Jahrbuch Überblicke Mathematik 1980, 167–184

Jahrbuch
Überblicke
Mathematik
1980

Mathematische Sprache in der Musiktheorie

von Rudolf Wille

Die Bedeutung der Mathematik für die Musiktheorie wird gegenwärtig nur gering eingeschätzt. Zwar wird immer wieder die geistige Verwandtschaft von Musik und Mathematik hervorgehoben, etwa wenn der Physiker A. D. Fokker [13] für beide Gebiete eine ideelle Ordnung immaterieller Objekte als grundlegend ansieht, wenn der Mathematiket H. S. M. Coxeter [6] eine Affinität zwischen dem musikalischen Kompositionsakt und der Entdeckung mathematischer Sachverhalte erkennt oder wenn der Komponist E. Křenek [23] die Autonomie axiomatischen Denkens als beispielgebend für das musikalische Denken herausstellt; auch P. Boulez [4] vergleicht das Musikdenken mit dem Denken der Mathematiker und Physiker, und I. Xenakis [12] meint, in den verschiedensten Bereichen der Mathematik fruchtbare Unterstützung für die musikalische Komposition zu finden. Dennoch haben Versuche, mathematische Methoden in der Musiktheorie anzuwenden[1)], wenig Resonanz gefunden, ja sie sind, größtenteils zu Recht, als musikalisch irrelevant kritisiert worden, da in ihnen stärker die mathematische Eigengesetzlichkeit als Fragen aus der Musiktheorie die Inhalte bestimmen. W. M. Stroh [36] sieht in diesen Versuchen noch kritischer einen unlauteren *musikterminologischen Kunstgriff: die radikale Neuformulierung alter Sachverhalte und Fragestellungen, welche nicht nur in einzelnen Vokabeln, sondern mit Hilfe ganzer formaler Sprachschöpfungen vorgenommen wird, soll die Entdeckung verborgener, systematischer Theorien vortäuschen und deren Existenz beweisen.* Auch die statistischen Untersuchungen in der Musik, wie sie etwa in dem Bericht von W. Fucks und J. Lauter [15] zusammengefaßt sind, haben wenig Interesse bei den Musiktheoretikern geweckt, wohl ebenfalls wegen des Mangels an musiktheoretischer bzw. musikwissenschaftlicher Reflexion[2)]. Schon 1925 hat E. Bloch [1] die Gefahren für eine mathematische Behandlung der Musiktheorie vorhergesehen, wenn er etwa schreibt: *Bei der mathematischen Formulierung all der Regeln und Gebräuche des Kontrapunktes käme bestenfalls ein neuer, ein nicht sonderlich grünender Zweig der Mathematik zum Vorschein, in der vom Kontrapunkt und gar erst von gehörter Musik wenig zu erkennen wäre.*

Ist man trotzdem davon überzeugt, daß mathematisches Denken in die Musiktheorie fruchtbar eingebracht werden kann, wo und wie hat man

---

[1] Eine größere Anzahl von Arbeiten hierzu findet man in den amerikanischen Zeitschriften „*Journal of Music Theory*" und „*Perspectives of New Music*".
[2] vgl. etwa E. Karkoschka [21]

dann anzusetzen? In seinem Buch „*Symmetrie*" gibt H. Weyl [38] eine vorsichtige Antwort: *Alle Musiker sind sich darin einig, daß dem Gefühlselement der Musik ein starkes formales Element unterbaut ist. Es mag sein, daß dieses Element einer ähnlichen mathematischen Behandlung zugänglich ist, wie sie sich bei der Kunst der Ornamentik bewährt hat. Wenn dem so ist, dann haben wir wahrscheinlich noch nicht das geeignete mathematische Werkzeug gefunden.* Besteht somit die Aufgabe, für den musiktheoretischen Bereich die angemessenen Werkzeuge, d.h. die geeigneten mathematischen Methoden, Kalküle bzw. Algorithmen zu suchen? Es scheint, daß dieses vorerst nicht die Hauptaufgabe ist. So wie für die Nutzung eines Werkzeuges zunächst notwendig ist, den Gegenstand werkzeuggerecht in den Griff zu bekommen, müssen für die Anwendung mathematischen Denkens als erstes die musikalischen Sachverhalte geeignet begriffen, d.h. auf mathematisch handhabbare Begriffe gebracht werden.

Nun finden sich in der Musiktheorie durchaus mathematische Sprachelemente in vielfältiger Form, doch ist mit ihnen bisher auch nicht auszugsweise musiktheoretisches Denken formulierbar und, was zunächst noch schwerer wiegt, es hat sich für sie vielfach ein inkongruenter Gebrauch eingebürgert, womit nur zu oft Verwirrung gestiftet wird. Als Beispiel sei hier das „*Lehrbuch der Zwölftontechnik*" von H. Eimert [11] zitiert:

> *Dagegen bleibt zu bedenken, daß der Tritonus nicht nur aus sechs Halbtönen besteht, sondern daß er selbst der siebte Ton ist, deren es im ganzen zwölf gibt. Der Tritonus halbiert zwar die Oktave, aber er teilt auch die Zwölftonreihe (von c bis h) im Verhältnis 7:12, – das ist alles andere als „neutral", die wahre Kabbala der Musik, ein tief magisches Verhältnis, über welches das Denken nicht mehr zur Ruhe kommt.*

Unzulässig im angegebenen Beispiel ist die Bildung des Verhältnisses von Ordinanzahl 7 und Kardinalzahl 12, erst recht, im vergleichenden Kontext mit dem Verhältnis der Kardinalzahlen 6 und 12. Dieser inkongruente Gebrauch natürlicher Zahlen ist schon angelegt in der doppelten Deutung des Ausdruckes ⟨Tritonus⟩: einmal wird er kardinal als Vereinigung von sechs Halbtonstufen gedeutet, das andere Mal ordinal als siebenter Ton der chromatischen Tonleiter. Die hier sichtbar werdende gefährliche Verflechtung von zwei unabhängig voneinander gebrauchten Denkweisen, dem Denken in Tönen und dem Denken in Intervallen, ist tief in das musiktheoretische Denken eingeschliffen, was so grundlegende musiktheoretische Ausdrücke wie ⟨Halbton⟩, ⟨Ganzton⟩, ⟨Sekunde⟩, ⟨Terz⟩, ⟨Quarte⟩ usw. beweisen. Wenn auch die Unstimmigkeiten zwischen beiden Denkweisen nicht oft zu derartigen Mystifizierungen Anlaß geben, wie sie der Tritonus in dem obigen Beispiel erleiden muß, so verdunkeln sie doch vielfach musiktheoretische Gedankengänge derart, daß deren Gehalte kaum auszumachen sind. Dieses soll an einem weiteren Beispiel demonstriert werden.

In seinem Aufsatz „*Musikanalyse – eine exakte Wissenschaft?*" behandelt W. Reckziegel [27] u.a. das musiktheoretische Grundproblem der Klassifikation aller Zusammenklänge und schreibt in diesem Zusammenhang:

Die Frage nach der Anzahl der möglichen Zusammenklänge ist relativ einfach zu beantworten. Theoretisch sind die Kombinationen aller denkbaren Töne unübersehbar. Fragt man aber nach den möglichen Verbindungen von zwölf Elementen, so findet man nicht mehr als 2048 Kombinationen.

$$(1 \quad \sum_a \binom{11}{a-1} = 2048 \qquad (1 \leqslant a \leqslant 12)$$

Von 12 Tönen werden 1 bis 12 (allgemein: a) verschiedene mit „11 über a – 1" Intervallen kombiniert.

