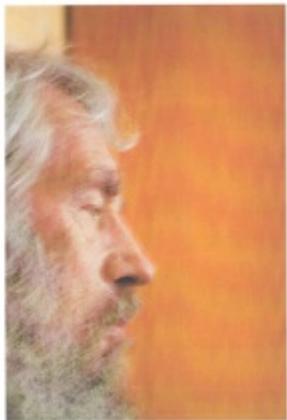
6₀ ∪ 6₁ ∪ 3₂

Extensions microtonales du catalogue des modes à transpositions limitées de Messiaen



L'analyse formalisée ou les entités formelles en musique

André Riotte e Marcel Mesnage



- « Anamorphoses » d'André Riotte
- « La terrasse des audiences du clair de lune » de Claude Debussy : esquisse d'analyse modélisée
- La mise en évidence de régularités locales : le « Mode de valeurs et d'intensités » de Messiaen
- Un exemple d'invention structurelle : le « Mikrokosmos » de Béla Bartok
- Un modèle informatique de la « Pièce pour quatuor à cordes » n°1 de Stravinsky
- Les « Variations pour piano », op. 27, d'Anton Werbern
- L'« Invention à deux voix » n°1 de J.-S. Bach
- Un modèle informatique du « Troisième Regard sur l'Enfant Jésus » d'Olivier Messiaen
- Un modèle de la « Valse sentimentale », Op. 50, n°13, de Franz Schubert
- Un automate musical construit à partir d'une courte pièce de Béla Bartok (Mikrokosmos n°39)

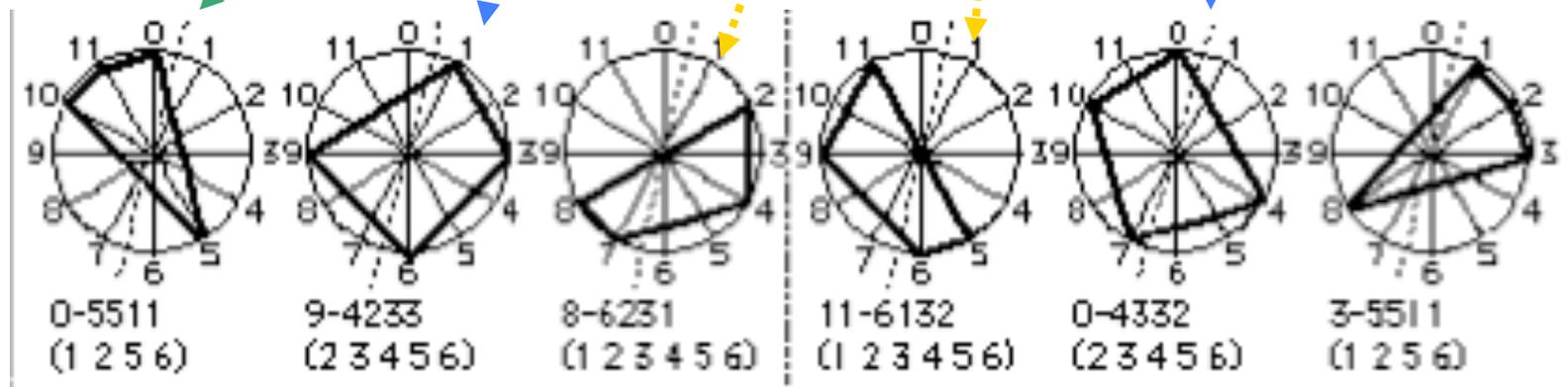
A. Riotte & M. Mesnage, *Formalismes et modèles musicaux* (en 2 volumes), Collection « Musique/Sciences », Ircam/Delatour France, 2006

L'école française en musicologie computationnelle

A. Riotte & M. Mesnage, *Formalismes et modèles musicaux* (in 2 volumes),
Collection « Musique/Sciences », Ircam/Delatour France, 2006



