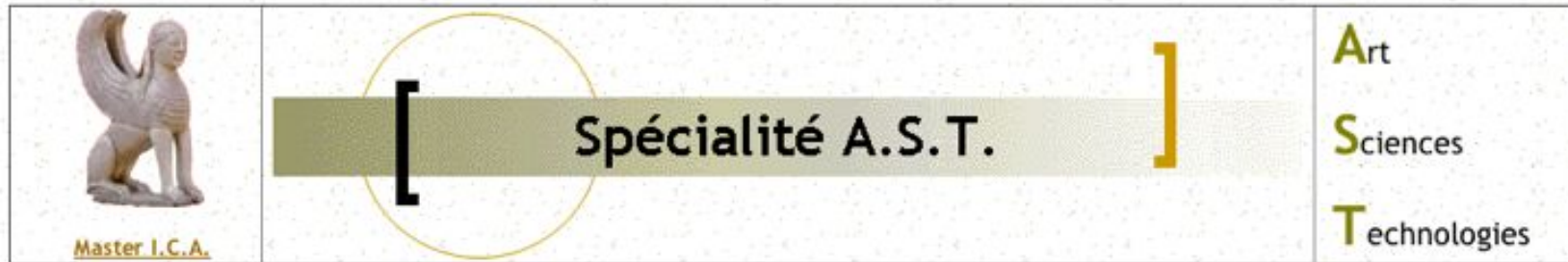


Master I.C.A.



Traitement interactif de l'image et du son

Méthodes mathématiques pour la création musicale :
aspects théoriques, informatiques et cognitifs

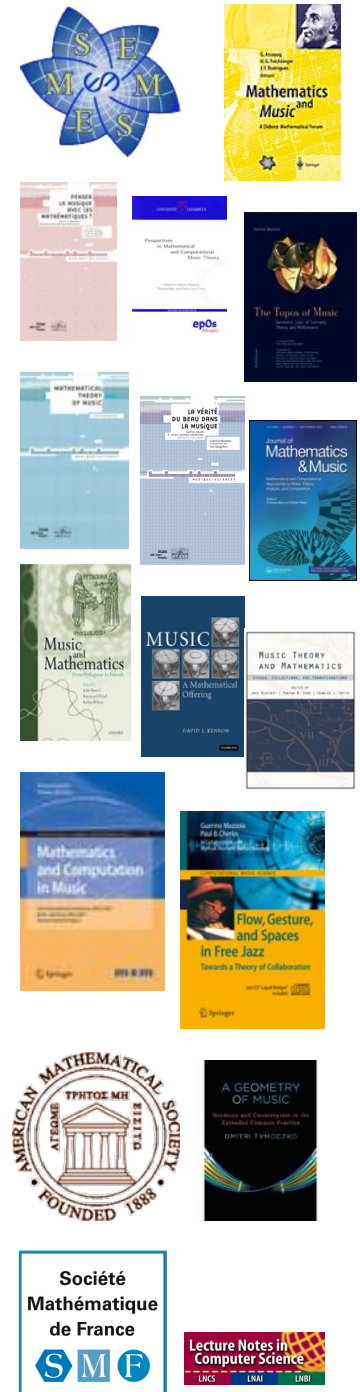
Moreno Andreatta – Jean Bresson

Equipe Représentations Musicales

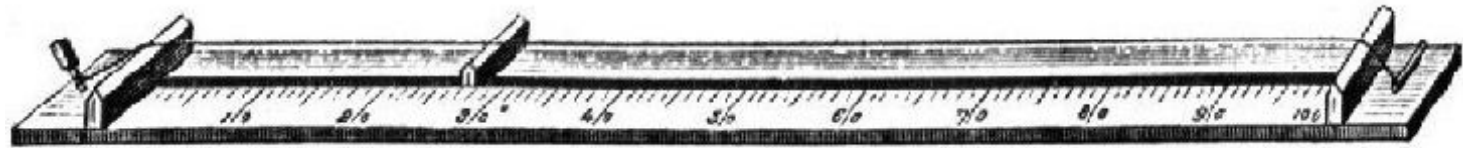
IRCAM/CNRS/UPMC UMR 9912

Mathématiques/Musique...une histoire récente!

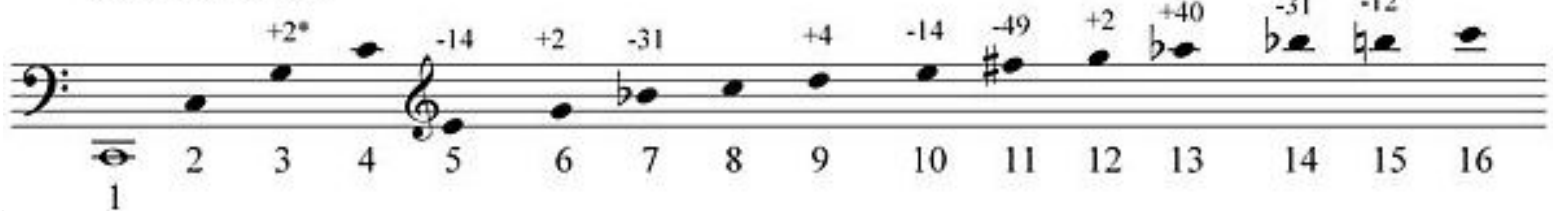
- 1999 : 4^e Forum Diderot (Paris, Vienne, Lisbonne), *Mathematics and Music* (G. Assayag, H.G. Feichtinger, J.F. Rodrigues, Springer, 2001)
- 2000-2001 : Séminaire *MaMuPhi*, *Penser la musique avec les mathématiques ?* (Assayag, Mazzola, Nicolas éd., Coll. « M/S », Ircam/Delatour, 2006)
- 2000-2003 : International Seminar on *MaMuTh* (*Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory*) (Mazzola, Noll, Luis-Puebla eds, epOs, 2004)
- 2003 : *The Topos of Music* (G. Mazzola et al.)
- 2003: *Music and Mathematics. From Pythagoras to Fractals* (J. Fauvel et al.)
- 2001 - 2011 : Séminaire *MaMuX* de l'Ircam
- 2004 - 2011 : Séminaire *mamuphi* (Ens/Ircam)
- 2006 : *Mathematical Theory of Music* (F. Jędrzejewski), Coll. « M/S »
- 2007 : *La vérité du beau dans la musique* (G. Mazzola), Coll. « Musique/Sciences »
- 2007 : *Journal of Mathematics and Music* (Taylor & Francis) et MCM 2007
- 2007: *Music. A Mathematical Offering* (Dave Benson), CUP
- 2008: *Music Theory and Mathematics* (Jack Douthett et al.), URP
- 2009 : *Computational Music Science Series* (Springer)
- 2009 : MCM 2009 (Yale) et Proceedings chez Springer
- 2010 : Mathematics Subject Classification : 00A65 Mathematics and music
- 2011 : Conférence de la SMCM (Ircam, 15-17 juin 2011)



De Pythagore... à la théorie des groupes



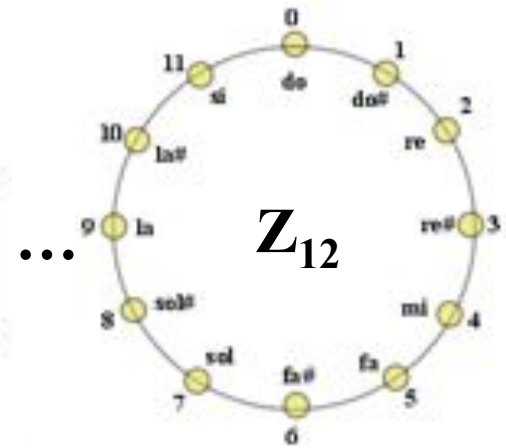
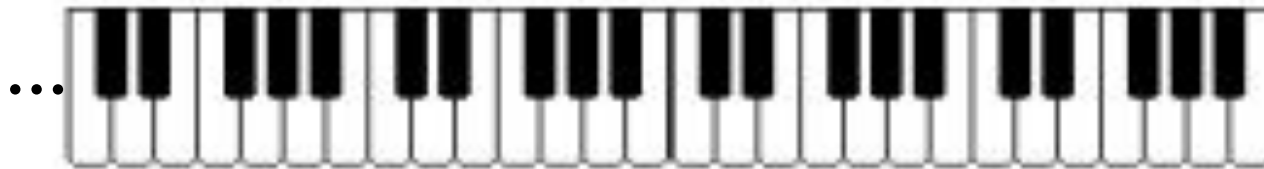
i suoni armonici



Physique

* in cents, confrontati con la scala temperata

Mathématiques



do do# ré ré# mi fa fa# sol sol# la la# si

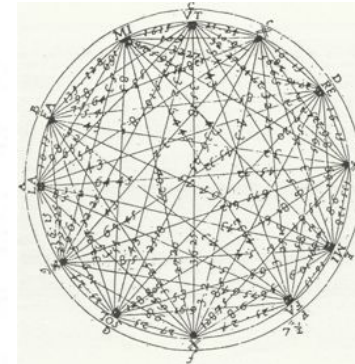
ré_b mi_b sol_b la_b si_b

Musique et mathématiques : deux destinées parallèles

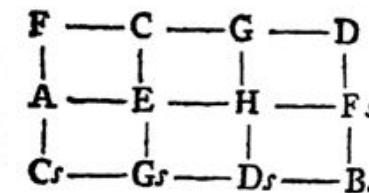
MUSIQUE	MATHS
500 av. J. C. Relation hauteur/longueur corde. La musique est source d'inspiration pour la théorie des nombres et la géométrie.	Nombres naturels et rationnels
300 a.J. Invention (théorique) de la gamme chromatique tempérée égale par Aristoxène de Tarente) et prémonition de la théorie des groupes . Isomorphismes entre les logarithmes (intervalles musicaux) et les exponentiels (longueur d'une corde)	Aucune relation.
1000 Invention de la représentation bidimensionnelle des hauteurs	Aucune correspondance
1500 Aucune reprise des concepts précédents	Nombres négatifs. Construction des rationnels
1600 Aucune relation	Nombres réels et les logarithmes
Marin Mersenne (1588-1648) : combinatoire musicale	Calcul des probabilités
1700 La fugue comme un automate abstrait. Manipulation inconsciente du groupe de Klein	Nombres complexes (Euler, Gauss), les quaternions (Hamilton), continuité (Cauchy), structure de groupe (Galois, Abel)
Leonhard Euler : Speculum Musicum [1773]	Théorie des graphes
1900 Libération de la prison de la tonalité (Loquin, Hauer, Schoenberg)	Nombres infinis et transfinis (Cantor). Axiomatique de Peano. Théorie de la mesure (Lebesgue, Borel)
1920 Formalisation radicale des macrostructures à travers le système sériel (Schoenberg)	Aucun développement de la théorie des nombres.
Ernst Krenek (1900-1991) : les axiomes dans le système dodécaphonique	David Hilbert, Les fondements de la géométrie (1899)



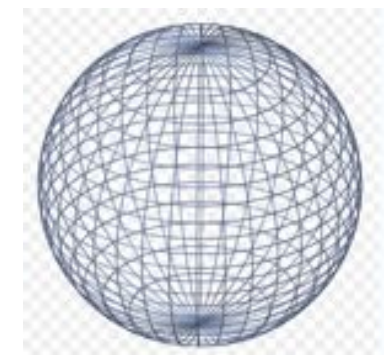
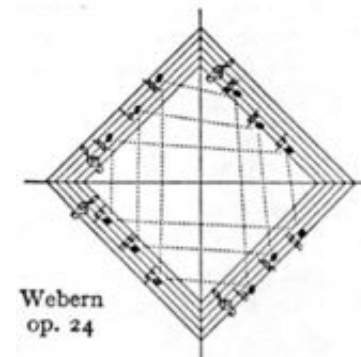
Pythagore et le monochorde, VI^e-V^e siècle av. J. C.



Mersenne, *Harmonicorum Libri XII*, 1648



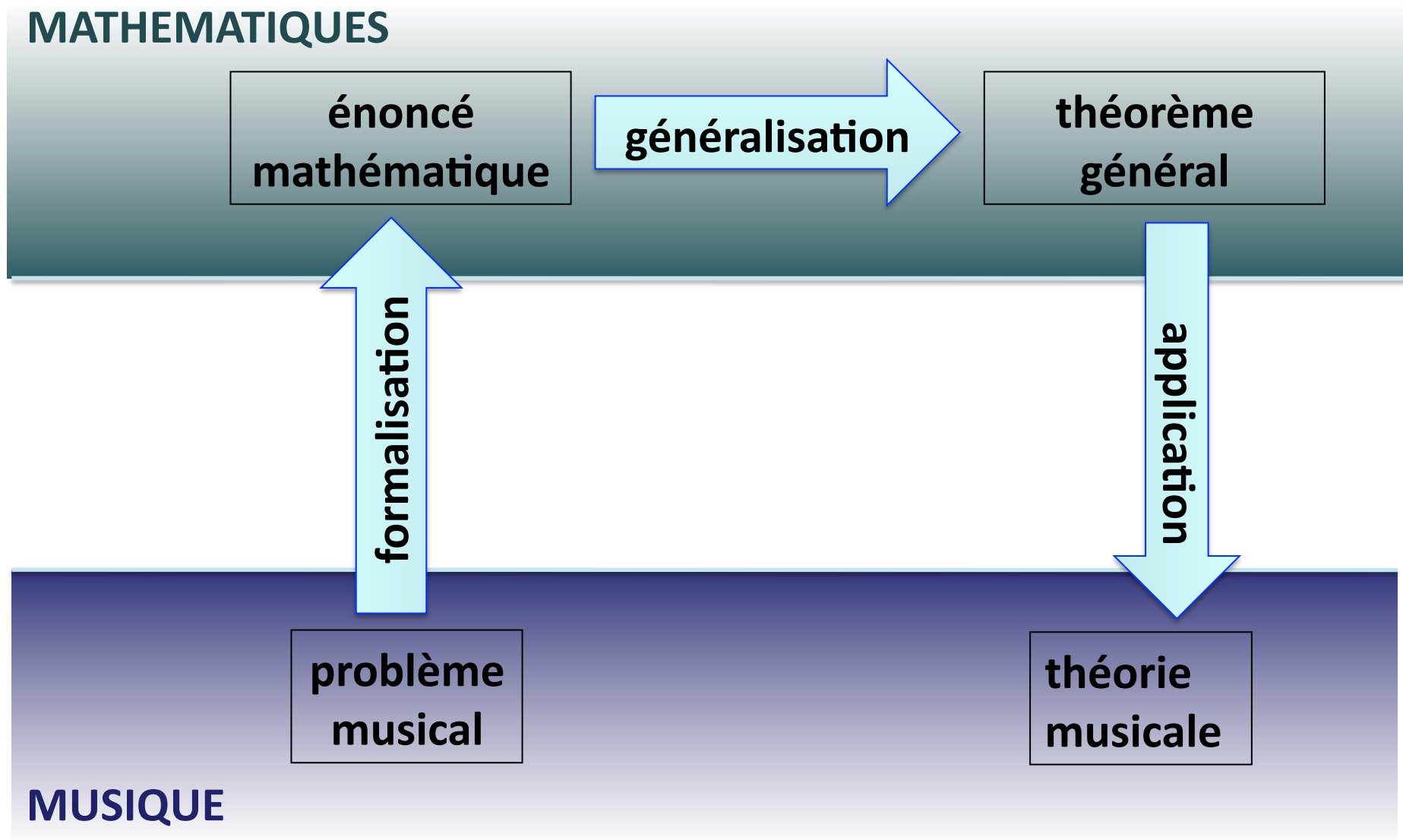
Euler : *Speculum musicum*, 1773



Iannis Xenakis, *Musique. Architecture*, Tournai, Casterman, 1971, (New, revised edition: Tournai, Casterman, 1976, 238 p.)

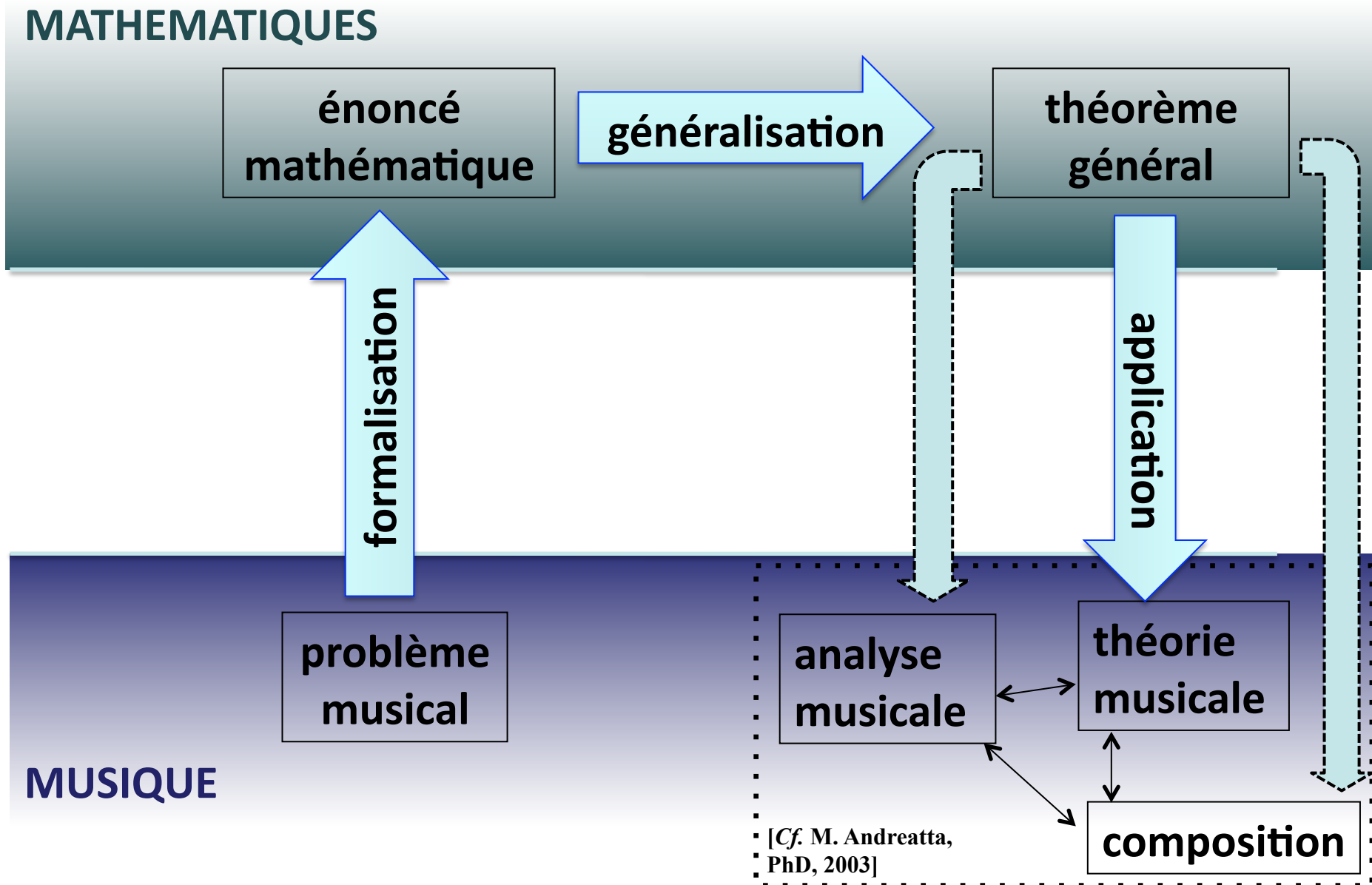


Double mouvement d'une dynamique mathémusicale

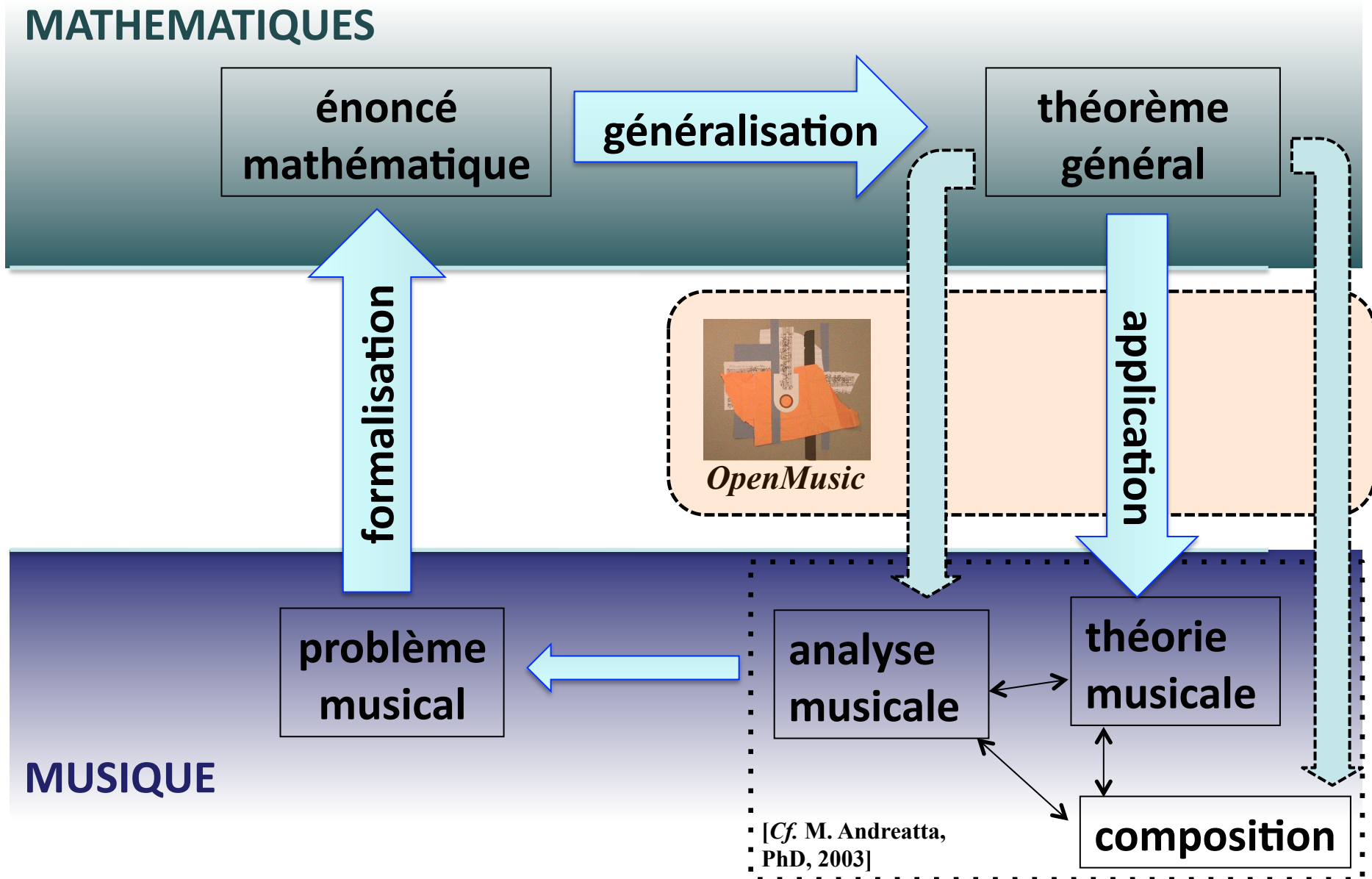


[Cf. M. Andreatta : *Mathematica est exercitium musicae*, HDR, octobre 2010]

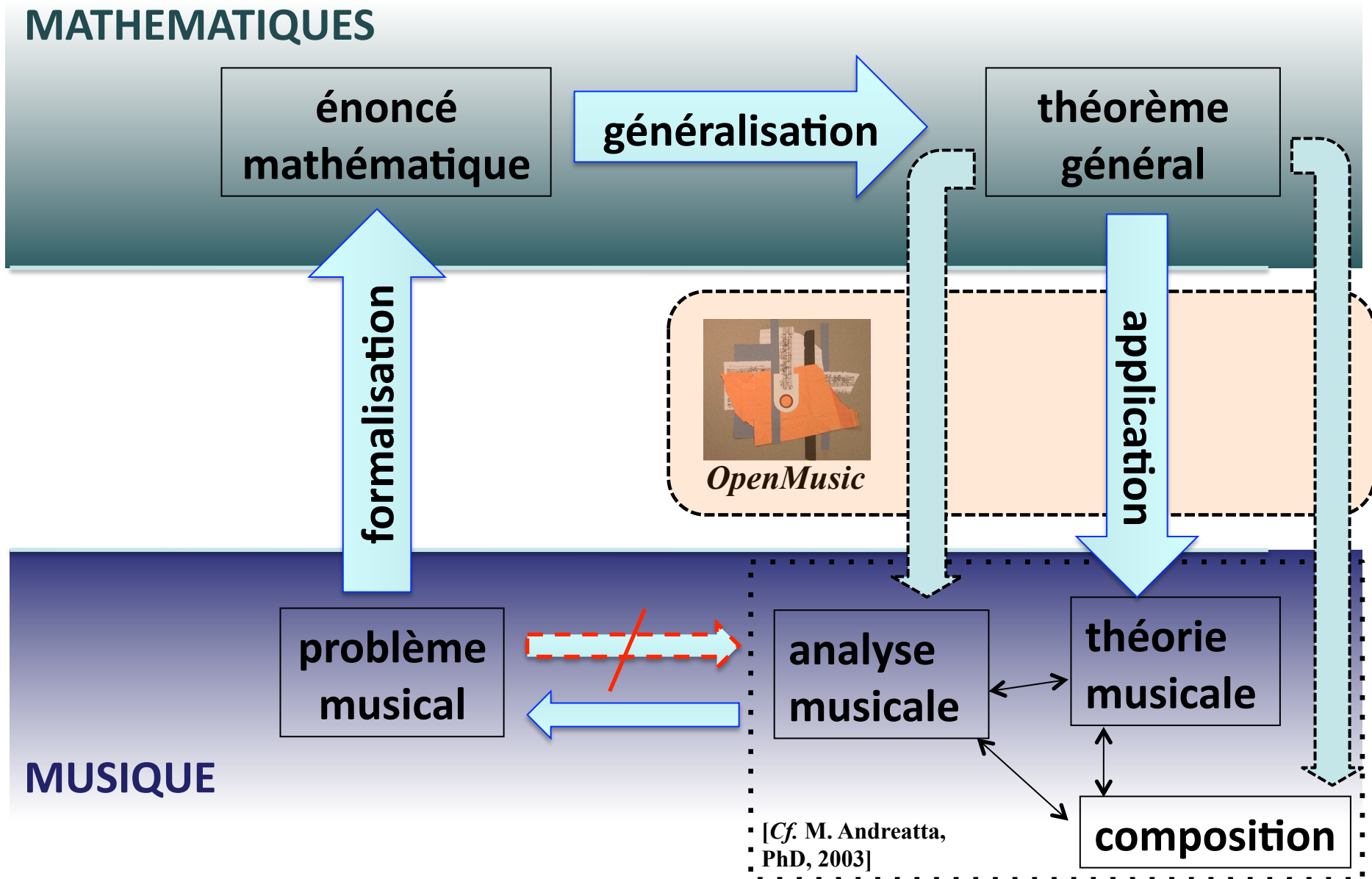
Double mouvement d'une dynamique mathémusicale



Double mouvement d'une dynamique mathémusicale



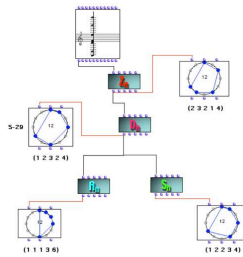
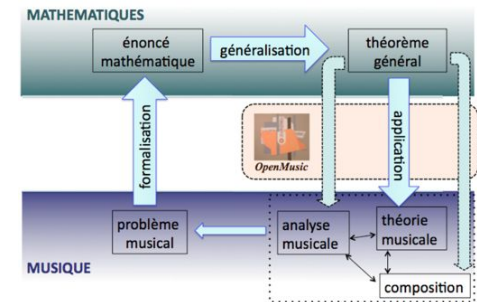
Double mouvement d'une dynamique mathémusicale



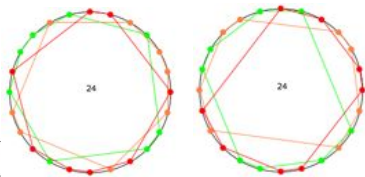
Un survol sur six problèmes mathémusicaux

[Cf. M. Andreatta : *Mathematica est exercitium musicae*, HDR, octobre 2010]

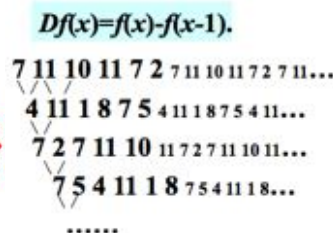
1. La construction des canons rythmiques mosaïques
2. La relation Z et la théorie des ensembles homométriques
3. La *Set Theory* et la théorie transformationnelle
4. Les théories diatoniques et les *ME-sets*
5. Suites périodiques et calcul de différences finies
6. La théorie des block-designs en composition algorithmique



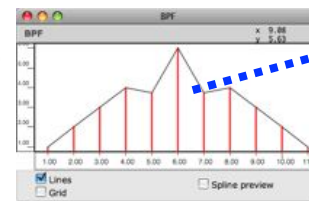
Actions de groupe



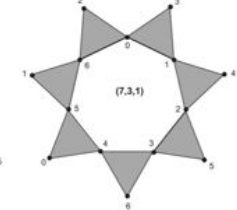
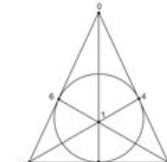
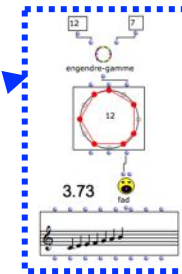
Pavages et homométrie