In der Zahl 2048 sind aber sämtliche Umkehrungen der Zusammenklänge einzeln gewählt, weil die Intervallstruktur jeder Umkehrung verschieden ist. Stellen wir die Frage einmal anders: Wie oft können 11 verschiedene Intervalle zu je a (1 bis 12) Tönen gruppiert werden, so daß die Reihenfolge der Intervalle vernachlässigt wird und die Summe der Halbtöne konstant zwölf ist?

Die Antwort ist nicht schwer zu finden, wenn auch die entsprechende Formel sehr kompliziert aussieht:

$$(2) \sum_a \sum_{ijkl} \left[\frac{13 - a - 3i - 4j \ldots - (a-1)k - al}{2} \right] = 77$$

$$(1 \leqslant a \leqslant 12; i, j, k, l \geqslant 0; \quad A > 0 \text{ ganzzahlig})$$

Für i, j, k, l sind ganze Zahlen von 0 aufwärts einzusetzen, und zwar so lange, als der Klammerausdruck A – ganzzahlig aufgerundet – ein positives Ergebnis liefert.

Wie sind die Ausdrücke, die sich in dem Text auf Zusammenklänge beziehen, begrifflich zu deuten? Offenbar steht ‹die Kombination aller denkbaren Töne› für ‹alle Zusammenklänge›. Unklarer ist, was ‹mögliche Verbindungen von zwölf Elementen› meint. Man ist versucht, an die Teilmengen einer zwölfelementigen Menge zu denken: ihre Anzahl ist jedoch 4096 ($= 2^{12}$) und nicht 2048 ($= 2^{11}$). Daß dieser Widerspruch seine Ursache in einer Inkongreuenz zwischen dem Denken in Tönen und dem Denken in Intervallen haben könnte, darauf weist die Erläuterung des Ausdrucks ‹Töne mit Intervallen kombiniert› hin. Noch schwerer als im ersten ist im zweiten Textteil der musiktheoretische Gehalt greifbar. Ist gemeint, daß ein Gleichsetzen der Umkehrungen zu dem Begriff führt, der durch den Ausdruck ‹Intervalle zu je a Tönen gruppiert, so daß die Reihenfolge der Intervalle vernachlässigt wird und die Summe der Halbtöne konstant 12 ist› benannt wird, und wie ist dieser Begriff musiktheoretisch einzuordnen? Die Anzahl 77 deutet darauf hin, daß mathematisch gesehen die (ungeordneten) Partitionen der Zahl 12 gezählt worden sind[3], wobei dann die Par-

---

[3] Statt an der verunglückten Formel (2) orientiere man sich besser in Lehrbüchern der Kombinatorik (z.B. H.R. Halder, W. Heise [16], S. 73 ff).

titionen von 12 als Reduktion der Untergliederungen der Oktave in Teilintervalle zu verstehen sind. Wo ist nun aber die musikalische Erklärung für den Zusammenhang einer solchen Begrifflichkeit des Intervalldenkens mit dem Begriff des Zusammenklanges als einer Kombination von Tönen?

Wie die beiden Beispiele zeigen, nehmen Unklarheiten im musiktheoretischen Denken mit dem Einbeziehen mathematischer Sprachelemente durchaus nicht immer ab, insbesondere nicht, wenn sich dabei musiktheoretische und mathematische Zusmmenhänge gegeneinander querstellen. Was also für die Nutzung mathematischen Denkens in der Musiktheorie gebraucht wird, ist ein abgestimmtes mathematisches Sprachsystem, das sich eng an musiktheoretische Intensionen anlehnt und so musikalisch relevante Anwendungen mathematischer Methoden ermöglicht. Für ein solches Sprachsystem eignet sich die Form einer *extensionalen Standardsprache* im Sinne von H. Schnelle [33]. Eine Standardsprache der Musiktheorie gewinnt man aus der musiktheoretischen Fachsprache durch Explikation der logischen Form und der Begriffe, wobei die radikale Reduktion von Mehrdeutigkeiten und Vagheiten angestrebt wird. Die Genauigkeit der Darstellung soll in einer Standardsprache durch systematische Verwendung von Grammatik und Wörtern der Fach- bzw. Gemeinsprache einen derart hohen Grad erreichen, daß die Standardsprache als unmittelbares Übersetzungskorrelat einer logischen Zeichensprache (Konstruktsprache) verstanden werden kann. Besondere Klarheit erhält eine extensionale Standardsprache der Musiktheorie dadurch, daß ihre syntaktischen Ausdrucksgestalten nur Mengen, Elemente von Mengen oder Wahrheitswerte bezeichnen, daß man in ihr also die Begriffe auf ihren Umfang hin expliziert vorfindet und daß die logische Form als Prädikatenlogik bereitsteht.

Wenn nun im folgenden ein *axiomatischer Aufbau einer extensionalen Standardsprache der Musiktheorie* versucht wird, so muß ein solcher Versuch, soll der gesteckte Rahmen dieser Abhandlung nicht gesprengt werden, sehr beschränkt bleiben[4]: zum einen kann die Explikation der Begriffe nicht in der notwendigen Ausführlichkeit behandelt werden und zum anderen ist auch der Umfang der angesprochenen musiktheoretischen Inhalte kleinzuhalten. So soll eine extensionale Standardsprache der Musiktheorie nur soweit skizziert werden, daß sie ein Sprechen über Töne, Intervalle und Mehrklänge in Hinblick auf das schon genannte Klassifikationsproblem der Zusammenklänge ermöglicht, was insbesondere die Einschränkung gestattet, von den Tonmerkmalen nur die Tonhöhen zu betrachten.

Begonnen wird mit der Explikation der Begriffe Ton, Tonhöhe und Tonskala basierend auf der musikpsychologischen Grunderkenntnis, daß *die Wahrnehmung der Tonhöhe eine lineare und eine zyklische Seite umfaßt*[5]. Unter einer *Tonskala* soll ein Tripel (T, δ, p) verstanden werden,

---

[4] Ausführlicher ist dieser Aufbau in meiner Vorlesung „*Allgemeine mathematische Musiktheorie*" an der TH Darmstadt (SS 1979) behandelt worden.

[5] s. Riemann [28], S. 964

bei dem T eine Menge, δ eine injektive Abbildung von T in die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen und p eine positive reelle Zahl ist; es heißen die Elemente von T *Töne*, $\delta(t)$ die *(additive) Tonhöhe* des Tones t und p die *Oktavdistanz* der Tonskala. Definiert man $t\omega t'$, falls $\delta(t) - \delta(t')$ ein ganzzahliges Vielfaches von p ist, so erhält man eine Äquivalenzrelation ω auf T, die *Oktavrelation* heißt und deren Äquivalenzklassen *Tonigkeiten* genannt werden. Dominierendes Beispiel einer Tonskala ist gegenwärtig die *gleichstufige 12-Tonskala* $(\mathbb{Z}, \delta_2, 6)$, bei der $\mathbb{Z}$ die Menge aller ganzen Zahlen ist und $\delta_2(z) = \frac{z}{2}$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ gilt; $(\mathbb{Z}, \delta_2, 6)$ hat offenbar 12 Tonigkeiten.