A. Schoenberg : *Klavierstück Op. 33a*, 1929



Classes d'équivalence d'accords

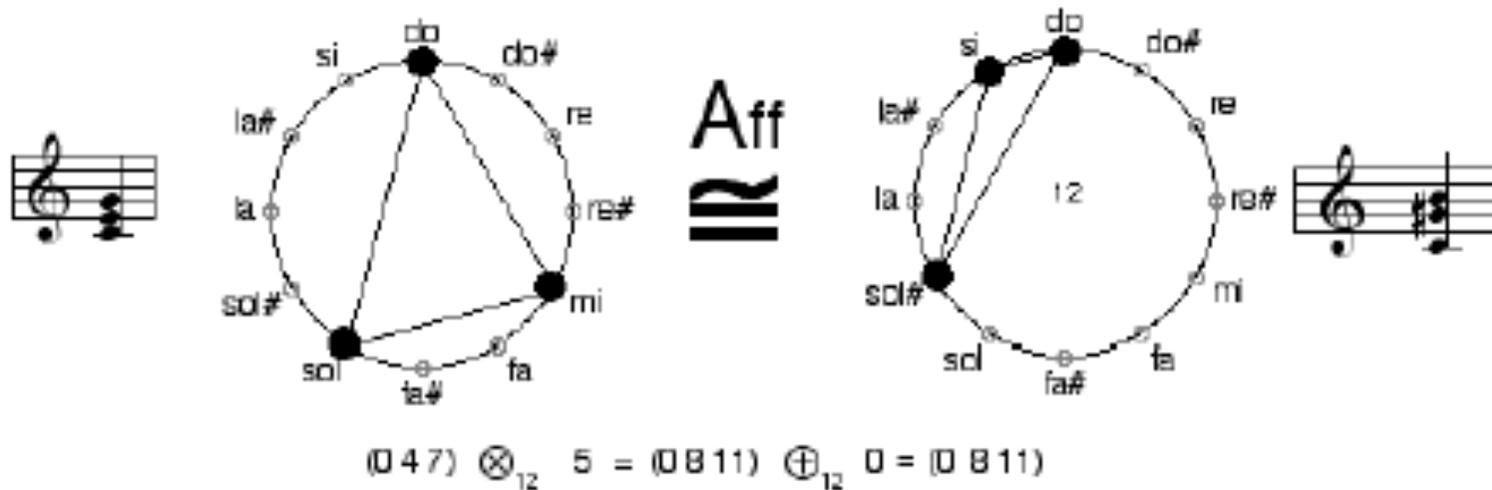


Transposition

$$T_3\{0, 4, 7\} = 3 + \{0, 4, 7\} = \{3, 7, 10\}$$

Transposition et/ou inversion

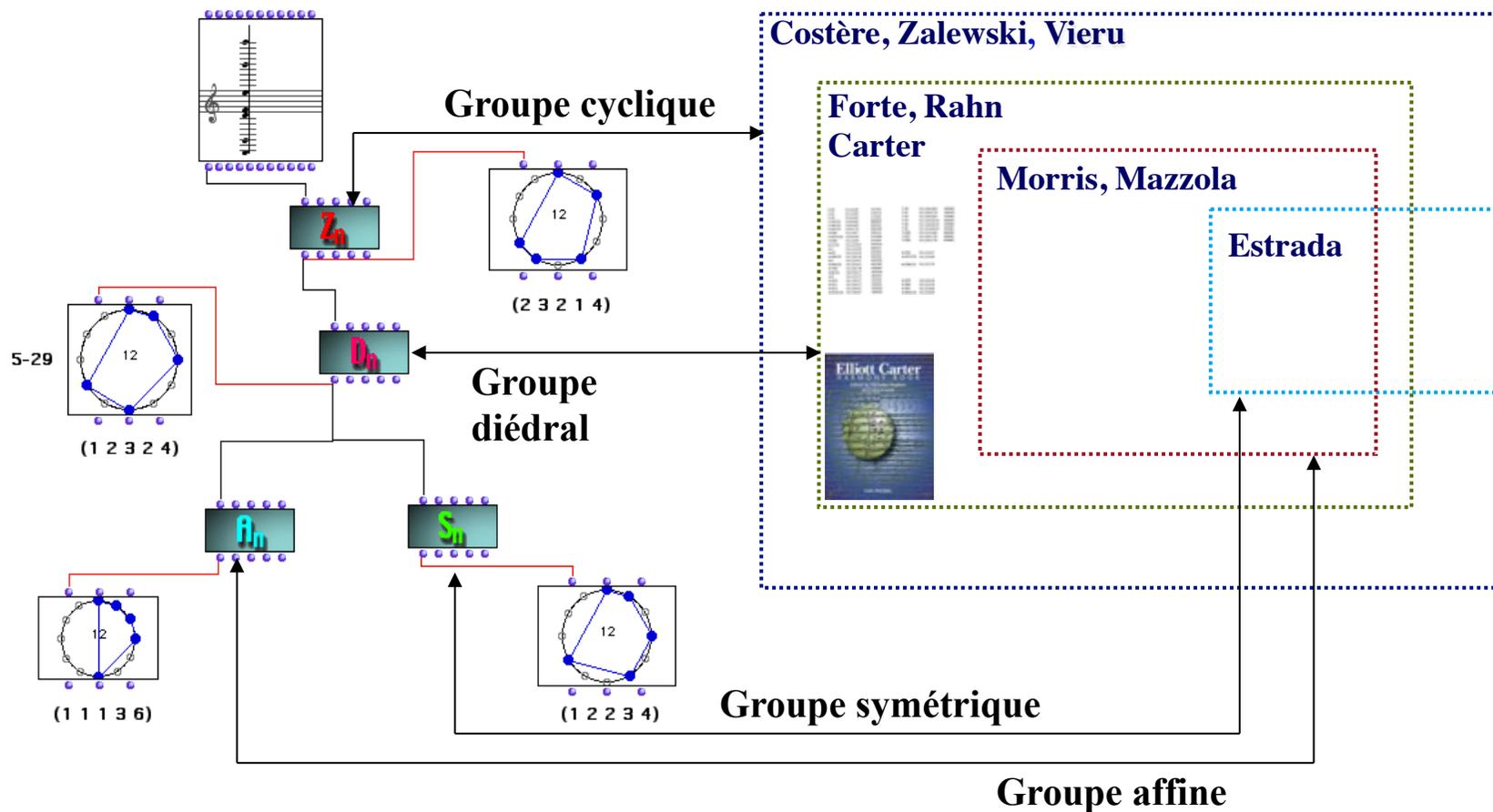
$$T_3I\{0, 4, 7\} = 3 + \{0, -4, -7\} = \{3, 11, 8\}$$



