

Canons de Vuza étendus

Résumé de la thèse de doctorat

Greta Lanzarotto

1 Introduction

Le lien entre musique et mathématiques a été découvert et étudié depuis l'Antiquité par de nombreux scientifiques, philosophes, musiciens tels que Pythagore, Galileo Galilei, Gottfried Wilhelm Leibniz et Leonhard Euler. À première vue, deux domaines diamétralement opposés, au fil des siècles, la musique et les mathématiques se sont révélées avoir beaucoup en commun. Cette thèse découle de la volonté d'approfondir un thème qui puise des concepts dans les deux disciplines et de la conviction que l'étude combinée des deux ne peut que profiter aux deux côtés de la relation.

Dans cette thèse, nous traitons des canons rythmique de pavage, qui sont des compositions contrapuntiques purement rythmiques. Les canons en musique ont une très longue tradition ; quelques cas de canons rythmiques de pavage (c'est-à-dire des canons tels que, étant donné un tempo fixe, à chaque battement, exactement une voix joue) ont également été composés. Ce n'est qu'au siècle dernier, issu du problème analogue de la factorisation des groupes abéliens finis, que des canons rythmiques de pavage a périodique ont été étudiés : ce sont des canons qui pavage un certain intervalle de temps dans lequel chaque voix (rythme intérieure) joue à une séquence a périodique de battements, et la séquence des battements de départ de chaque voix (rythme externe) est également a périodique. Du point de vue musical, l'article séminal était probablement l'article en quatre parties écrit par D.T. Vuza entre 1991 et 1993 ([18, 20, 19, 21]), tandis que la contrepartie mathématique du problème a également été étudiée auparavant, par exemple par de Bruijn ([8]), Sands ([17]), etc., et après, par ex. par Coven et Meyerowitz ([7]), Jedrzejewski ([12]), Amiot ([1]), Andreatta ([3]), etc.

Une théorie approfondie des conditions d'existence et de la structure des canons rythmiques de pavage a périodique n'a pas encore été établie ; nous essayons d'apporter une contribution à ce domaine fascinant. Dans ce but, la thèse propose un ensemble de théorèmes montrant des méthodes de construction de canons rythmiques a périodiques. Deux définitions sont présentées. La première définit les *canons de Vuza* comme des canons construits à l'aide de Théorème 2, Théorème 3, Théorème 4 et Théorème 5. Ensuite, la seconde définit l'ensemble des *canons de Vuza étendus* comme les canons construits à l'aide de Théorème 6 et Théorème 7, éventuellement combinées de Théorème 2, Théorème 3, Théorème 4 et Théorème 5. La thèse présente également des avancées dans le domaine du calcul en fournissant deux nouveaux algorithmes résultant plus efficaces que ceux connus dans la littérature d'au moins un ordre de grandeur.

2 Canons de pavage a périodiques

Nous fixons quelques notations et donnons les principales définitions.

Définition 1. Si $\mathbb{Z}_n = A \oplus B$, on appelle (A, B) un *canon rythmique de pavage de période n* ; A est appelée la *voix intérieure* et B la *voix extérieure* du canon.

Définition 2. Un rythme $A \subset \mathbb{Z}_n$ est *périodique (de période z)* si et seulement s'il existe un élément $z \in \mathbb{Z}_n$, $z \neq 0$, tel que $z + A = A$. Dans ce cas, A est aussi appelé périodique modulo $z \in \mathbb{Z}_n$. Un rythme $A \subset \mathbb{Z}_n$ est *apériodique* si et seulement s'il n'est pas périodique.

Soit $\Phi_d(x)$ le *polynôme cyclotomique d'indice d* . Ensuite, les canons rythmiques de pavage peuvent être caractérisés comme suit.

Lemme 1. Soit A un rythme dans \mathbb{Z}_n et soit $A(x)$ le polynôme caractéristique de A , c'est-à-dire $A(x) = \sum_{k \in A} x^k$. Étant donné $B \subset \mathbb{Z}_n$ et son polynôme caractéristique $B(x)$, on a que

$$A(x) \cdot B(x) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{x^n - 1}{x - 1} = \prod_{d|n, d \neq 1} \Phi_d(x) \pmod{(x^n - 1)} \quad (1)$$

si et seulement si $A(x)$ et $B(x)$ sont des polynômes à coefficients dans $\{0, 1\}$ et $A \oplus B = \mathbb{Z}_n$.

Par conséquent, pour chaque $d \mid n$, avec $d > 1$, on a

$$\Phi_d(x) \mid A(x) \text{ ou } \Phi_d(x) \mid B(x).$$

Définition 3. Un canon rythmique de pavage (A, B) in \mathbb{Z}_n est un *canon rythmique de pavage apériodique* si A et B sont apériodiques.

On note \mathcal{H} l'ensemble des périodes des groupes de Hajós, c'est-à-dire des groupes qui n'admettent pas de factorisations apériodiques, et \mathcal{V} l'ensemble des périodes des groupes qui admettent de telles factorisations. Le résultat suivant, en conjonction avec Théorème 2, identifie quelles sont les périodes des canons rythmiques de pavage apériodique.

Théorème 1 (Vuza). Soient

1. $\mathcal{V} \doteq \{n \in \mathbb{N} : n = p_1 n_1 p_2 n_2 n_3 \text{ avec } \text{PGCD}(p_1 n_1, p_2 n_2) = 1 \text{ et } p_1, n_1, p_2, n_2, n_3 > 1\}$, et
 2. $\mathcal{H} \doteq \{p^\alpha, p^\alpha q, p^2 q^2, pqr, p^2 qr, pqrs : \alpha \in \mathbb{N}, p, q, r, s \text{ nombres premiers distincts}\}$,
- alors $\mathbb{N}^* = \mathcal{V} \sqcup \mathcal{H}$.