In bezug auf eine Tonskala (T, δ, p) werden weitere musiktheoretische Begriffe expliziert: Eine Teilmenge K von T heißt ein *Klang;* besteht K aus n Tönen, so heißt K auch *n-Klang.* Ein geordnetes n-Tupel von Tönen wird *geordneter n-Klang* genannt. Für einen geordneten 2-Klang (t_1, t_2) wird als *Distanz* $\delta(t_1, t_2) := \delta(t_2) - \delta(t_1)$ definiert. Seit dem 19. Jahrhundert werden in der Musiktheorie *die Ausdrücke Harmonie und Akkord entweder synonym gebraucht, oder die Harmonie wird als zugrunde liegendes Wesen vom Akkord als äußerer Erscheinung unterschieden; verschiedene Akkorde (c – e – g, e – g – c*^{1}*) repräsentieren die gleiche Harmonie (C dur-Harmonie)*[6]. In Anlehnung an derartige Begriffsbeschreibungen werden als *Harmonien* die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation Ω bezeichnet, die auf der Menge $\mathfrak{K}(T)$ aller Klänge folgendermaßen definiert ist: es gilt genau dann $K\Omega K'$, wenn zu $t_1 \in K$ und $t_2' \in K'$ stets $t_1' \in K'$ und $t_2 \in K$ mit $t_1 \omega t_1'$ und $t_2 \omega t_2'$ existieren; ist n für eine Harmonie H das Minimum der Mächtigkeiten aller Klänge aus H, so heißt H auch n-Harmonie.

Grundlegend für das musikalische Hören ist die menschliche Fähigkeit, ein Klangereignis und seine transponierten Formen als gleichartig wahrzunehmen. Zur Explikation dieser Gleichartigkeit werden die *Transpositionen* τ_r $(r \in \mathbb{R})$ einer Tonskala (T, δ, p) definiert durch

$$\tau_r := \{(t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in T \quad \text{und} \quad \delta(t_1, t_2) = r\};$$

offenbar sind die Transpositionen injektive Abbildungen aus T in T. Nun erhält man eine Äquivalenzrelation Φ auf $\mathfrak{K}(T)$, wenn $K\Phi K'$ die Existenz eines $r \in \mathbb{R}$ mit $\tau_r K = K'$ bedeutet. Die Äquivalenzklassen von Φ werden *Klangformen* genannt. Die Klänge einer Klangform F haben alle gleiche Mächtigkeit; ist n diese Mächtigkeit, so heißt F auch *n-Klangform.* Die *Intervalle* sind nun gerade die 2-Klangformen. Das von $\{t_1, t_2\}$ repräsentierte Intervall $[t_1, t_2]$ ist schon eindeutig bestimmt durch $\delta[t_1, t_2] := |(t_1, t_2)|$, die sogenannte *Distanz* des Intervalles $[t_1, t_2]$. Ist $\delta[t_1, t_2] =$ so heißt das Intervall $[t_1, t_2]$ die *r-Tonstufe*, für $r = p$ auch *Oktave* und in der gleichstufigen 12-Tonskala für $r = \frac{1}{2}$ auch *Halbtonstufe* sowie für $r = 1$ auch *Ganztonstufe.*

Viele Bemühungen um die Klassifikation von Klängen konzentrieren vornehmlich auf den gemeinsamen Oberbegriff von Harmonie und Kl

---

[6] s. Riemann [28], S. 363

form, der durch die kleinste Ω und Φ enthaltende Äquivalenzrelation $\Omega \vee \Phi$ bestimmt ist. Die Äquivalenzklassen von $\Omega \vee \Phi$ werden *Harmonieformen* genannt; ist n für eine Harmonieform H das Minimum der Mächtigkeiten aller Klänge aus H, so heißt H auch *n-Harmonieform*. Namen von 3-Harmonieformen der gleichstufigen 12-Tonskala sind beispielsweise:

Name der 3-Harmonieform H	Repräsentant von H
Durdreiklang	$\{0, 4, 7\}$
Molldreiklang	$\{0, 3, 7\}$
verminderter Dreiklang	$\{0, 3, 6\}$
übermäßiger Dreiklang	$\{0, 4, 8\}$

An dieser Stelle soll der Aufbau der Standardsprache unterbrochen werden, um zu prüfen, wieweit die zur Verfügung gestellten Sprachmittel eine Klärung des zitierten Textes von W. Reckziegel erlauben. Man kann davon ausgehen, daß sich der Text auf die gleichstufige 12-Tonskala $(\mathbb{Z}, \delta_2, 6)$ bezieht. Für die Klangbegriffe dieser Tonskala hat man folgende Anzahlen: Klänge bzw. Klangformen gibt es unendlich viele, die Anzahl der Harmonien ist 4096 ($= 2^{12}$), da man die Harmonien als die Teilmengen der 12-elementigen Menge $\mathbb{Z}/\omega$ auffassen kann, und die Anzahl der Harmonieformen ist 352 auf Grund der Formel

$$|\mathfrak{K}(\mathbb{Z})/\Omega\vee\Phi| = \frac{1}{12} \sum_{d|12} \phi\left(\frac{12}{d}\right) 2^{d},$$

Lemma v. Burnside: $|M| = n$
Äquiv.klassen einer Menge M unter der von d. Gruppe G induzierten Äquivalenzrel. $G \leq S(n)$.
$= \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} \psi(\pi)$ $\psi(\pi)$ # Fixpunkte

die mit dem *Lemma von Burnside* unter Heranziehung der *Eulerschen ϕ-Funktion* leicht abgeleitet werden kann[7]. Die unterschiedlichen Anzahlen zeigen an, daß in dem zitierten Text weder Harmonien noch Harmonieformen gezählt werden, obwohl die Tonzahlen auf 1 bis 12 beschränkt sind.

Der Ausdruck ‹a Töne mit „11 über a – 1" Intervallen kombiniert› kann im Zusammenhang mit Formel (1) wohl nur so verstanden werden, daß von einem Ausgangston aufwärts a – 1 verschiedene Intervalle mit Distanzen zwischen $\frac{1}{2}$ und $5\frac{1}{2}$ abgetragen werden, was insgesamt a Töne unterschiedlicher Tonigkeit ergibt. Der so beschriebene Begriff läßt sich im Rahmen der extensionalen Standardsprache durch folgende Definitionen explizieren: Ein *Punkt-(n-)Klang* einer Tonskala (T, δ, p) ist ein Paar (t, K) mit $K \in \mathfrak{K}(T)$ und $t \in K$ ($|K| = n$). $(t, K)\Omega_1(t', K')$ steht für $t\omega t'$ und $K\Omega K'$. $(t, K)\Phi_1(t', K')$ gilt, falls ein $r \in \mathbb{R}$ mit $\tau_r t = t'$ und $\tau_r K = K'$ existiert. Analog zu (n-)Harmonie, (n-)Klangform und (n-)Harmonieform werden mit den Äquivalenzrelationen Ω_1 und Φ_1 die Begriffe *Punkt-(n-)Harmonie, Punkt-(n-)Klangform* und *Punkt-(n-)Harmonieform* definiert. Offenbar ist die Formel (1) auf die Punkt-Harmonieformen der gleichstufigen 12-Tonskala zu beziehen, denn man kann die Punkt-Harmonieformen als Teilmengen der 11-elementigen Menge aller Punkt-2-Harmonieformen

[7] s. H.-R. Halder, W. Heise [16], S. 33 sowie S. 69; ausführlicher in: H. Siemon [34], 1. Kap., Beisp. 5

nieformen auffassen[8]. Im zitierten Text bedeutet demnach der Ausdruck ‹Intervall› extensional gesehen nicht Intervall sondern Punkt-2-Harmonieform, eine Verwechselung, die man sehr häufig in der Musiktheorie antrifft.

In Hinblick auf Formel (2) reicht ein Gleichsetzen der Klangumkehrungen (z.B. c–e–g $\triangleq$ e–g–c^1 $\triangleq$ g–c^1–e^1) nicht aus, da das nur die Auszeichnung des jeweils tiefsten Tones aufhebt und somit zum Begriff der Harmonieform führt. Es sind Klänge äquivalent zu setzen, bei denen die Distanzenfolgen benachbarter Töne durch Permutation ineinander überführbar sind (z.B. c–e–g–b $\triangleq$ c–es–g–b); ferner ist von Tönen zu Tonigkeiten überzugehen. Da eine solche Äquivalenz von Klängen nur sehr aufwendig und unnatürlich mit dem Grundbegriff Ton bzw. Tonskala zu fassen ist, muß man zu dem Schluß kommen, daß der Anzahlbestimmung von Formel (2) kein musikalisch relevanter Begriff zugrunde liegt. Wird noch in (1) ein wenn auch nicht zentraler, so doch musikalisch relevanter Begriff angesprochen, so geht in (2), indem der mathematischen Eigengesetzlichkeit des Zahlbegriffs freier Lauf gelassen wird, der musikalische Bezug verloren. Damit ist auch W. Reckziegels Klassifikation der Klänge nach den sogenannten *Intervallstrukturen*, die den 77 Partitionen von 12 entsprechen, musikalisch nichtssagend.