Calcul des différences finies

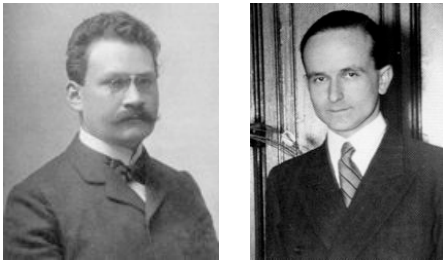


DFT et unicité de la gamme diatonique

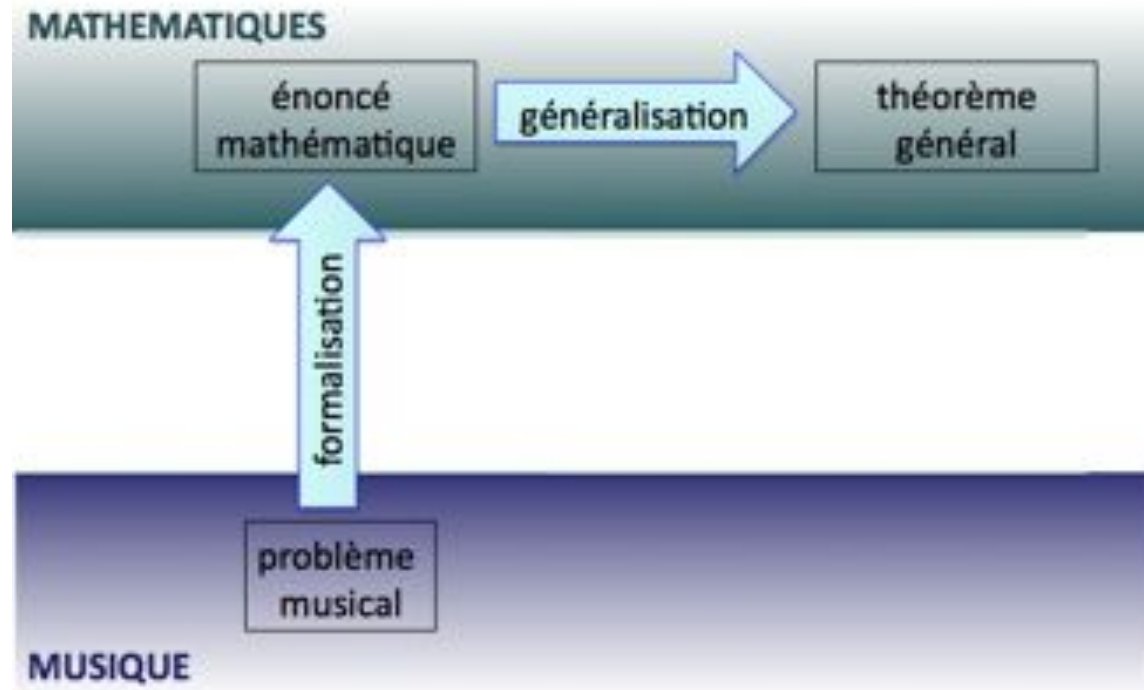
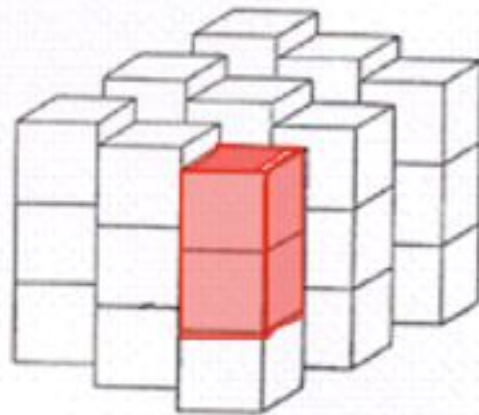


Block-designs

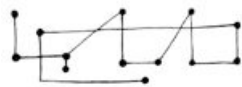
1. La construction des canons rythmiques mosaïques



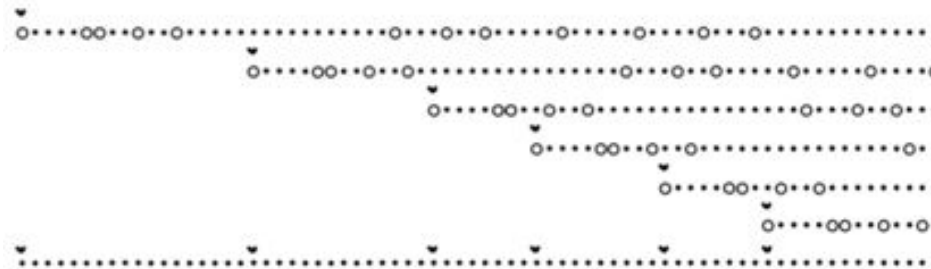
- Conjecture de Minkowski
- Solution de Hajos



1996



*Perspectives of
New Music*



temps →

1. La construction des canons rythmiques mosaïques

- Modèle computationnel
- Applications compositionnelles

R (1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
 (20 3 1 5 6 9 4 11 6 3 3 1)
 (1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
 (6 13 4 7 6 6 1 4 19 1 4 1)
 (1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)
 (3 3 17 4 3 6 6 5 4 15 5 1)

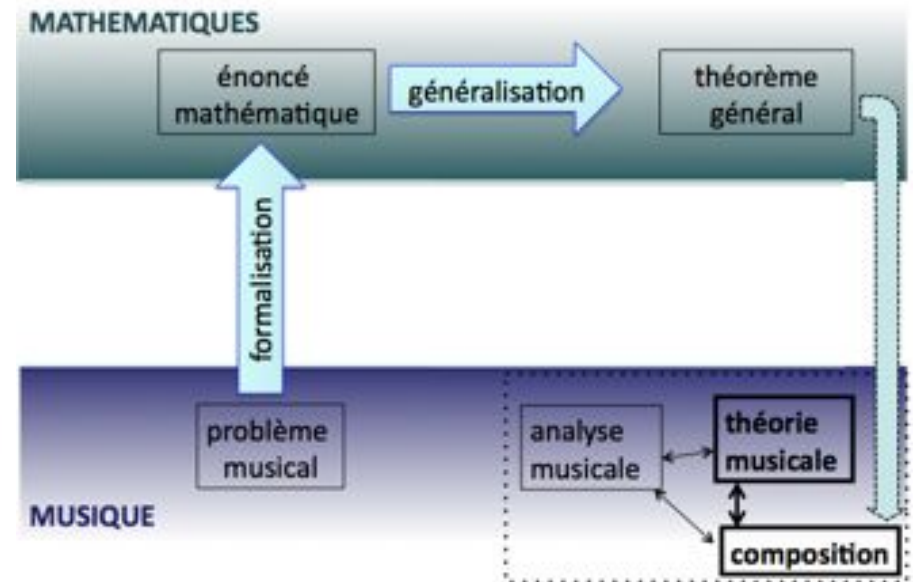
S (8 8 2 8 8 38)
 (16 2 14 2 16 22)
 (14 8 10 8 14 18)

R (1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
 (1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
 (1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)

S (8 8 2 8 8 38)
 (16 2 14 2 16 22)
 (14 8 10 8 14 18)

R (1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
 (1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)

S (14 8 10 8 14 18)

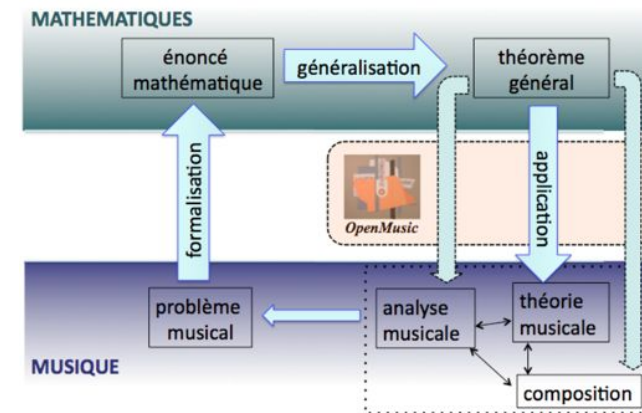
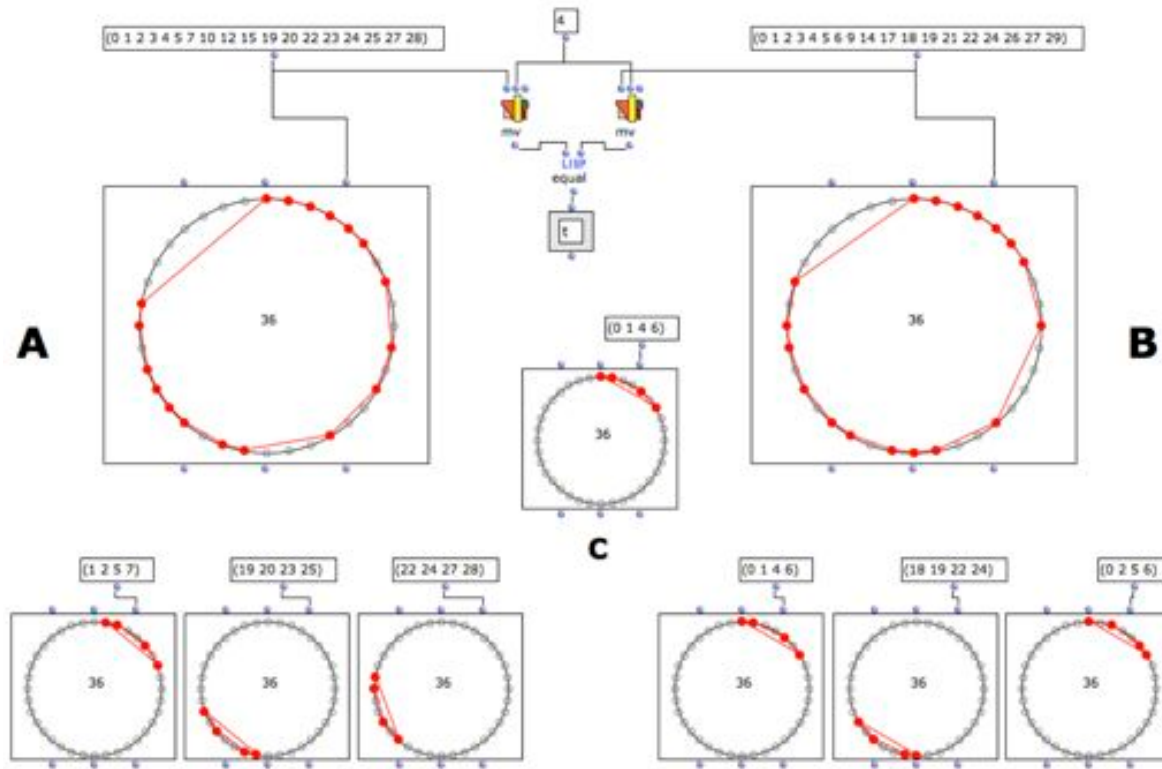


1999



2. La relation Z et la théorie de l'homométrie

- Reconstruction de la phase
- Relation Z^k
- Modèle computationnel



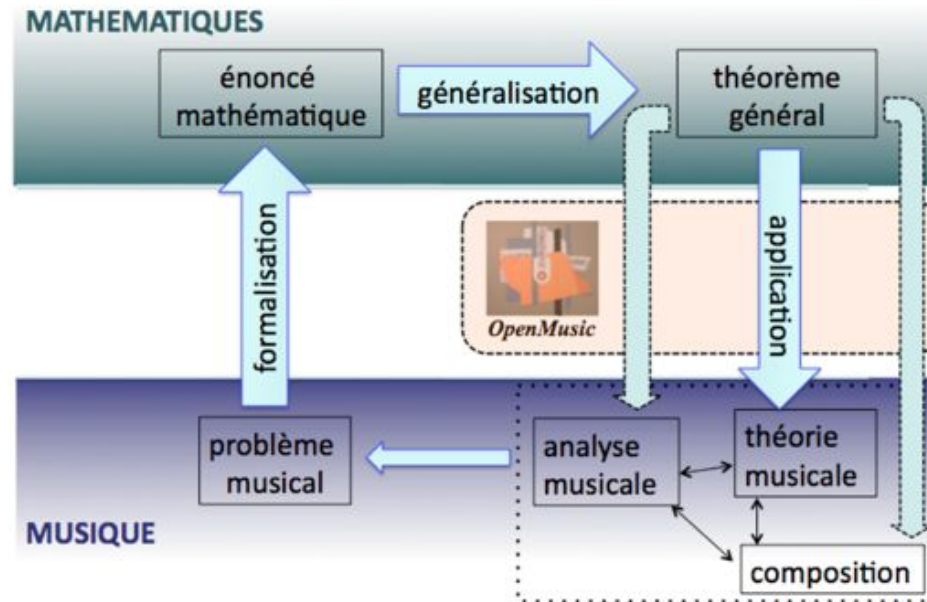
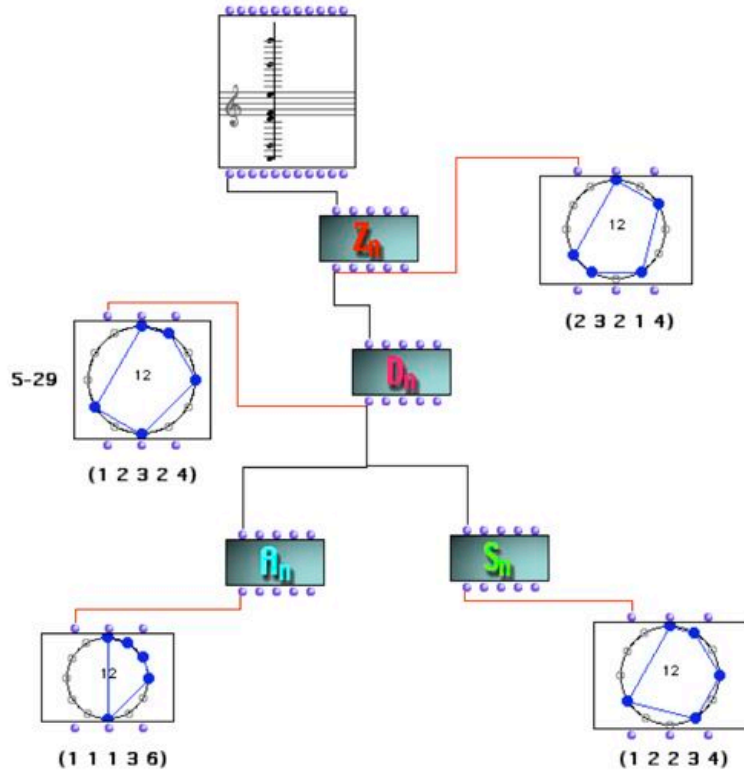
↓

90+

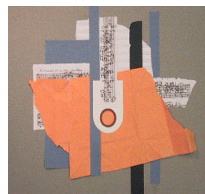
2010

3. La Set Theory et la théorie transformationnelle

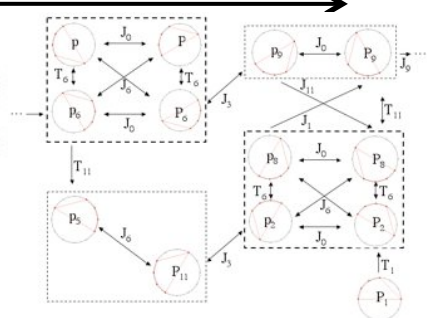
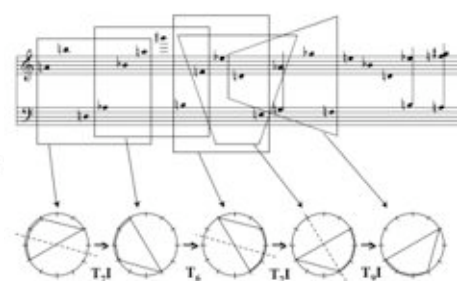
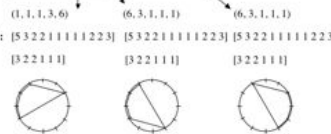
- Classification paradigmatique (extension à la microtonalité)
- Analyse computationnelle
- K-nets et formalisation



2003

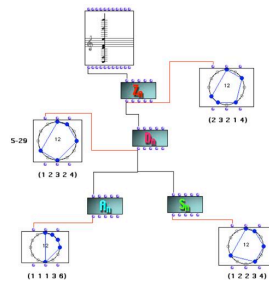
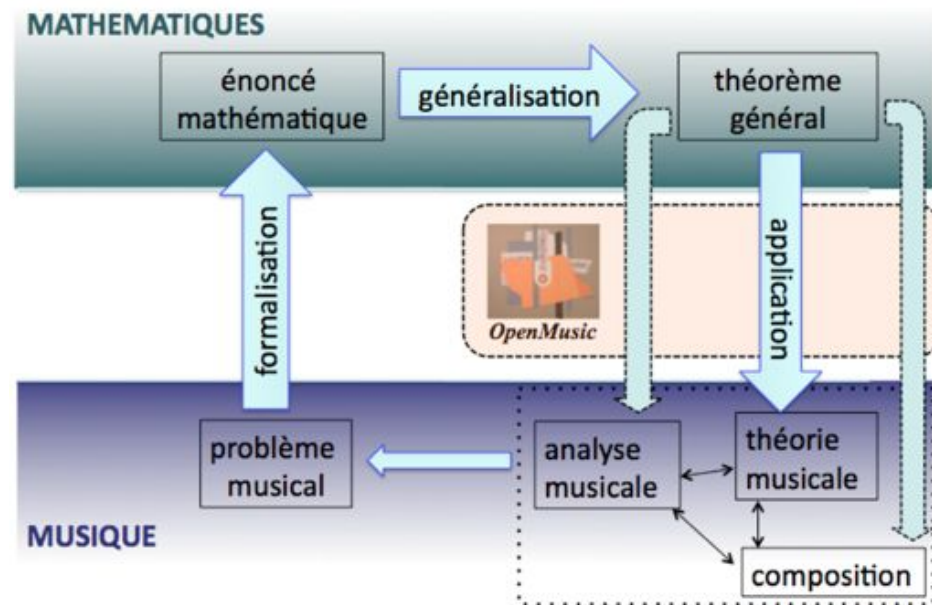
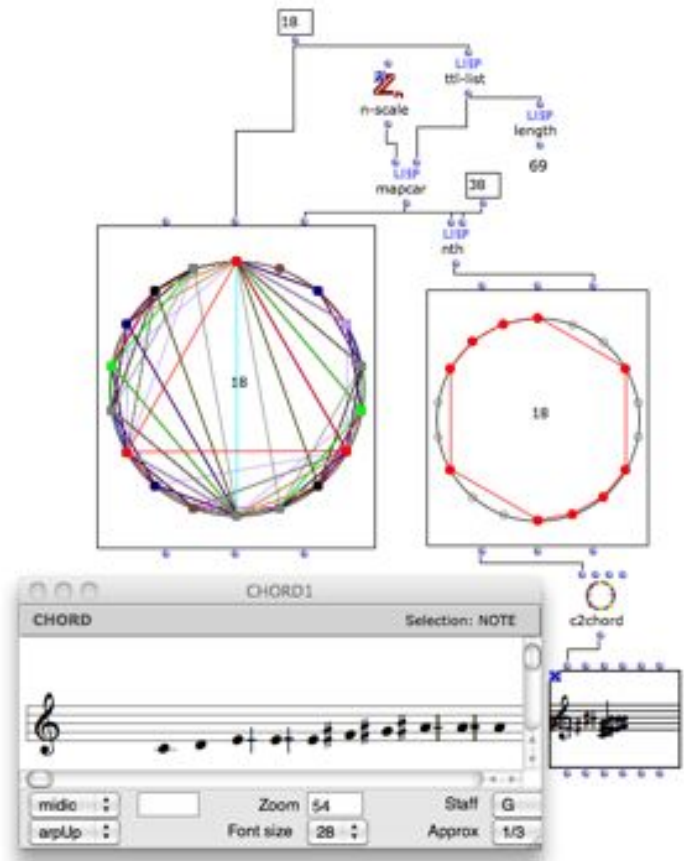


SE: (1, 1, 1, 3, 6) (6, 3, 1, 1, 1) (6, 3, 1, 1, 1)
 IFUNC: [5 3 2 2 1 1 1 1 1 2 2 3] [5 3 2 2 1 1 1 1 1 2 2 3] [5 3 2 2 1 1 1 1 1 2 2 3]
 VI: [3 2 2 1 1 1] [3 2 2 1 1 1] [3 2 2 1 1 1]

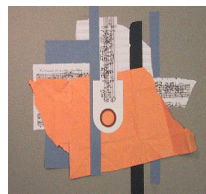


3. La Set Theory et la théorie transformationnelle

- Classification paradigmatique des structures microtonales
- Calcul des modes de Messiaen



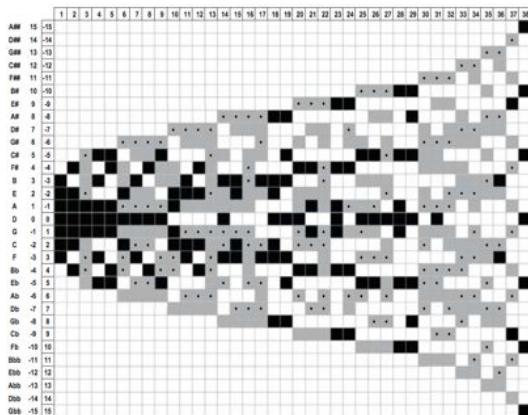
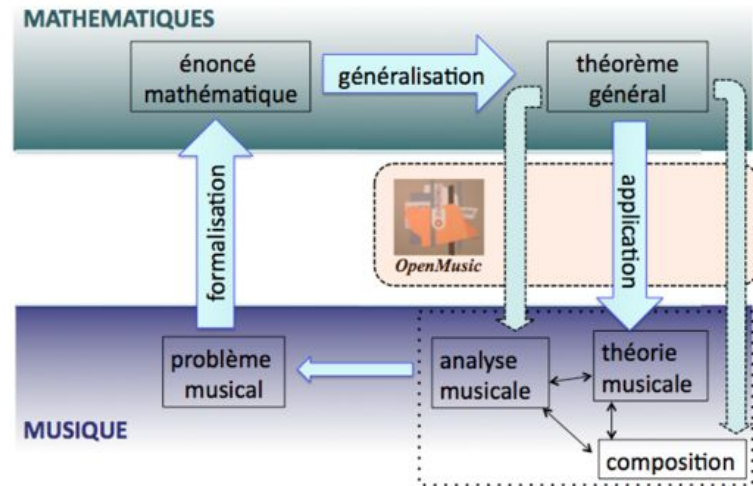
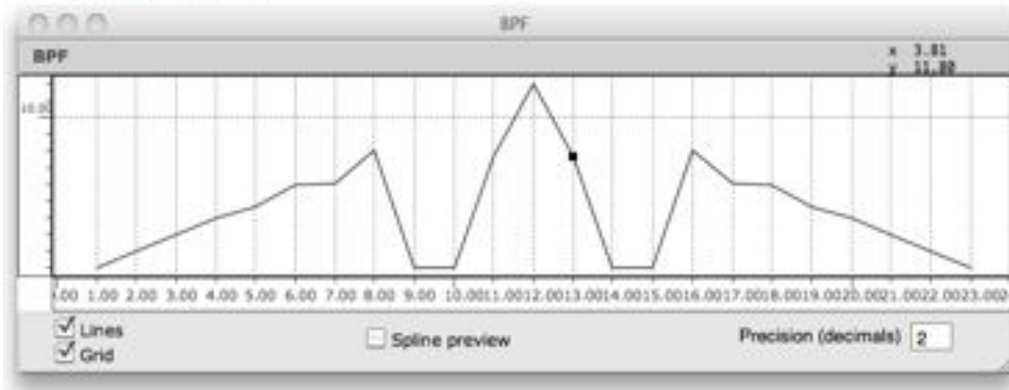
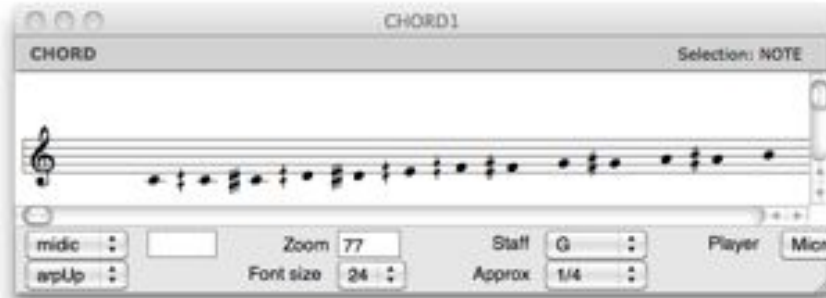
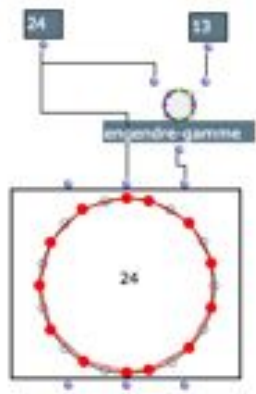
2006



4. Les théories diatoniques et les *ME-sets*

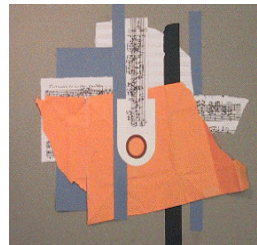
$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

- DFT
- Cloche diatonique
- Classification non-paradigmatique



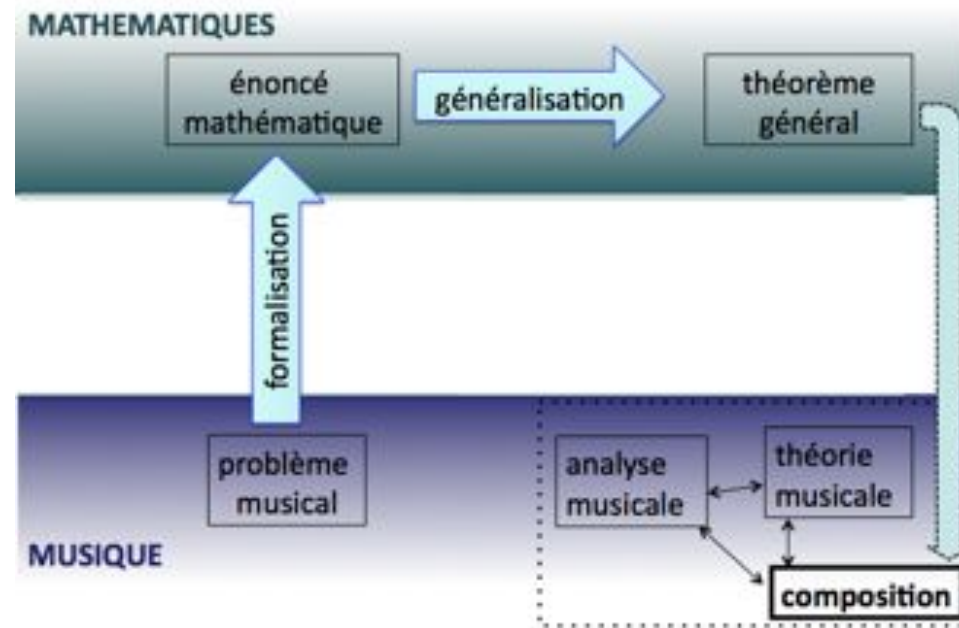
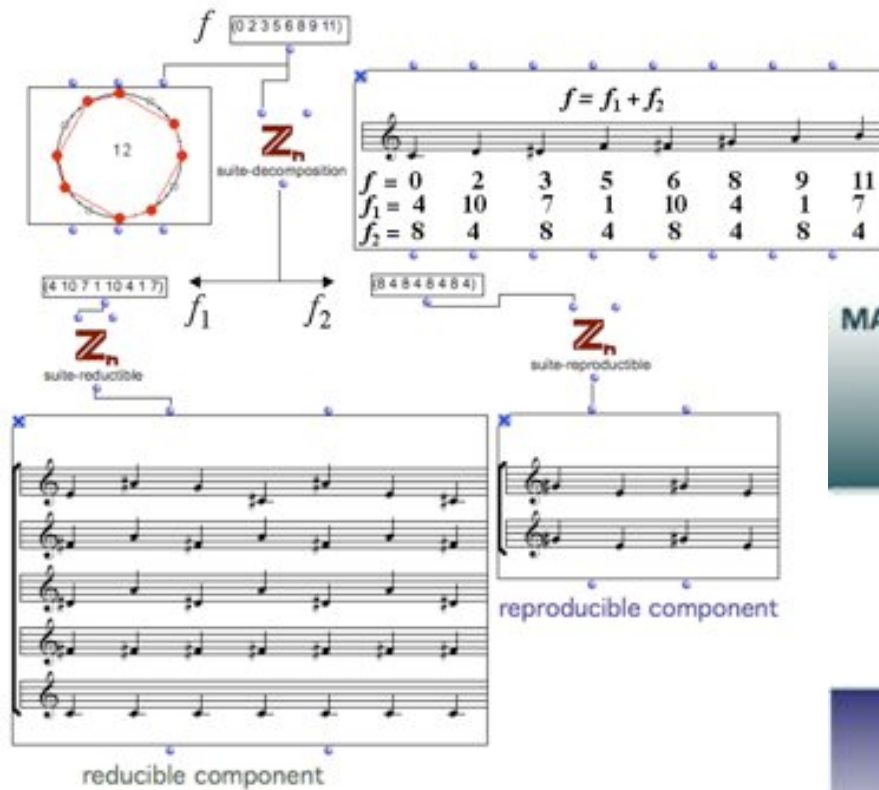
2008

C:
conservatoire
de lausanne



5. Suites périodiques et calcul de différences finies

- Théorème de décomposition
- Lemme de Fitting



2001



$$Df(x) = f(x) - f(x-1).$$

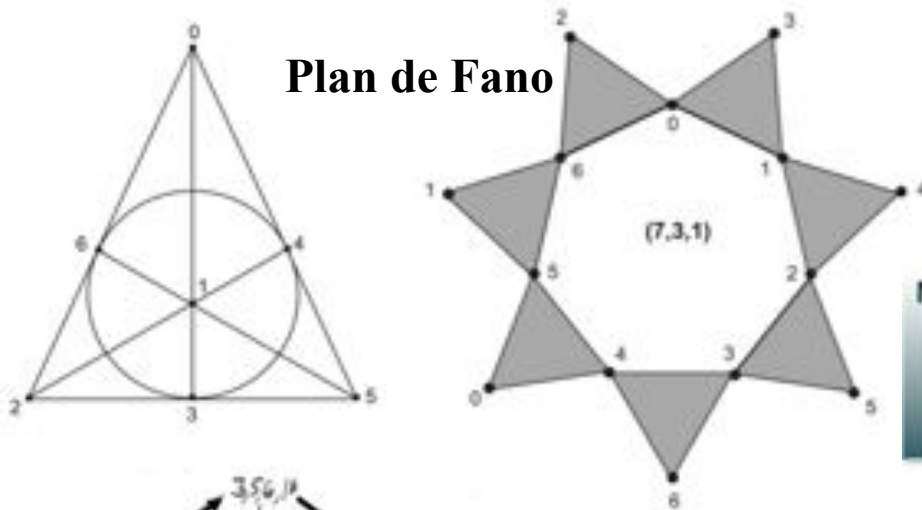
7 11 10 11 7 2 7 11 10 11 7 2 7 11...
 4 11 1 8 7 5 4 11 1 8 7 5 4 11...
 7 2 7 11 10 11 7 2 7 11 10 11...
 7 5 4 11 1 8 7 5 4 11 1 8...