Multiplication (ou application affine)

$$M_5\{0, 4, 7\} = 5 \times \{0, 4, 7\} = \{0, 8, 11\}$$

Architecture paradigmatique et dualité objectale/opératoire

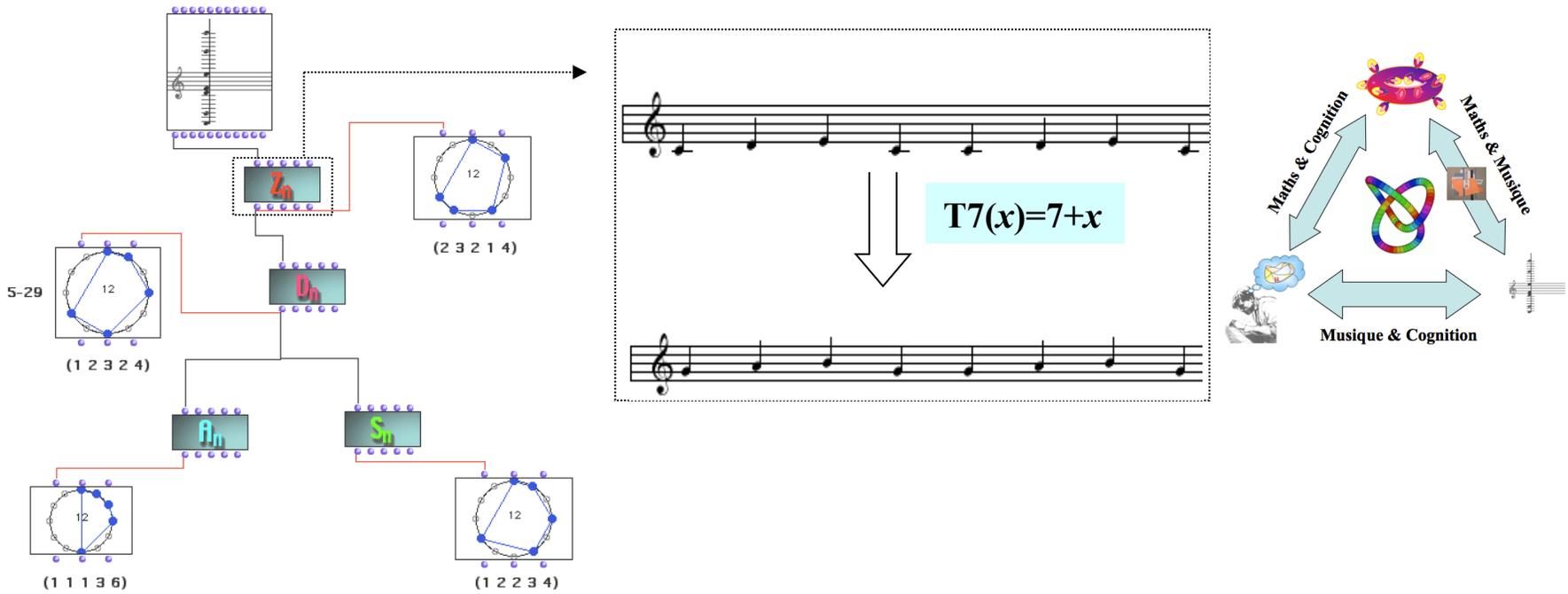


« [C'est la **notion de groupe** qui] donne un sens précis à l'idée de **structure** d'un ensemble [et] permet de déterminer les éléments efficaces des transformations en réduisant en quelque sorte à son **schéma opératoire** le domaine envisagé. [...] L'objet véritable de la science est le **système des relations** et non pas les termes supposés qu'il relie. [...] Intégrer les résultats - symbolisés - d'une expérience nouvelle revient [...] à créer un canevas nouveau, un **groupe de transformations** plus complexe et plus compréhensif » (G.-G. Granger : « Pygmalion. Réflexions sur la pensée formelle », 1947)