In den ernster zu nehmenden Klassifikationen der Klänge der gleichstufigen 12-Tonskala, wie man sie etwa bei P. Perle [25], M. Zalewski [43], A. Forte [15] oder S. Schmelz [32] findet, werden in der Regel die 352 Harmonieformen weiter nach besonderen Eigenschaften und Beziehungen zueinander geordnet und gegliedert. Eine viel betrachtete Beziehung liefern die *Spiegelungen*, die allgemein für eine Tonskala (T, δ, p) durch

$$\sigma_r := \{(t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in T \quad \text{und} \quad \delta(t_1) + \delta(t_2) = 2r\} \quad (r \in \mathbb{R})$$

definiert werden (σ_r ist damit eine injektive Abbildung aus T in T). Bei der gleichstufigen 12-Tonskala liegen für alle Repräsentanten K einer Harmonieform F und für alle Spiegelungen σ_r mit $r = \frac{z}{4}$ $(z \in \mathbb{Z})$ die Klänge $\sigma_r K$ in derselben Harmonieform; diese wird das *Spiegelbild* von F genannt und mit F^σ bezeichnet. Faßt man jeweils die zueinander spiegelbildlichen Harmonieformen zusammen, verringern sich die Äquivalenzklassen der Klänge auf 224 $\left(= \frac{1}{24} \sum_{d|12} \phi\left(\frac{12}{d}\right) 2^d + \frac{1}{24} (6 \cdot 2^6 + 6 \cdot 2^7)\right)$[9].

Für die Harmonieformen der gleichstufigen 12-Tonskala besteht Mangel an Benennungen bzw. Notationen[10], die die grundlegenden Eigenschaften und Beziehungen der Harmonieformen unmittelbar deutlich werden las-

[8] Eine algebraische Theorie der Punkt-Harmonieformen der gleichstufigen 12-Tonskala entwickelt A. Romanowska in [31].

[9] Anzahlfragen zu Harmonieformen werden ausführlich von G. D. Halsey und E. Hewitt in [17] behandelt.

[10] Zu den Begriffen Benennung und Notation siehe DIN 2330 [8] und DIN 2331 [9].

sen. Bisherige Bezeichnungen – am gebräuchlichsten sind die Bezeichnungen durch repräsentierende Klänge aus $\{0, 1, 2, \ldots, 11\}$ – zeigen meistens nur mittelbar so wichtige Beziehungen wie die zwischen Spiegelbildern oder die zwischen Unter- und Oberharmonieformen an (F_1 heißt *Unterharmonieform* der Harmonieform F_2 bzw. F_2 heißt *Oberharmonieform* der Harnomieform F_1, in Zeichen $F_1 \leqslant F_2$, wenn Klänge K_1 in F_1 und K_2 in F_2 mit $K_1 \subseteq K_2$ existieren). Die grundlegende Ordnungsrelation $\leqslant$ bereitet bei der Suche nach guten Benennungen bzw. Notationen besondere Schwierigkeiten. Wünschenswert wäre ein Notationssystem aus Zahlentupeln für die Harmonieformen, wobei $(a_1, \ldots, a_n) \leqslant (b_1, \ldots, b_n)$ genau dann gelten soll, wenn $a_i \leqslant b_i$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$ ist. Natürlich möchte man dabei die Zahlentupel möglichst klein haben. Das führt auf die bisher ungelöste Frage nach der k-Dimension der geordneten Menge aller Harmonieformen der gleichstufigen 12-Tonskala. Allgemein ist die *k-Dimension* einer (halb-)geordneten Menge $(M, \leqslant)$ die kleinste Zahl n, so daß für $(M, \leqslant)$ ein Notationssystem aus n-Tupeln von Zahlen aus $\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ existiert[11]; besonders interessant sind die 10-Dimension (Ziffernnotationen) und die 2-Dimension (binäre Notation).

Da bisher allgemeine Verfahren für die Bestimmung der k-Dimension einer geordneten Menge nicht bekannt sind, schließt die Suche nach informativen Notationssystemen die nach geeigneten mathematischen Werkzeugen mit ein.

Die bisher angesprochenen Klassifikationen von Klängen sind alle unter dem Einfluß der Atonalität dieses Jahrhunderts entstanden und sind auch in Analysen größtenteils auf zeitgenössische Musik angewendet worden. Es drängt sich die Frage auf, wieweit sie auch der tonalen Musik früherer Jahrhunderte gerecht werden. Man betrachte beispielsweise die folgenden Klangschritte:

Die erste und dritte Klangbezeichnung bedeuten zwar im Kontext der gleichstufigen 12-Tonskala extensional das gleiche, intensional meinen sie jedoch etwas verschiedenes, was insbesondere die beiden Fortschreitungen anzeigen. Das Beispiel macht klar, daß die extensionale Semantik der gleichstufigen 12-Tonskala nicht ausreicht, um die Intensionen tonaler Musik, wie sie in den gebräuchlichen Tonnamen bzw. Notenzeichen eingefangen sind, erfassen zu können. Ohne nun R. Carnaps Vermutung stützen zu wollen, daß sich nicht extensionale Prädikate stets extensional ausdrücken lassen[12], soll die eingeführte extensionale Standardsprache

---

[11] Die bisher entwickelte Theorie der k-Dimension ist am ausführlichsten in W. Ritzert [29] dargestellt.

[12] s. R. Carnap [5], S. 114

der Musiktheorie so erweitert werden, daß die Intensionen der gebräuchlichen Tonnamen aussprechbar werden.

Der für die tonale Musik grundlegende Begriff einer *Tonleiter* wird expliziert als eine Tonskala (T, δ, p), die nur endlich viele Tonigkeiten hat und bei der zu $t_1, t_2 \in T$ mit $\delta(t_1, t_2) > p$ stets $t'_1, t'_2 \in T$ mit $\delta(t_1, t'_1) = p$ und $\delta(t'_2, t_2) = p$ existieren. Die folgenden Ausführungen werden auf die Dur-Tonleiter beschränkt, sie sind jedoch so formuliert, daß sie sich unschwer auf andere Tonleitern übertragen lassen. Die *Dur-Tonleiter* ist die Tonleiter $(\mathbb{Z}, \delta^+, 6)$, bei der $t\omega t'$ genau dann gilt, wenn $t - t'$ ein ganzzahliges Vielfaches von 7 ist, und bei der $\delta^+ : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ durch die folgende Tabelle bestimmt ist:

z	0	1	2	3	4	5	6
$\delta^+(z)$	0	1	2	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$