Musical score with dynamics: *mf*, *pp*, *pl*, *pl*, *p*, *mf*, *mp*, *pp*, *pp*. Below the score is a table of numbers:

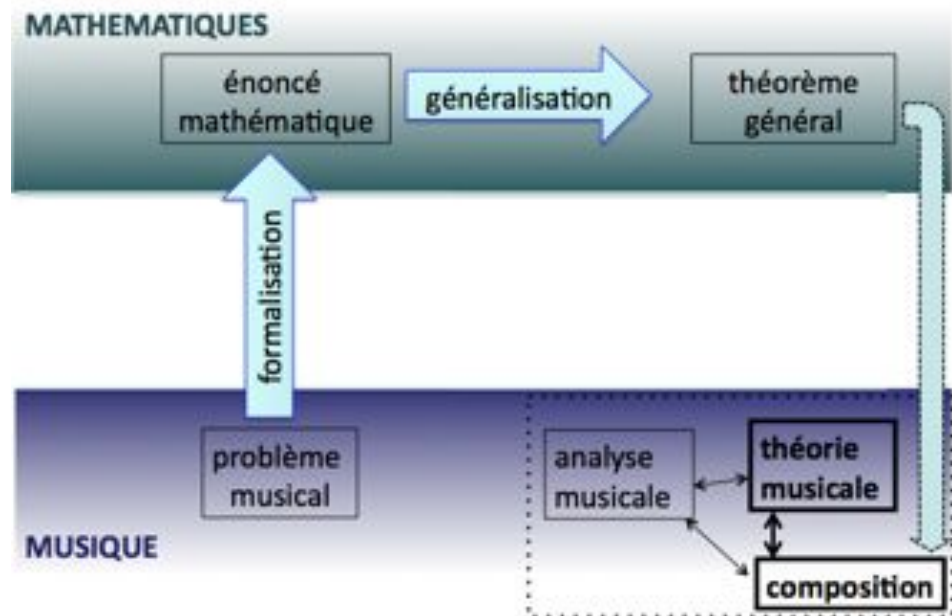
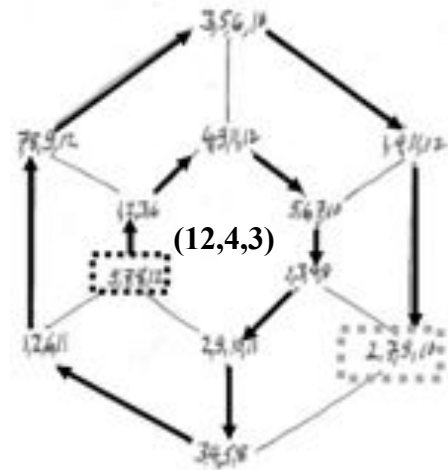
V	0	3	8	7	11	0	11	10	0	9	1	2	9	8	4	3	6
VIII	0	0	0	0	3	3	7	2	6	9	0	0	9	8	8	0	6
IV	3	3	4	4	1	11	11	8	3	3	3	3	4	1	7	3	9
IX	0	0	0	0	0	3	6	[1]	3	3	3	3	3	9	0	3	6
IV	0	10	3	9	10	0	9	7	0	6	7	9	6	4	9	3	6

6. Block-designs et composition algorithmique

Plan de Fano



- Représentations géométriques
- Chemins et cycles hamiltoniens

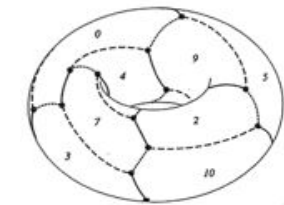
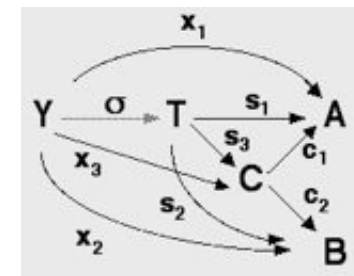
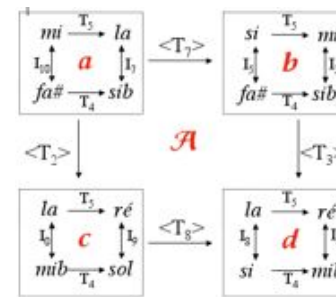
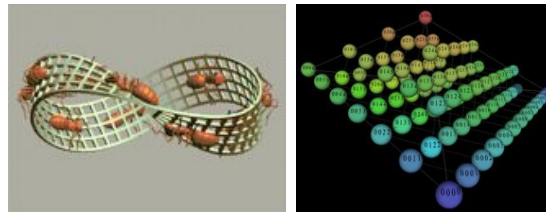
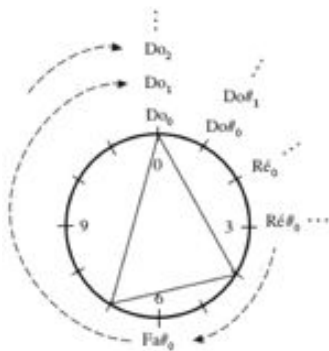


2009

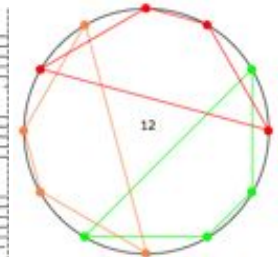
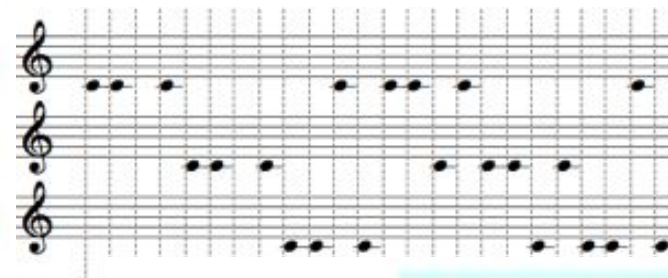


Plan du cours

- 1.) Rappel historique
- 2.) Représentation/formalisation et énumération/classification des structures musicales
- 3.) Set Theory, théories transformationnelles, diatoniques et néo-riemanniennes (+ Z-relation, ME-sets, ...)
- 4.) Pavages en composition : la construction des canons rythmiques mosaïques
- 5.) Aspects computationnels (implémentation en *Openmusic*)
- 6.) Ramifications philosophiques et cognitives de l'approche algébrique en musique



0 0	1 1	2 2	3 3	4 4	5 5	[6 6]
11 1	0 2	1 2	2 3	3 4	4 5	5 6
11 2	0 3	1 4	2 5	3 6	4 7	
10 2	11 3	0 4	1 5	2 6	3 7	[4 8]
10 3	11 4	0 5	1 6	2 7	3 8	
9 3	10 4	11 5	6 0	7 1	8 2	[9 3]
4 9	5 10	6 11	7 0	8 1	9 2	
4 8	5 9	6 10	7 11	8 0	9 1	[10 2]
5 8	6 9	7 10	8 11	9 0	10 1	
5 7	6 8	7 9	8 10	9 11	10 0	[11 1]
6 7	7 8	8 9	9 10	10 11	11 0	
6 6	7 7	8 8	9 9	10 10	11 11	[0 0]



$$Df(x) = f(x) - f(x-1).$$

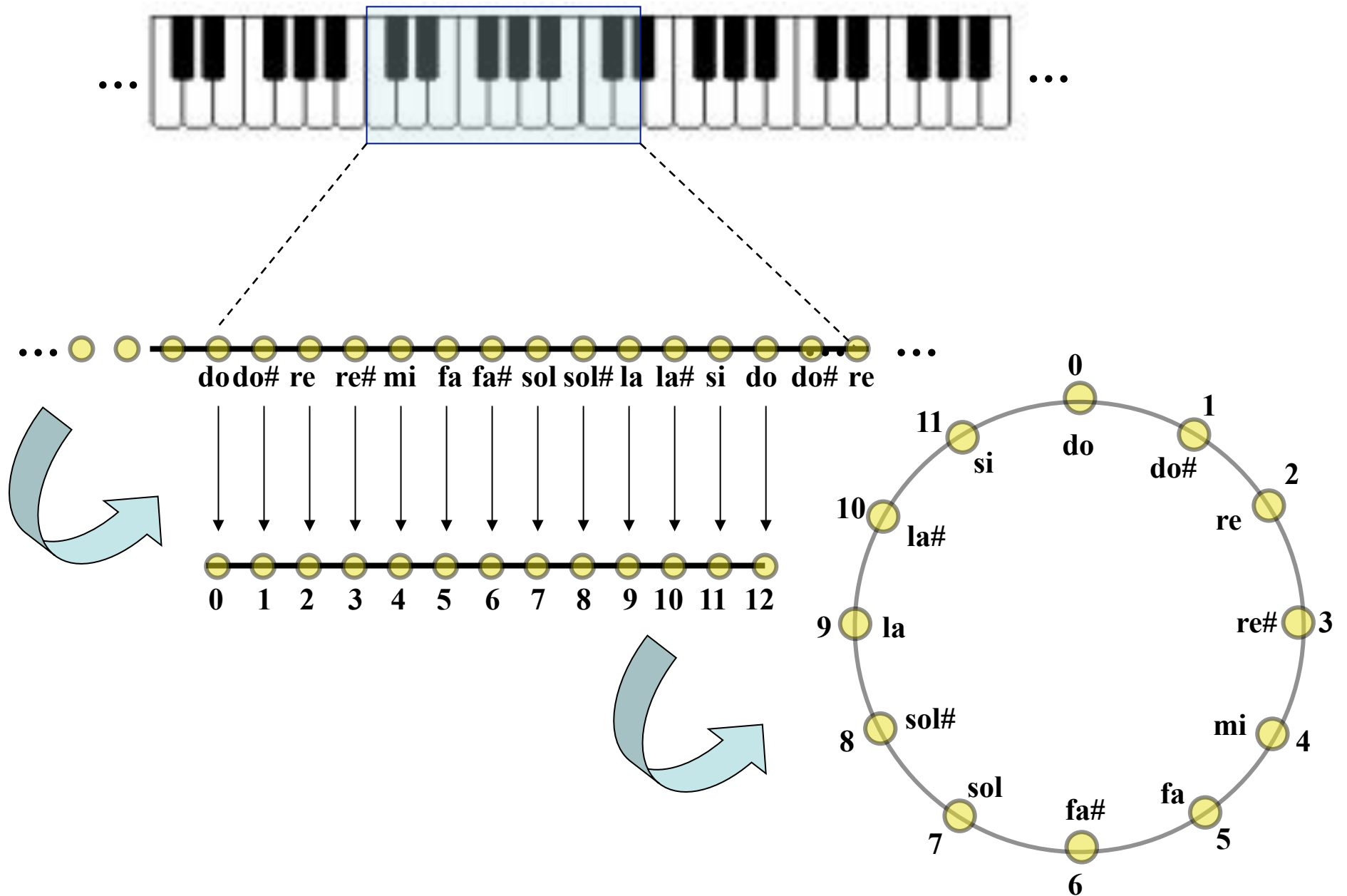
$$\begin{aligned}
 f &= 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \dots \\
 Df &= 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \dots \\
 D^2 f &= 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ 10 \ 11 \dots \\
 D^3 f &= 7 \ 5 \ 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \ 1 \ 8 \dots \\
 D^k f &= \dots
 \end{aligned}$$

Quelques notions algébriques de base

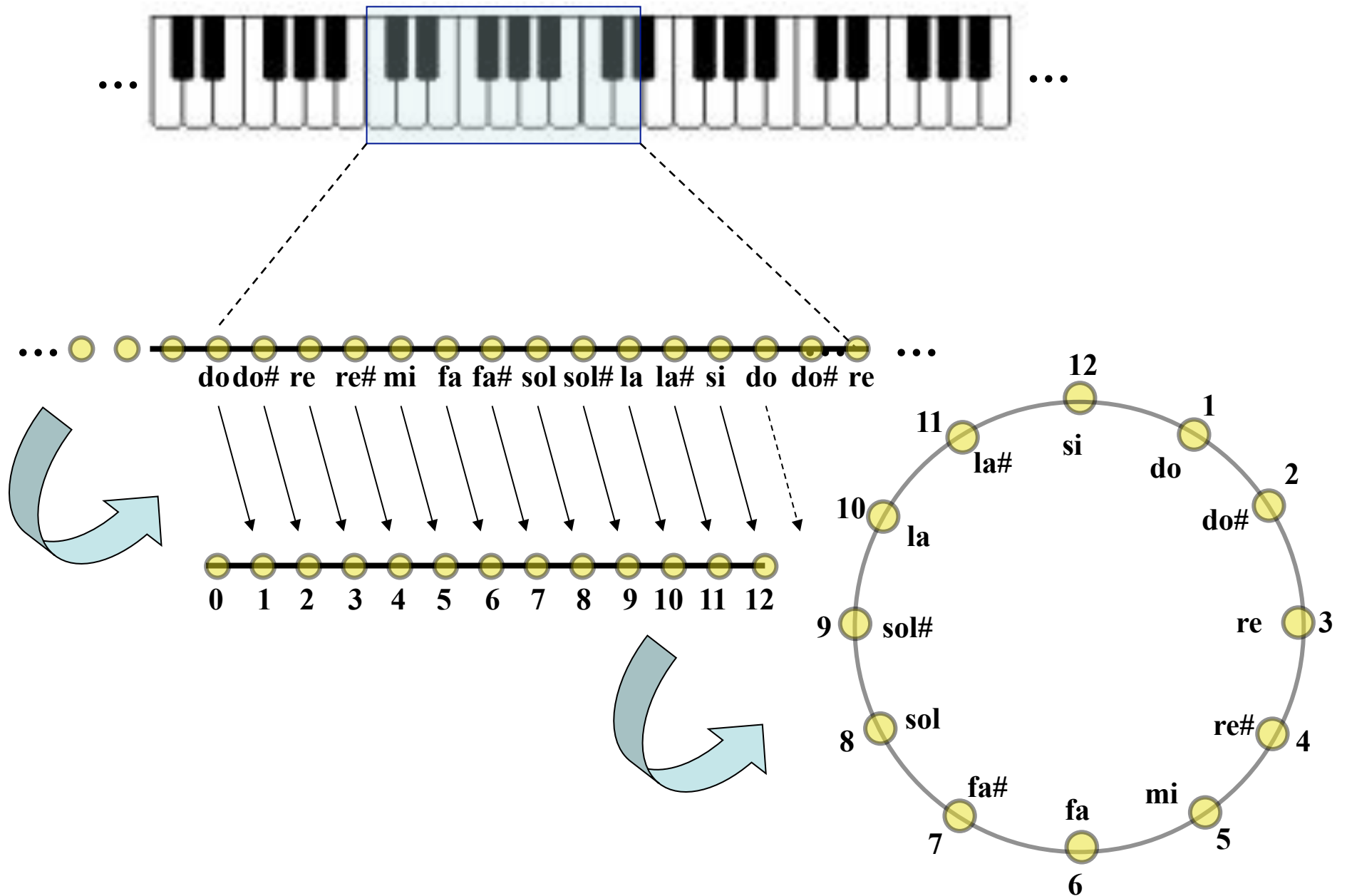
1.) Représentation/formalisation et énumération/classification des structures musicales

- Relation d'équivalence
- Définition de groupe
 - Groupe cyclique $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ d'ordre n
 - Groupe diédral \mathbf{D}_{2n} d'ordre $2n$
 - Groupe affine \mathbf{Aff}_n d'ordre $\varphi(n) \cdot n$
 - Groupe symétrique \mathbf{S}_n d'ordre $n!$
 - Groupe de Klein
- Action d'un groupe sur un ensemble
 - Action transitive et simplement transitive
 - Stabilisateur d'un élément (d'un ensemble)
- Factorisation d'un groupe

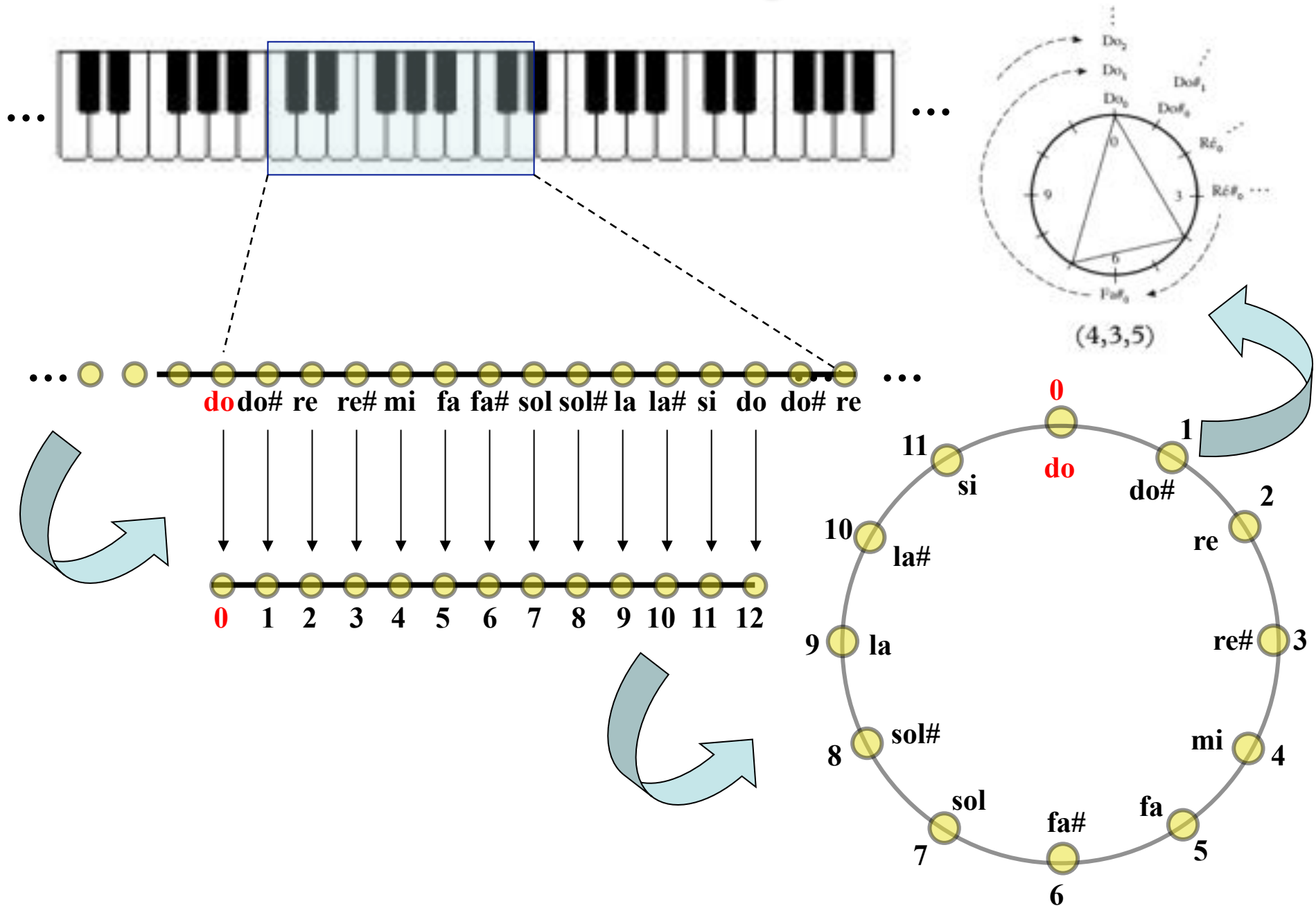
Réduction à l'octave et congruence modulo 12



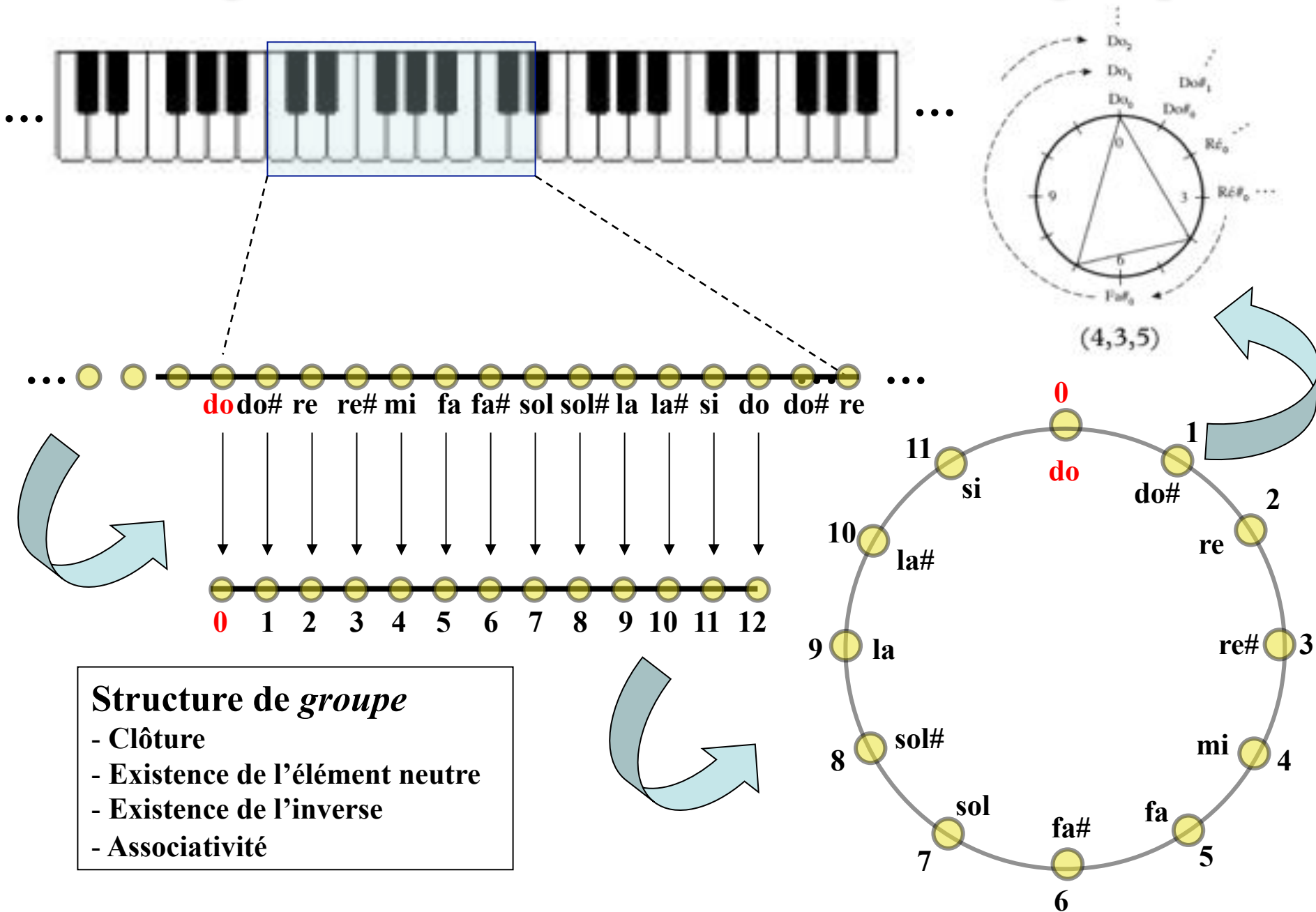
Réduction à l'octave et congruence modulo 12



Réduction à l'octave et congruence modulo 12



Congruence modulo 12 et structure de groupe



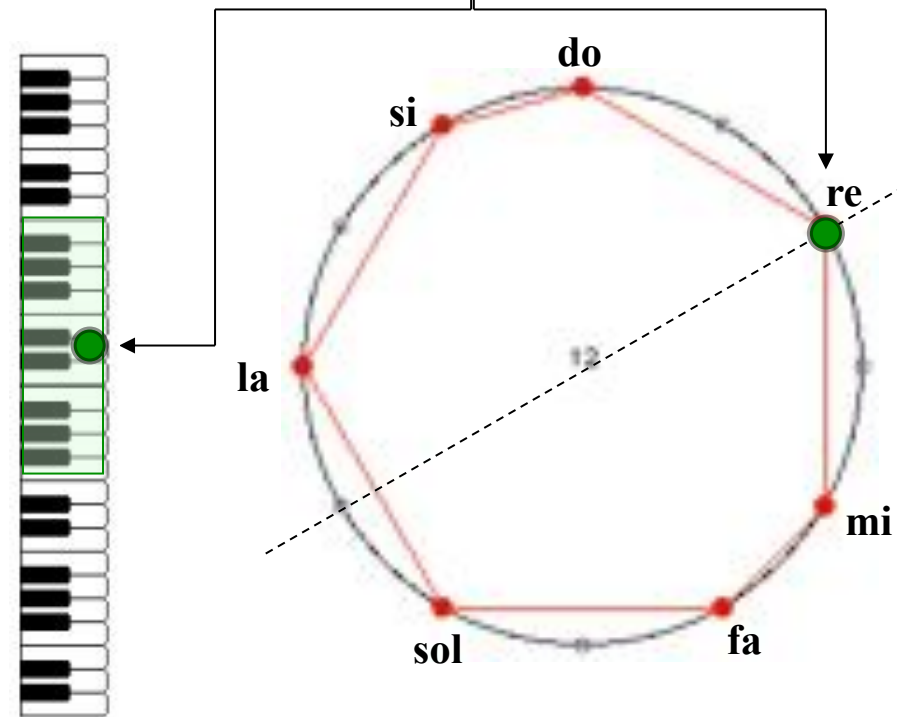
Un peu d'histoire...



Camille Durutte:

- *Technie, ou lois générales du système harmonique* (1855)
- *Résumé élémentaire de la Technie harmonique, et complément de cette Technie* (1876)

So	bb	Re	bb	Fa	Ut	Sol	Re	La	Mi	Si	Re	La
-15	-14	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+14	+15		



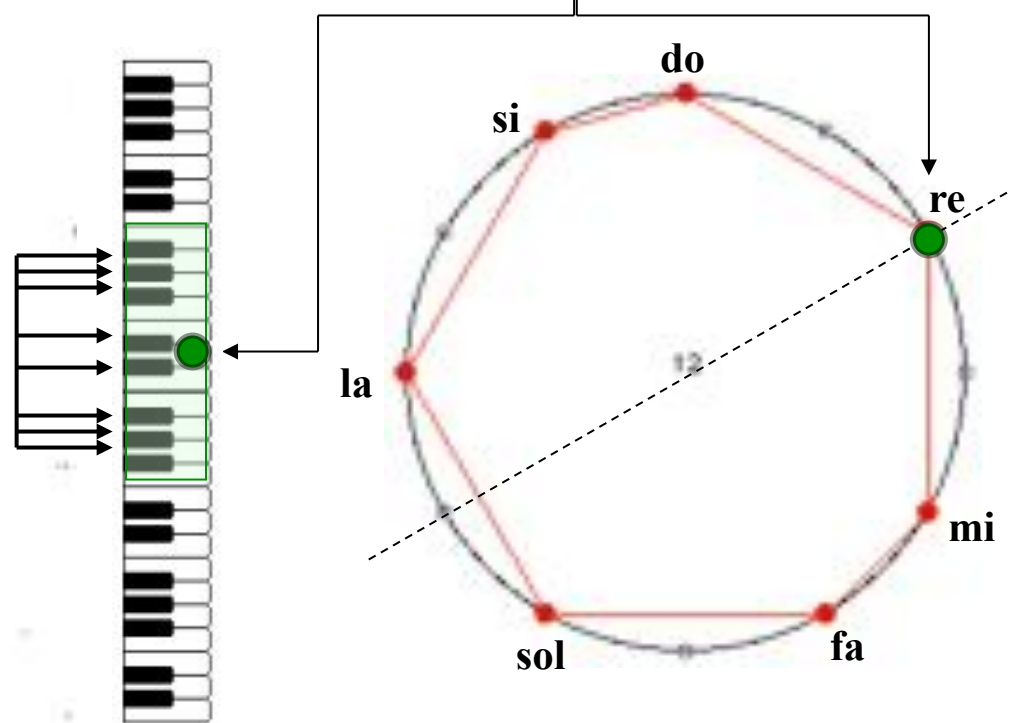
Un peu d'histoire...



Camille Durutte:

- *Technie, ou lois générales du système harmonique* (1855)
- *Résumé élémentaire de la Technie harmonique, et complément de cette Technie* (1876)

So	bb	Re	bb	Fa	Ut	Sol	Re	La	Mi	Si	Re	La
-15	-14	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+14	+15		



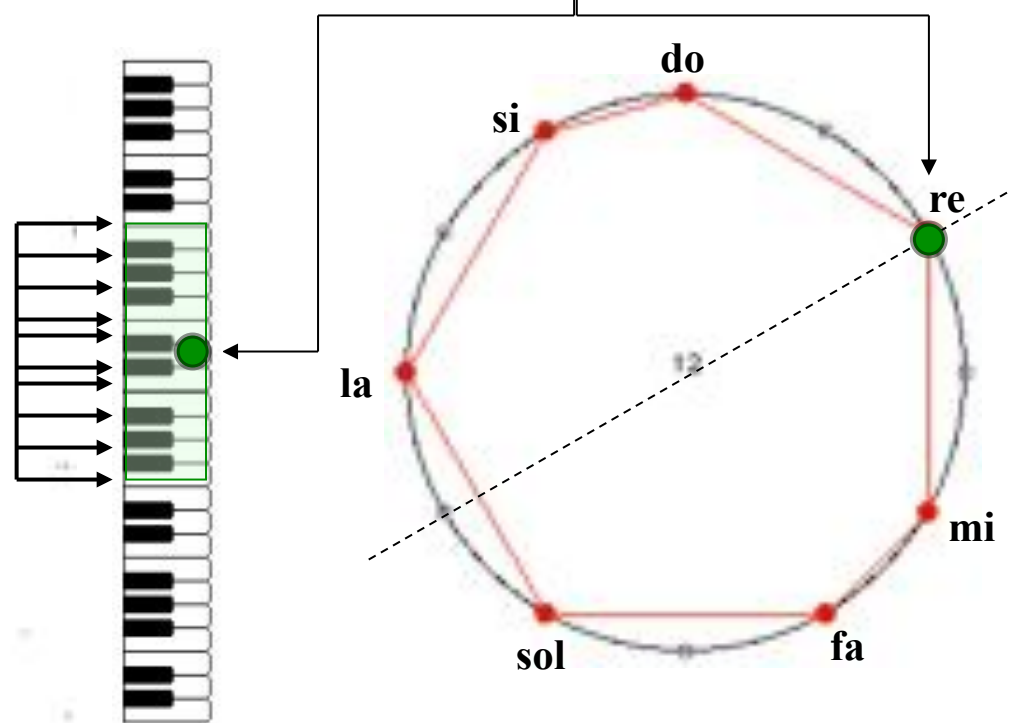
Un peu d'histoire...



Camille Durutte:

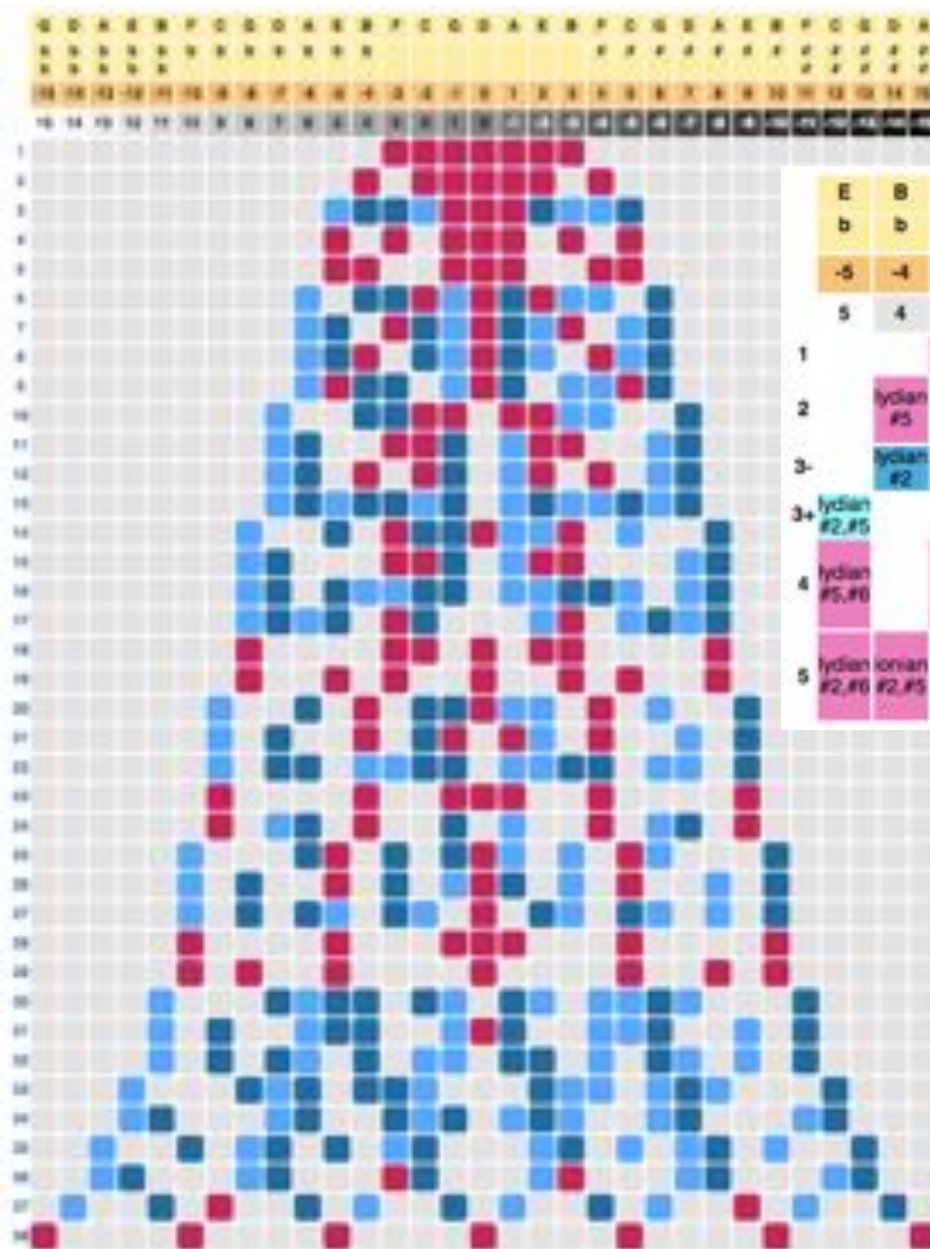
- *Technie, ou lois générales du système harmonique* (1855)
- *Résumé élémentaire de la Technie harmonique, et complément de cette Technie* (1876)

So	bb	Re	bb	Fa	Ut	Sol	Re	La	Mi	Si	Re	La
-15	-14	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+14	+15		



La cloche diatonique centrée autour du ré (P. Audétat & co.)