Une méthode de construction exhaustive de canons rythmiques de pavage apériodique n'est pas connue à ce jour; la première méthode pour trouver certains d'entre eux a été fournie par le résultat suivant (voir [11] par Hajós, Théorème 1 dans [8] par de Bruijn, et Proposition 2.2 dans [18] par Vuza).

Théorème 2. Soit $n = p_1 n_1 p_2 n_2 n_3 \in \mathbb{N}$ tel que

1. $p_1, n_1, p_2, n_2, n_3 > 1$ et
2. $\text{PGCD}(p_1 n_1, p_2 n_2) = 1$.

Alors \mathbb{Z}_n admet un canon rythmique de pavage apériodique.

Exemple 1. Dans les hypothèses de Théorème 2, un exemple de canon de pavage de \mathbb{Z}_n avec deux sous-ensembles apériodiques est donné par la construction suivante de F. Jedrzejewski (voir Théorème 227 dans [12]). En désignant par \mathbb{I}_k l'ensemble $\{0, 1, \dots, k-1\}$, appelons :

$$\begin{aligned} A_1 &= n_3 p_1 n_1 \mathbb{I}_{n_2} & A_2 &= n_3 p_2 n_2 \mathbb{I}_{n_1} \\ U_1 &= n_3 p_1 n_1 n_2 \mathbb{I}_{p_2} & U_2 &= n_3 p_2 n_2 n_1 \mathbb{I}_{p_1} \\ V_1 &= n_3 n_2 \mathbb{I}_{p_2} & V_2 &= n_3 n_1 \mathbb{I}_{p_1} \\ K_1 &= \{0\} & K_2 &= \{1, 2, \dots, n_3 - 1\}. \end{aligned}$$

Puis prenant

$$\begin{aligned} A &= A_1 \oplus A_2 \\ B &= (U_1 \oplus V_2 \oplus K_1) \sqcup (U_2 \oplus V_1 \oplus K_2), \end{aligned}$$

nous avons le canon $\mathbb{Z}_n = A \oplus B$.

Remarque 1. Désormais, étant donné p_1, n_1, p_2, n_2 , et n_3 , on notera A_1, A_2, U_1, U_2, V_1 , et V_2 les ensembles ainsi appelés dans Exemple 1.

De nombreuses autres façons de construire des canons de pavage apériodiques sont possibles, voir par exemple de Bruijn ([8]), Vuza ([18]), Fidanza ([9]) et Jedrzejewski ([12]). Ces méthodes entrent dans une catégorie traitée par F. Jedrzejewski (Théorème 14 in [13]).

3 Canons de Vuza étendus

Nous donnons maintenant un premier résultat qui affine celui de Jedrzejewski, en levant l'hypothèse que p_1 et p_2 sont premiers et en prouvant que B est apériodique si n_3 satisfait une contrainte arithmétique simple (voir [15]).

Théorème 3. Soit $n = p_1 n_1 p_2 n_2 n_3 \in \mathbb{N}$ tel que :

1. $p_1, n_1, p_2, n_2, n_3 > 1$;
2. $\text{PGCD}(p_1 n_1, p_2 n_2) = 1$;
3. si n_3 n'est pas premier, il n'y a pas de premier q tel que $q \mid n_3$, mais $q \nmid p_1 n_1 p_2 n_2$.

Soit H le sous-groupe $H = n_3 \mathbb{I}_{p_1 n_1 p_2 n_2}$ de \mathbb{Z}_n et soit K un ensemble complet de cosets représentatifs de \mathbb{Z}_n modulo H tel que K est l'union disjointe $K = K_1 \sqcup K_2$. Alors le couple (A, B) défini par

$$\begin{aligned} A &= A_1 \oplus A_2 \\ B &= (U_1 \oplus V_2 \oplus K_1) \sqcup (U_2 \oplus V_1 \oplus K_2) \end{aligned}$$

est un canon rythmique de pavage apériodique de \mathbb{Z}_n .

Dans une généralisation de Théorème 3, le rythme B est l'union disjointe de trois ensembles, l'un étant périodique à la fois modulo n/p_1 et modulo n/p_2 .

Théorème 4. Soit $n = p_1 n_1 p_2 n_2 n_3 \in \mathbb{N}$ tel que :

1. $p_1, n_1, p_2, n_2, n_3 > 1$;
2. $\text{PGCD}(p_1 n_1, p_2 n_2) = 1$;
3. si n_3 n'est pas premier, il n'y a pas de premier q tel que $q \mid n_3$, mais $q \nmid p_1 n_1 p_2 n_2$.

Soit H le sous-groupe $H = n_3 \mathbb{I}_{p_1 n_1 p_2 n_2}$ de \mathbb{Z}_n , K un ensemble complet de cosets représentatifs de \mathbb{Z}_n modulo H tel que K est l'union disjointe $K = K_1 \sqcup K_2 \sqcup K_3$ avec $K_1, K_2 \neq \emptyset$, et $W = n_3 n_1 n_2 \mathbb{I}_{p_1 p_2}$. Alors le couple (A, B) défini par

$$\begin{aligned} A &= A_1 \oplus A_2 \\ B &= (U_1 \oplus V_2 \oplus K_1) \sqcup (U_2 \oplus V_1 \oplus K_2) \sqcup (W \oplus K_3) \end{aligned}$$

est un canon rythmique de pavage apériodique de \mathbb{Z}_n .

La deuxième généralisation de Théorème 3 élargit les définitions des ensembles A_1, A_2, V_1 et V_2 .