Der Tonvorrat einer Dur-Tonleiter wird häufig erweitert, indem Töne alteriert, d.h. um eine oder mehrere Halbtonstufen erhöht oder erniedrigt werden. Die neuen Töne werden dann nicht nur als Ton, sondern auch als Resultat einer Erhöhung bzw. Erniedrigung gedacht. Um diese Intension in der extensionalen Standardsprache ansprechbar zu machen, wird die *Dur-Alteratstruktur* definiert und zwar als das Tripel $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \tilde{\delta}^+, 6)$; wobei $\tilde{\delta}^+(z, i) := \delta^+(z) + \frac{i}{2}$ für alle $(z, i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ gesetzt ist; die Elemente von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ heißen hierbei *Tonalterate* oder nur kurz *Alterate*[13]) (‹fisis› kann so als Name für das Tonalterat (3,2) verstanden werden). Die Oktavrelation ω der Dur-Tonleiter wird zu der Äquivalenzrelation $\tilde{\omega}$ auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ erweitert, indem $(y, i)\ \tilde{\omega}\ (z, j)$ definiert wird, wenn $\tilde{\delta}^+(y, i) - \tilde{\delta}^+(z, j)$ ein ganzzahliges Vielfaches von 6 ist. *Transpositionen* der Dur-Alteratstruktur sind die bijektiven Abbildungen $\tau_{(z,j)}$ von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ auf sich $((z, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$, die durch

$$\tau_{(z,j)}\,(y, i) := (y + z, i + j + 2(\delta^+(y) + \delta^+(z) - \delta^+(y + z)))\ ((y, i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$$

definiert sind. Bezüglich der $\tau_{(z,j)}$ und $\tilde{\omega}$ werden entsprechend wie bei den Tonskalen die Begriffe *(n-)Klangalterat*, *(n-)Harmoniealterat*, *(n-) Klangalteratform* und *(n-)Harmoniealteratform* eingeführt (‹verminderte Quinte› kann so als Name für die 2-Klangalteratform mit dem Repräsentanten $\{(0, 0), (4, 1)\}$ verstanden werden).

Lassen sich nun die Klangalterate brauchbar klassifizieren, wo es noch unendlich viele Harmoniealteratformen gibt? Dazu ist zu klären, wie die Dur-Alteratstruktur vom Begriff der Dur-Tonleiter her zu verstehen ist: Die Teilmengen $\tau_{(z,j)}\,(\mathbb{Z} \times \{0\})$ mit der jeweiligen Einschränkung von $\tilde{\delta}^+$

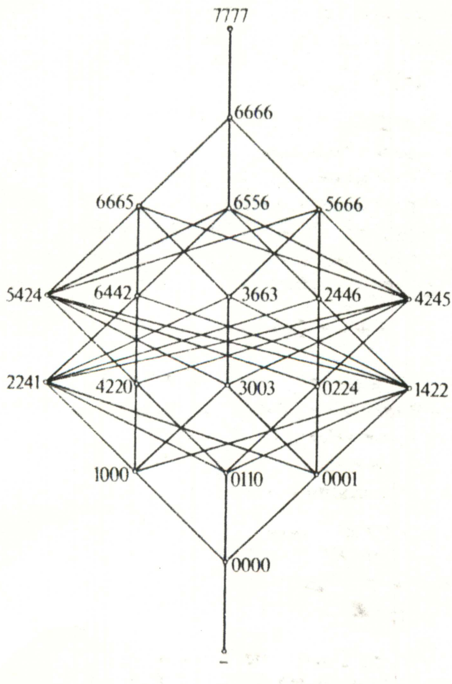
---

[13] Häufig ist es nützlich, die Tonalterate (z, i) durch $(z, i + 2\delta^+(z))$ zu bezeichnen; die erste Komponente gibt dann den diatonischen, die zweite Komponente den chromatischen „Anteil" des Tonalterats an (vgl. N. Böker-Heil [2]).

werden als (isomorphe) Kopien der Dur-Tonleiter angesehen, womit die Dur-Alteratstruktur als ein Gewebe von Dur-Tonleitern erscheint. Reduziert man nun jedes Klangalterat auf einen Klang von $\tau_{(z,j)}(\mathbb{Z}\times\{0\})$ durch die Abbildung, die jedem Tonalterat den Ton von $\tau_{(z,j)}(\mathbb{Z}\times\{0\})$ mit gleicher erster Komponente zuordnet, so reduzieren die Harmoniealteratformen zu den Harmonieformen der gleichstufigen 7-Tonskala $\tau_{(z,j)}(\mathbb{Z}\times\{0\}),\ \iota, 7)$, wobei $\iota(y, i) := y - z$ für alle $(y, i) \in \tau_{(z,j)}(\mathbb{Z}\times\{0\})$ definiert ist. Diese Reduktion ist für Harmoniealteratformen unabhängig von der Wahl von (z, j), wenn man nur die erste Komponente betrachtet, was auf die gleichstufige 7-Tonskala $(\mathbb{Z}, \iota, 7)$ mit $\iota(z) := z\ \ (z \in \mathbb{Z})$ führt.

Die Klassifikation der Klangalterate (in der musiktheoretischen Fachsprache häufig *Akkorde* genannt) nach den Harmonieformen von $(\mathbb{Z}, \iota, 7)$ ist seit J.-Ph. Rameau [26] in vielen Abhandlungen der Musiktheorie für die gängigen Klangalterate der jeweils zeitgenössischen Musik zu finden (wenn auch in unterschiedlicher Terminologie). Vollständig (bis auf die n-Harmonieformen mit $n \leqslant 2$) beschreibt F. A. Wolpert [41] diese Klassifikation.

Die Anzahl der Harmonieformen von $(\mathbb{Z}, \iota, 7)$ ist $20\left(= \frac{1}{7} \sum_{d|7} \phi\left(\frac{7}{d}\right)2^{d}\right)$, und die geordnete Menge dieser Harmonieformen wird durch folgendes Hasse-Diagramm[14] veranschaulicht.



[14] s. H. Hermes [19], S. 8

Obwohl durchaus angestrebt wird, daß Benennungen die Beziehung zwischen Unter- und Oberharmonieformen widerspiegeln (z.B. ‹Septakkord›, ‹Septnonakkord›), kann ein vollständiges Benennungssystem, an dem alle Ordnungsbeziehungen zwischen Harmonieformen ablesbar sind, auf Grund der beschränkten Aussagekraft von Wortbildungen[15] wohl nicht erstellt werden. Da die 10-Dimension der geordneten Menge aller Harmonieformen von ($\mathbb{Z}$, ι, 7) gleich 4 ist, kann man jedoch ein entsprechendes Notationssystem bestehend aus Quadrupeln von Ziffern angeben. Die im Hasse-Diagramm eingetragenen Ziffernquadrupel liefern ein Beispiel für ein solches Notationssystem. Welches Notationssystem für welche Zwecke am geeignetsten ist, das kann nur eine ausführlichere Diskussion beantworten, die an dieser Stelle nicht möglich ist. Die nachstehende Tabelle aller Harmonieformen der gleichstufigen 7-Tonskala stellt die Notation aus dem Hasse-Diagramm den Benennungen von F. A. Wolpert [41] gegenüber[16]:

Repräsentant	Notation	Benennung nach Kontraktur	Benennung nach Terzenaufbau
{ }	–	(Pause)	(Pause)
{0}	0000	(Einklang)	(Einklang)
{0, 1}	1000	(Sekunde)	(terzquintfreier Septakkord)
{0, 2}	0110	(Terz)	(quintfreier Dreiklang)
{0, 3}	0001	(Quarte)	(terzfreier Dreiklang)
{0, 1, 3}	2241	Sekund-Quart-Akkord	quintfreier Septakkord
{0, 1, 2}	4220	Sekund-Terz-Akkord	quintseptfreier Nonakkord
{0, 1, 4}	3003	Sekund-Quint-Akkord	terzseptfreier Nonakkord
{0, 2, 4}	0224	Dreiklang	Dreiklang
{0, 1, 5}	1422	Terz-Quart-Akkord	terzfreier Septakkord
{0, 1, 2, 5}	5424	Quart-ajoutée-Akkord	terzfreier Nonakkord
{0, 1, 2, 3}	6442	Sekund-Terz-Quart-Akkord	quintfreier Nonakkord
{0, 1, 3, 4}	3663	Sekund-Quart-Quint-Akkord	quintnonfreier Undezakkord
{0, 1, 3, 5}	2446	Sixte-ajoutée-Akkord	kompakter Septakkord
{0, 1, 2, 4}	4245	Seconde-ajoutée-Akkord	septfreier Nonakkord
{0, 1, 2, 3, 4}	6665	Seconde-Quart-ajoutée-Akkord	septfreier Undezakkord
{0, 1, 2, 3, 5}	6556	Quart-Sixte-ajoutée-Akkord	kompakter Nonakkord
{0, 1, 2, 4, 5}	5666	Seconde-Sixte-ajoutée-Akkord	nonfreier Undezakkord
{0, 1, 2, 3, 4, 5}	6666	Seconde-Quart-Sixte-ajoutée-Akkord	kompakter Undezakkord
{0,1,2,3,4,5,6}	7777	Septimen-Seconde-Quart-Sixte-ajoutée-Akkord	kompakter Tredezakkord