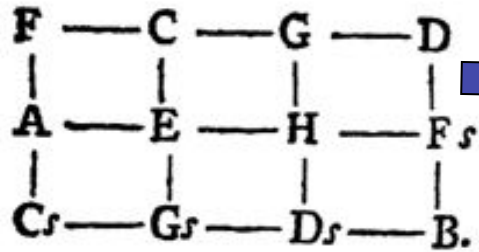
<http://www.cloche-diatonique.ch/>



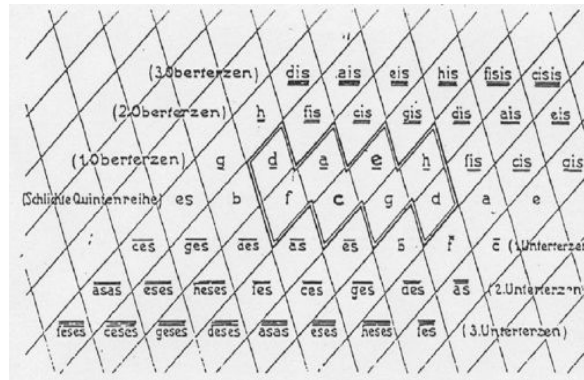
	E	B	F	C	G	D	A	E	B	F	C	
	b	b								#	#	
	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	
	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	
1			lydian	ionian	mixolydian	dorian	aeolian	phrygian	locrian			diatonic
2	lydian #5			lydian b7	ionian b3	mixolydian b5 or aeolian 3	phrygian 6	locrian 2		locrian b4		minor melodic
3		lydian #2	augmented ionian		dorian #4	aeolian 7	phrygian 3	locrian 6			locrian b4,bb7	minor harmonic
3+	lydian #2,#5			lydian b3	ionian b6	mixolydian b2	dorian b5		phrygian b4	locrian b6,7		major harmonic
4	lydian #5,#6		lydian #5,b7		lydian b6,b7	ionian b2,b3 or phrygian 6,7	locrian 2,3		locrian 2,b4		locrian bb3,b4	unisonic
5	lydian #2,#6	ionian #2,#5			aeolian #4,7	ionian b2,b6 or phrygian 3,7	mixolydian b2,b5			phrygian b4,bb7	locrian bb3,bb7	double harmonic

Junod, J., Audétat, P., Agon, C., Andreatta, M., « A Generalisation of Diatonicism and the Discrete Fourier Transform as a Mean for Classifying and Characterising Musical Scales », Second International Conference MCM 2009, vol. 38, New Haven, 2009, pp. 166-179

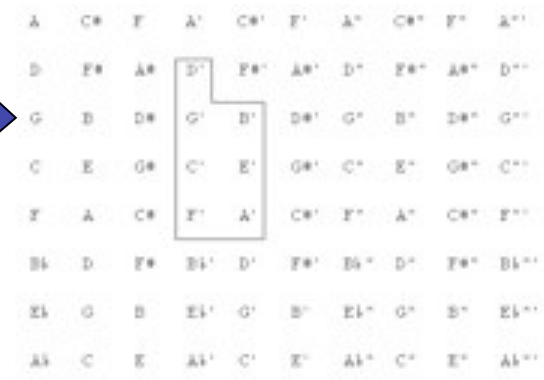
Approches géométriques : d'Euler au *Tonnetz*



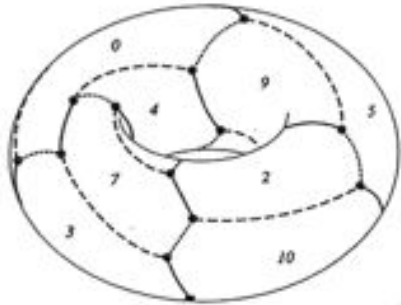
Euler : *Speculum musicum*, 1773



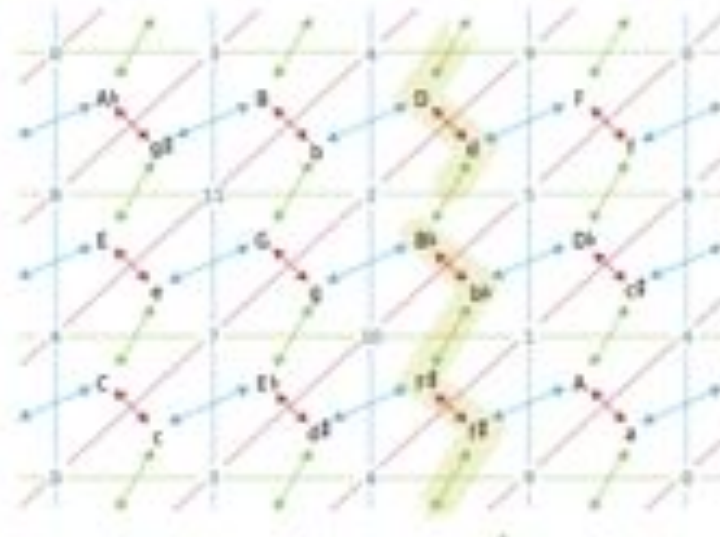
Hugo Riemann : « Ideen zu einer Lehre von den Tonvorstellung », 1914



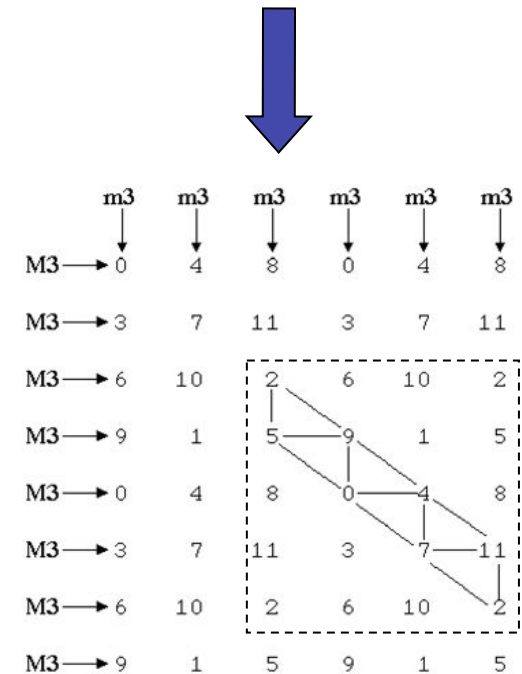
Longuet-Higgins (1962)



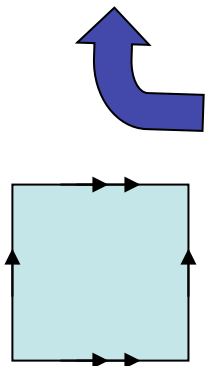
Douthett & Steinbach, *JMT*, 1998



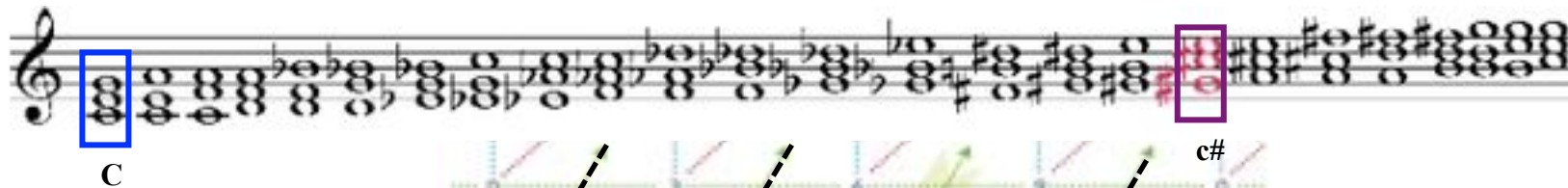
J. Hook, « Exploring Musical Space », *Science*, 2006



Balzano (1980)

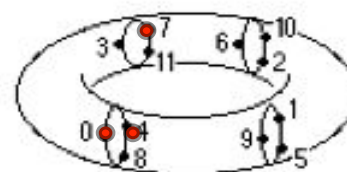
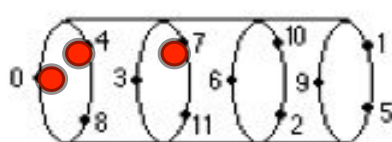
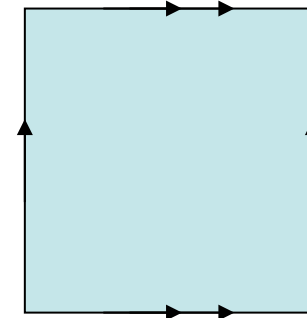
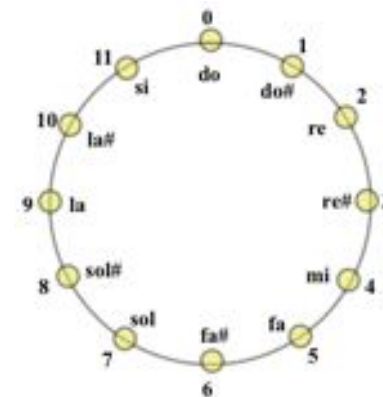
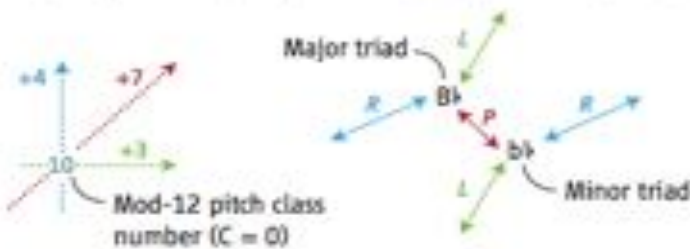
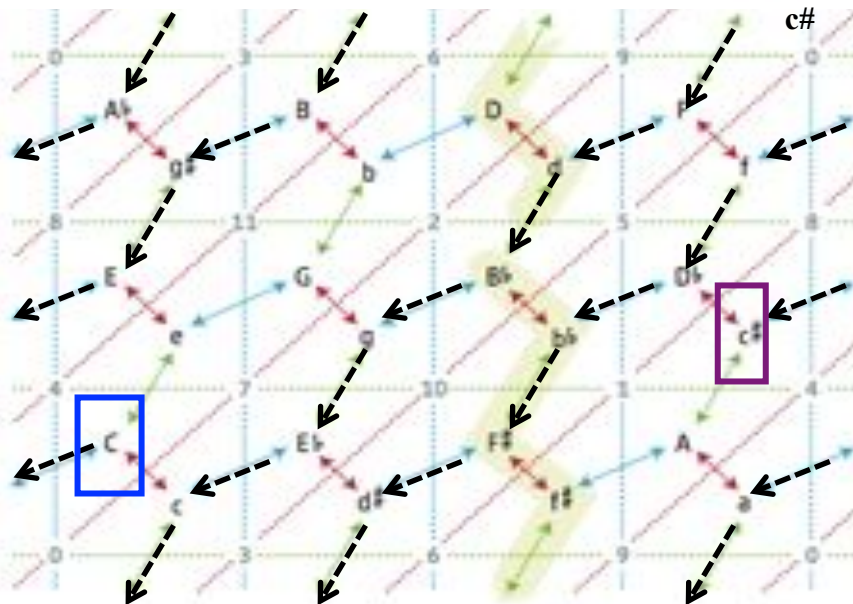
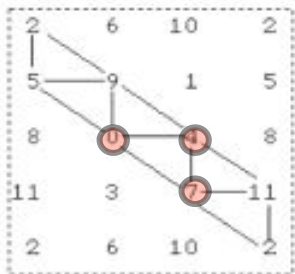
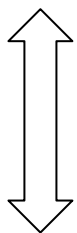


Procédés algorithmiques en musique tonale

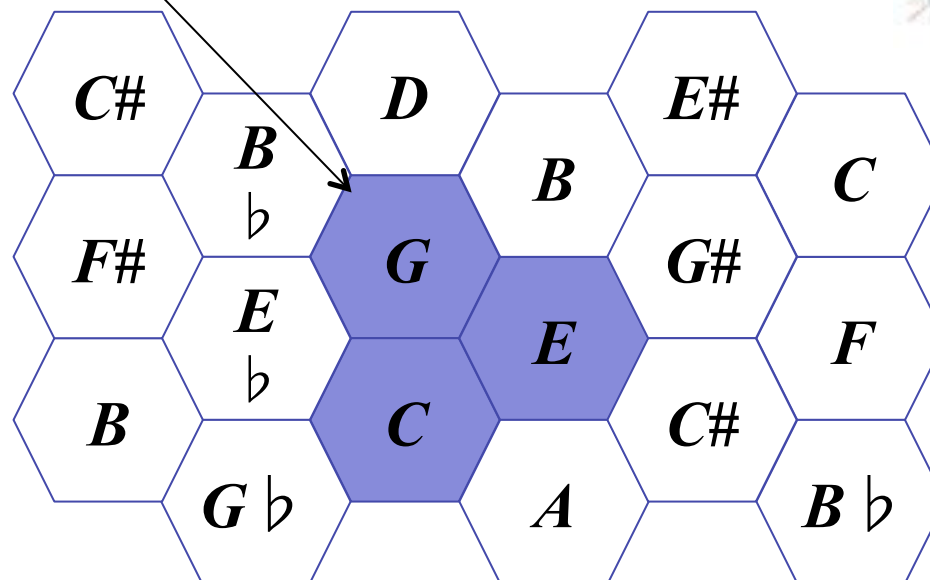
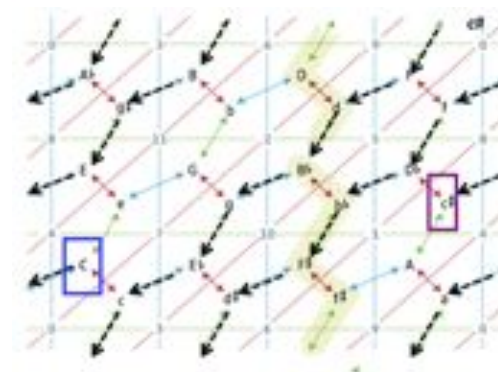
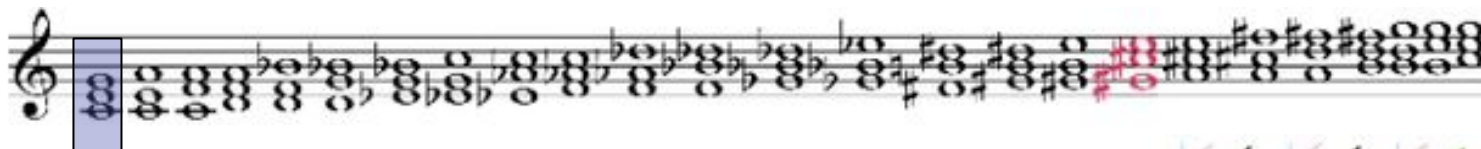


F	C	G	D
A	E	H	F _s
C _s	G _s	D _s	B.

Euler : *Speculum musicum*, 1773



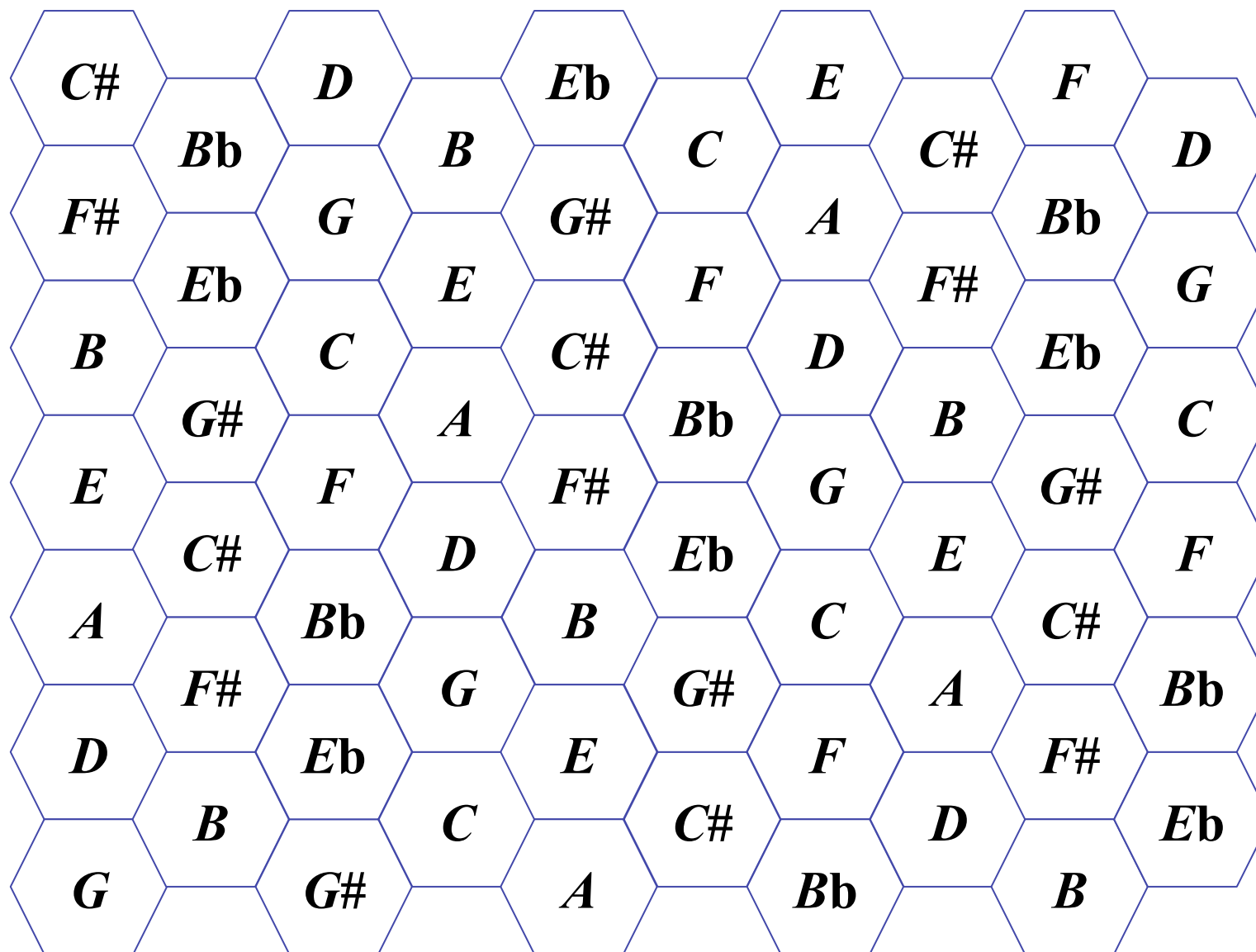
Extract of the 2nd movement of the Symphony No. 9 (L. van Beethoven)



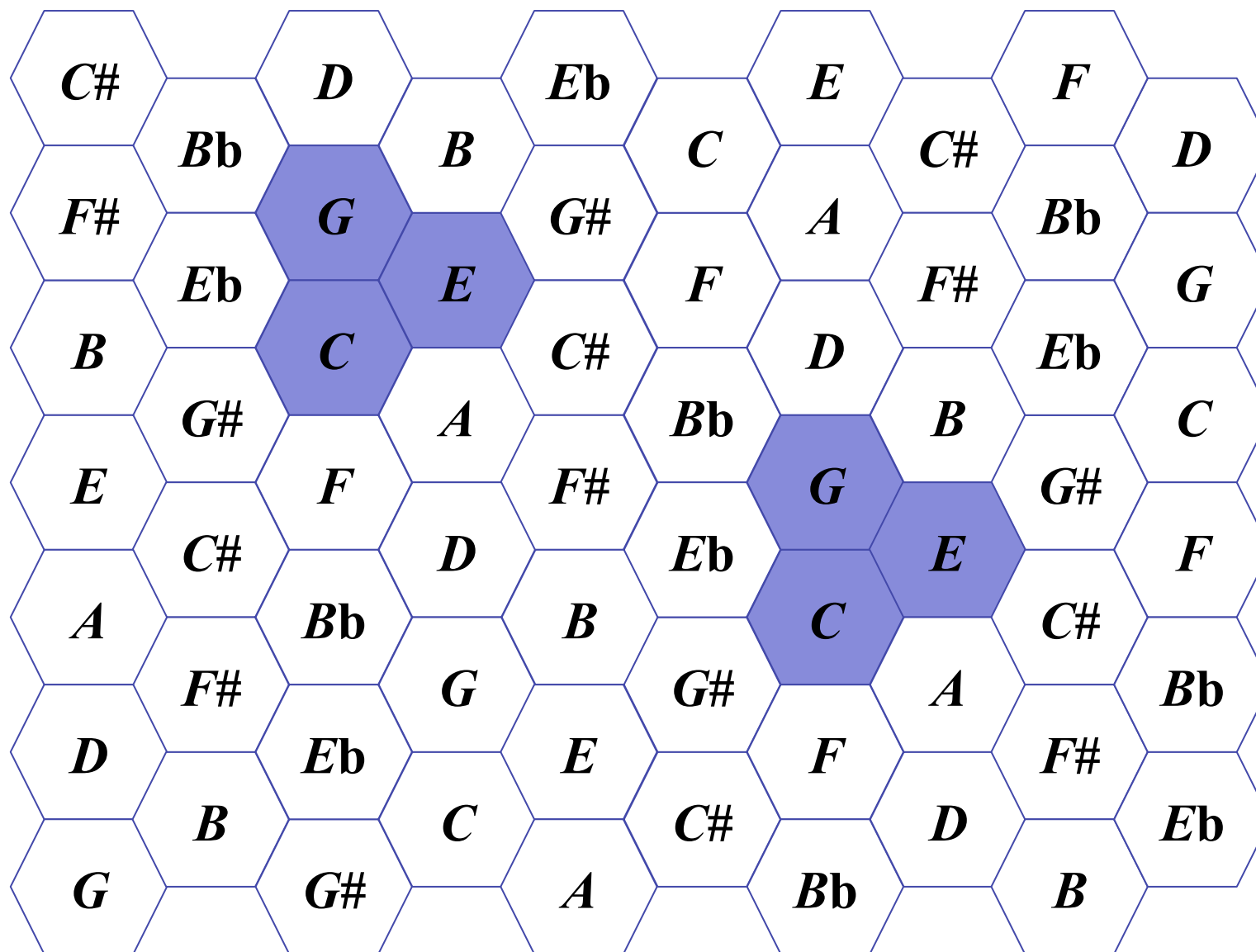
b



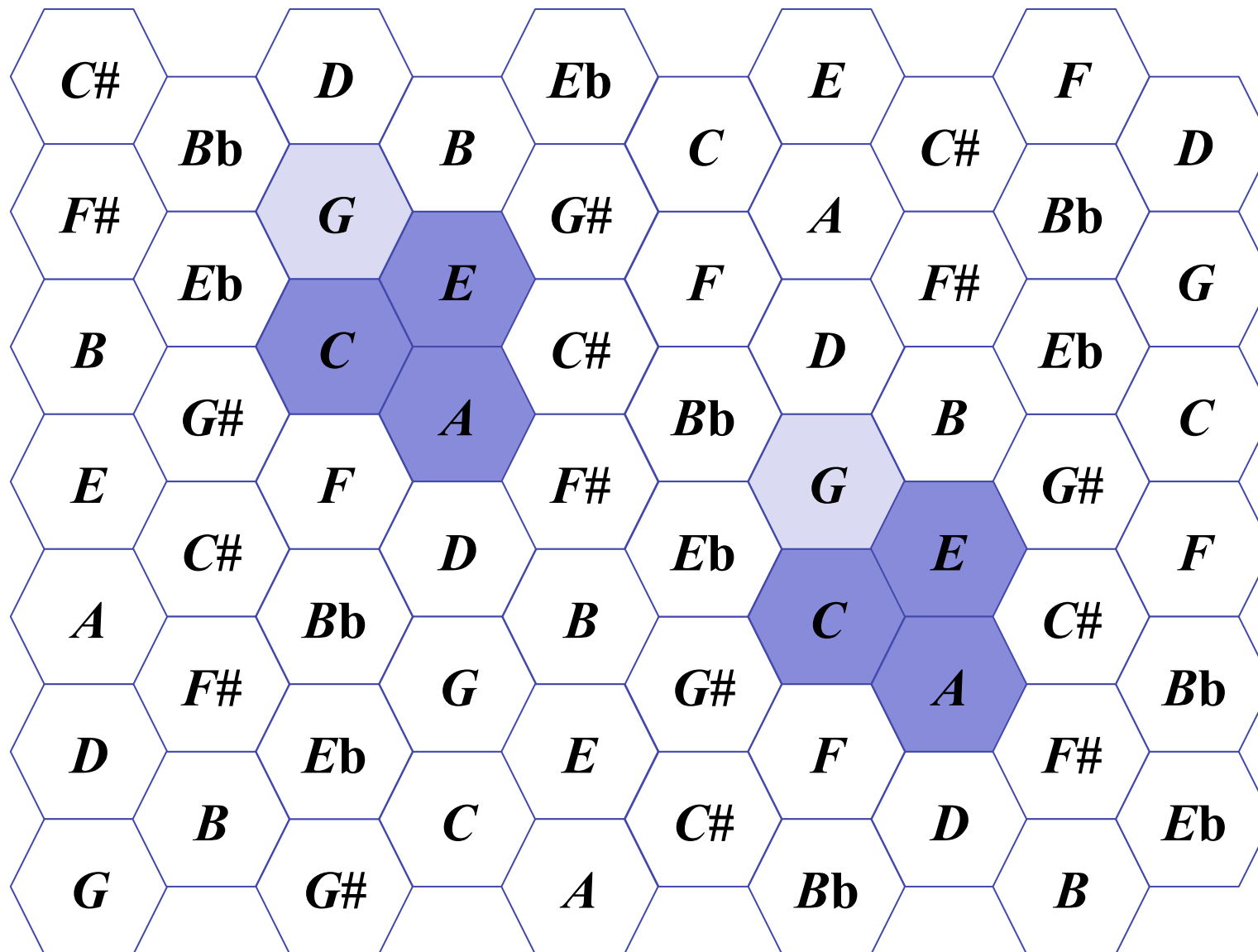
Extract of the 2nd movement of the Symphony No. 9 (L. van Beethoven)



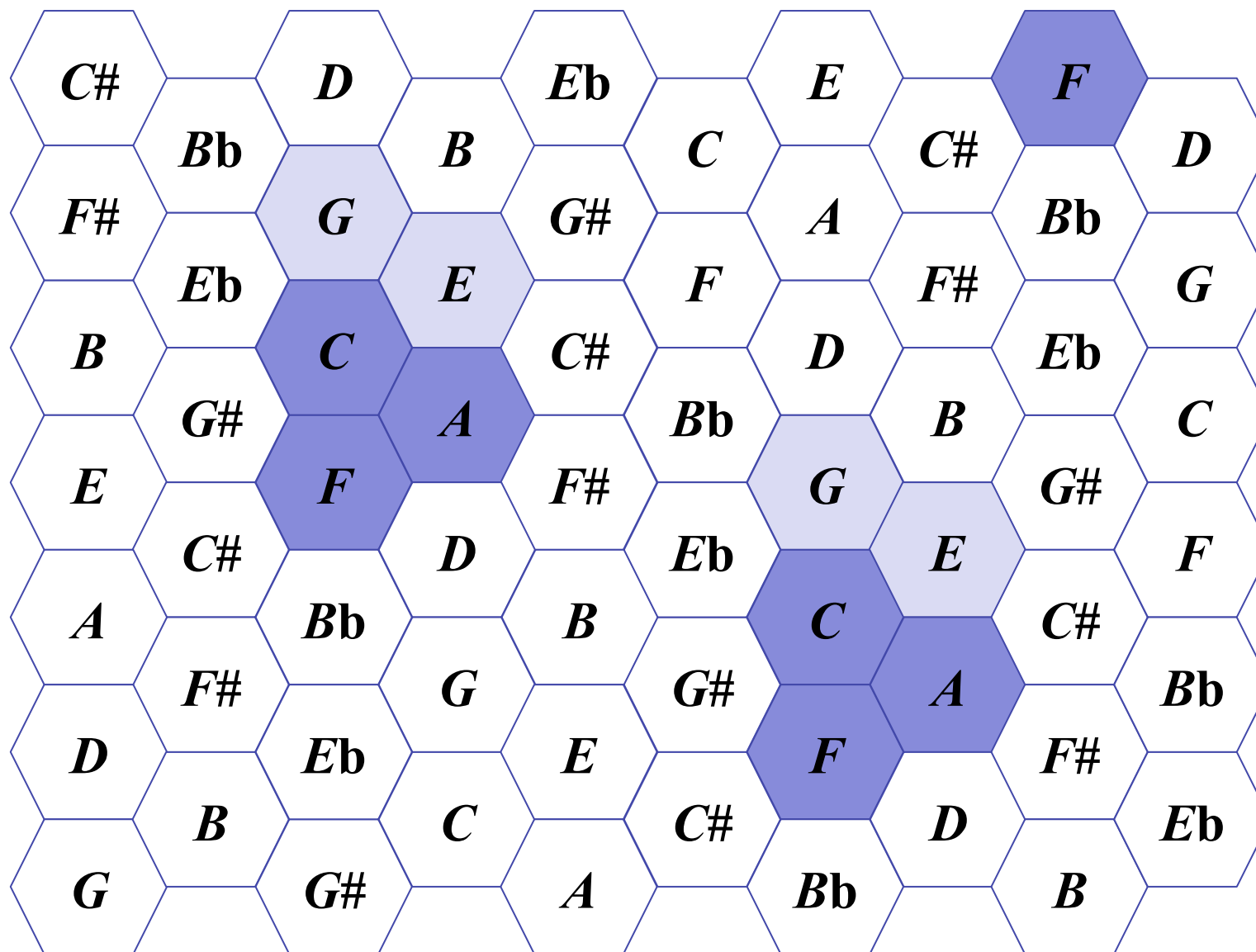
Extract of the 2nd movement of the Symphony No. 9 (L. van Beethoven)