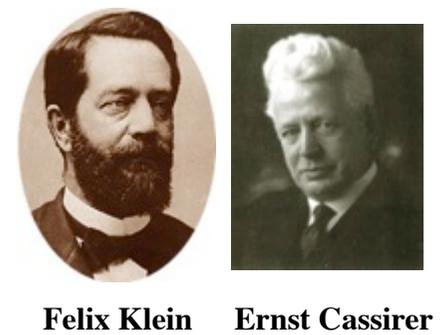
G.-G. Granger

La généalogie algébrico-géométrique du structuralisme



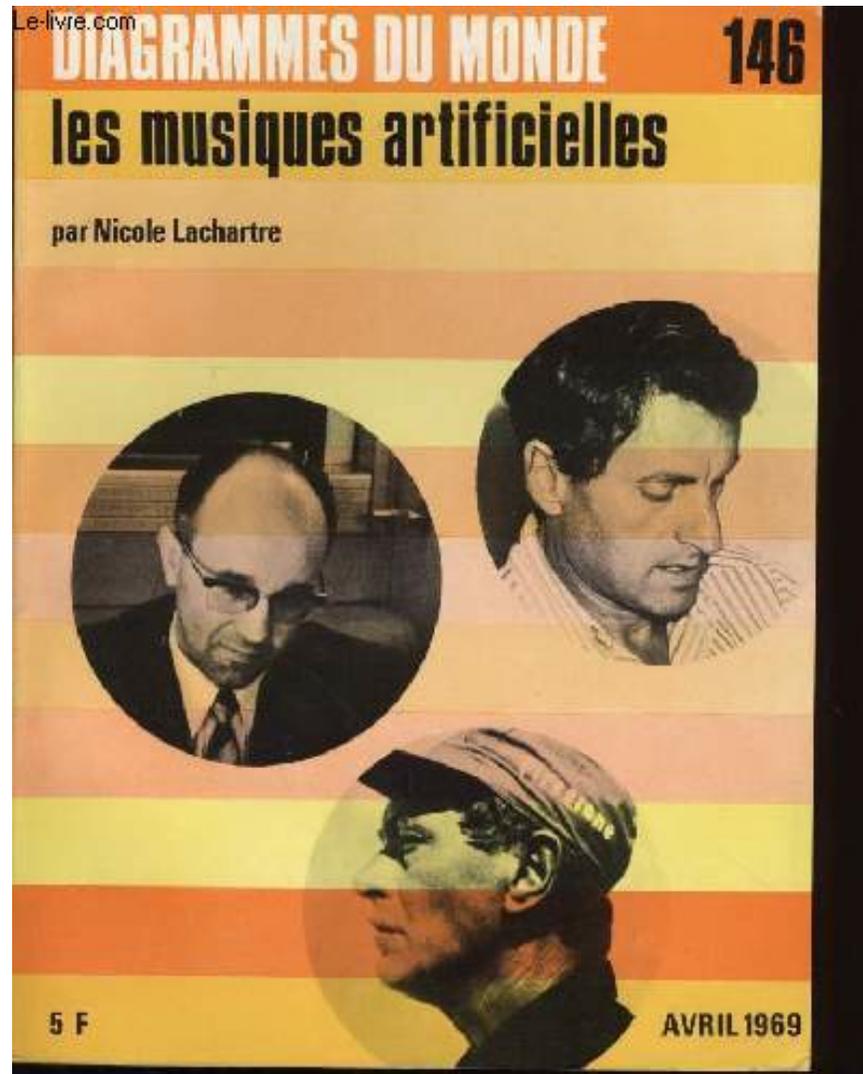
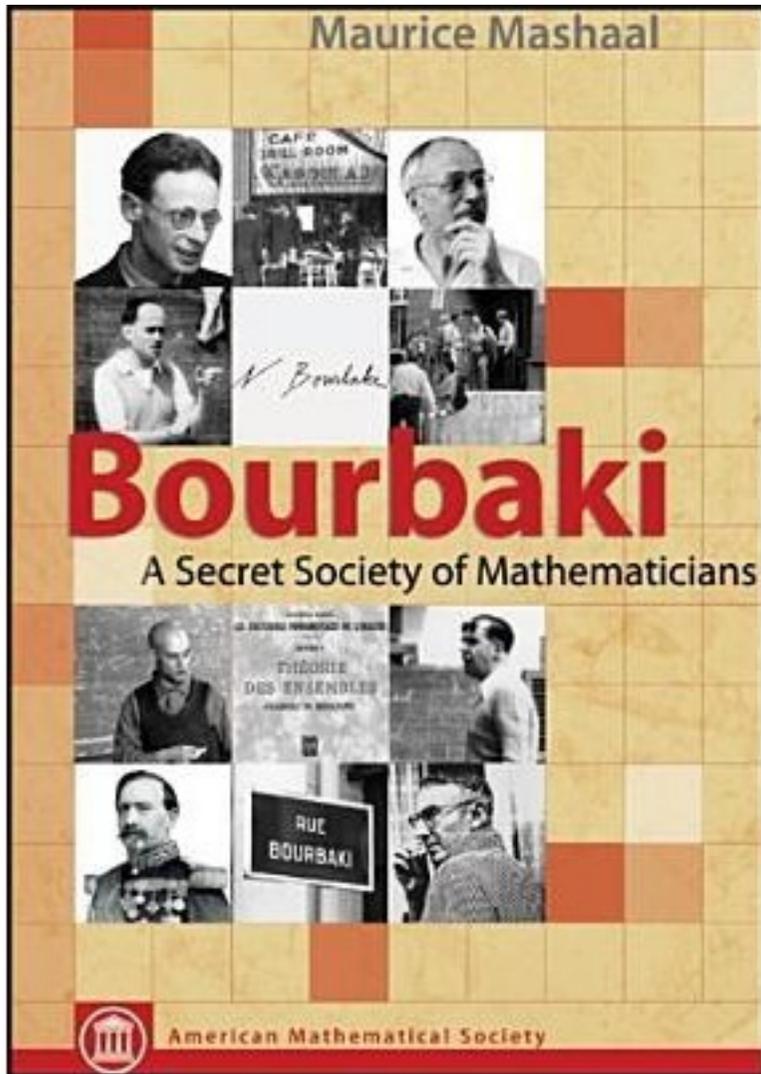
« La nature d'une géométrie donnée est définie par rapport à un **groupe** déterminé et la façon avec laquelle des formes spatiales sont liées entre elles à l'intérieur de ce type de géométrie [Cf. F. Klein, *Le Programme d'Erlangen* - 1872]. On peut se poser la question de savoir s'il y a des concepts et des principes qui sont [...] des conditions nécessaires pour à la fois la constitution du monde perceptuel et la construction de l'univers de pensée géométrique. Il me semble que le concept de **groupe** et la notion d'**invariance** sont précisément ces principes. »