15 vgl. DIN 2330 [8], S. 10 ff

16 Die Zuordnung zwischen Notation und Benennung liefert das Hasse-Diagramm nur bis auf Ordnungsisomorphie (die zugrunde liegende Automorphismengruppe ist isomorph zu $S_3 \times C_2$).

Für die bisherigen Ausführungen zum Klassifikationsproblem von Klängen (Klangalteraten) ist allein der Begriff der *Distanz* ausschlaggebend gewesen. Nun hat aber im Bereich tonaler Musik stets auch der Begriff der *Konsonanz*, der eng mit den Proportionen der Schwingungszahlen von Tönen zusammenhängt, eine grundlegende Rolle gespielt[17]. Es gilt also auch das Konsonanzphänomen in der extensionalen Standardsprache der Musiktheorie begrifflich zu fassen. Hierzu wird von dem Grundbegriff eines Tonsystems ausgegangen.

Ein *Tonsystem* ist ein geordnetes Paar (T, η), wobei T eine Menge und η eine injektive Abbildung von T in die Menge $\mathbb{R}^+$ aller positiven reellen Zahlen ist. Die Elemente von T heißen *Töne*, und für $t \in T$ wird $\eta(t)$ die (*multiplikative*) *Tonhöhe* von t genannt. Die Ausdrücke ‹Ton› und ‹Tonhöhe› weisen auf einen Zusammenhang zu den Tonskalen hin, den man so herstellt, daß für eine positive reelle Zahl $b > 1$ dem Tonsystem (T, η) die Tonskala $(T, \eta_b, \log_b 2)$ mit $\eta_b(t) := \log_b \eta(t)$ zugeordnet wird. In der Musiktheorie am gebräuchlichsten ist die Basis $b := \sqrt[1200]{2}$; für die zugehörige (additive) Tonhöhe η_b heißt die Maßeinheit *Cent*[18].

Der logarithmische Zusammenhang von (T, η) und $(T, \eta_b, \log_b 2)$ erlaubt, die für Tonskalen explizierten Begriffe auf Tonsysteme zu übertragen. Der Distanz $\delta(t_1, t_2)$ entspricht so die *Größe* $\gamma(t_1, t_2) := \dfrac{\eta(t_2)}{\eta(t_1)}$. *Transpositionen* bzw. *Spiegelungen* von (T, η) sind die Abbildungen

$$\tau_r := \{t_1, t_2)| \; t_1, t_2 \in T \quad \text{und} \quad \gamma(t_1, t_2) = r\} \qquad \text{bzw.}$$
$$\sigma_r := \{t_1, t_2)| \; t_1, t_2 \in T \quad \text{und} \quad \eta(t_1) \cdot \eta(t_2) = r^2\} \qquad (r \in \mathbb{R}^+).$$

Für die *Oktavrelation* ω gilt genau dann $t\omega t'$, wenn $\gamma(t, t')$ eine ganzzahlige Potenz von 2 ist; die Äquivalenzklassen von ω sind die *Tonigkeiten* von (T, η). Es liegt auf der Hand, wie nun auch Ω, Φ und die Begriffe (n-)*Klang*, (n-)*Harmonie*, (n-)*Klangform* sowie (n-)*Harmonieform* für Tonsysteme zu definieren sind.

Der Begriff der Konsonanz ist gebunden an die Vorstellung reiner Stimmung[19]. Diese wird extensional erfaßt im Begriff eines *reinen* Tonsystems als eines Tonsystems, in dem die Größen aller geordneten 2-Klänge rationale Zahlen sind. Beispiele sind die $(p_1, \ldots, p_n)$-freierzeugten Tonsysteme $(\mathbb{Z}^n, \rho^{(n)})$ mit $\rho^{(n)}(z_1, z_2, \ldots, z_n) := p_1^{z_1} p_2^{z_2} \ldots p_n^{z_n}$ für vorgegebene Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$. Das (2,3)-freierzeugte Tonsystem $(\mathbb{Z}^2, \rho^2)$ heißt das *pythagoreische* Tonsystem. Am gebräuchlichsten ist das (2,3,5)-freierzeugte Tonsystem $(\mathbb{Z}^3, \rho^3)$, das manchmal als das *harmonische* Tonsystem bezeichnet wird. Schon L. Euler [12] hat zur Veranschaulichung des harmo-

---

17 s. etwa U. Michels [24], S. 89

18 vgl. H. Husmann [20]

19 vgl. Riemann [28], Stichworte „*Konsonanz und Dissonanz*", „*reine Stimmung*"

nischen Tonsystems ein Tonnetz vorgeschlagen; in dem auf einen Oktavbereich eingeschränkten Tonnetz sind die Tonbuchstaben mit ganzzahligen Hochzahlen versehen, die anzeigen, um wieviele syntonische Kommas $\left(\text{Intervallgröße } \frac{81}{80}\right)$ sich die bezeichneten Töne voneinander unterscheiden[20]:

e^{-2}	h^{-2}	fis^{-2}	cis^{-2}	gis^{-2}	dis^{-2}	ais^{-2}	eis^{-2}	his^{-2}	fisis^{-2}	cisis^{-2}
c^{-1}	g^{-1}	d^{-1}	a^{-1}	c^{-1}	h^{-1}	fis^{-1}	cis^{-1}	gis^{-1}	dis^{-1}	ais^{-1}
as^{0}	es^{0}	b^{0}	f^{0}	c^{0}	g^{0}	d^{0}	a^{0}	e^{0}	h^{0}	fis^{0}
fes^{+1}	ces^{+1}	ges^{+1}	des^{+1}	as^{+1}	es^{+1}	b^{+1}	f^{+1}	c^{+1}	g^{+1}	d^{+1}
deses^{+1}	asas^{+2}	eses^{+2}	heses^{+2}	fes^{+2}	ces^{+2}	ges^{+2}	des^{+2}	as^{+2}	es^{+2}	b^{+2}

Auch das (2, 3, 5, 7)-freierzeugte Tonsystem[21] und sogar das (3, 5, 7)-freierzeugte Tonsystem[22] sind schon betrachtet worden.

Trotz vielfältiger Versuche ist bis heute das Konsonanzphänomen nur ungenügend geklärt, was seine Explikation in Hinblick auf eine extensionale Standardsprache schwierig macht. Für die Klassifikation der Klänge reicht im ersten Ansatz aus, sich an die *natürlichen Konsonanzgrade* von H. Simbriger und A. Zehelein [35] anzulehnen. Ist (t_1, t_2) ein geordneter 2-Klang eines reinen Tonsystems (T, η) und ist $\gamma(t_1, t_2) = 2^z \cdot \frac{u}{v}$, wobei $z \in \mathbb{Z}$ gilt und u und v ungerade natürliche Zahlen mit größtem gemeinsamen Teiler 1 sind, dann ist der *Konsonanzgrad* von (t_1, t_2)

$$\kappa(t_1, t_2) := \frac{1}{2}\,(\max\{u, v\} - 1)$$ [23].