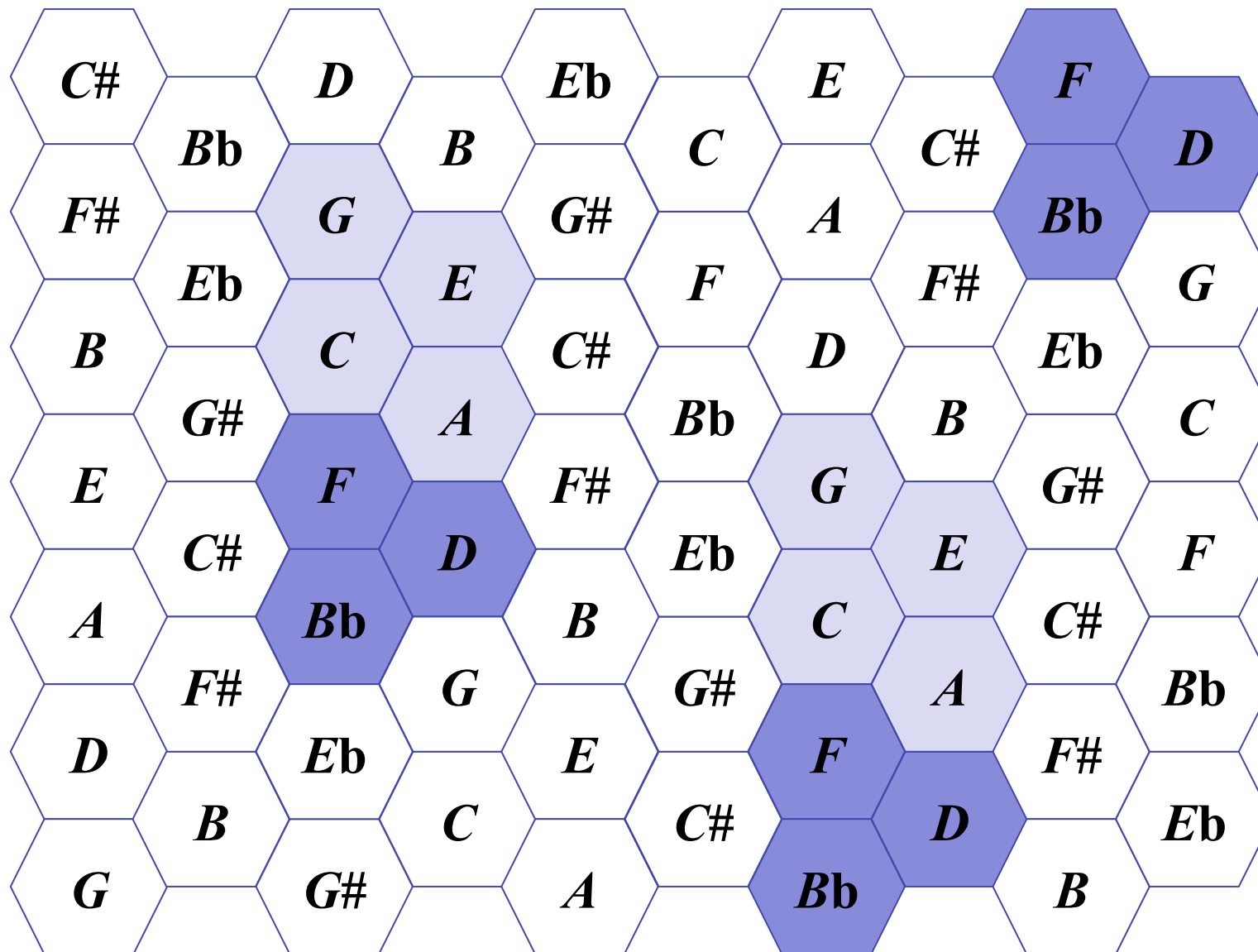
Extract of the 2nd movement of the Symphony No. 9 (L. van Beethoven)



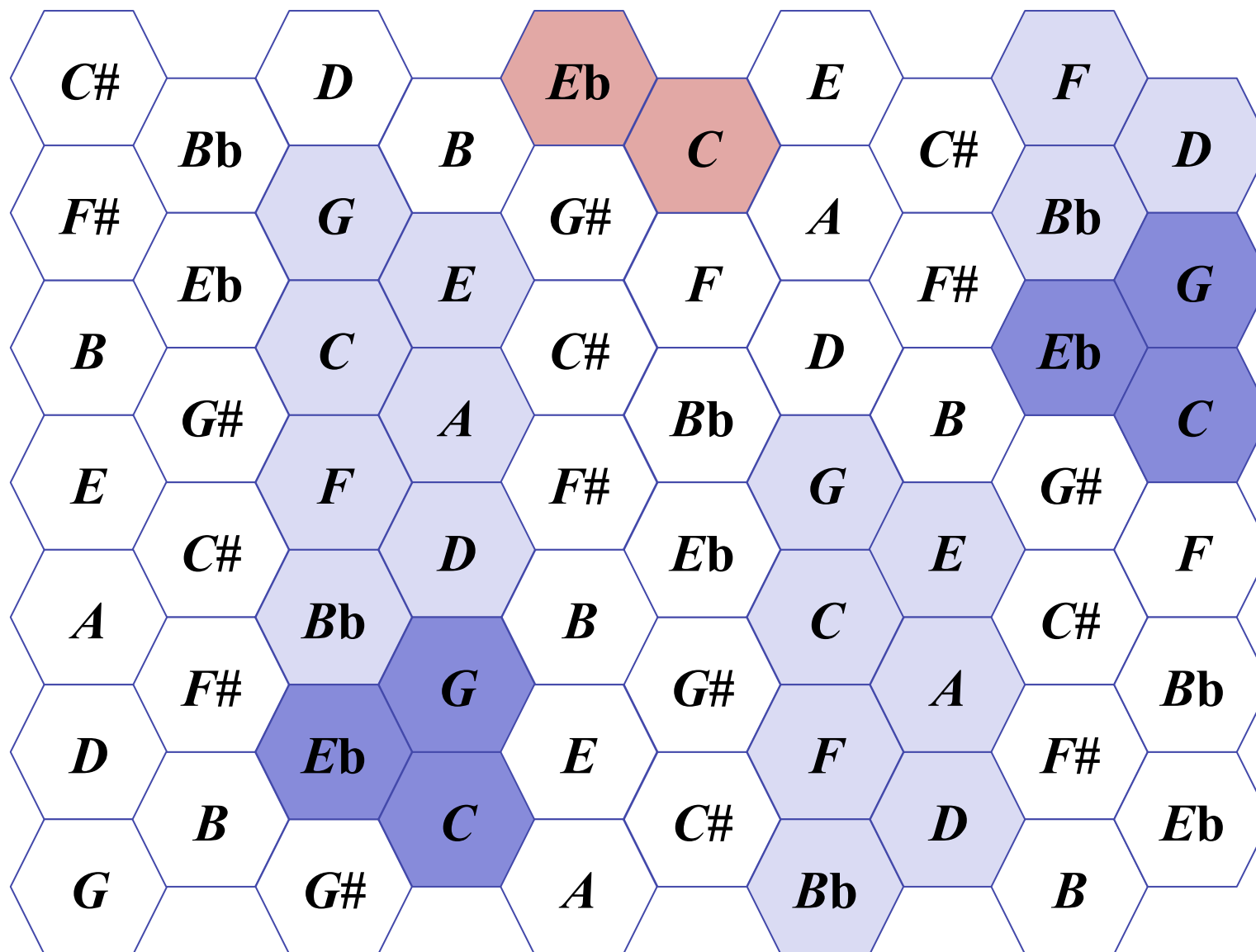
Extract of the 2nd movement of the Symphony No. 9 (L. van Beethoven)



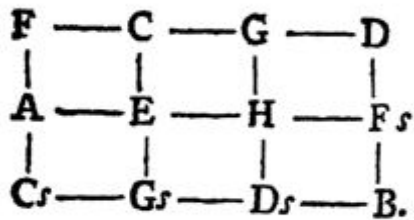
Extract of the 2nd movement of the Symphony No. 9 (L. van Beethoven)



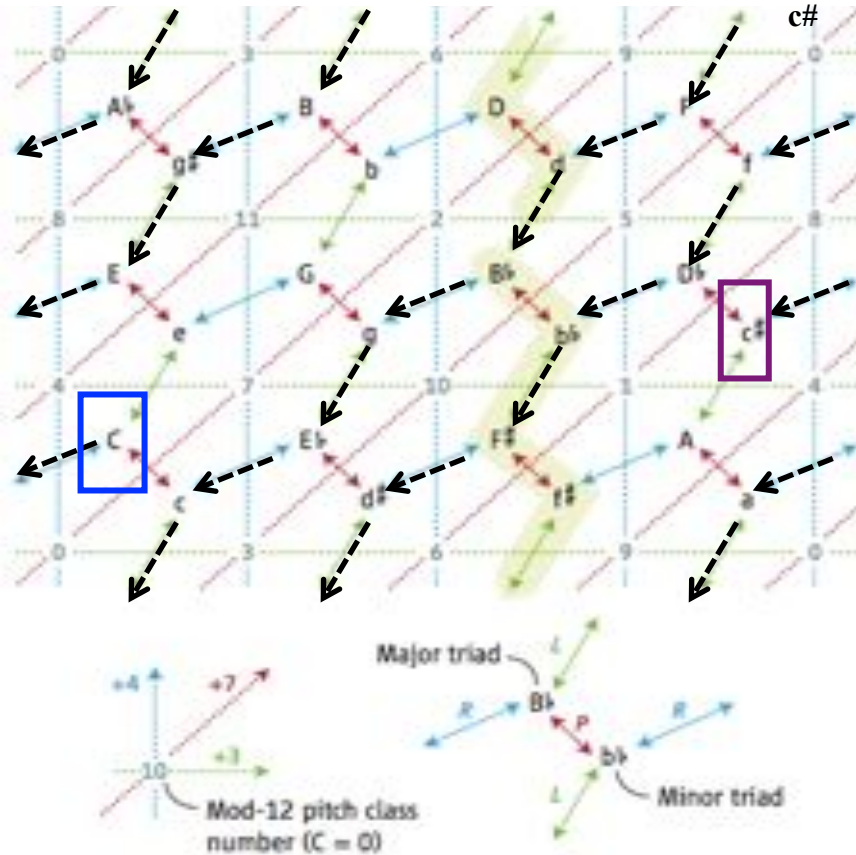
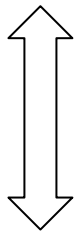
Extract of the 2nd movement of the Symphony No. 9 (L. van Beethoven)



Analyse neo-riemannienne et programmation spatiale



Euler : *Speculum musicum*, 1773



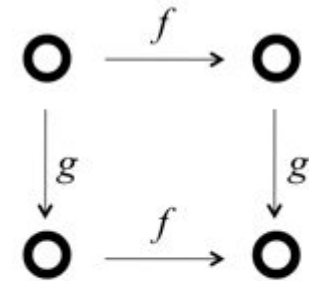
$$\rho = \langle L, R \mid L^2 = (LR)^{12} = 1 \rangle$$

$$LRL = L(LR)^{-1}$$

↕ dualité

$$D_{12} = \langle I, T \mid I^2 = T^{12} = 1 \rangle$$

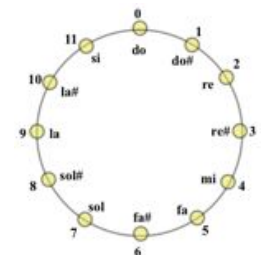
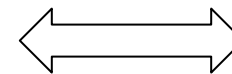
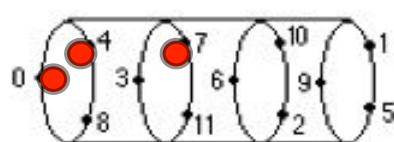
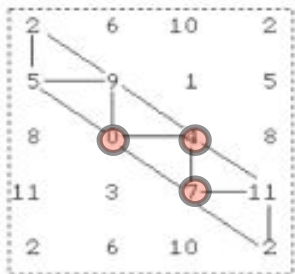
$$ITI = I(IT)^{-1}$$



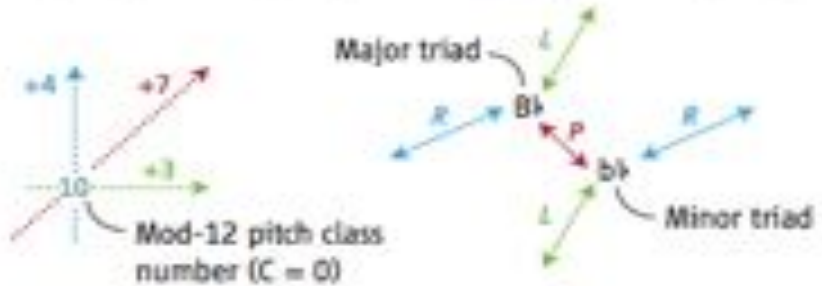
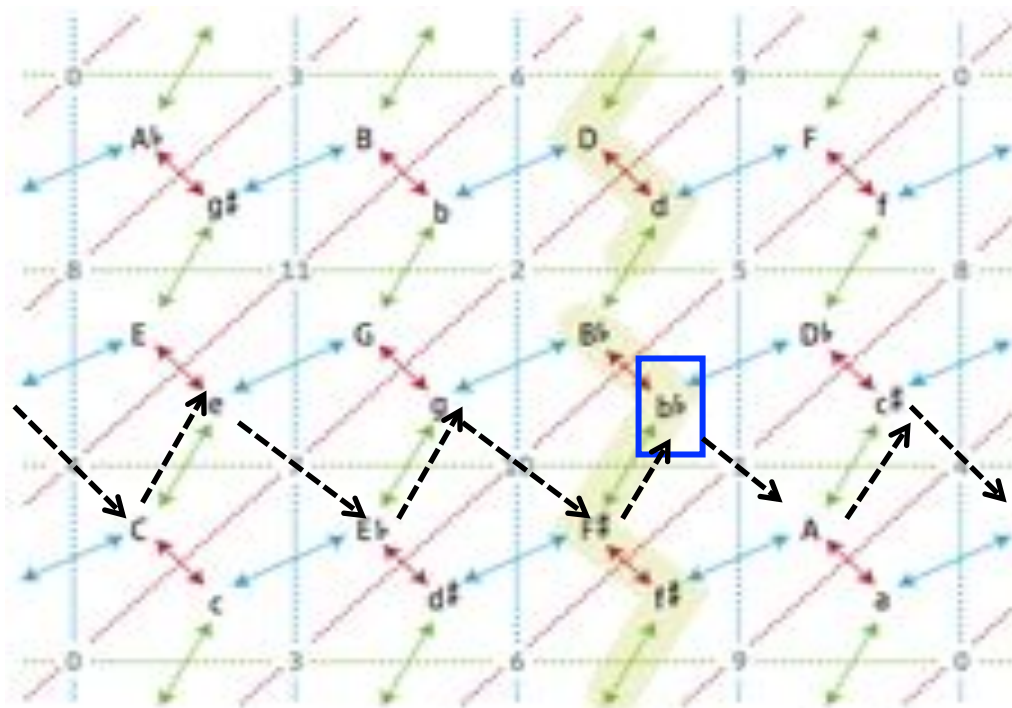
Tout diagramme commute

$$\forall f \in D_{12}$$

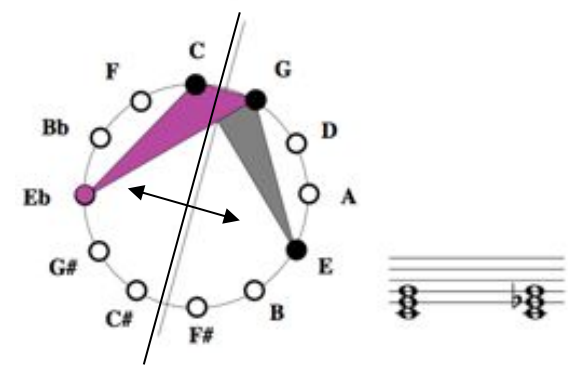
$$\forall g \in \rho$$



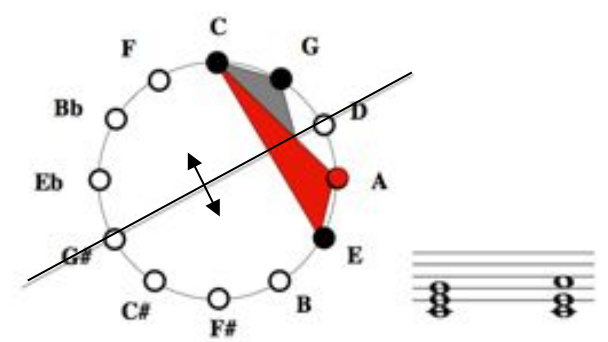
Cycles dans le réseau hexagonal



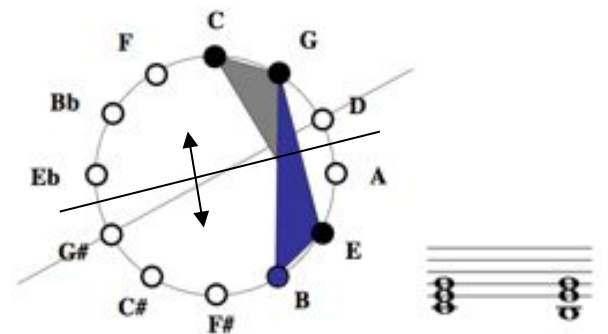
(Neo-)Riemannian Operation P = „Parallel“ [Noll04]



(Neo-)Riemannian Operation R = „Relative“



(Neo-)Riemannian Operation L = „Leading-Tone“



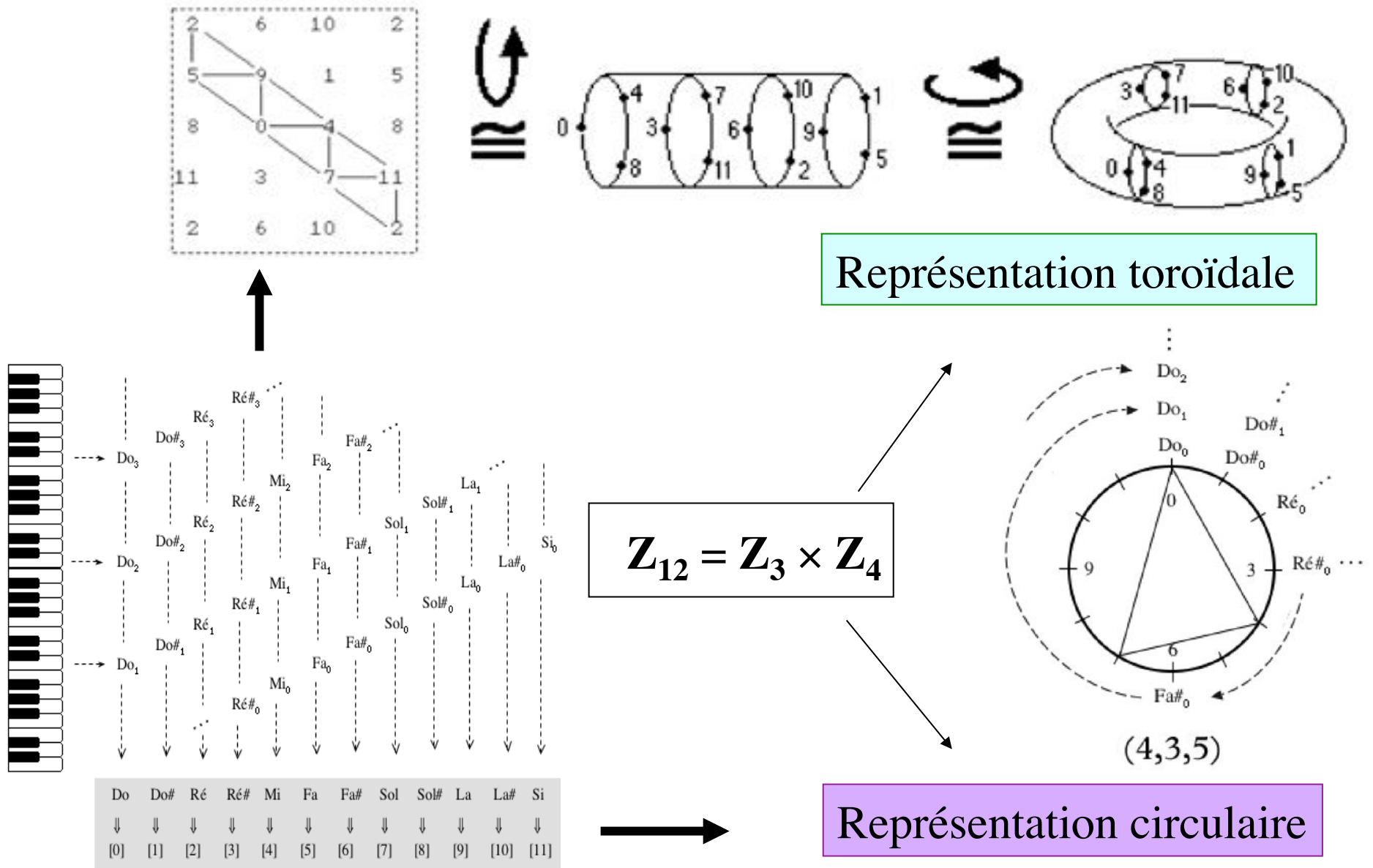
Recherche des cycles hamiltoniens dans LPR

C e E gB B dF Dd c Dd f Dd cF A W Fa ad Ad g G b D d F a	#53
C c Dd g Ad ad Ck f Dd gB B dF Fa W A cF E e G b D d F a	#52
C e G g Ad d F f Dd c Dd dF Fa ad Ck cF E gB B b D W A a	#45
C c Dd f Ck cF A W D b B gF E e G g Dd dF Fa ad Ad d F a	#29
C e G g Ck c Dd gF E cF A W Fa dF B b D d Ad ad Ck f F a	#49
C c Dd f Ck ad Ad d F a A cF E gF B b D W Fa dF Dd g G e	#11
C e E gF B dF Fa W D b G g Dd c Dd f F d Ad ad Ck cF A a	#54
C c Dd g G b D W A a F d Ad ad Fa dF B gF Dd f Ck cF E e	#14
C c Dd gF B dF Dd g Ad d F f Ck ad Fa W D b G e E cF A a	#24
C c Dd dF B b D W Fa ad Ck f Ck gF E cF A e F d Ad g G e	#20
C e E cF Ck f F d Ad ad Fa dF B gF Ck c Dd g G b D W A a	#55
C c Dd g G e E gF Dd f Ck cF A W D b B dF Fa ad Ad d F a	#38
C e G g Ad d D b B dF Dd c Dd gF E cF A W Fa ad Ck f F a	#47
C c Dd f Ck ad Ad g Dd dF Fa W D d F a A cF E gF B b G e	#5
C e E gF B dF Fa W A cF Ck ad Ad d F a G g Dd c Dd f F a	#57
C c Dd f F a A W D d Ad g Dd dF Fa ad Ck cF E gF B b G e	#3
C e E gF B b G g Ad d D W A cF Ck ad Fa dF Dd c Dd f F a	#61
C e E cF A W Fa dF B gF Ck c Dd g G b D d Ad ad Ck f F a	#56
C c Dd g Ad ad Fa dF B b G e E gF Ck f Ck cF A W D d F a	#35
C c Dd g G b D W Fa dF B gF Ck f Ck ad Ad d F a E cF A a	#15
C c Dd f Ck cF E gF B b D W A a F d Ad ad Fa dF Dd g G e	#12
C c Dd gF B dF Dd g Ad d D b G e E cF A W Fa ad Ck f F a	#28
C c Dd g Ad ad Ck f Dd gF E cF A a F d D W Fa dF B b G e	#17
C e G g Dd c Dd gF E cF Ck f F d Ad ad Fa dF B b D W A a	#51
C e E gF B dF Dd c Dd f F d Ad g G b D W Fa ad Ck cF A a	#52
C e G g Ad d F f Ck ad Fa W D b B dF Dd c Dd gF E cF A a	#46
C c Dd f Ck cF A W Fa ad Ad g Dd dF B gF E e G b D d F a	#28

#53 LPLRLPRLRLPLRPLRPLRPLR
#52 PRLRPLRPLRPLRPLRPLRPLR
#45 LRPLRPLRPLRPLRPLRPLRPLR
#29 PLRLPLRLRPLRPLRPLRPLRPLR
#49 LRPLRLPLRLRPLRPLRPLRPLR
#11 PLRLRPLRLPLRLRPLRPLRPLR
#54 LPLRLRPLRLPLRLRPLRPLRPLR
#14 PLRPLRLRPLRLRPLRLRPLRPLR
#24 PLRPLRPLRLRPLRLRPLRPLRPLR
#20 PRPLRPLRPLRPLRPLRPLRPLRPLR
#55 LPRPLRPLRPLRPLRPLRPLRPLR
#36 PRLRPLRPLRPLRPLRPLRPLRPLR
#47 LRPLRPLRPLRPLRPLRPLRPLR
#5 PLRLRPLRPLRPLRPLRPLRPLRL
#57 LPLRLRPLRPLRPLRPLRPLRPLR
#3 PLRPLRPLRPLRPLRPLRPLRPLRL
#61 LPLRPLRPLRPLRPLRPLRPLRPLR
#56 LPRPLRPLRPLRPLRPLRPLRPLR
#35 PRLRPLRPLRPLRPLRPLRPLRPLR
#15 PRPLRPLRPLRPLRPLRPLRPLRPLR
#12 PLRPLRPLRPLRPLRPLRPLRPLRPLR
#26 PLRPLRPLRPLRPLRPLRPLRPLR
#17 PRLRPLRPLRPLRPLRPLRPLRPLRL
#51 LRPLRPLRPLRPLRPLRPLRPLRPLR
#52 LPLRLRPLRPLRPLRPLRPLRPLRPLR
#46 LRPLRPLRPLRPLRPLRPLRPLRPLR
#28 PLRLPLRPLRPLRPLRPLRPLRPLR

62 cycles hamiltoniens classés en 8 types

Equivalence algébrique entre représentations géométriques

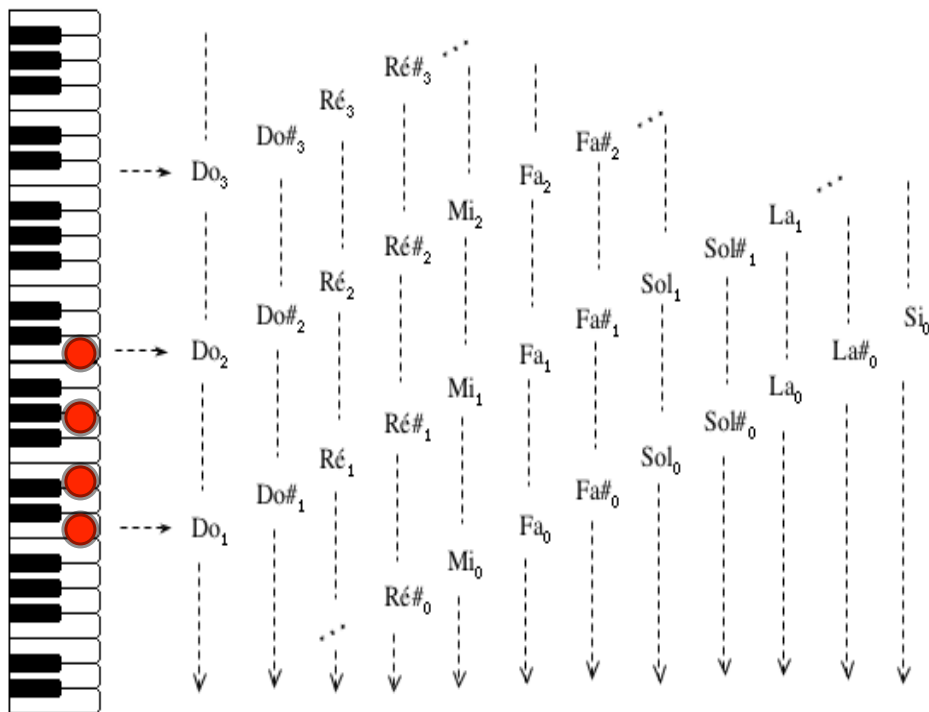


Représentation toroïdale

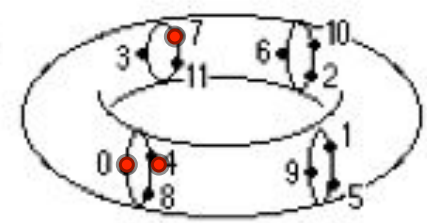
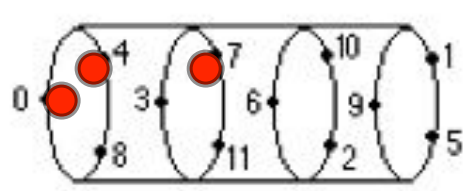
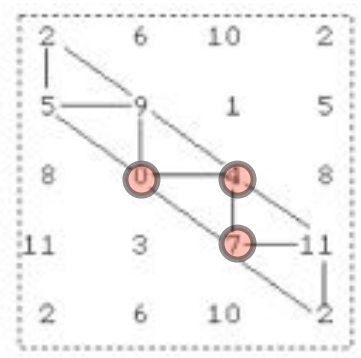
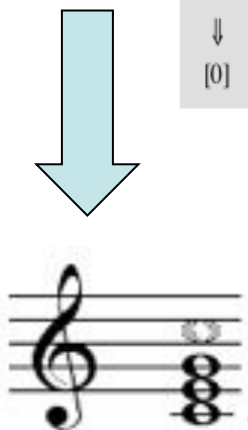
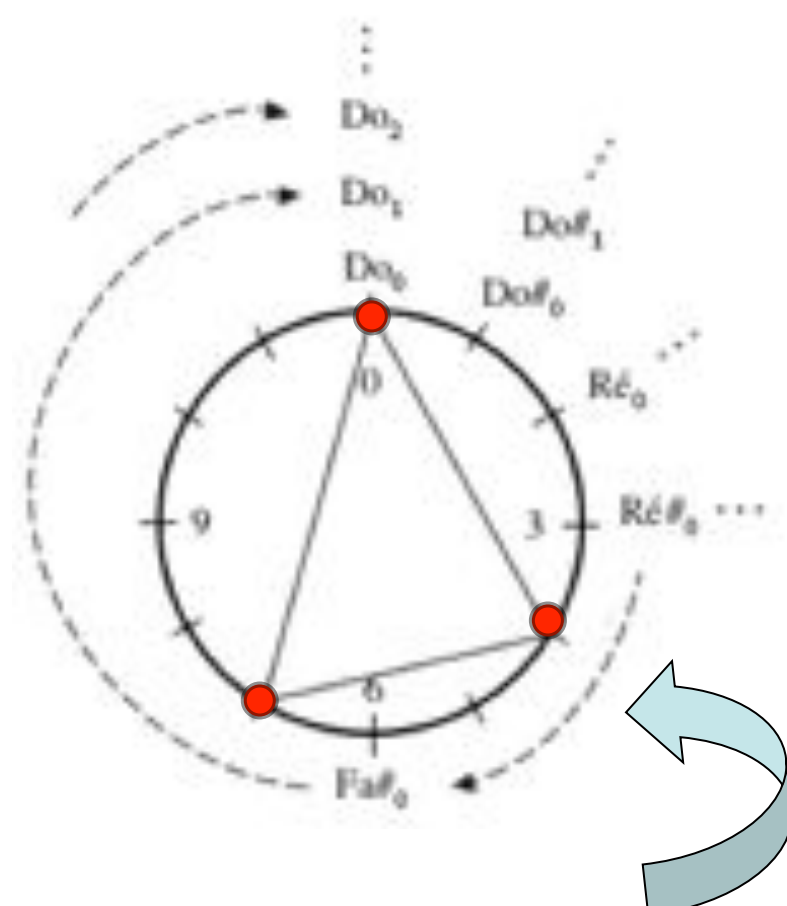
$$Z_{12} = Z_3 \times Z_4$$