Théorème 5. Soit $n = p_1 n_1 p_2 n_2 n_3 \in \mathbb{N}$ tel que :

1. $p_1, n_1, p_2, n_2, n_3 > 1$;
2. $\text{PGCD}(p_1 n_1, p_2 n_2) = 1$;
3. si n_3 n'est pas premier, il n'y a pas de premier q tel que $q \mid n_3$, mais $q \nmid p_1 n_1 p_2 n_2$.

Soit H le sous-groupe $H = n_3 \mathbb{I}_{p_1 n_1 p_2 n_2}$ de \mathbb{Z}_n , et $K = K_1 \sqcup K_2$ (avec $K_1, K_2 \neq \emptyset$) un ensemble complet de cosets représentatifs pour \mathbb{Z}_n modulo H . Prendre

- \tilde{A}_1 comme un ensemble apériodique complet de représentants de cosets pour $\mathbb{Z}_{p_2 n_2}$ modulo $n_2 \mathbb{I}_{p_2}$;
- \tilde{A}_2 comme un ensemble apériodique complet de représentants de cosets pour $\mathbb{Z}_{p_1 n_1}$ modulo $n_1 \mathbb{I}_{p_1}$;
- $\tilde{V}_1^1, \dots, \tilde{V}_1^j$ comme ensembles apériodiques complets de représentants de cosets pour $\mathbb{Z}_{p_2 n_1}$ modulo $p_2 \mathbb{I}_{n_1}$;
- $\tilde{V}_2^1, \dots, \tilde{V}_2^h$ comme complet les ensembles apériodiques de représentants de cosets pour $\mathbb{Z}_{p_1 n_2}$ modulo $p_1 \mathbb{I}_{n_2}$.

Définissez $K_1 = K_1^1 \sqcup \dots \sqcup K_1^j$ et $K_2 = K_2^1 \sqcup \dots \sqcup K_2^h$, où $K_\alpha^s = \{k_\alpha^{j_s-1+1}, \dots, k_\alpha^{j_s}\}$ sont des sous-ensembles non vides de K_α pour $\alpha = 1, 2$. Alors le couple (A, B) défini par

$$\begin{aligned} A &= n_3 p_1 n_1 \tilde{A}_1 \oplus n_3 p_2 n_2 \tilde{A}_2 \\ B &= \left(\left(U_1 \oplus n_3 n_1 \tilde{V}_2^1 \oplus \{k_1^1, \dots, k_1^{l_1}\} \right) \sqcup \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \sqcup \left(U_1 \oplus n_3 n_1 \tilde{V}_2^j \oplus \{k_1^{l_{j-1}+1}, \dots, k_1^{|K_1|}\} \right) \right) \sqcup \\ &\quad \sqcup \left(\left(U_2 \oplus n_3 n_2 \tilde{V}_1^1 \oplus \{k_2^1, \dots, k_2^{m_1}\} \right) \sqcup \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \sqcup \left(U_2 \oplus n_3 n_2 \tilde{V}_1^h \oplus \{k_2^{m_{h-1}+1}, \dots, k_2^{|K_2|}\} \right) \right) \end{aligned}$$

est un canon rythmique de pavage apériodique de \mathbb{Z}_n .

Définition 4 (canon de Vuza). On appelle *canons de Vuza* tous les canons obtenus à l'aide des constructions décrites dans Théorème 2, Théorème 3, Théorème 4 et Théorème 5.

Il est possible d'étendre encore plus ce type de constructions. Avec le théorème suivant, on améliore le résultat de Jędrzejewski (Théorème 21 dans [13]).

Théorème 6. Soit $n = p_1 n_1 p_2 n_2 n_3 \in \mathbb{N}$ tel que :

1. $p_1, n_1, p_2, n_2, n_3 > 1$;
2. $\text{PGCD}(p_1 n_1, p_2 n_2) = 1$;
3. il n'y a pas de nombre premier q tel que $q \mid n_3$, mais $q \nmid p_1 n_1 p_2 n_2$.

Soit H le sous-groupe $H = n_3 \mathbb{I}_{p_1 n_1 p_2 n_2}$ de \mathbb{Z}_n . Supposons que L et K soient des sous-ensembles propres de \mathbb{Z}_{n_3} tels que $L \oplus K = \mathbb{Z}_{n_3}$ et $K = K_1 \sqcup K_2$, avec $K_1, K_2 \neq \emptyset$. Alors le couple (A, B) défini par

$$\begin{aligned} A &= A_1 \oplus A_2 \oplus L \\ B &= (U_1 \oplus V_2 \oplus K_1) \sqcup (U_2 \oplus V_1 \oplus K_2) \end{aligned}$$

est un canon rythmique de pavage apériodique de \mathbb{Z}_n .

Définition 5. $R_A \doteq \{d : \Phi_d(x) \mid A(x)\}$ et $S_A \doteq \{p^\alpha \in R_A : p \text{ premier}\}$.

Les conditions de Coven-Meyerowitz sont les suivantes :

(T1) $|A| = \prod_{p^\alpha \in S_A} p$;

(T2) pour tout $p^\alpha, q^\beta, r^\gamma, \dots \in S_A$, $p^\alpha q^\beta r^\gamma \dots \in R_A$, où $p^\alpha, q^\beta, r^\gamma, \dots$ sont des puissances de nombres premiers distincts.

Définition 6 (extension). Soit A un sous-ensemble de \mathbb{Z}_n et soit $S_A = \{p^\alpha, q^\beta, \dots, r^\gamma\}$. On appelle *extension de A* tout rythme \bar{A} dont le polynôme caractéristique est

$$\bar{A}(x) = \Phi_{p^\alpha} \left(x^{\frac{n}{p^{\alpha k_p}}} \right) \Phi_{q^\beta} \left(x^{\frac{n}{q^{\beta k_q}}} \right) \dots \Phi_{r^\gamma} \left(x^{\frac{n}{r^{\gamma k_r}}} \right),$$

où k_p, k_q, \dots, k_r sont des diviseurs de n tels que $p \nmid k_p, q \nmid k_q, \dots, r \nmid k_r$.