E. Cassirer : « The concept of group and the theory of perception », 1944



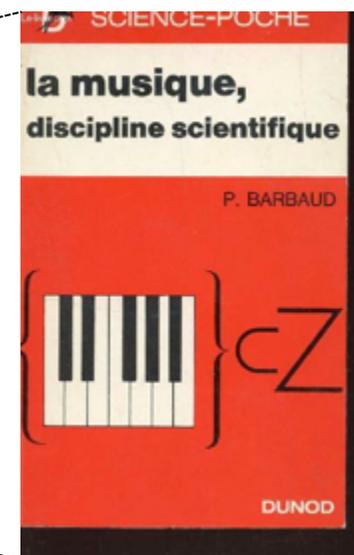
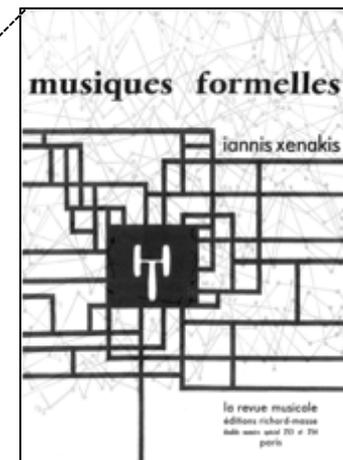
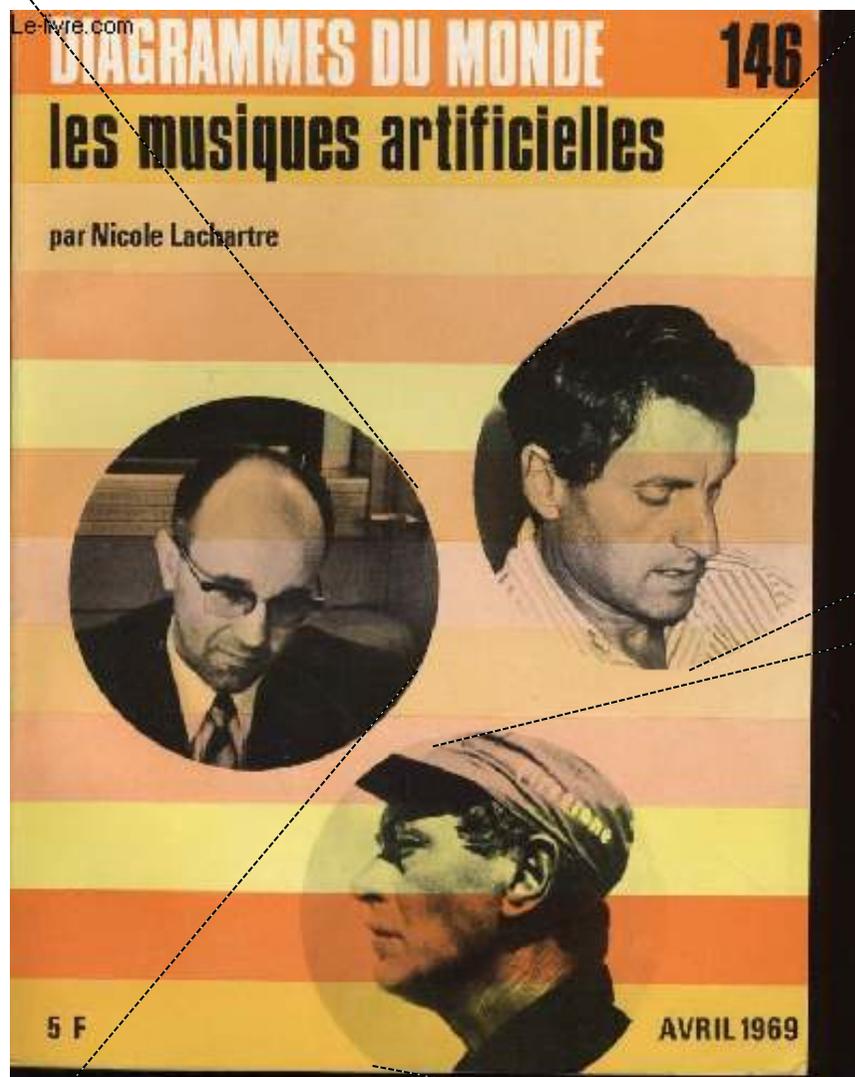
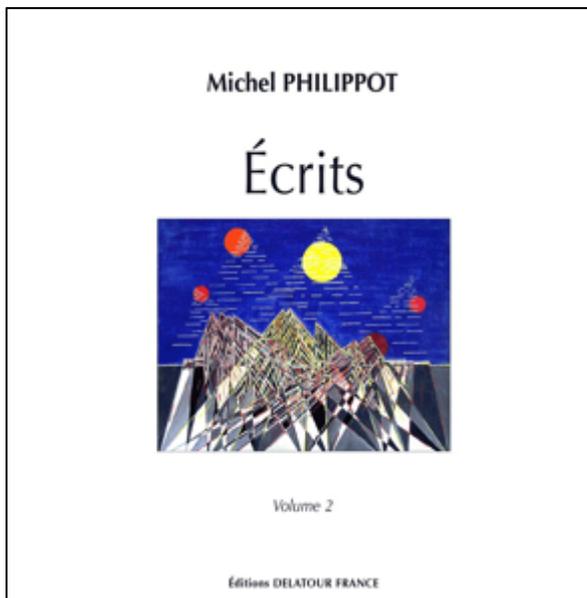
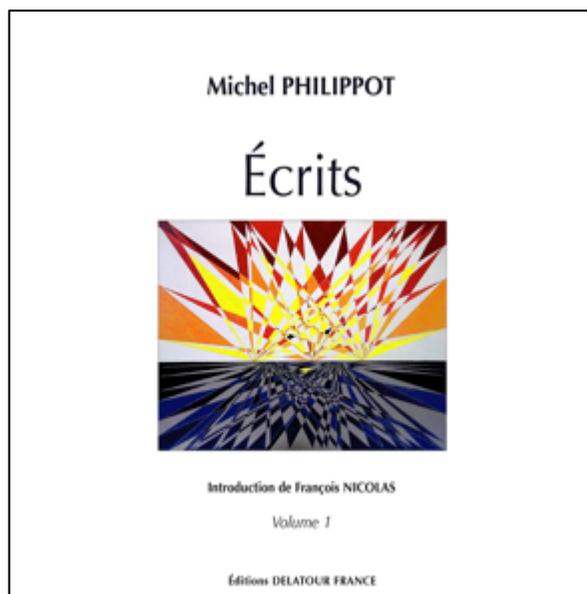
Felix Klein Ernst Cassirer