Représentation circulaire

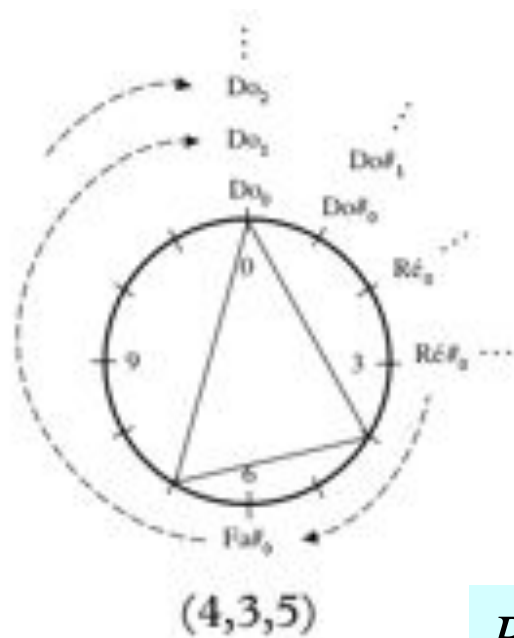
Reduction à l'octave et congruence modulo 12



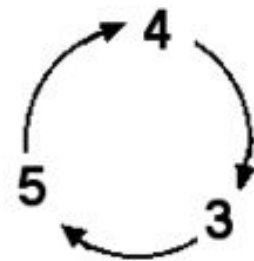
Do	Do#	Ré	Ré#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]



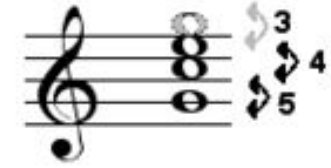
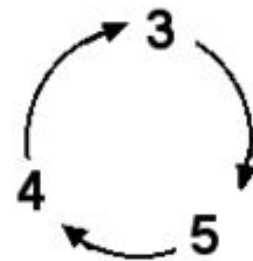
Représentation circulaire et structure intervallique



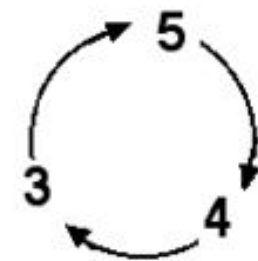
(4 3 5)



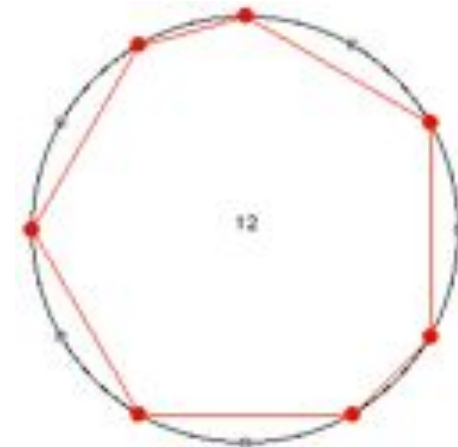
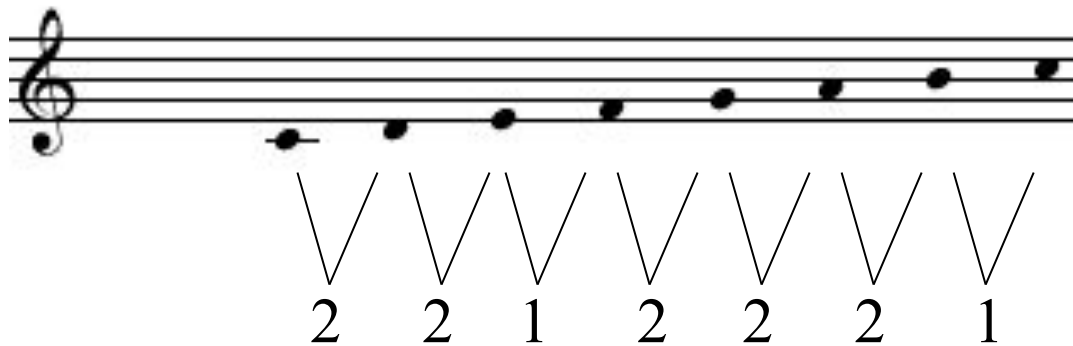
(3 5 4)



(5 4 3)



Renversements = permutations circulaires de la structure intervallique



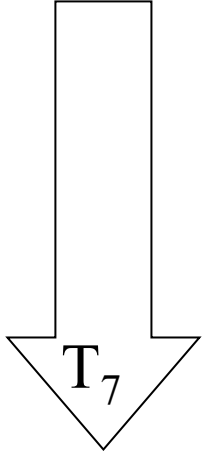
Transformations géométriques : la transposition

{0 2 4 5 7 9 11 (0)}



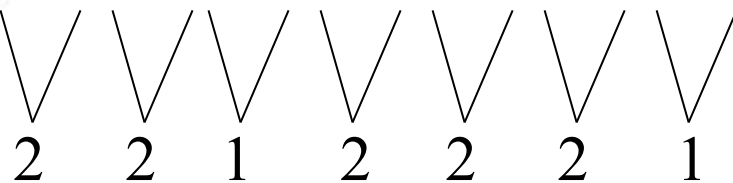
$T_7(x) = 7 + x \pmod{12}$

$\alpha = 210^\circ$

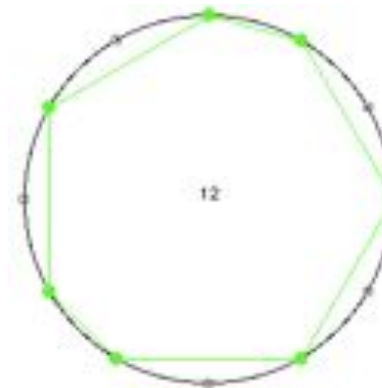
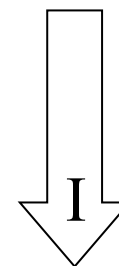
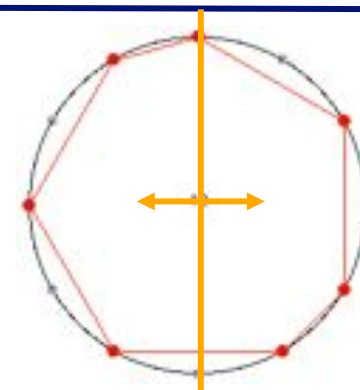
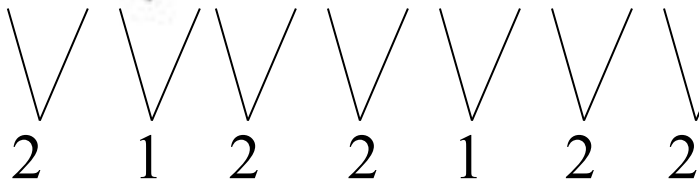
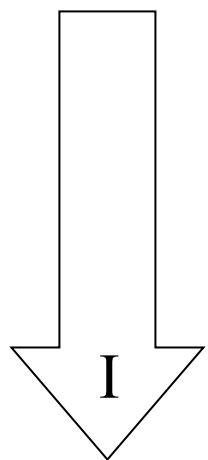



Equivalence modulo la transposition

Transformations géométriques : l'inversion

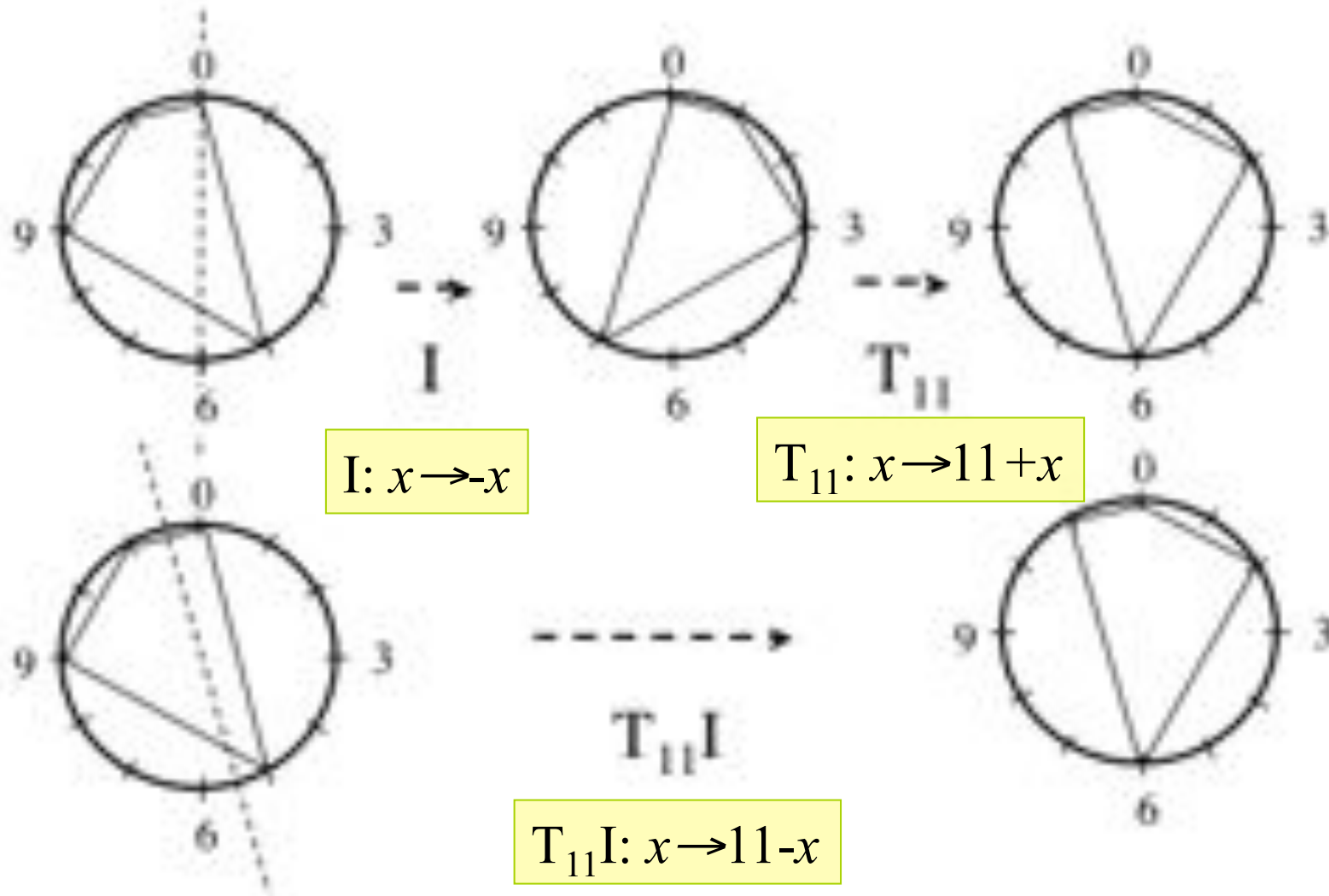


$$I(x) = -x \pmod{12}$$



*Equivalence modulo
l'inversion*

La Set Theory: équivalence modulo transposition/inversion

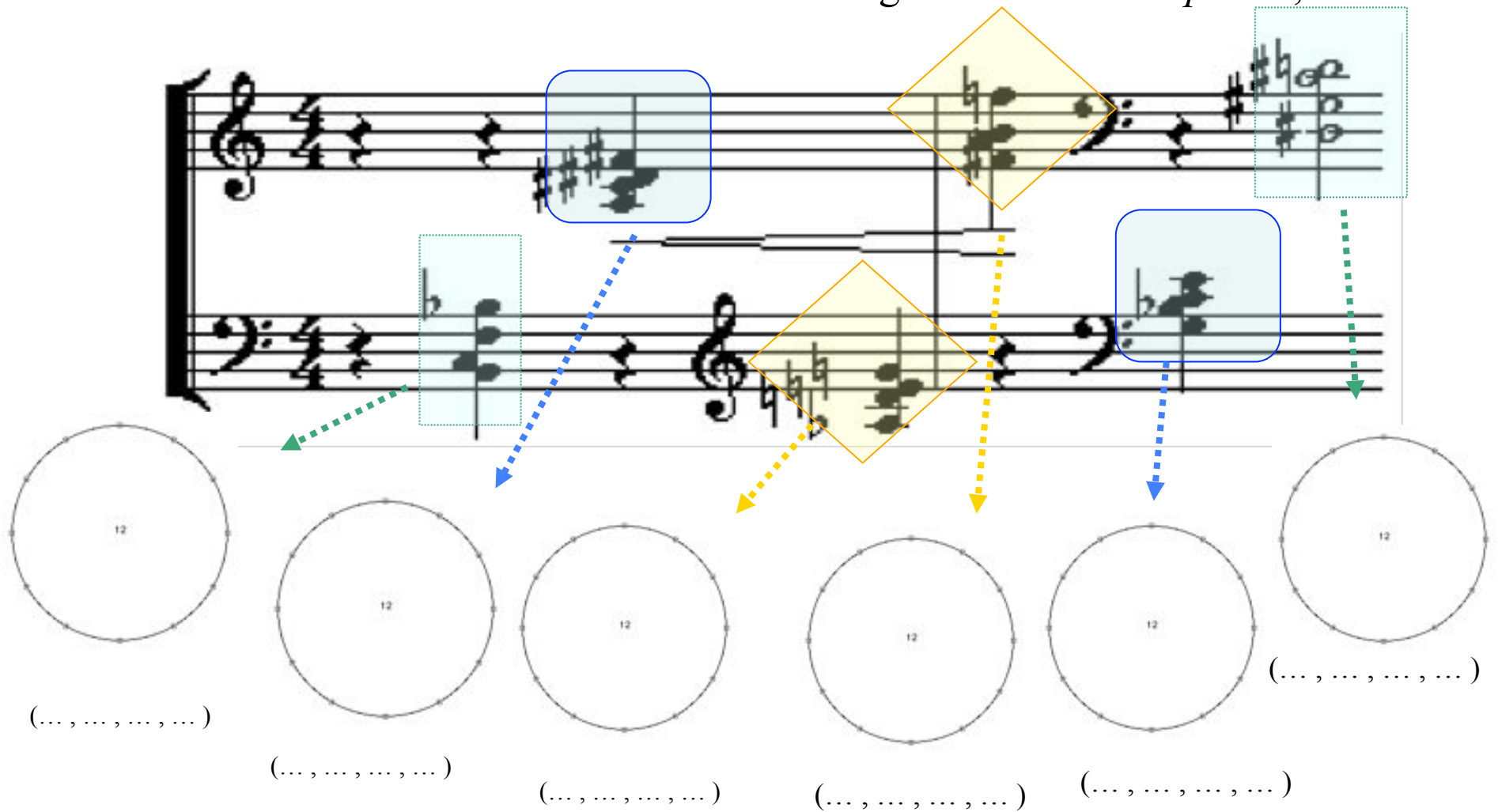


$$\{0, 5, 9, 11\} \longrightarrow \{11, 6, 3, 0\}$$

L'analyse formalisée ou les entités formelles en musique

André Riotte e Marcel Mesnage

A. Schoenberg : *Klavierstück Op. 33a*, 1929





L'analyse formalisée ou les entités formelles en musique

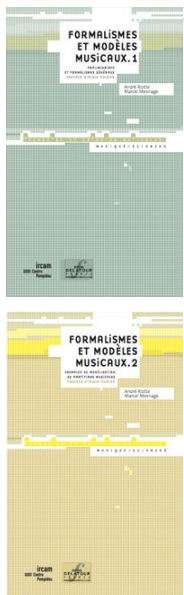
André Riotte & Marcel Mesnage



A. Schoenberg : *Klavierstück Op. 33a*, 1929

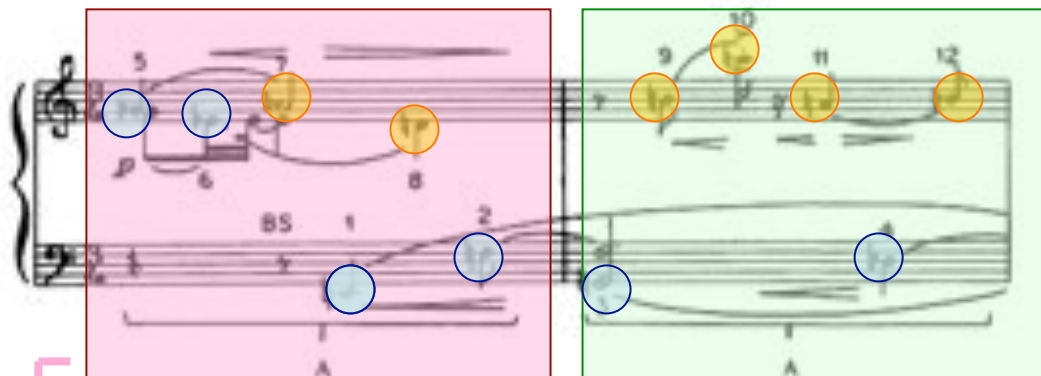
The analysis consists of six circular diagrams, each representing a formal entity. Each diagram is a circle with 12 points labeled 0 through 11. The diagrams are arranged in two rows of three. The first three diagrams are connected by a horizontal arrow labeled T_3 . The last three diagrams are connected by a horizontal arrow labeled T_1I . A vertical dashed line separates the first three diagrams from the last three. Arrows point from the diagrams to specific points in the musical score: a green arrow from the first diagram to the first measure, a blue arrow from the second to the second measure, a yellow arrow from the third to the third measure, a blue arrow from the fourth to the fourth measure, a blue arrow from the fifth to the fifth measure, and a green arrow from the sixth to the sixth measure.

0-5511 (1 2 5 6)	9-4233 (2 3 4 5 6)	8-6231 (1 2 3 4 5 6)	11-6132 (1 2 3 4 5 6)	0-4332 (2 3 4 5 6)	3-5511 (1 2 5 6)
---------------------	-----------------------	-------------------------	--------------------------	-----------------------	---------------------

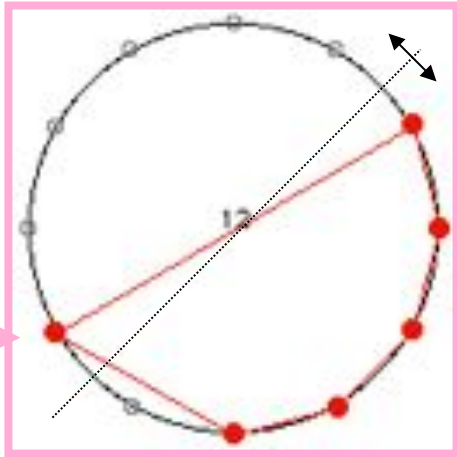
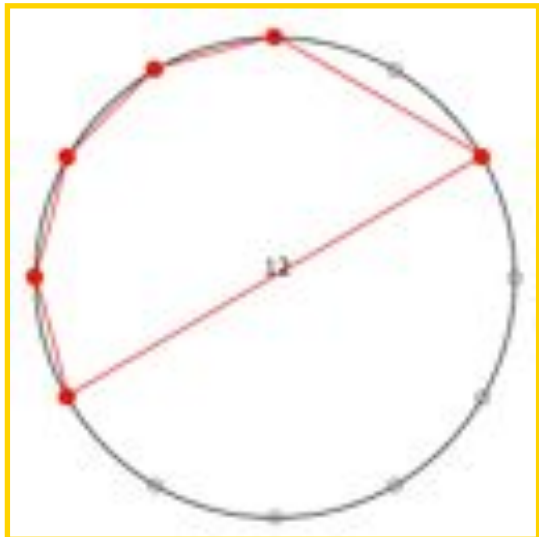
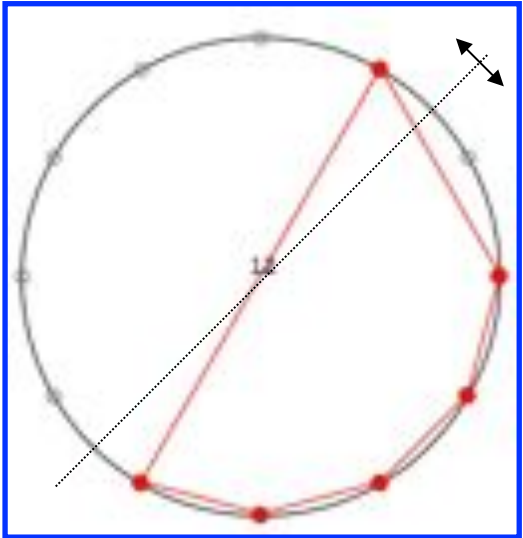


Sérialisme et combinatorialité des hexacordes

Schoenberg: Suite Op.25, Minuetto



Double “combinatorialité”



Exercice : retrouver les symétries dans une série (I)

Schoenberg: Serenade Op.24, Mouvement 5

Diagram illustrating the first step of the exercise: identifying symmetries in a series. The musical notation shows four groups of notes, each enclosed in a red box. Below each box are three downward-pointing arrows and a set of three ellipses in curly braces, representing the identification of individual notes within each group.

Diagram illustrating the second step of the exercise: mapping the identified notes onto a 12-point circle. Four circles, each with 12 points on its circumference and the number 12 in the center, are shown. Arrows point from the boxes in the previous block to these circles. Below each circle is a set of three ellipses in parentheses, representing the mapping of the notes to the circle's points.

Exercice : retrouver les symétries dans une série (I)

Schoenberg: Serenade Op.24, Mouvement 5

The image illustrates the process of identifying symmetries in a musical series. It begins with a musical staff showing four groups of notes, each enclosed in a red box. Below each group are three downward-pointing arrows leading to a set of three numbers in curly braces: $\{9, 10, 0\}$, $\{3, 4, 6\}$, $\{5, 7, 8\}$, and $\{11, 1, 2\}$. Below these sets are four circular diagrams, each representing a 12-tone circle with a '12' in the center. The first and second circles have red lines connecting three points on the circle, representing the set $(1, 2, 9)$. The third and fourth circles have green lines connecting three points on the circle, representing the set $(2, 1, 9)$. Arrows point from the musical sets to their corresponding circular diagrams.

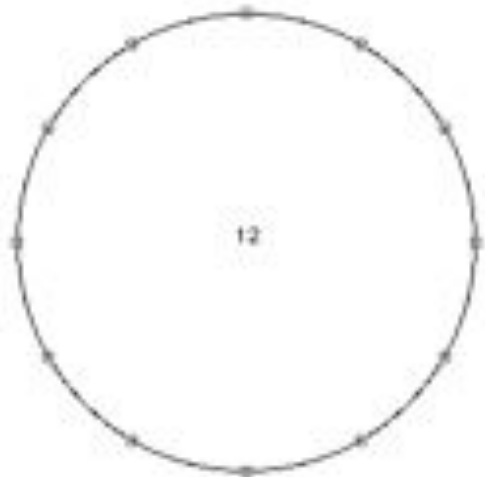
$\{9, 10, 0\}$ $\{3, 4, 6\}$ $\{5, 7, 8\}$ $\{11, 1, 2\}$

$(1, 2, 9)$ $(1, 2, 9)$ $(2, 1, 9)$ $(2, 1, 9)$

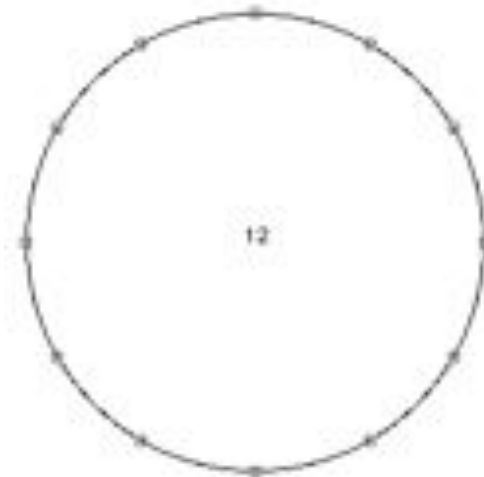
Exercice : retrouver les symétries dans une série

Schoenberg: Serenade Op.24, Mouvement 5

{... , ... , ... , ... , ... , ... } {... , ... , ... , ... , ... , ... }



(... , ... , ... , ... , ... , ...)

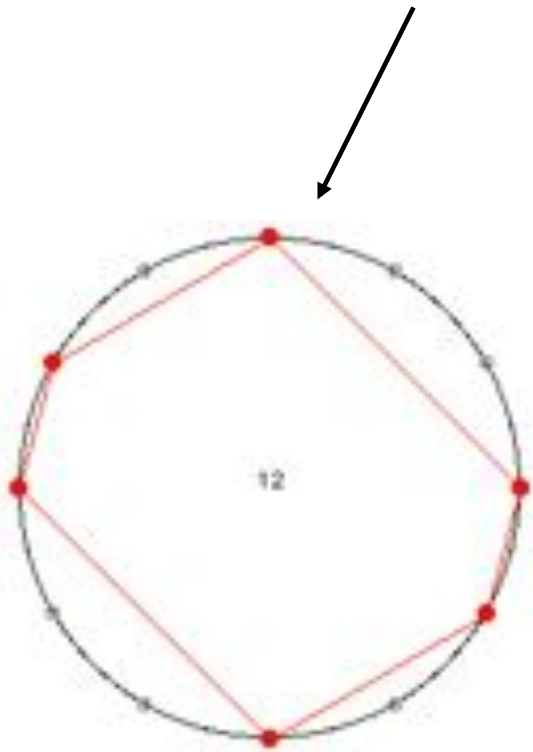


(... , ... , ... , ... , ... , ...)

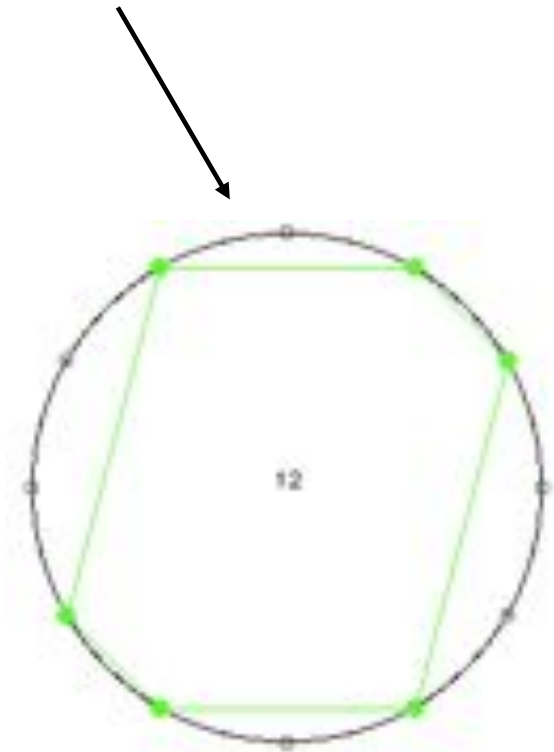
Exercice : retrouver les symétries dans une série

Schoenberg: Serenade Op.24, Mouvement 5

$\{9, 10, 0, 3, 4, 6\}$ $\{5, 7, 8, 11, 1, 2\}$



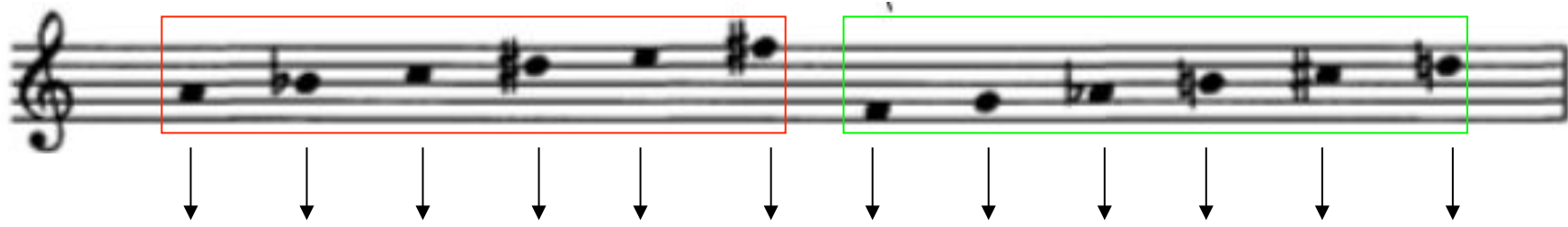
(3, 1, 2, 3, 1, 2)



(2, 1, 3, 2, 1, 3)

“Combinatorialité” et symétrie par transposition

Schoenberg: Serenade Op.24, Mouvement 5

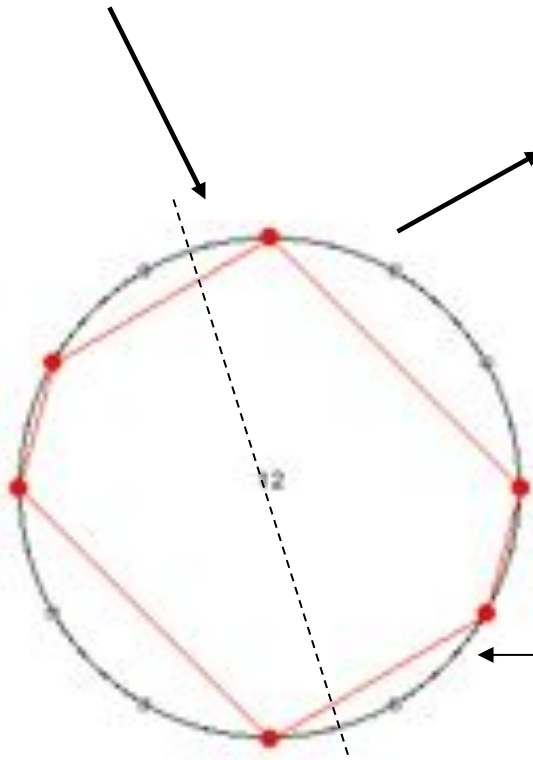


$$A = \{9, 10, 0, 3, 4, 6\} \quad \{5, 7, 8, 11, 1, 2\} = A'$$

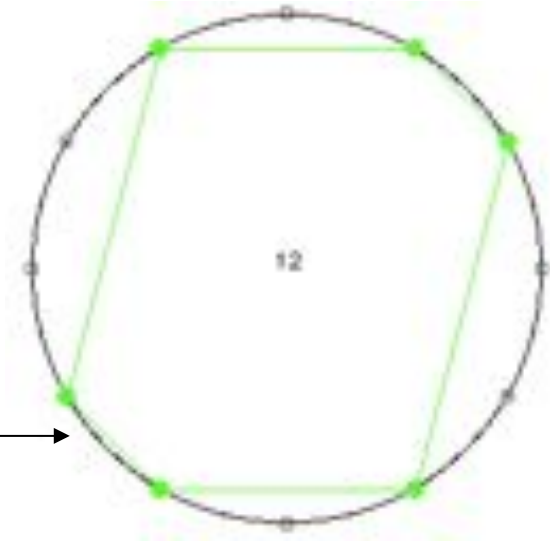
$$\begin{aligned} T_6\{9,10,0,3,4,6\} &= \\ &= \{6+9, 6+10, 6, 6+3, 6+4, 6+6\} = \\ &= \{3, 4, 6, 9, 10, 0\} \end{aligned}$$

$$T_6(A) = A$$

$$I_{11} = T_{11} I$$



(3, 1, 2, 3, 1, 2)