Notez que par définition clairement $S_A = S_{\bar{A}}$.

Proposition 1. Soit $A \oplus B = \mathbb{Z}_n$ et soit B vérifie la condition (T2). Alors $\bar{A} \oplus B = \mathbb{Z}_n$ aussi.

En combinant Théorème 6 et Proposition 1, nous sommes capables de trouver de nouveaux canons de Vuza où L n'est pas un sous-ensemble de \mathbb{Z}_{n_3} .

Théorème 7. Soit $n = p_1 n_1 p_2 n_2 n_3 \in \mathbb{N}$ tel que :

1. $p_1, n_1, p_2, n_2, n_3 > 1$;
2. $\text{PGCD}(p_1 n_1, p_2 n_2) = 1$;
3. il n'y a pas de nombre premier q tel que $q \mid n_3$, mais $q \nmid p_1 n_1 p_2 n_2$.

Soit H le sous-groupe $H = n_3 \mathbb{I}_{p_1 n_1 p_2 n_2}$ de \mathbb{Z}_n . Supposons que L et K soient des sous-ensembles propres de \mathbb{Z}_{n_3} tels que $L \oplus K = \mathbb{Z}_{n_3}$ et $K = K_1 \sqcup K_2$, avec $K_1, K_2 \neq \emptyset$. Soit \bar{L} une extension de L ; alors le couple (A, B) défini par

$$\begin{aligned} A &= A_1 \oplus A_2 \oplus \bar{L} \\ B &= (U_1 \oplus V_2 \oplus K_1) \sqcup (U_2 \oplus V_1 \oplus K_2) \end{aligned}$$

est un canon rythmique de pavage apériodique de \mathbb{Z}_n .

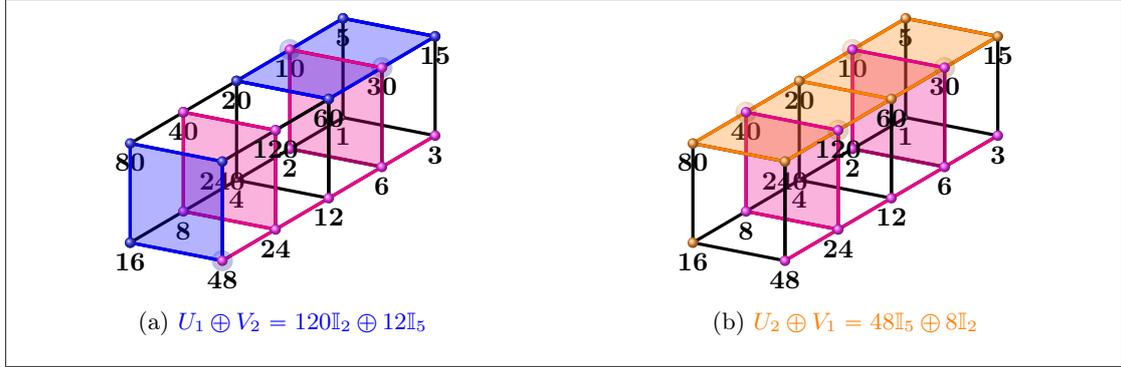
Définition 7 (canon de Vuza étendu). On appelle *canons de Vuza étendus* tous les canons obtenus à l'aide des constructions de Théorème 6 et Théorème 7, éventuellement combinées avec celles de Théorème 2, Théorème 3, Théorème 4 et Théorème 5.

Exemple 2. Nous montrons maintenant un canon de Vuza étendu de période $n = 240$ ($p_1 = 5, n_1 = 3, p_2 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4$). $L = \mathbb{I}_2$, alors $\bar{L} = 15\mathbb{I}_2$. En choisissant $K_1 = \{2\}$ et $K_2 = \{0\}$, on obtient le canon

$$\begin{aligned} A &= A_1 \oplus A_2 \oplus \bar{L} \\ &= 60\mathbb{I}_2 \oplus 16\mathbb{I}_3 \oplus 15\mathbb{I}_2 \\ B &= (U_1 \oplus V_2 \oplus K_1) \sqcup (U_2 \oplus V_1 \oplus K_2) \\ &= (120\mathbb{I}_2 \oplus 12\mathbb{I}_5 \oplus \{2\}) \sqcup (48\mathbb{I}_5 \oplus 8\mathbb{I}_2 \oplus \{0\}). \end{aligned}$$

Il est à noter qu'il ne serait pas possible d'obtenir un tel canon sans appliquer Théorème 7.

FIGURE 1 – $n = 240$. $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \bar{L}$.



Représentation en treillis d'un canon rythmique de pavage apériodique de période $n = 240$, où $A = 60\mathbb{I}_2 \oplus 16\mathbb{I}_3 \oplus 15\mathbb{I}_2$ et $B = (120\mathbb{I}_2 \oplus 12\mathbb{I}_5 \oplus \{2\}) \sqcup (48\mathbb{I}_5 \oplus 8\mathbb{I}_2 \oplus \{0\})$.

Il est maintenant naturel de se poser la question suivante : combien y a-t-il de canons de Vuza étendus étant donné les cinq paramètres p_1, n_1, p_2, n_2, n_3 et la factorisation $\mathbb{Z}_{n_3} = L \oplus K$?