Peut-on parler d'une école formelle française en musique ? (de même qu'on peut parler d'une école française de mathématique ?)



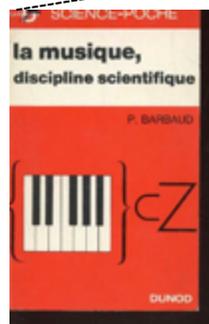
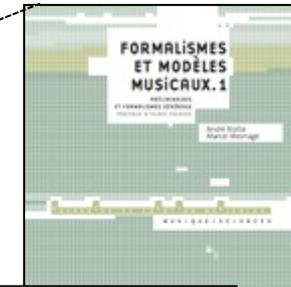
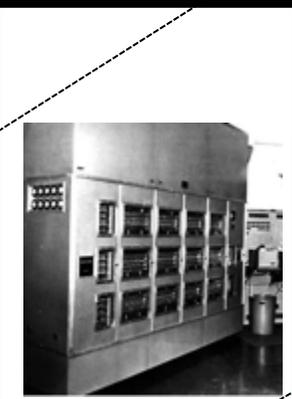
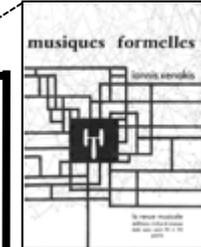
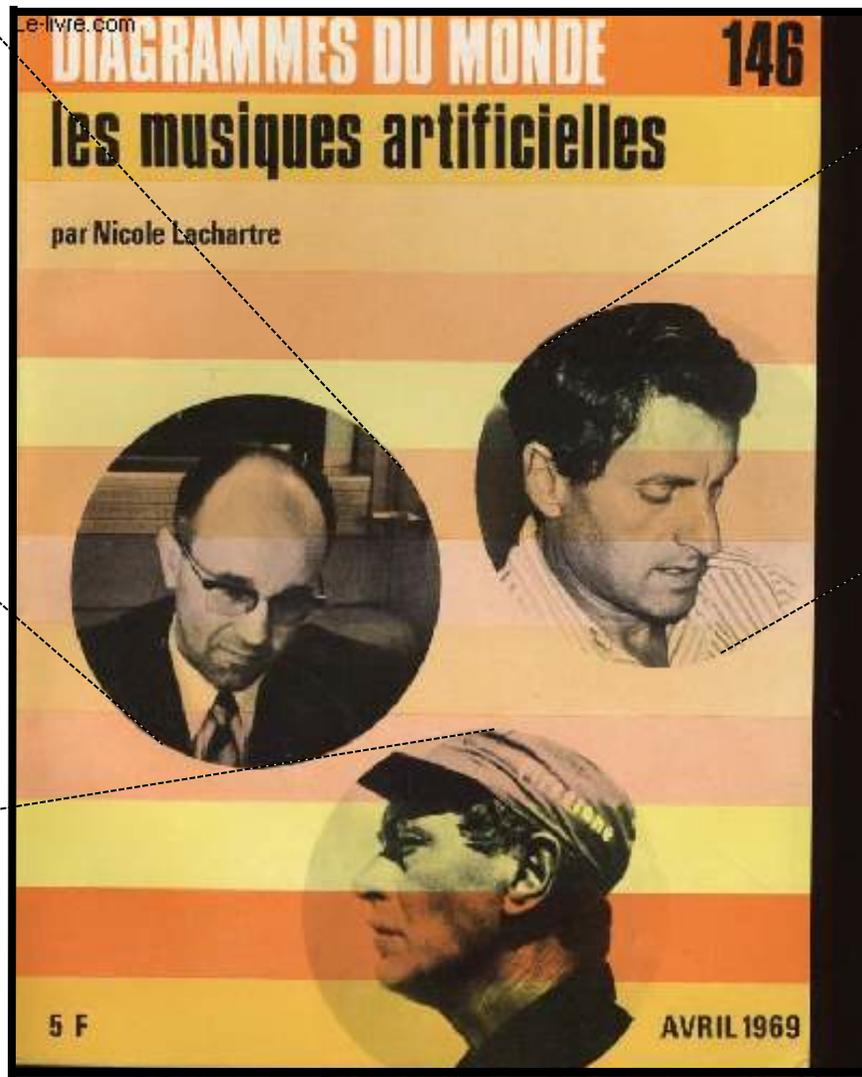
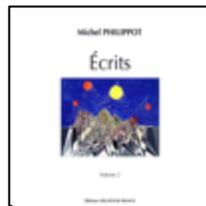
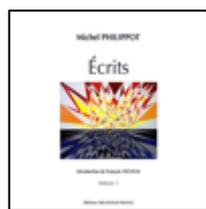
Peut-on parler d'une école formelle française en musique ?