(2, 1, 3, 2, 1, 3)

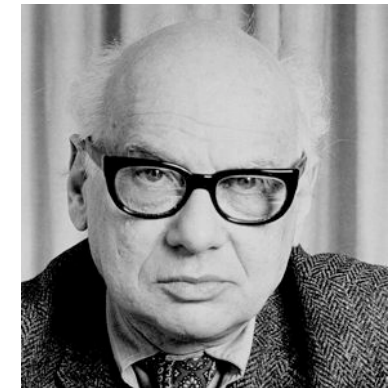
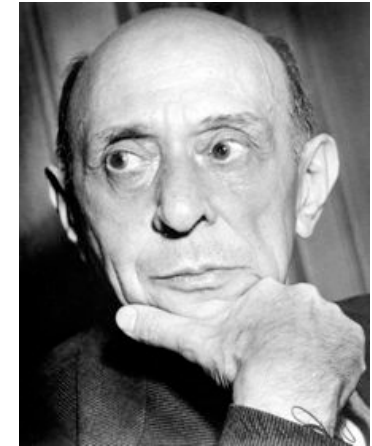
Vers une formalisation algébrique du système dodécaphonique

S
Série originelle

I
Inversion

R
Rétrogradation

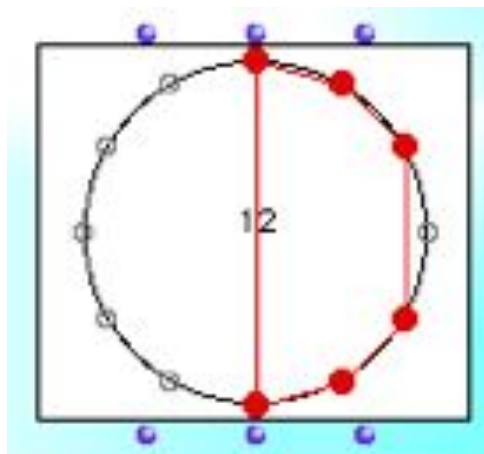
IR
Rétrogradation inverse



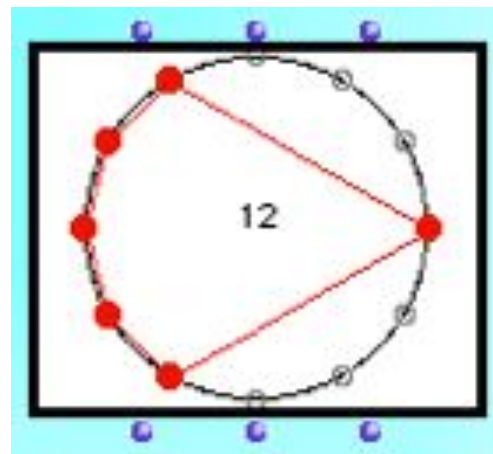
Le système dodécaphonique est « *un ensemble d'éléments, **relations** entre les éléments et **operations** sur les éléments. [...] Une vraie mathématisation aurait besoin d'une formulation et d'une présentation dictées par le fait que le système dodécaphonique est un **groupe de permutations** qui est façonné [shaped] par la structure de ce modèle mathématique* »

Théorème de l'hexacorde (ou théorème de Babbitt)

(Wilcox, Ralph Fox (?), Chemillier, Lewin, Mazzola, Schaub, ..., Amiot [2006])



A



A'

$$IV(A) = [4, 3, 2, 3, 2, 1] = [4, 3, 2, 3, 2, 1] = IV(A')$$

Un hexacorde et son complémentaire ont le même vecteur d'intervalles

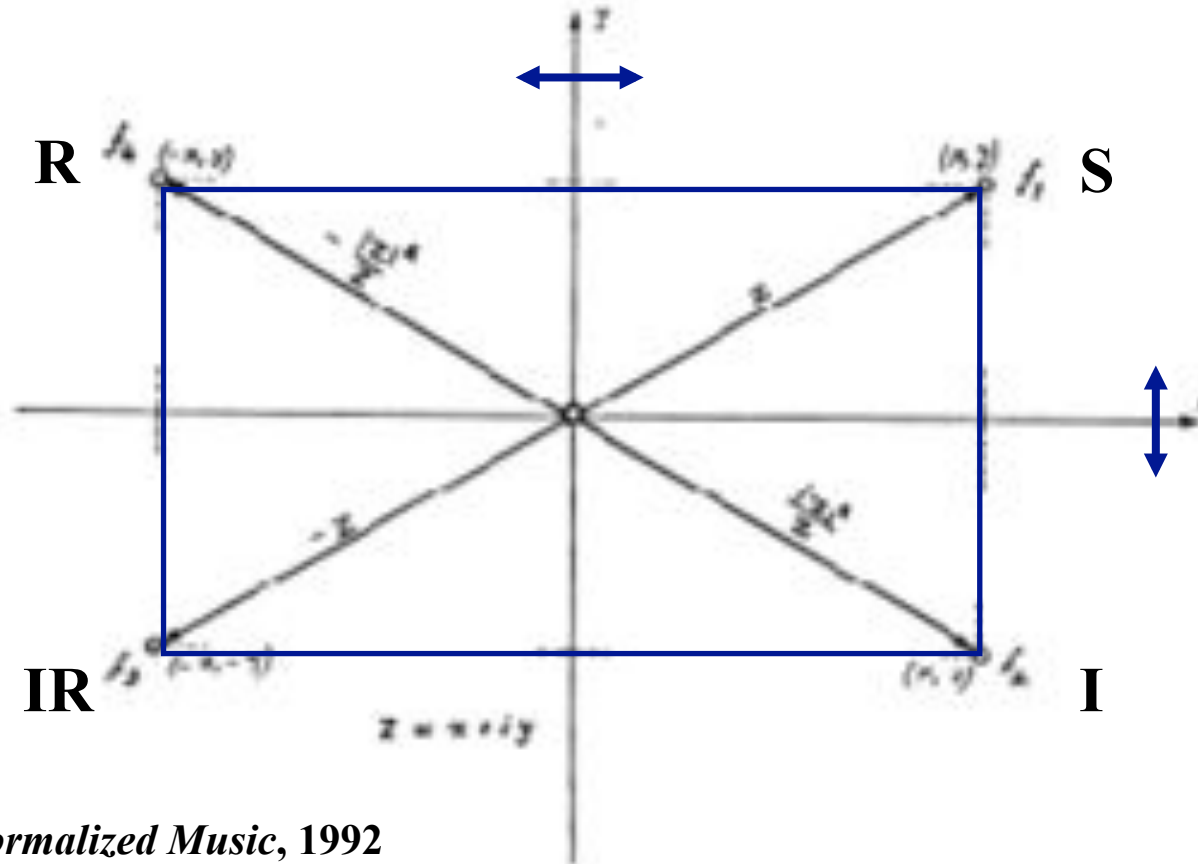
Opérations dodécaphoniques et structures algébriques

Série d'origine
Inversion
Rétrogradation
Rétrogradation inverse

	S	I	R	RI
S	S	I	R	RI
I	I	S	RI	R
R	R	RI	S	I
RI	RI	R	I	S

Structure de *groupe*

- Clôture
- Existence de l'élément neutre
- Existence de l'inverse
- Associativité



Felix Klein

Iannis Xenakis, *Formalized Music*, 1992

Opérations dodécaphonique (selon Babbitt)

S
 (0,0) (1,4) (2,2) (3,5) (4,1) (5,3) (6,11) (7,7) (8,9) (9,6) (10,10) (11,8)

I
 (0,0) (1,8) (2,10) (3,7) (4,11) (5,9) (6,1) (7,5) (8,3) (9,6) (10,2) (11,4)

R
 (0,8) (1,10) (2,6) (3,9) (4,7) (5,11) (6,3) (7,1) (8,5) (9,2) (10,4) (11,0)

IR
 (0,4) (1,2) (2,6) (3,3) (4,5) (5,1) (6,9) (7,11) (8,7) (9,10) (10,8) (11,0)

$$\mathbf{S}: (a,b) \rightarrow (a,b)$$

$$\mathbf{I}: (a,b) \rightarrow (a, 12-b \bmod 12)$$

$$\mathbf{R}: (a,b) \rightarrow (11-a,b)$$

$$\mathbf{IR}: (a,b) \rightarrow (11-a, b \bmod 12)$$

$$\downarrow$$

$$(11-a, 12-b \bmod 12)$$

=

$$\mathbf{RI}: (a,b) \rightarrow (a, 12-b \bmod 12)$$

$$\downarrow$$

$$(11-a, 12-b \bmod 12)$$

Vers l'émergence de la notion de groupe en musique

Ernst Krenek et l'approche axiomatique en musique



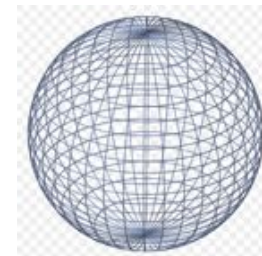
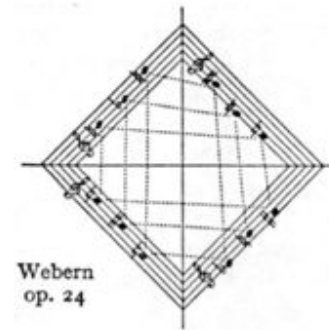
- *The Relativity of Scientific Systems*
- *The Significance of Axioms*
- *Axioms in music*
- *Musical Theory and Musical Practice*

Ernst Krenek : *Über Neue Musik*, 1937
(Engl. Transl. *Music here and now*, 1939)

Physicists and mathematicians are far in advance of musicians in realizing that their respective sciences do not serve to establish a concept of the universe conforming to an objectively existent nature



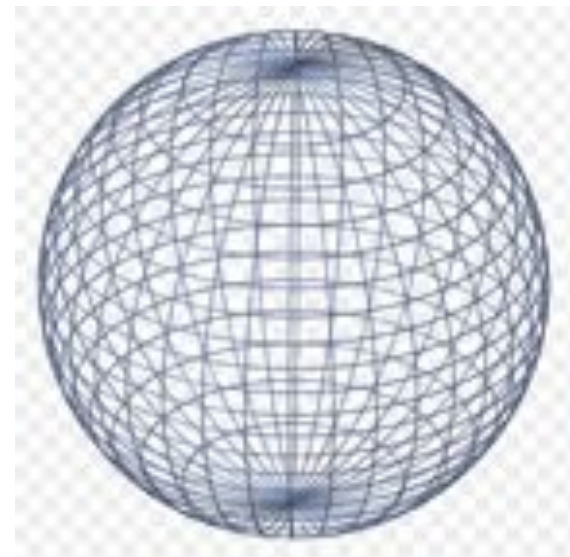
*As the study of axioms eliminates the idea that **axioms** are something absolute, conceiving them instead as **free propositions of the human mind**, just so would this **musical theory** free us from the concept of major/minor tonality [...] as an irrevocable law of nature.*



L'approche axiomatique en mathématique

David Hilbert: les fondements axiomatiques de la géométrie et le rôle de l'intuition

*In order to be constructed in a right way, geometry [...] only needs few simple principles. These principles are called the **axioms** of the geometry. [...] This study (of the axioms) goes back to the **logical analysis of our spatial intuition** (Grundlage der Geometrie, 1899).*

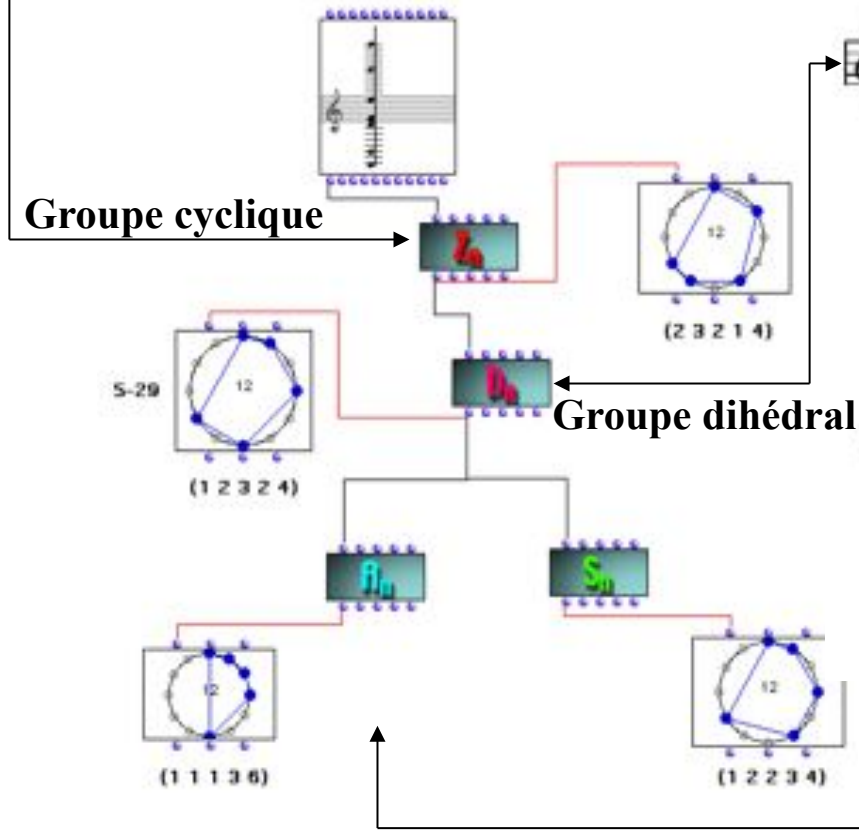
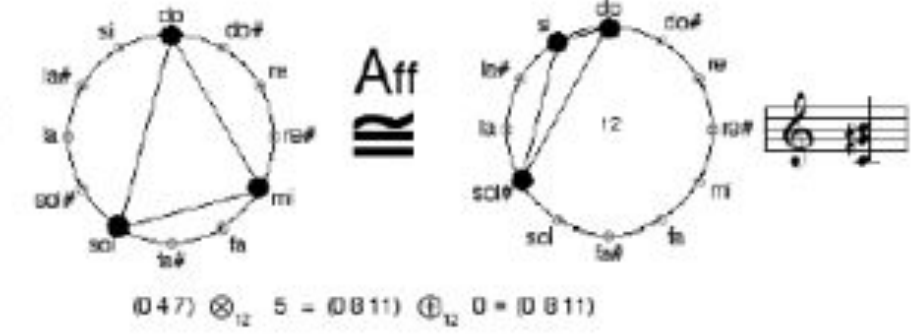
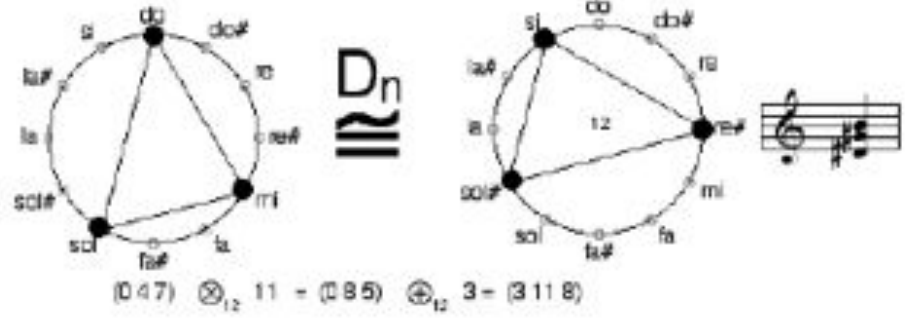
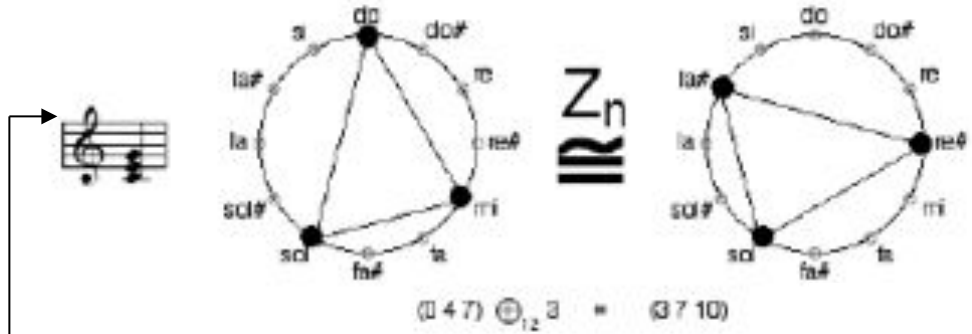


*At the moment there are two tendencies in mathematics. From one side, the tendency toward abstraction aims at 'crystallizing' the logical relations inside of a study object and at organizing this material in a systematic way. But there is also a tendency towards the **intuitive understanding** which aims at understanding the **concret meaning of their relations** (Anschauliche Geometrie, 1932)*

Les groupes comme "paradigmes"

Relation d'équivalence:

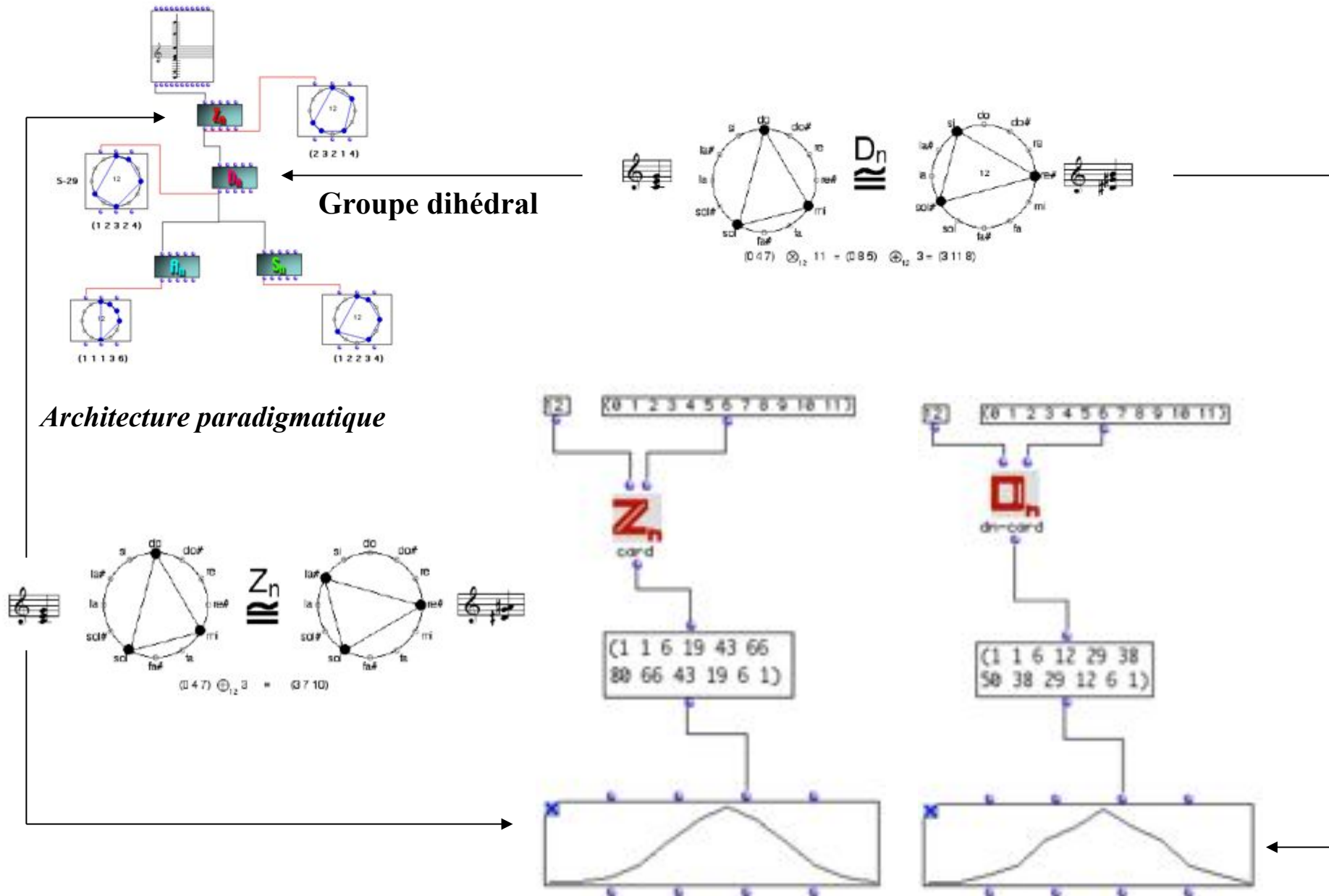
- Reflexive
- Symétrique
- Transitive



Architecture paradigmatique

Groupe Affine

Classes d'équivalence d'accords et groupes de transformations

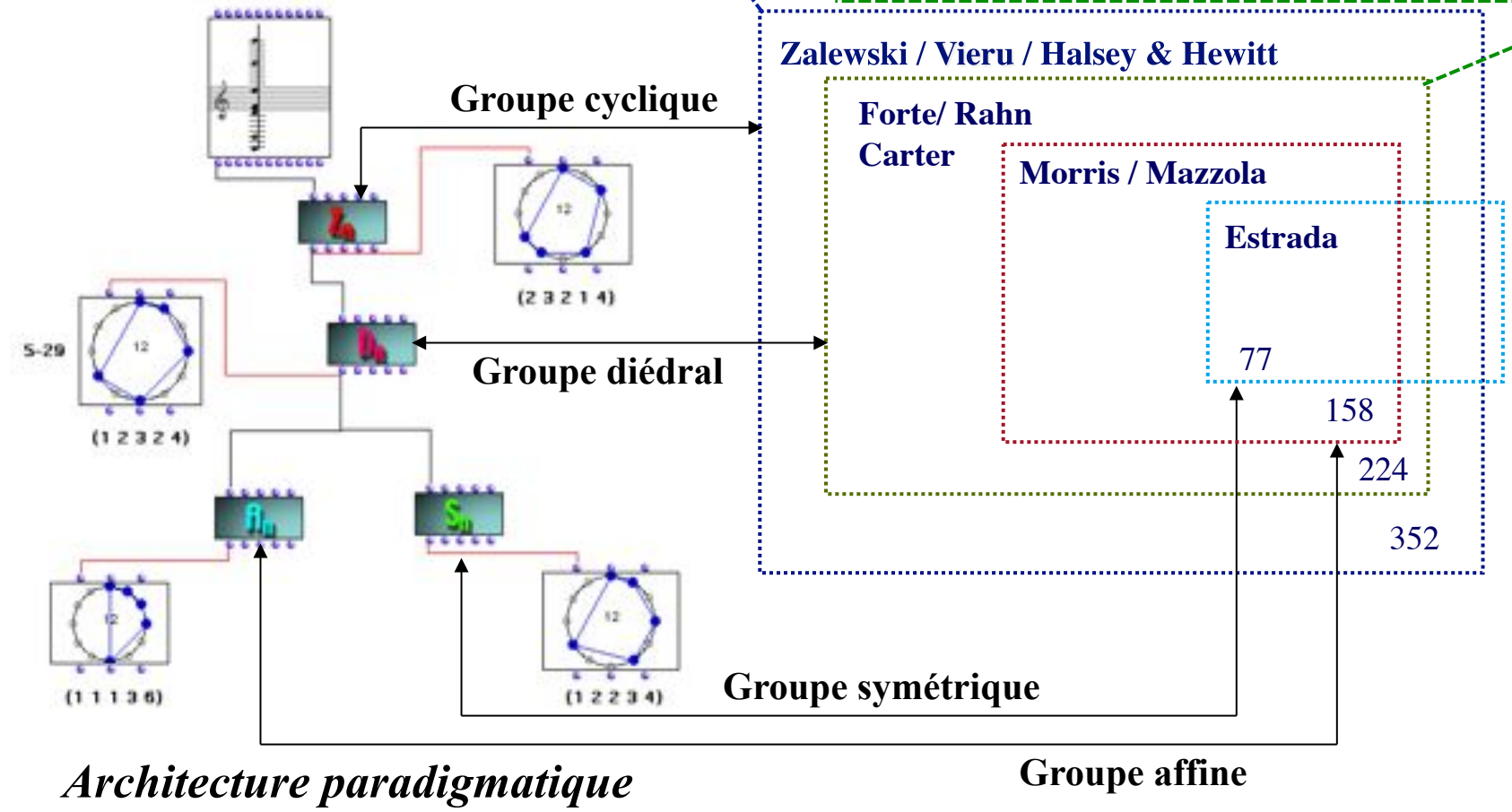


Classification paradigmatic des structures musicales

$$\# \text{ of } k\text{-chords} = \frac{1}{n} \sum_{j \mid (n, k)} \phi(j) \binom{n/j}{k/j} = \frac{1}{n} \Phi_n(k)$$

$\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$
 $n \mapsto \text{card}(\{m \in \mathbb{N}^* \mid m \leq n \text{ et } m \text{ premier avec } n\})$

$$\# \text{ of } k\text{-chords} = \begin{cases} \frac{1}{2n} \left[\Phi_n(k) + n \binom{(n-1)/2}{[k/2]} \right], & \text{if } n \text{ is odd,} \\ \frac{1}{2n} \left[\Phi_n(k) + n \binom{n/2}{k/2} \right], & \text{if } n \text{ is even and } k \text{ is even,} \\ \frac{1}{2n} \left[\Phi_n(k) + n \binom{(n/2)-1}{[k/2]} \right], & \text{if } n \text{ is even and } k \text{ is odd.} \end{cases}$$

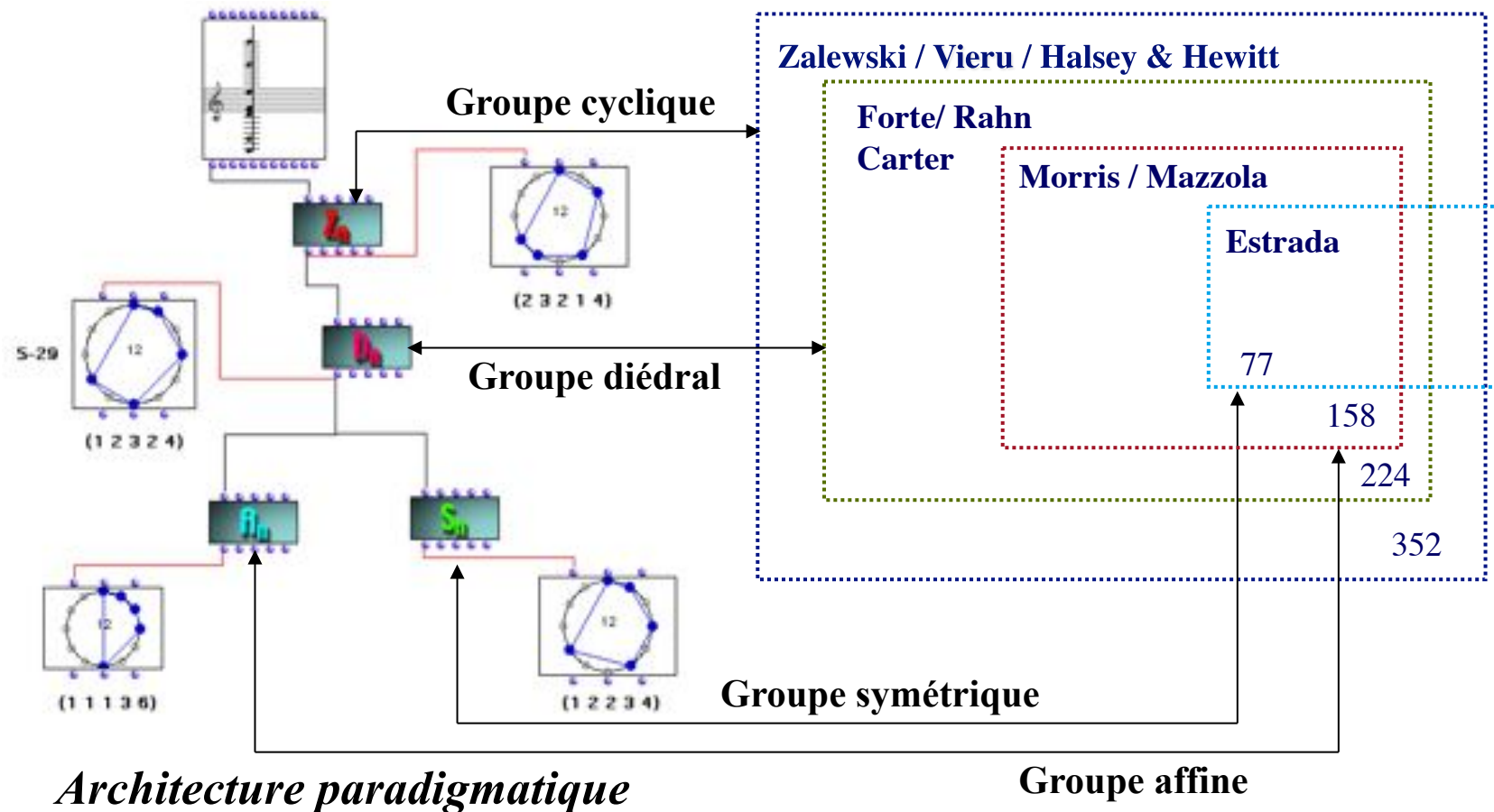


Architecture paradigmatique

- D. Halsey & E. Hewitt: « Eine gruppentheoretische Methode in der Musik-theorie », *Jahresber. Der Dt. Math.-Vereinigung*, 80, 1978.
- D. Reiner: « Enumeration in Music Theory », *Amer. Math. Month.* 92:51-54, 1985
- R.C. Read: « Combinatorial problems in the theory of music », *Discrete Math.*, 1997
- H. Friepertinger: « Enumeration of mosaics », *Discrete Math.*, 1999

Classification paradigmatic des structures musicales

$G \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C_{12}	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1
D_{12}	1	6	12	29	38	50	38	29	12	6	1	1
$\text{Aff}_1(Z_{12})$	1	5	9	21	25	34	25	21	9	5	1	1