La première étape consiste à déterminer combien de partitions de \mathbb{Z}_{n_3} permettent de distribuer de manière disjointe les n_3 classes de reste dans les facteurs $(U_1 \oplus n_3 n_1 \tilde{V}_2^j)$, $(U_2 + n_3 n_2 \tilde{V}_1^h)$ et W , en faisant attention d'attribuer au moins une classe aux deux premiers facteurs (sinon le canon deviendrait périodique). D'après Théorème 5, nous devons également considérer tous les différents \tilde{V}_1^j et \tilde{V}_2^h qui fournissent un canon de Vuza (étendu). Nous voulons déterminer dans combien de manières nous pouvons choisir des sous-ensembles apériodiques d'éléments distincts modulo p_1 in $\mathbb{Z}_{p_1 n_2}$ (resp. in $\mathbb{Z}_{p_2 n_1}$) jusqu'à la translation. Par convention, nous fixons le premier élément à 0, et pour chaque autre classe de reste modulo p_1 nous avons n_2 possibilités. Nous devons ignorer les périodiques et finalement nous écartons toutes les translations possibles de $p_1 - 1$. Alors,

$$\#\tilde{V}_1 = \frac{1}{p_2} \sum_{u|p_2} \mu\left(\frac{p_2}{u}\right) (n_1^{(u-1)} - 1)$$

$$\#\tilde{V}_2 = \frac{1}{p_1} \sum_{v|p_1} \mu\left(\frac{p_1}{v}\right) (n_2^{(v-1)} - 1).$$

Lorsqu'il n'y a pas de facteur \bar{L} dans le rythme intérieur A , on considère

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & t_{m3} \end{bmatrix}$$

comme la matrice dans laquelle chaque ligne t_i , avec $i = 1, \dots, m$, représente une partition admissible des classes de reste modulo n_3 , et l'entrée unique dans chaque ligne est le nombre de classes de reste modulo n_3 affectées au i -ième facteur

$$U_1 \oplus n_3 n_1 \tilde{V}_2^j, \quad U_2 + n_3 n_2 \tilde{V}_1^h, \quad \text{ou } W.$$

Dans ce cas, le nombre de rythmes externes possibles B est le suivant :

$$\#B = \frac{\#K}{n} \sum_{1 \leq i \leq m} \left(\frac{n}{n_3 \cdot p_1} \cdot \#\tilde{V}_1 \right)^{t_{i1}} \cdot \left(\frac{n}{n_3 \cdot p_2} \cdot \#\tilde{V}_2 \right)^{t_{i2}} \cdot \left(\frac{n}{n_3 \cdot p_1 \cdot p_2} \right)^{t_{i3}} \cdot \binom{n_3}{\mathbf{t}_i}.$$

Exemple 3. Montrons combien de rythmes a périodiques B il existe étant donné $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 5, p_1 = 2, p_2 = 3$. Les vecteurs possibles t pour \mathbb{Z}_{n_3} sont 10 :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = \{ & [1, 4, 0], [4, 1, 0], \\ & [2, 3, 0], [3, 2, 0], \\ & [1, 2, 2], [2, 1, 2], [2, 2, 1], \\ & [1, 1, 3], [1, 3, 1], [3, 1, 3] \}. \end{aligned}$$

Le nombre total de rythmes a périodiques possibles B est donné par :

$$\begin{aligned} \#B &= \frac{1}{180} \sum_{1 \leq i \leq 10} \left(\frac{180}{5 \cdot 2} \cdot 1 \right)^{t_{i1}} \left(\frac{180}{5 \cdot 3} \cdot 1 \right)^{t_{i2}} \left(\frac{180}{5 \cdot 2 \cdot 3} \right)^{t_{i3}} \binom{5}{\mathbf{t}_i} \\ &= 45360 + 77760 + 85536 + 72576 \\ &= 281232. \end{aligned}$$

Ce nombre de canons est trois fois supérieur à ce qui était connu dans la littérature et a ensuite été vérifié indépendamment grâce à un algorithme exhaustif (voir Section 4.3).

TABLE 1 – Nombre de rythmes de Vuza étendus pour les valeurs non-Hajós $n \leq 216$.

n	p_1	n_1	p_2	n_2	n_3	L	$\#K$	$\#A$			$\#B$					
								(2)	(6)	(7)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	
Théorème :								(2)	(6)	(7)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	
72	2	2	3	3	2	{0}	1	3	0	0	6	0	0	0	0	
108	2	2	3	3	3	{0}	1	3	0	0	180	0	72	0	0	
120	2	2	3	5	2	{0}	1	16	0	0	20	0	0	0	0	
	2	2	5	3	2	{0}	1	8	0	0	18	0	0	0	0	
144	2	2	3	3	4	{0}	1	3	0	0	2808	1944	3888	0	0	
	2	2	3	3	4	{0, 1}	2	0	312	0	0	0	0	0	0	6
	2	2	3	3	4	{0, 9}	2	0	0	12	0	0	0	0	0	6
	2	2	3	3	4	{0, 2}	4	0	156	0	0	0	0	0	0	12
	2	4	3	3	2	{0}	1	6	0	0	12	0	0	0	48	0
4	2	3	3	2	{0}	1	6	0	0	6	0	0	0	30	0	
168	2	2	3	7	2	{0}	1	104	0	0	14	0	0	28	0	
	2	2	7	3	2	{0}	1	16	0	0	6	0	0	48	0	
180	2	5	3	3	2	{0}	1	9	0	0	15	0	0	105	0	
	5	2	3	3	2	{0}	1	6	0	0	6	0	0	90	0	
	3	5	2	2	3	{0}	1	16	0	0	500	0	200	1100	0	
	5	3	2	2	3	{0}	1	8	0	0	252	0	72	1728	0	
	2	2	3	3	5	{0}	1	3	0	0	45360	77760	158112	0	0	
200	2	2	5	5	2	{0}	1	125	0	0	10	0	0	50	0	
216	2	4	3	3	3	{0}	1	6	0	0	180 + 540	72 + 216	0	12672	0	
	2	2	3	3	6	{0, 3}	8	0	156	0	0	0	0	0	0	180 + 540 + 72 + 216
	2	2	3	3	6	{0, 1}	2	0	324	0	0	0	0	0	0	180 + 72
	2	2	3	3	6	{0}	1	3	0	0	754272	2449440	5832000	0	0	
	2	2	3	3	6	{0, 1, 2}	3	0	34992	0	0	0	0	0	0	6
	2	2	3	3	6	{0, 2, 4}	9	0	10935	0	0	0	0	0	0	6 + 12
	2	2	3	9	2	{0}	1	729	0	0	6 + 12	0	0	0	54	0
	2	2	9	3	2	{0}	1	27	0	0	6	0	0	0	162	0
4	2	3	3	3	{0}	1	6	0	0	252	0	72	5940	0		