(Pierre Barbaud (1911-1990), Michel Philippot (1925-1996) et Iannis Xenakis (1922-2001))



Peut-on parler d'une école formelle française en musique ?

Barbaud (1911-1990), Philippot (1925-1996), Xenakis (1922-2001), André Riotte & Marcel Mesnage



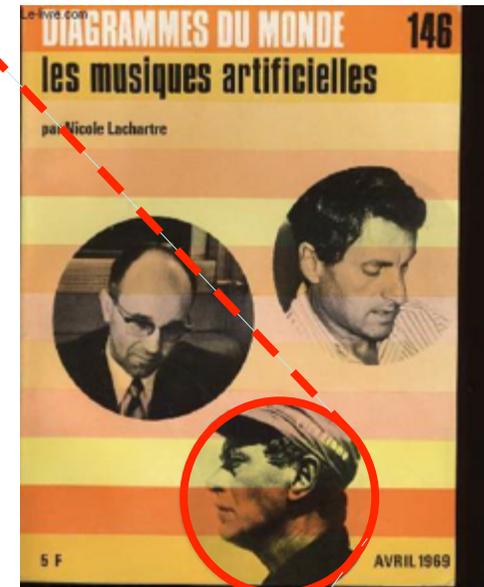
La place de l'algorithmique dans l'école formelle française

M. Andreatta, « Musique algorithmique », in In N. Donin et L. Feneyrou (dir.), *Théorie de la composition musicale au XX^e siècle*, Symétrie, 2013

« La musique algorithmique se distingue [...] des musiques concrète ou électronique [...] en ce qu'elle se veut *résolument systématique*. C'est, en d'autres termes, la recherche, l'élaboration et le classement des processus de mécanisation possibles sur des êtres sonores, une tentative d'industrialisation de la composition musicale. [...] Il s'agit :

- 1° d'établir un contrôle rigoureux des analyses des structures sonores qui constituent la musique, contrôle dont le critère ne peut être aujourd'hui que la possibilité de **mécanisation** ;
- 2° de mieux comprendre la nature de la création musicale en isolant expérimentalement son aspect objectif **formalisable** de son aspect proprement « humain » ;
- 3° de laisser la « machine » pousser à son extrême limite **la logique d'un système** dont elle fournirait un **modèle abstrait** sur lequel on peut encore s'interroger du point de vue « subjectif », mais en évitant [...] de confondre les problèmes de syntaxe avec ceux d'esthétique ;
- 4° d'**alléger le travail matériel du compositeur** et de simplifier et enrichir les méthodes d'enseignement de la composition musicale [...]

(P. Barbaud, *Musique algorithmique*, *Esprit*, 280, 1960, p. 92-96).





L'école française en musicologie computationnelle

M. Mesnage & A. Riotte, « Modélisation informatique de partitions, analyse et composition assistées », *Formalismes et modèles musicaux* (vol. 2), p. 209-218, Collection « Musique/Sciences », Ircam/Delatour France, 2006 (orig. 1993)



Formalisation

Une autre voie a été ouverte par le compositeur américain **Milton Babbitt** [1961], qui a développé dès 1955 un travail à base mathématique sur le système dodécaphonique; c'est dans cette même direction qu'**Allen Forte** [1973] a publié son répertoire exhaustif des accords (modulo 12, c'est-à-dire à l'octave près) connu sous le nom de *Set Theory*, formalisme amélioré par **John Rahn** [1980], puis complété sur le plan temporel par **Robert D. Morris** [1987]. En France, les pionniers ont été **Michel Philippot** [1960], qui a appliqué des techniques mathématiques à l'analyse de ses propres œuvres, **Iannis Xenakis** [1963 ; id. 1967], qui a énoncé les bases d'une représentation mathématique de la musique libérée de la notation et du vocabulaire traditionnels, et **Pierre Barbaud** [1965; id. 1968]. L'un des auteurs [RIOTTE 1962 ; id. 1969] a développé à la même époque un premier travail informatique visant à calculer exhaustivement une classe de séries à double contrainte (hauteurs et intervalles), les cycles équilibrés.

L'école française en musicologie computationnelle

A. Riotte, « Formalismes, modèles : un nouvel atout pour la composition et l'analyse », dans A. Riotte & M. Mesnage, *Formalismes et modèles musicaux* (vol. 2), p. 245-259, Collection « Musique/Sciences », Ircam/Delatour France, 2006 (orig. 1993)



Mathématisation

Plus spécifique que l'étape précédente [*formalisation*], elle implique une approche aux **intentions théoriques** et suppose une **logique rigoureuse** dans l'application des formules employées, qui ont trait le plus souvent à un sous-ensemble des données mesurables caractéristiques des sons mis en jeu.