Der *Konsonanzgrad* eines n-Klangs K wird definiert als

$$\kappa(K) := \max\{\kappa(t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in K\}.$$

Da alle Repräsentanten einer n-Harmonie, n-Klangform bzw. n-Harmonieform den gleichen Konsonanzgrad haben, kann man den *Konsonanzgrad* einer n-Harmonie, n-Klangform bzw. n-Harmonieform repräsentantenweise definieren.

Für eine einheitliche Klassifikation der Klänge in allen reinen Tonsystemen bietet sich das *universelle reine Tonsystem* $(\mathbb{Q}^+, \iota)$ mit $\iota(q) = q$ $(q \in \mathbb{Q}^+)$ an, in das jedes reine Tonsystem einbettbar ist ($\mathbb{Q}^+$ ist die Menge aller positiven rationalen Zahlen). Für die n-Harmonieformen von $(\mathbb{Q}^+, \iota)$ bilden die

---

[20] vgl. M. Vogel [37], S. 102 ff

[21] s. R. Wille [39], auch M. Vogel [37], S. 120 ff

[22] s. H. Bohlen [3], auch R. Wille [40], S. 262

[23] Ausführlicher ist der Konsonanzgrad in R. Wille [40] expliziert.

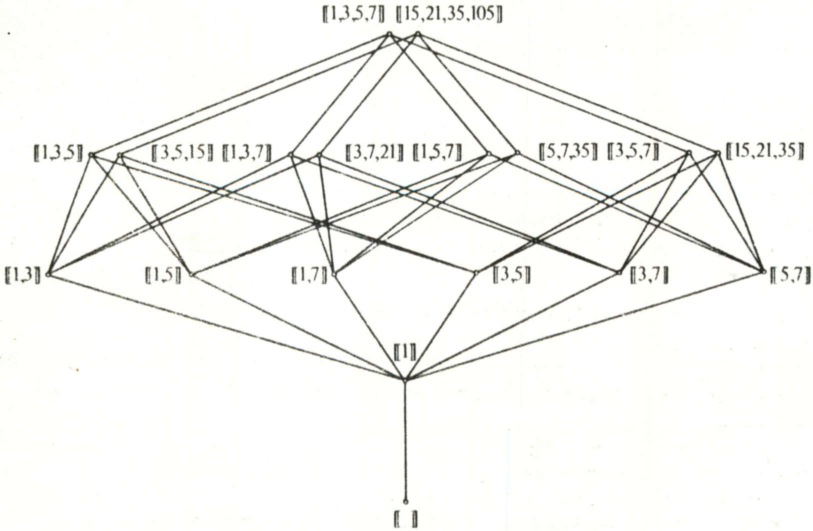
n-elementigen Mengen ungerader Zahlen mit größtem gemeinsamen Teiler 1 ein vollständiges Repräsentantensystem; ist $\{u_1, \ldots, u_n\}$ aus diesem Repräsentantensystem, so wird die von $\{u_1, \ldots, u_n\}$ repräsentierte Harmonieform mit $[\![u_1, \ldots, u_n]\!]$ bezeichnet. Für Konsonanzgrad und Spiegelbild hat man dann

$$\kappa([\![u_1, \ldots, u_n]\!]) := \frac{1}{2}\left(\max\left\{\frac{u_j}{ggT(u_i, u_j)} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\right\} - 1\right) \text{ und}$$

$$[\![u_1, \ldots, u_n]\!]^\sigma := [\![\frac{\nu}{u_1}, \ldots, \frac{\nu}{u_n}]\!] \text{ mit } \nu := \mathrm{kgV}(u_1, \ldots, u_n).$$

Der *reine Durdreiklang* $[\![1, 3, 5]\!]$ hat demnach den Konsonanzgrad 2 wie auch sein Spiegelbild, der *reine Molldreiklang* $[\![3, 5, 15]\!] (= [\![1, 3, 5]\!]^\sigma)$. Allgemein gilt daß eine Harmonieform und ihr Spiegelbild stets den gleichen Konsonanzgrad haben.

Von einer brauchbaren Übersicht aller Harmonieformen des universellen reinen Tonsystems (aber auch schon des harmonischen Tonsystems) ist man derzeit weit entfernt. Zwar ist jede n-Harmonieform eines reinen Tonsystems mit $n \geqslant 3$ eindeutig durch ihre 3-Unterharmonieformen bestimmt, doch kann man mit der Auffassung einer Harmonieform als einer Menge von 3-Harmonieformen bisher nicht viel anfangen. Erfolgversprechender scheint das Programm zu sein, die Harmonieformen zunächst für kleine und dann aufsteigend für immer größere Konsonanzgrade jeweils vollständig zu bestimmen. Die geordnete Menge aller Harmonieformen von $(\mathbb{Q}^+, \iota)$, die höchstens Konsonanzgrad 3 haben, veranschaulicht das folgende Hasse-Diagramm:



Als weitergreifendes Resultat ist bisher nur der nachstehende Satz bekannt (eine offene Frage ist, ob der Satz auch für eine beliebige ungerade Zahl p richtig ist).

Satz (vgl. R. Wille[40]): *p sei eine ungerade Primzahl. Hat eine n-Harmonieform F des universellen reinen Tonsystems den Konsonanzgrad $\frac{p-1}{2}$, so gilt $n \leqslant \frac{p+1}{2}$; im Fall $n = \frac{p+1}{2}$ ist $F = [\![1, 3, 5, \ldots, p]\!]$ oder $F = [\![1, 3\ 5, \ldots, p]\!]^{\sigma}$.*

Beweis: Sei $F := [\![u_1, u_2, \ldots, u_n]\!]$ mit $u_1 < u_2 < \ldots < u_n$. Im folgenden wird (u_i, u_j) abkürzend für $\mathrm{ggT}(u_i, u_j)$ geschrieben. Zunächst überzeugt man sich von der Richtigkeit der nachstehenden vier Hilfsaussagen:

(1) Für $1 \leqslant i, j \leqslant n$ gilt $\dfrac{u_j}{(u_i, u_j)} \leqslant p$.

(2) Ist p ein Teiler von u_j, so ist p auch ein Teiler von u_{j+1}.

(3) Ist p kein Teiler von u_i, aber ein Teiler von u_j, so gilt $u_j = p \cdot (u_i, u_j)$.

(4) p ist kein Teiler von u_1, aber Teiler von u_n.

Nach (2) und (4) existiert eine natürliche Zahl s mit $1 \leqslant s \leqslant n-1$ derart, daß p kein Teiler von u_i mit $1 \leqslant i \leqslant s$, aber ein Teiler von u_j mit $s+1 \leqslant j \leqslant n$ ist. Mit (3) erhält man

$$\frac{u_1}{(u_1, u_n)} < \frac{u_1}{(u_1, u_{n-1})} < \ldots < \frac{u_1}{(u_1, u_{s+1})} < \frac{u_2}{(u_2, u_{s+1})} < \ldots$$

$$< \frac{u_s}{(u_s, u_{s+1})} < p,$$

womit man eine aufsteigende Folge von $n-1$ ungeraden Zahlen kleiner als p hat, was $n \leqslant \frac{p+1}{2}$ beweist. Es sei nun $n = \frac{p+1}{2}$ vorausgesetzt.