Dans chaque colonne, seulement les rythmes qui peuvent être engendrés par le théorème correspondant, mais pas par les précédents sont comptés. Les chiffres gris correspondent aux rythmes qui peuvent être engendrés également par le choix des paramètres de la ligne précédente. Lorsqu'il n'y a pas de colonne (par exemple, $\#A$ pour le théorème 3) tous les rythmes possibles apparaissent déjà dans les colonnes précédentes.

TABLE 2 – Nombre de rythmes de Vuza étendus pour les valeurs non-Hajós $240 \leq n \leq 280$.

n	p_1	n_1	p_2	n_2	n_3	L	$\#K$	$\#A$			$\#B$				
								(2)	(6)	(7)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Théorème :															
240	2	4	3	5	2	{0}	1	32	0	0	20	0	0	20 + 160	0
	2	2	3	5	4	{0, 6}	4	0	0	588	0	0	0	0	20 + 20
	2	2	3	5	4	{0, 2}	4	0	7252	0	0	0	0	0	20 + 20
	2	2	3	5	4	{0, 15}	2	0	0	64	0	0	0	0	20
	2	2	3	5	4	{0, 3}	2	0	1176	0	0	0	0	0	20
	2	2	3	5	4	{0, 1}	2	0	14504	0	0	0	0	0	20
	2	2	3	5	4	{0}	1	16	0	0	13000	9000	18000	94000	0
	2	2	5	3	4	{0}	1	8	0	0	6264	3240	5184	197856	0
	2	2	5	3	4	{0, 1}	2	0	4016	0	0	0	0	0	18
	2	2	5	3	4	{0, 5}	2	0	0	112	0	0	0	0	18
	2	2	5	3	4	{0, 15}	2	0	0	32	0	0	0	0	18
	2	2	5	3	4	{0, 2}	4	0	2008	0	0	0	0	0	12 + 24
	2	2	5	3	4	{0, 10}	4	0	0	56	0	0	0	0	12 + 24
	2	4	5	3	2	{0}	1	16	0	0	12	0	0	24 + 576	0
	4	2	3	5	2	{0}	1	32	0	0	10	0	0	290	0
4	2	5	3	2	{0}	1	16	0	0	6	0	0	102	0	
252	2	7	3	3	2	{0}	1	27	0	0	21	0	0	315	0
	7	2	3	3	2	{0}	1	9	0	0	6	0	0	618	0
	3	7	2	2	3	{0}	1	104	0	0	980	0	392	5096	0
	7	3	2	2	3	{0}	1	16	0	0	324	0	72	21312	0
	2	2	3	3	7	{0}	1	3	0	0	12830400	71383680	206126208	0	0
264	2	2	3	11	2	{0}	1	5368	0	0	22	0	0	88	0
	2	2	11	3	2	{0}	1	40	0	0	6	0	0	552	0
270	3	3	2	5	3	{0}	1	9	0	0	1125	0	450	48825	0
	3	3	5	2	3	{0}	1	6	0	0	288	0	72	48600	0
280	2	2	5	7	2	{0}	1	2232	0	0	14	0	0	112	0
	2	2	7	5	2	{0}	1	480	0	0	10	0	0	170	0

Dans chaque colonne, seulement les rythmes qui peuvent être engendrés par le théorème correspondant, mais pas par les précédents sont comptés. Les chiffres gris correspondent aux rythmes qui peuvent être engendrés également par le choix des paramètres de la ligne précédente. Lorsqu'il n'y a pas de colonne (par exemple, $\#A$ pour le théorème 3) tous les rythmes possibles apparaissent déjà dans les colonnes précédentes.

4 Algorithmes pour énumérer les compléments apériodiques

Nous poursuivons en présentant deux nouveaux algorithmes (qui sont le fruit d'un travail commun avec G. Auricchio, L. Ferrarini, S. Gualandi et L. Pernazza) pour la recherche exhaustive de motifs de pavage (apériodiques), l'un en langage de programmation linéaire entier (le *CS Algorithm*) et l'autre en codage SAT. Nous montrons comment ces modèles peuvent être utilisés pour définir un algorithme itératif qui, étant donné une période n , trouve tous les rythmes qui tuilent avec un rythme donné A . Pour conclure, nous menons plusieurs expériences pour valider l'efficacité temporelle des deux modèles (voir [4]).

Nous définissons deux types de contraintes :

1. les *contraintes de pavage* qui imposent la condition $A \oplus B = \mathbb{Z}_n$, et
2. les *contraintes d'apériodicité* qui imposent que le canon B soit apériodique.