C'est la démarche classique des scientifiques qui cherchent à décrire un phénomène physique et à en prévoir les diverses manifestations.

On peut considérer que ces données relèvent en premier lieu de l'organisation de l'**espace musical** (ce qui suppose alors des sons ayant une composante de hauteur fondamentale stable) ou du **temps** (là encore, le début et la durée des sons doivent pouvoir être précisément localisés, au moins en première approximation).

Retour sur la table des correspondances maths/musique

« [...] La **musique** est un puissant **condenseur**, plus puissant peut-être que les autres arts. C'est pourquoi j'ai dressé un **tableau de comparaison entre certaines conquêtes de la musique et plusieurs réalisations des mathématiques**, telles que l'histoire nous les enseigne [...]. Ce tableau montre une des voies que la musique a prise dès ses origines, c'est-à-dire dès l'Antiquité, et qu'elle a fidèlement suivie au cours des millénaires, pour la parcourir de plus en plus rapidement au vingtième siècle - ce qui prouve que loin d'être une mode, cette **faculté de condensation et d'abstraction croissante** est un trait fondamental de la musique, un trait qui lui appartient plus qu'à tout autre art. En conséquence, il est clair qu'un nouveau type de musicien est nécessaire, celui de l'artiste-concepteur de nouvelles formes, libres, abstraites et visant à rendre plus complexe et à généraliser l'organisation des sons sur plusieurs niveaux.

[...] **L'artiste-concepteur** devra se doter d'une connaissance suffisante en **mathématiques**, en **logique**, en **physique**, en **chimie**, **biologie**, **génétique**, **paléontologie** (en raison des problèmes que pose l'évolution des formes), en **sciences humaines** et en **histoire**, il faut, en bref, non seulement qu'il acquière une sorte d'universalité, mais que celle-ci soit fondée sur les formes et les architectures, guidée par elles, et orientée vers elles. »

(I. Xenakis, « Les chemins de la composition musicale », (tr. Française E. Gresset, in *Musique et ordinateur*, Les Ulis, 1983)

Les maths...un exercice de musique !

[Cf. M. Andreatta : *Mathematica est exercitium musicae*, HDR, octobre 2010]

« La musique, **activité ludique de caractère combinatoire**, échappera-t-elle, dans un avenir plus ou moins lointain, à ceux qui traditionnellement la mènent à bien de façon empirique, à un niveau artisanal, tant sur le plan de la composition que sur celui de l'exécution, pour donner naissance à des **recherches** dont les **buts** seront beaucoup **plus généraux** que ceux jusqu'ici assignés à ce domaine de la pensée, et dont les **méthodes** seront **plus scientifiques** ? Il est permis de le penser. »

(P. Barbaud, *Schoenberg*, Editions Main d'Œuvre, 1997, p. 181. Orig. 1963)

Canons rythmiques mosaïques

Relation Z et ensembles homométriques

18 → (0 1 4 6) → [111111] → 4-Z15

23 → (0 1 3 7) → [111111] → 4-Z29

$Df(x)=f(x)-f(x-1).$

7 11 10 11 7 2 7 11 10 11 7 2 7 11...

4 11 1 8 7 5 4 11 1 8 7 5 4 11...

7 2 7 11 10 11 7 2 7 11 10 11...

7 5 4 11 1 8 7 5 4 11 1 8...

.....

Calcul des différences finies

Set Theory, théories transformationnelle et neo-riemanniennes

Théories diatoniques et ME-sets

Block-designs

Maths/musique : un domaine de recherche

• 1999 : 4^e Forum Diderot (Paris, Vienne, Lisbonne), *Mathematics and Music* (G. Assayag, H.G. Feichtinger, J.F. Rodrigues, Springer, 2001)

• 2000-2001 : *MaMuPhi Seminar, Penser la musique avec les mathématiques ?* (Assayag, Mazzola, Nicolas éd., Coll. 'Musique/Sciences', Ircam/Delatour, 2006)

• 2000-2003 : International Seminar on *MaMuTh (Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory)* (Mazzola, Noll, Luis-Puebla eds, epOs, 2004)

• 2003 : *The Topos of Music* (G. Mazzola et al.)

• 2001-... : *MaMuX Seminar* at Ircam

• 2004-... : *mamuphi Seminar* (Ens/Ircam)

• 2006 : Collection 'Musique/Sciences' (Ircam/Delatour France)

• 2007 : *Journal of Mathematics and Music* (Taylor & Francis) and *SMCM*

• 2007-... : *Mathematics and Computation in Music Conferences* (2007 Berlin, 2009 Yale, 2011 Ircam, 2013 McGill, 2015, Londres) and *Proceedings* by Springer

• 2007-... : *AMS Special Session on Mathematical Techniques in Musical Analysis*

• 2009 : *Computational Music Science* (eds: G. Mazzola, M. Andreatta, Springer)

• 2010 : *Mathematics Subject Classification : 00A65 Mathematics and music*

• 2014 : *Mathemusical Conversations* (Inst. for Mathematical Sciences, Singapore)





MERCI DE VOTRE ATTENTION !

Moreno Andreatta

Equipe Représentations Musicales

IRCAM/CNRS UMR 9912