1. Fall: $s = n-1$. Nach (3) ist dann $u_n = p \cdot (u_i, u_n)$ für $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Wegen $(u_i, u_n) = (u_j, u_n)$ für $1 \leqslant i, j \leqslant n-1$ ist (u_i, u_n) ein Teiler von jedem u_j, was mit der Voraussetzung $\mathrm{ggT}(u_1, \ldots, u_n) = 1$ auch $(u_i, u_n) = 1$ und damit $u_n = p$ ergibt. Es folgt $F = [\![1, 3, 5, \ldots, p]\!]$.

2. Fall: $s = 1$. Nach (3) und (4) ist dann $p \cdot u_1 = \mathrm{kgV}(u_1, \ldots, u_n)$, also

$$F^{\sigma} = \left[\!\!\left[\frac{p \cdot u_1}{u_n}, \ldots, \frac{p \cdot u_1}{u_2}, p\right]\!\!\right] = [\![1, 3, 5, \ldots, p]\!] \quad \text{und damit}$$

$F = [\![1, 3, 5, \ldots, p]\!]^{\sigma}$.

3. Fall: $2 \leqslant s \leqslant n-2$. Man erhält dann mit

$$\frac{u_1}{(u_1, u_n)} < \frac{u_2}{(u_2, u_n)} < \frac{u_2}{(u_2, u_{n-1})} < \ldots < \frac{u_2}{(u_2, u_{s+1})} < \ldots$$

$$< \frac{u_s}{(u_s, u_{s+1})}$$

wieder eine aufsteigende Folge von $n-1$ ungeraden Zahlen kleiner als p; insbesondere also $\frac{u_1}{(u_1, u_n)} = 1$, $\frac{u_1}{(u_1, u_{n-1})} = \frac{u_2}{(u_2, u_n)} = 3$ und

$$\frac{u_2}{(u_2, u_{n-1})} = 5.$$

Induktiv bekommt man hieraus, daß jede Potenz von 3 die Zahl u_1 teilt, was ein Widerspruch ist. Somit kann der 3. Fall nicht eintreten und es ist bewiesen, daß im Fall $n = \frac{p+1}{2}$ vom Konsonanzgrad $\frac{p-1}{2}$ nur die n-Harmonieformen $[\![1, 3, 5, \ldots, p]\!]$ und $[\![1, 3, 5, \ldots, p]\!]^\sigma$ existieren. ♦

Der in Hinblick auf das Klassifikationsproblem von Klängen skizzierte Beginn einer extensionalen Standardsprache der Musiktheorie sollte deutlich machen, wie mathematisches Denken fruchtbar in die Musiktheorie einbezogen werden kann. Wenn auch zunächst die Mathematik vornehmlich als Sprache genutzt wird, so ergeben sich, wie die Ausführungen zeigen, im Zusammenhang und in Folge begrifflicher Explikationen durchaus auch vielfältige Ansätze für die Mathematik als Werkzeug, wobei oft sogar nichttriviale mathematische Probleme zu bewältigen sind. Daß für die Präzisierung der musiktheoretischen Fachsprache zu einer extensionalen Standardsprache der Musiktheorie mehrfach Veranlassung besteht, das soll abschließend kurz ausgeführt werden.

Wie schon an einem Beispiel erläutert wurde, kann musiktheoretisches Denken im Rückgriff auf eine extensionale Standardsprache geklärt und gesichert werden; ein solcher Rückgriff hätte z.B. verhindern können, daß in dem sonst sorgfältig abgefaßten „*Riemann Musik Lexikon*" [28] dem Ausdruck ‹Akkord› unter verschiedenen Stichworten („*Akkord*", „*Harmonie*", „*Alterierte Akkorde*") unterschiedliche Bedeutungen unterlegt werden. Derartige Unstimmigkeiten zeigen an, daß Arbeiten zur musikalischen Terminologie – am intensivsten werden sie für das „*Handwörterbuch der musikalischen Terminologie*" [18] betrieben[24] – Gewinn aus einer extensionalen Standardsprache ziehen können. Noch gewichtiger ist sicherlich die Bedeutung einer extensionalen Standardsprache für die Forschungen zur Geschichte der Musiktheorie, wie sie etwa in einem größeren Projekt am *Staatlichen Institut für Musikforschung, Preußischer Kultur-*

---

[24] s. dazu H. H. Eggebrecht [10]

besitz, in Berlin durchgeführt werden[25], da dabei u.a. umfangreiche Kontexte auf ihre musiktheoretischen Gehalte hin zu entschlüsseln sind. Auch für eine immer wieder angeregte *systematische Musiktheorie*[26] würde eine extensionale Standardsprache eine (notwendige) Grundlage abgeben. Besonders durch den immer umfangreicher werdenden Einsatz elektronischer Datenverarbeitung im Bereich der Musik[27] wird das Bedürfnis nach einer einheitlichen systematischen Musiktheorie (und damit auch nach einer extensionalen Standardsprache der Musiktheorie) immer größer.

Literatur

[1] E. Bloch: Über das mathematische und dialektische Wesen in der Musik, in E. Bloch, Zur Philosophie der Musik, Suhrkamp, Frankfurt 1974, 267–274.
[2] N. Böker-Heil: Ein algebraisches Modell des dur-moll-tonalen Systems, in: Bericht über den 1. Internationalen Kongreß für Musiktheorie, Ichthys-Verlag, Stuttgart 1972, 64–107.
[3] H. Bohlen: 13 Tonstufen in der Duodezime, Acustica 39 (1978), 76–86.
[4] P. Boulez: Musikdenken heute 1, B. Schott's Söhne, Mainz 1963.
[5] R. Carnap: Symbolische Logik, 2. Aufl., Springer, Wien 1960.
[6] H. S. M. Coxeter: Music and mathematics, The Canadian Music Journal 6 (1962), 13–24; auch in: Mathematics Teacher 61 (1968), 312–320.
[7] C. Dahlhaus: Zur Methode einer Geschichte der Musiktheorie, Jahrbuch 1973 des Staatl. Instituts für Musikforschung, Preußischer Kulturbesitz, Berlin 1974, 7–49.
[8] DIN 2330, Begriffe und Benennungen. Allgemeine Grundsätze, Beuth Verlag, Berlin und Köln 1979.
[9] DIN 2331, Begriffssysteme und ihre Darstellung (Vornorm), Beuth Verlag, Berlin und Köln 1976.
[10] H. H. Eggebrecht: Studien zur musikalischen Terminologie, Akademie der Wissenschaften und Literatur in Mainz, Abh. d. Geistes- und Sozialwissenschaftlichen Klasse, Jahrgang 1955, Nr. 10, 817–947.
[11] H. Eimert: Lehrbuch der Zwölftontechnik, Breitkopf & Härtel, Wiesbaden 1952.
[12] L. Euler: De harmoniae veris principiis per speculum musicum repraesentatis, in: Leonhardi Euleri opera omnia, III. 1.
[13] A. D. Fokker: Les mathématiques et la musique. Archives du Musée Teyler Série 3, Vol. 10 (1947), 1–31.
[14] A. Forte: The structure of atonal music, Yale University Press, New Haven and London 1973.
[15] W. Fucks, J. Lauter: Exaktwissenschaftliche Musikanalyse, Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen 1965.
[16] H.-R. Halder, W. Heise: Einführung in die Kombinatorik, Carl Hanser Verlag, München, Wien 1976.
[17] G. D. Halsey, E. Hewitt: Eine gruppentheoretische Methode in der Musiktheorie, Jahresberichte der Dt.-Math.-Verein. 80 (1978), 151–207.
[18] Handwörterbuch der musikalischen Terminologie (Hrsg. H. H. Eggebrecht), Franz Steiner, Wiesbaden.

---

[25] s. dazu C. Dahlhaus [7]
[26] s. etwa J. Rohwer [30]
[27] Eine Bibliographie zur Anwendung von Computern in der Musik hat S. M. Kostka in [22] zusammengestellt (bis 1974).