4.1 Contraintes de pavage

Étant donné la période n et le rythme A , soit $\mathbf{a} = [a_0, \dots, a_{n-1}]^T$ son vecteur caractéristique, c'est-à-dire $a_i = 1$ si et seulement si $i \in A$. En utilisant le vecteur \mathbf{a} nous définissons la matrice circulante $T \in \{0, 1\}^{n \times n}$ du rythme A , c'est-à-dire que chaque colonne de T est le décalage circulaire de la première colonne, qui correspond au vecteur \mathbf{a} . Ainsi, la matrice T est égale à

$$T = \begin{bmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_0 \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons utiliser la matrice circulante T pour imposer les conditions de pavage comme suit. Introduisons un littéral x_i pour $i = 0, \dots, n-1$, qui représente le vecteur caractéristique du rythme de pavage B , soit $x_i = 1$ si et seulement si $i \in B$. Ensuite, la condition de pavage peut être écrite avec la contrainte linéaire suivante :

$$\sum_{i \in \{0, \dots, n-1\}} T_{ij} x_i = 1, \quad \forall j = 0, \dots, n-1. \quad (2)$$

Notez que l'ensemble de contraintes linéaires (2) impose qu'exactly une variable (littérale) dans l'ensemble $\{x_{n+i-j \bmod n}\}_{j \in A}$ est égale à 1. Par conséquent, nous encodons cette condition sous la forme d'une contrainte **Exactement-un**, c'est-à-dire qu'exactly un littéral peut prendre la valeur 1. La contrainte **Exactement-un** peut être exprimée comme la conjonction des deux contraintes **Au-moins-un** et **Au-plus-un**, pour lesquelles il existe un codage SAT standard (par exemple, voir [6, 16]). Par conséquent, les contraintes de pavage (2) sont codées avec l'ensemble de clauses suivant dépendant de $i = 0, \dots, n-1$:

$$\bigvee_{j \in A} (x_{n-(j-i) \bmod n}) \bigwedge_{k, l \in A, k \neq l} (\neg x_{n-(k-i) \bmod n} \vee \neg x_{n-(l-i) \bmod n}). \quad (3)$$

4.2 Contraintes d'apériodicité

Au vu de Définition 2, s'il existe un $b \in B$ tel que $(d+b) \bmod n \neq b$, alors le canon B n'est pas périodique modulo d .

On formule les contraintes d'apériodicité en introduisant des variables auxiliaires $y_{d,i}$, $z_{d,i}$, $u_{d,i} \in \{0, 1\}$ pour tout diviseur premier $d \in \mathcal{D}_n$ et pour tout entier $i = 0, \dots, d-1$. On pose

$$u_{d,i} = 1 \Leftrightarrow \left(\sum_{k=0}^{n/d-1} x_{i+kd} = \frac{n}{d} \right) \vee \left(\sum_{k=0}^{n/d-1} x_{i+kd} = 0 \right), \quad (4)$$

pour tout $d \in \mathcal{D}_n$, $i = 0, \dots, d-1$, avec la condition

$$\sum_{i=0}^{d-1} u_{d,i} \leq d-1, \quad \forall d \in \mathcal{D}_n. \quad (5)$$

Comme pour [5], les contraintes (4) peuvent être linéarisées à l'aide de techniques de reformulation standard comme suit :

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n/d} x_{i+kd} - \frac{n}{d} y_{d,i} \leq \frac{n}{d} - 1 \quad \forall d \in \mathcal{D}_n, \quad i = 0, \dots, d-1, \quad (6)$$

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n/d} (1 - x_{i+kd}) - \frac{n}{d} z_{d,i} \leq \frac{n}{d} - 1 \quad \forall d \in \mathcal{D}_n, \quad i = 0, \dots, d-1, \quad (7)$$

$$y_{d,i} + z_{d,i} = u_{d,i} \quad \forall d \in \mathcal{D}_n, \quad i = 0, \dots, d-1. \quad (8)$$

Notez que lorsque $u_{d,i} = 1$ exactement une des deux alternatives incompatibles dans le côté droit de (4) est vraie, alors que chaque fois que $u_{d,i} = 0$ les deux contraintes ne sont pas vérifiées. Corrélativement, la contrainte (8) impose que les variables $y_{d,i}$ et $z_{d,i}$ ne puissent pas être égales à 1 en même temps. D'autre part, la contrainte (5) impose qu'au moins une des variables auxiliaires $u_{d,i}$ soit égale à 0.

Ensuite, nous encodons les conditions précédentes sous la forme d'une formule SAT. Pour coder la clause **Si-et-seulement-si**, nous utilisons l'équivalence logique entre $C_1 \Leftrightarrow C_2$ et $(\neg C_1 \vee C_2) \wedge (C_1 \vee \neg C_2)$. La clause C_1 est donnée directement par le littéral $u_{d,i}$. La clause C_2 , exprimant le côté droit de (4), c'est-à-dire la contrainte que les variables doivent être toutes vraies ou toutes fausses, peut s'écrire

$$C_2 = \left(\bigwedge_{k=0}^{n/d} x_{i+kd} \right) \vee \left(\bigwedge_{k=0}^{n/d} \bar{x}_{i+kd} \right), \quad \forall d \in \mathcal{D}_n.$$

Ensuite, la contrainte linéaire (5) peut être énoncée comme la formule SAT :

$$\neg (u_{d,0} \wedge u_{d,1} \wedge \dots \wedge u_{d,(d-1)}) = \bigvee_{l=0}^{d-1} \bar{u}_{d,l}, \quad \forall d \in \mathcal{D}_n.$$

Enfin, nous exprimons les contraintes d'apériodicité en utilisant

$$\bigwedge_{i=0}^{d-1} [(\neg C_2 \vee u_{d,i}) \wedge (C_2 \vee \bar{u}_{d,i})] \wedge \bigvee_{l=0}^{d-1} \bar{u}_{d,l}, \quad \forall d \in \mathcal{D}_n. \quad (9)$$

Notez que joindre (2), (6)–(8) avec une fonction objectif constante donne un modèle ILP complet, qui peut être résolu avec un solveur ILP moderne tel que Gurobi pour énumérer tous les possibles solutions. En même temps, en joignant (3) et (9) dans une formule CNF unique, nous obtenons notre codage SAT complet du problème des compléments de pavage apériodiques.

TABLE 3 – Compléments de pavage apériodiques pour les périodes $n \in \{72, 108, 120, 144, 168\}$.

n	p_1	n_1	p_2	n_2	n_3	temps d'exécution (s)				# B
						FOP	CSA	SAT	ILP	
72	2	2	3	3	2	1.59	0.10	< 0.01	0.03	6
108	2	2	3	3	3	896.06	7.84	0.09	0.19	252
120	2	2	5	3	2	24.16	0.27	0.02	0.04	18
	2	2	3	5	2	10.92	0.14	0.01	0.04	20
144	4	2	3	3	2	82.53	2.93	0.02	0.11	36
	2	2	3	3	4	> 10800.00	> 10800.00	11.04	46.96	8640
	2	2	3	3	4	7.13	0.10	< 0.01	0.05	6
	2	4	3	3	2	80.04	0.94	0.02	0.08	60
168	2	2	7	3	2	461.53	17.61	0.04	0.20	54
	2	2	3	7	2	46.11	0.91	0.02	0.07	42

4.3 Résultats de calcul

Tout d'abord, nous comparons les résultats obtenus en utilisant notre modèle ILP et l'encodage SAT avec les temps d'exécution de la *Fill-Out Procédure* (voir [14]) et de le *CS Algorithme* (voir [5]). Nous utilisons les canons de périodes 72, 108, 120, 144 et 168 qui ont été entièrement énumérés par Vuza [18], Fripertinger [10], Amiot [2], Kolountzakis et Matolcsi [14]. Tableau 3 montre clairement que les deux nouvelles approches surpassent l'état de l'art, et en particulier, que SAT fournit la meilleure approche de solution.

Les nouveaux algorithmes ont également été utilisés pour étudier certaines classes de canons de périodes n plus grandes (180, 216, 240, 900) qui étaient auparavant insolubles. En particulier, nous avons terminé l'énumération des canons apériodiques de période 180. Il s'est avéré que les canons apériodiques que nous obtenons à la fin de la recherche informatique sont exactement les canons de Vuza étendus de période 180.

Références

- [1] E. Amiot. Why rhythmic Canons are interesting. *E. Lluis-Puebla, G. Mazzola et T. Noll (eds.), Perspectives of Mathematical and Computer-Aided Music Theory, EpOs*, pages 190–209, 2004.
- [2] E. Amiot. New perspectives on rhythmic canons and the spectral conjecture. *Journal of Mathematics and Music*, 3(2) :71–84, 2009.
- [3] M. Andreatta, C. Agon, and E. Amiot. Tiling problems in music composition : Theory and Implementation. *International Computer Music Conference*, pages 156–163, 2002.
- [4] G. Auricchio, L. Ferrarini, S. Gualandi, G. Lanzarotto, and L. Pernazza. A SAT Encoding to Compute Aperiodic Tiling Rhythmic Canons. In *International Conference on Integration of Constraint Programming, Artificial Intelligence, and Operations Research*, pages 14–23. Springer, 2022.
- [5] G. Auricchio, L. Ferrarini, and G. Lanzarotto. An Integer Linear Programming Model for Tilings. *arXiv preprint arXiv : 2107.04108*, 2021.

- [6] O. Bailleux and Y. Boufkhad. Efficient CNF encoding of boolean cardinality constraints. In *International conference on principles and practice of constraint programming*, pages 108–122. Springer, 2003.
- [7] E.M. Coven and A. Meyerowitz. Tiling the integers with translates of one finite set. *Journal of Algebra*, 212(1) :161–174, 1999.
- [8] N.G. de Bruijn. On the factorization of finite abelian groups. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen : Series A : Mathematical Sciences*, 61(3) :258–264, 1953.
- [9] G. Fidanza. Canoni ritmici a mosaico. *Tesi di Laurea, Università degli Studi di Pisa*, 2007.
- [10] H. Fripertinger, L. Reich, et al. *Remarks on rhythmical canons*. Citeseer, 2005.
- [11] G. Hajós. Sur la factorisation des groupes abéliens. *Časopis Pěst. Mat. Fys.*, 74 :157–162, 1950.
- [12] F. Jędrzejewski. *Mathematical theory of music*. Ircam-Centre Pompidou, Parigi, 2006.
- [13] F. Jędrzejewski. Enumeration of Vuza Canons. *arXiv preprint arXiv : 1304.6609*, 2013.
- [14] M.N. Kolountzakis and M. Matolcsi. Algorithms for translational tiling. *Journal of Mathematics and Music*, 3(2) :85–97, 2009.
- [15] G. Lanzarotto and L. Pernazza. Extended Vuza Canons. In *International Conference on Mathematics and Computation in Music*, pages 112–126. Springer, 2022.
- [16] T. Philipp and P. Steinke. Pblib – A library for encoding pseudo-boolean constraints into CNF. In *International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing*, pages 9–16. Springer, 2015.
- [17] A.D. Sands. On the factorisation of finite abelian groups. III. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, 25(3-4) :279–284, 1974.
- [18] D.T. Vuza. Supplementary sets and regular complementary unending canons (part one). *Perspectives of New Music*, pages 22–49, 1991.
- [19] D.T. Vuza. Supplementary sets and regular complementary unending canons (part three). *Perspectives of New Music*, pages 102–124, 1992.
- [20] D.T. Vuza. Supplementary sets and regular complementary unending canons (part two). *Perspectives of New Music*, pages 184–207, 1992.
- [21] D.T. Vuza. Supplementary sets and regular complementary unending canons (part four). *Perspectives of New Music*, pages 270–305, 1993.