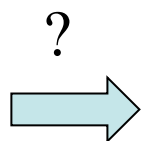
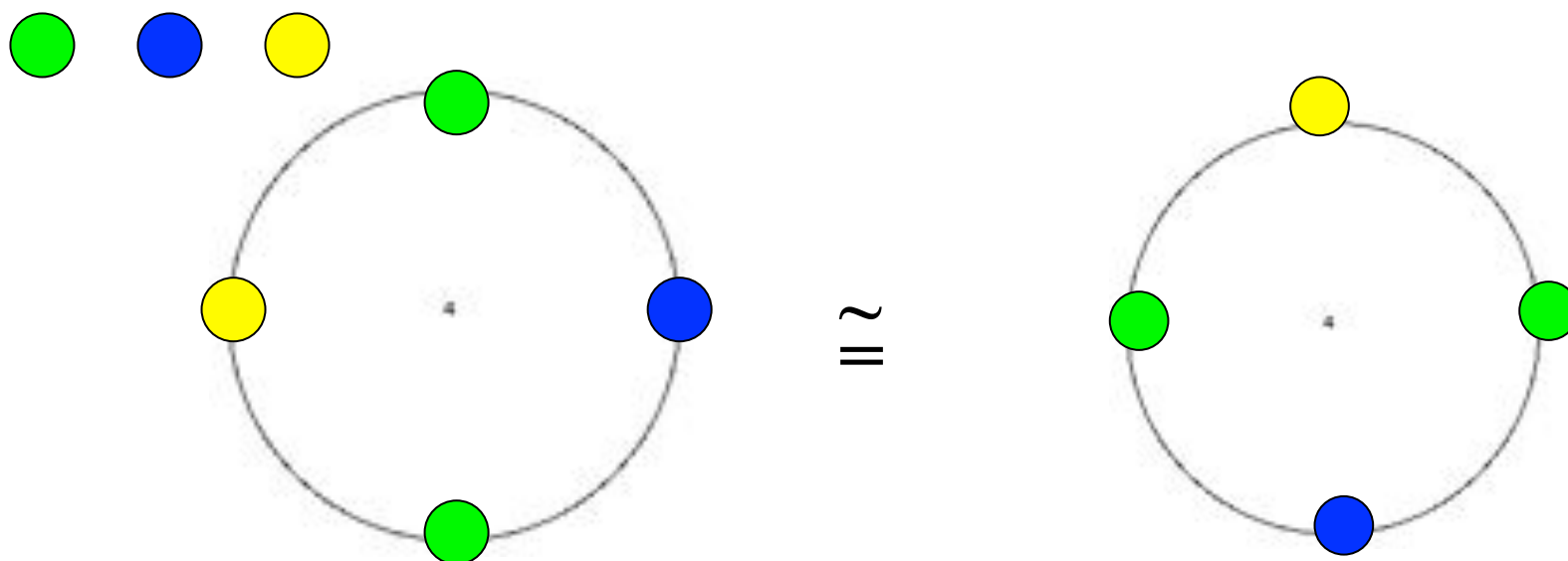
Enumeration des orbites par rapport à l'action d'un groupe



Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

$$X^g = \{x \in X : gx = x\}$$



Trouver le nombre de configurations possibles

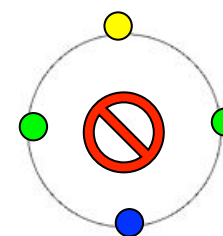
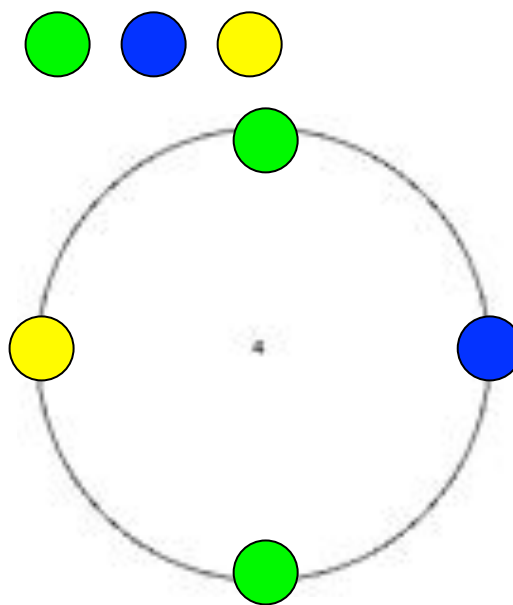
Enumération d'orbites par rapport à l'action d'un groupe



Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

$$X^g = \{x \in X : gx = x\}$$



Action de $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$

$T_0 =$ identité

$T_1 =$ rotation de 90°

$T_2 =$ rotation de 180°

$T_3 =$ rotation de 270°

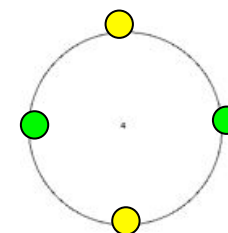
Configurations possibles = $3^4 = 81$

T_0 fixe toute configuration $\Rightarrow |X^{T_0}| = 81$

T_1 fixe toute configuration monochromes $\Rightarrow |X^{T_1}| = 3$

T_3 idem

T_2 fixe toute configuration «double-diamètre» $\Rightarrow |X^{T_2}| = 3^2 = 9$



➔ $n = 1/4 (81+3+3+9) = 24$

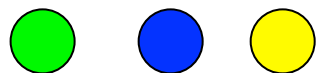
Enumération d'orbites par rapport à l'action d'un groupe



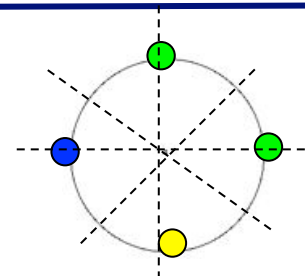
Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

$$X^g = \{x \in X : gx = x\}$$



Action de Z_4



<i>Transformation</i>	<i>Action</i>	<i>Cycle representation</i>	<i>No. of cycles</i>	<i>Fixed configs.</i>	<i>Cycle type</i>	<i>Cycle index</i>
T_0	$0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3$	$(0)(1)(2)(3)$	4	$3^4 = 81$	1^4	t_1^4
T_1	$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 0$	$(0\ 1\ 2\ 3)$	1	$3^1 = 3$	4^1	t_4^1
T_2	$0 \rightarrow 2 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$	$(0\ 2)(1\ 3)$	2	$3^2 = 9$	2^2	t_2^2
T_3	$0 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$	$(0\ 3\ 2\ 1)$	1	$3^1 = 3$	4^1	t_4^1

Julian Hook, « Why are there 29 Tetrachords? A Tutorial on Combinatorics and Enumeration in Music Theory », MTO, 13(4), 2007

$$n = 1/4 (81+3+3+9) = 24$$

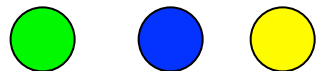
Enumération d'orbites par rapport à l'action d'un groupe



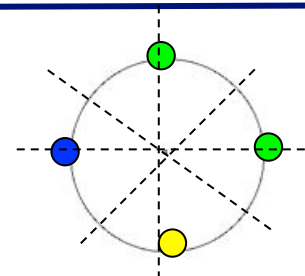
Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

$$X^g = \{x \in X : gx = x\}$$



Action de D_4



<i>Transformation</i>	<i>Action</i>	<i>Cycle representation</i>	<i>No. of cycles</i>	<i>Fixed configs.</i>	<i>Cycle type</i>	<i>Cycle index</i>
T_0	$0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3$	$(0)(1)(2)(3)$	4	$3^4 = 81$	1^4	t_1^4
T_1	$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 0$	$(0\ 1\ 2\ 3)$	1	$3^1 = 3$	4^1	t_4^1
T_2	$0 \rightarrow 2 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$	$(0\ 2)(1\ 3)$	2	$3^2 = 9$	2^2	t_2^2
T_3	$0 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$	$(0\ 3\ 2\ 1)$	1	$3^1 = 3$	4^1	t_4^1
I	$0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2$	$(0)(1\ 3)(2)$	3	$3^3 = 27$	$1^2 2^1$	$t_1^2 t_2^1$
$T_1 I$	$0 \rightarrow 1 \rightarrow 0, 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2$	$(0\ 1)(2\ 3)$	2	$3^2 = 9$	2^2	t_2^2
$T_2 I$	$0 \rightarrow 2 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3$	$(0\ 2)(1)(3)$	3	$3^3 = 27$	$1^2 2^1$	$t_1^2 t_2^1$
$T_3 I$	$0 \rightarrow 3 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$	$(0\ 3)(1\ 2)$	2	$3^2 = 9$	2^2	t_2^2

Julian Hook, « Why are there 29 Tetrachords? A Tutorial on Combinatorics and Enumeration in Music Theory », MTO, 13(4), 2007

$$n = 1/8 (81+3+3+9+27+9+27+9) = 168/8=21$$

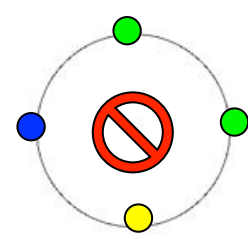
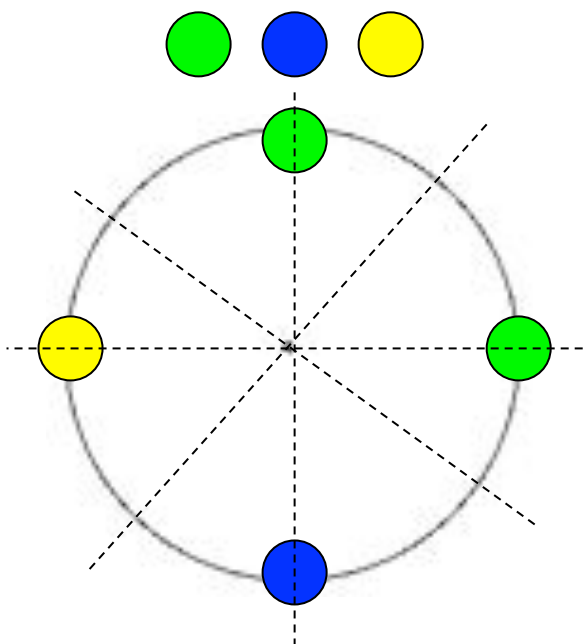
Enumération d'orbites par rapport à l'action d'un groupe



Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

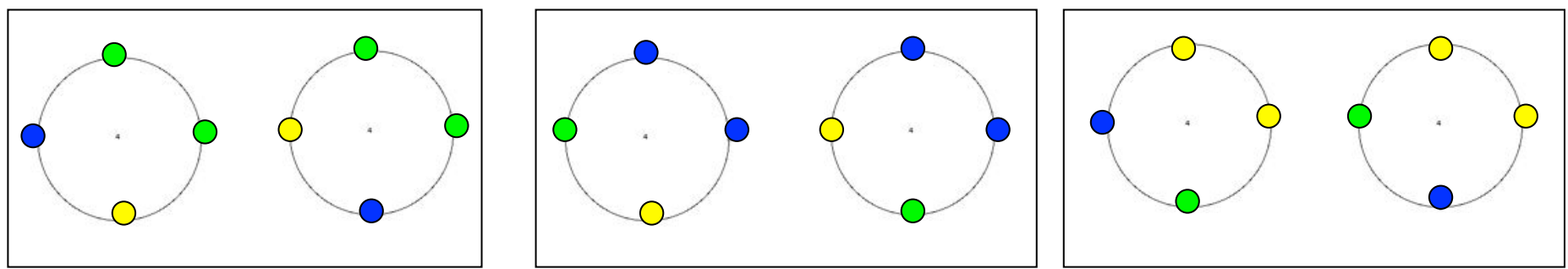
$X^g = \{x \in X : gx = x\}$



Action de D_4

- | | |
|-------------------------------|---------------------------|
| $T_0 = \text{id}$ | $T_0I = \text{inversion}$ |
| $T_1 = \text{rot } 90^\circ$ | $T_1I = \text{inv.}$ |
| $T_2 = \text{rot } 180^\circ$ | $T_2I = \text{inv.}$ |
| $T_3 = \text{rot } 270^\circ$ | $T_3I = \text{inv.}$ |

→ 21=24-3



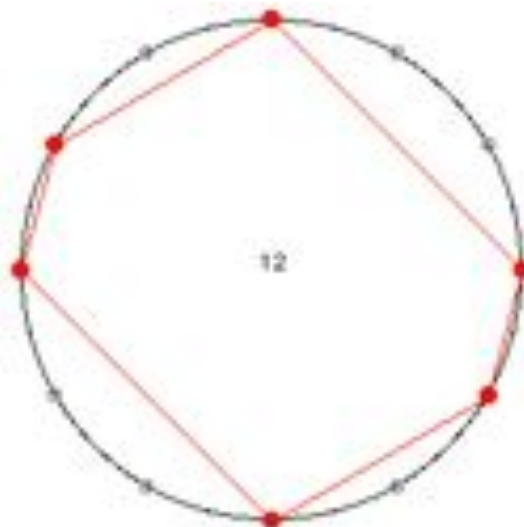
Enumération d'accords par rapport à l'action d'un groupe



Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

$$X^g = \{x \in X : gx = x\}$$



Action de \mathbf{Z}_{12}

(Benson, p. 348)

Group element	size of subset												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Identity	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1
$\mathbf{T}, \mathbf{T}^5, \mathbf{T}^7, \mathbf{T}^{11}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$\mathbf{T}^2, \mathbf{T}^{10}$	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	1
$\mathbf{T}^3, \mathbf{T}^9$	1	0	0	0	3	0	0	0	3	0	0	0	1
$\mathbf{T}^4, \mathbf{T}^8$	1	0	0	4	0	0	6	0	0	4	0	0	1
\mathbf{T}^6	1	0	6	0	15	0	20	0	15	0	6	0	1

➔ # accords de 3 notes = $1/12 (220 + 4 \cdot 2) = 228/12 = 19$

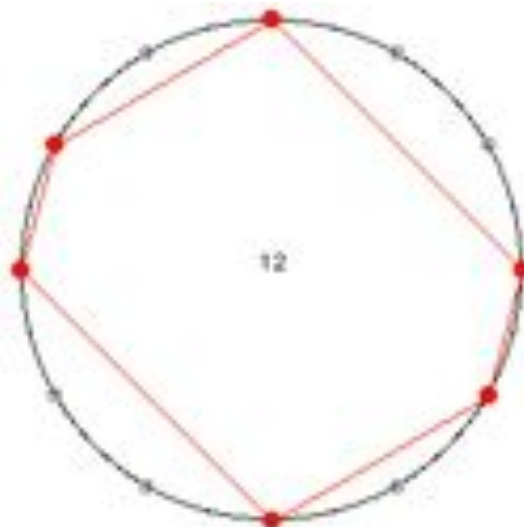
Enumération d'accords par rapport à l'action d'un groupe



Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

$$X^g = \{x \in X : gx = x\}$$



Action de D_{12}

(Benson, p. 348)

Group element	size of subset												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Identity	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1
T, T^5, T^7, T^{11}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
T^2, T^{10}	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	1
T^3, T^9	1	0	0	0	3	0	0	0	3	0	0	0	1
T^4, T^8	1	0	0	4	0	0	6	0	0	4	0	0	1
T^6	1	0	6	0	15	0	20	0	15	0	6	0	1
$T^{2m}I$	1	2	6	10	15	20	20	20	15	10	6	2	1
$T^{2m+1}I$	1	0	6	0	15	0	20	0	15	0	6	0	1

➔ # accords de 3 notes = $1/24 (220 + 4 \cdot 2 + 10 \cdot 6) = 288/24 = 12$

Énumération d'accords par rapport à l'action du groupe diédrale



Transformation	Cycle representation	No. of cycles	Fixed configs.	Cycle type	Cycle index
T_0	(0)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(A)(B)	12	$2^{12} = 4096$	1^{12}	t_1^{12}
T_1	(0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B)	1	$2^1 = 2$	12^1	t_{12}^1
T_2	(0 2 4 6 8 A)(1 3 5 7 9 B)	2	$2^2 = 4$	6^2	t_6^2
T_3	(0 3 6 9)(1 4 7 A)(2 5 8 B)	3	$2^3 = 8$	4^3	t_4^3
T_4	(0 4 8)(1 5 9)(2 6 A)(3 7 B)	4	$2^4 = 16$	3^4	t_3^4
T_5	(0 5 A 3 8 1 6 B 4 9 2 7)	1	$2^1 = 2$	12^1	t_{12}^1
T_6	(0 6)(1 7)(2 8)(3 9)(4 A)(5 B)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6
T_7	(0 7 2 9 4 B 6 1 8 3 A 5)	1	$2^1 = 2$	12^1	t_{12}^1
T_8	(0 8 4)(1 9 5)(2 A 6)(3 B 7)	4	$2^4 = 16$	3^4	t_3^4
T_9	(0 9 6 3)(1 A 7 4)(2 B 8 5)	3	$2^3 = 8$	4^3	t_4^3
T_{10}	(0 A 8 6 4 2)(1 B 9 7 5 3)	2	$2^2 = 4$	6^2	t_6^2
T_{11}	(0 B A 9 8 7 6 5 4 3 2 1)	1	$2^1 = 2$	12^1	t_{12}^1
I	(0)(1 B)(2 A)(3 9)(4 8)(5 7)(6)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
$T_1 I$	(0 1)(2 B)(3 A)(4 9)(5 8)(6 7)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6
$T_2 I$	(0 2)(1)(3 B)(4 A)(5 9)(6 8)(7)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
$T_3 I$	(0 3)(1 2)(4 B)(5 A)(6 9)(7 8)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6
$T_4 I$	(0 4)(1 3)(2)(5 B)(6 A)(7 9)(8)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
$T_5 I$	(0 5)(1 4)(2 3)(6 B)(7 A)(8 9)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6
$T_6 I$	(0 6)(1 5)(2 4)(3)(7 B)(8 A)(9)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
$T_7 I$	(0 7)(1 6)(2 5)(3 4)(8 B)(9 A)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6
$T_8 I$	(0 8)(1 7)(2 6)(3 5)(4)(9 B)(A)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
$T_9 I$	(0 9)(1 8)(2 7)(3 6)(4 5)(A B)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6
$T_{10} I$	(0 A)(1 9)(2 8)(3 7)(4 6)(5)(B)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
$T_{11} I$	(0 B)(1 A)(2 9)(3 8)(4 7)(5 6)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6

Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

$X^g = \{x \in X : gx = x\}$

Action de D_{12}
(Hook, MTO)





d'accords = $1/12[4096+2+4+8+16+2+64+2+16+8+4+2]=4224/12=352$



d'accords = $1/24[4224+1152] = 224$

Énumération d'accords et dans un système tempéré

 # of k -chords = $\frac{1}{n} \sum_{j|(n,k)} \phi(j) \binom{n/j}{k/j} = \frac{1}{n} \Phi_n(k)$, (Reiner, 1985)

 # of k -chords = $\begin{cases} \frac{1}{2n} \left[\Phi_n(k) + n \binom{(n-1)/2}{[k/2]} \right], & \text{if } n \text{ is odd,} \\ \frac{1}{2n} \left[\Phi_n(k) + n \binom{n/2}{k/2} \right], & \text{if } n \text{ is even and } k \text{ is even,} \\ \frac{1}{2n} \left[\Phi_n(k) + n \binom{(n/2)-1}{[k/2]} \right], & \text{if } n \text{ is even and } k \text{ is odd.} \end{cases}$

$G \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C_{12}	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1
D_{12}	1	6	12	29	38	50	38	29	12	6	1	1
$\text{Aff}_1(Z_{12})$	1	5	9	21	25	34	25	21	9	5	1	1

(Fripertinger, 1992)

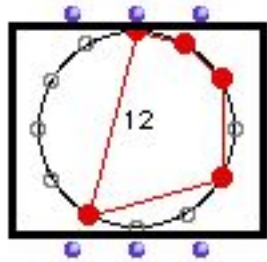
- D. Halsey & E. Hewitt: « Eine gruppentheoretische Methode in der Musik-theorie », *Jahresber. Der Dt. Math.-Vereinigung*, 80, 1978.
- D. Reiner: « Enumeration in Music Theory », *Amer. Math. Month.* 92:51-54, 1985
- H. Friperntinger: « Enumeration in Musical Theory », *Beiträge zur Elektr. Musik*, 1, 1992
- R.C. Read: « Combinatorial problems in the theory of music », *Discrete Math.*, 1997
- H. Friperntinger: « Enumeration of mosaics », *Discrete Math.*, 1999
- H. Friperntinger: « Enumeration of non-isomorphic canons », *Tatra Mt. Math. Publ.*, 2001
- M. Broué : « Les tonalités musicales vues par un mathématicien », *Le temps des savoirs, Revue de l'Institut Universitaire de France*, 2002
- David J. Hunter & Paul T. von Hippel : « How Rare Is Symmetry in Musical 12-Tone Rows? », *The American Mathematical Monthly*, Vol. 110, No. 2., Feb., 2003
- H. Friperntinger: « Tiling problems in music theory », in *Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory* (Mazzola, Noll, Puebla ed., Epos, 2004)
- Rachel W. Hall & P. Klingsberg: « Asymmetric Rhythms, Tiling Canons, and Burnside's Lemma », *Bridge Proceedings*, 2004
- ...

Catalogue des *pitch-class sets* d'Allen Forte (1973)

complémentaire

name	pcs	vector	name	pcs	vector
5-30	0,1,4,6,8	121321	7-30	0,1,2,4,6,8,9	343542
5-31	0,1,3,6,9	114112	7-31	0,1,3,4,6,7,9	336333
5-32	0,1,4,6,9	113221	7-32	0,1,3,4,6,8,9	335442
5-33(12)	0,2,4,6,8	040402	7-33	0,1,2,4,6,8,10	262623
5-34(12)	0,2,4,6,9	032221	7-34	0,1,3,4,6,8,10	254442
5-35(12)	0,2,4,7,9	032140	7-35	0,1,3,5,6,8,10	254361
5-Z36	0,1,2,4,7	222121	7-Z36	0,1,2,3,5,6,8	444342
5-Z37(12)	0,3,4,5,8	212320	7-Z37	0,1,3,4,5,7,8	434541
5-Z38	0,1,2,5,8	212221	7-Z38	0,1,2,4,5,7,8	434442
6-1(12)	0,1,2,3,4,5	543210			
6-2	0,1,2,3,4,6	443211			
5-Z36	0,1,2,4,7	222121	7-Z36	0,1,2,3,5,6,8	444342
6-Z4(12)	0,1,2,4,5,6	432321	6-Z37(12)	0,1,2,3,4,8	
6-5	0,1,2,3,6,7	422232	6-Z38(12)	0,1,2,3,7,8	
6-Z6(12)	0,1,2,5,6,7	421242			
6-7(6)	0,1,2,6,7,8	420243			
6-8(12)	0,2,3,4,5,7	343230			
6-9	0,1,2,3,5,7	342231			
6-Z10	0,1,3,4,5,7	333321	6-Z39	0,2,3,4,5,8	
6-Z11	0,1,2,4,5,7	333231	6-Z40	0,1,2,3,5,8	
6-Z12	0,1,2,4,6,7	332232	6-Z41	0,1,2,3,6,8	
6-Z13(12)	0,1,3,4,6,7	324222	6-Z42(12)	0,1,2,3,6,9	

Vecteur d'intervalles et relation Z



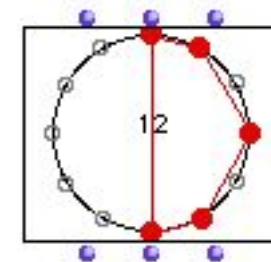
5-30	0,1,4,6,8	121321
5-31	0,1,3,6,9	114112
5-32	0,1,4,6,9	113221
5-33(12)	0,2,4,6,8	040402
5-34(12)	0,2,4,6,9	032221
5-35(12)	0,2,4,7,9	032140
5-Z36	0,1,2,4,7	222121
5-Z37(12)	0,3,4,5,8	212320
5-Z38	0,1,2,5,8	212221
6-1(12)	0,1,2,3,4,5	543210
6-2	0,1,2,3,4,6	443211

5-Z36	0,1,2,4,7	222121
6-Z4(12)	0,1,2,4,5,6	432321
6-5	0,1,2,3,6,7	422232
6-Z6(12)	0,1,2,5,6,7	421242
6-7(6)	0,1,2,6,7,8	420243
6-8(12)	0,2,3,4,5,7	343230
6-9	0,1,2,3,5,7	342231
6-Z10	0,1,3,4,5,7	333321
6-Z11	0,1,2,4,5,7	333231
6-Z12	0,1,2,4,6,7	332232
6-Z13(12)	0,1,3,4,6,7	324222

7-30	0,1,2,4,6,8,9	343542
7-31	0,1,3,4,6,7,9	336333
7-32	0,1,3,4,6,8,9	335442
7-33	0,1,2,4,6,8,10	262623
7-34	0,1,3,4,6,8,10	254442
7-35	0,1,3,5,6,8,10	254361
7-Z36	0,1,2,3,5,6,8	444342
7-Z37	0,1,3,4,5,7,8	434541
7-Z38	0,1,2,4,5,7,8	434442

6-Z36	0,1,2,3,4,7
6-Z37(12)	0,1,2,3,4,8
6-Z38(12)	0,1,2,3,7,8

6-Z39	0,2,3,4,5,8
6-Z40	0,1,2,3,5,8
6-Z41	0,1,2,3,6,8
6-Z42(12)	0,1,2,3,6,9

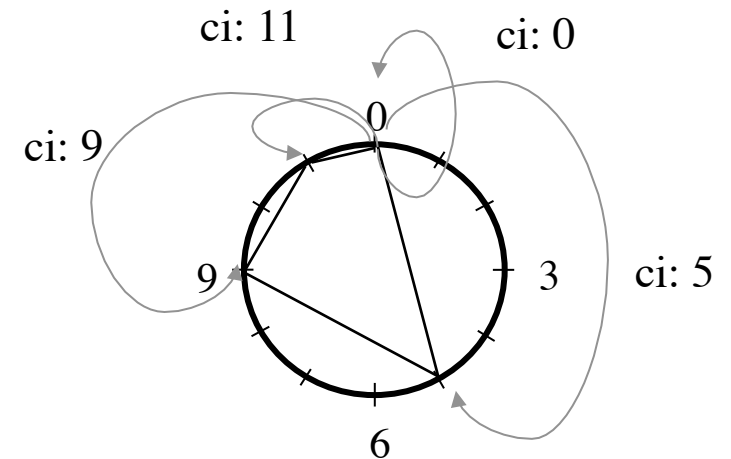
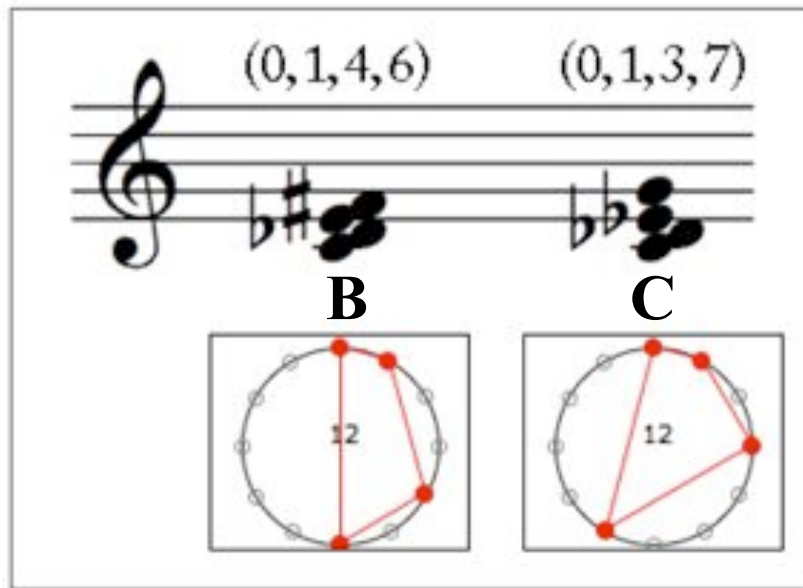


5-Z12

Contenu intervallique, Z-relations et homométrie

- Le contenu intervallique est équivalent à un produit de convolution de fonctions caractéristiques (Lewin, *JMT*, 1958)

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$



$$A = \{0, 5, 9, 11\} \Rightarrow IC_A(k) = 1 \forall k$$

$$B = \{0, 1, 4, 6\}$$

$$C = \{0, 1, 3, 7\}$$

$$\Rightarrow IC_B(k) = IC_C(k) = IC_A(k) = 1 \forall k$$

Approche transformationnelle et théorie de l'homométrie

- Le contenu intervallique est équivalent à un produit de convolution de fonctions caractéristiques (Lewin, *JMT*, 1958)

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

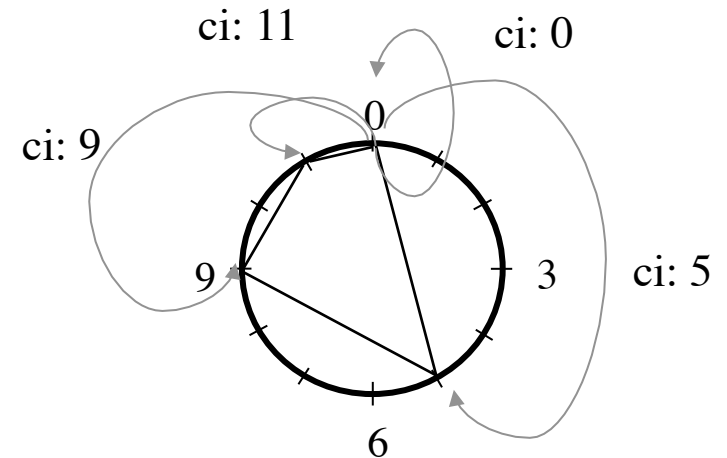
$$1_A \star \tilde{1}_B(k) = \sum_i 1_A(i) \times 1_B(i - k) = \sum_{\substack{i \in A \\ i - k \in B}} 1$$

$$\mathcal{F}(1_A \star \tilde{1}_B) = \mathcal{F}(1_A) \times \mathcal{F}(\tilde{1}_B)$$

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

$$\mathcal{F}(IC_A) = \mathcal{F}_A \times \mathcal{F}_{-A} = |\mathcal{F}_A|^2$$

$$\forall k \mathcal{F}(IC_{\mathbb{Z}_c \setminus A})(k) = \mathcal{F}(IC_A)(k)$$



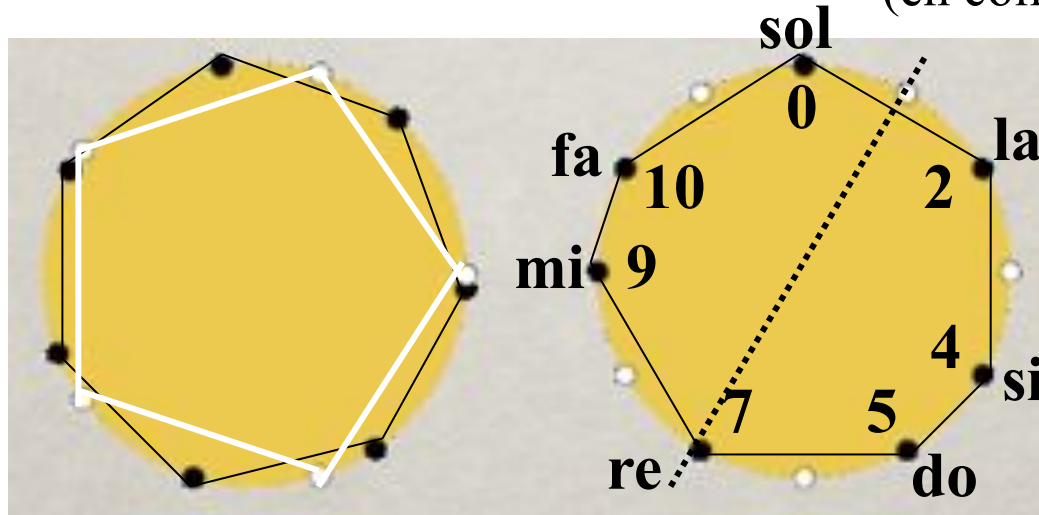
$$A = \{0, 5, 9, 11\} \Rightarrow IC_A(k) = 1 \forall k$$

➔ **Reconstruction de la phase**

➔ **Théorème de l'hexacorde**

Maximally-Even Sets (ME-sets)

(en collaboration avec Emmanuel Amiot)

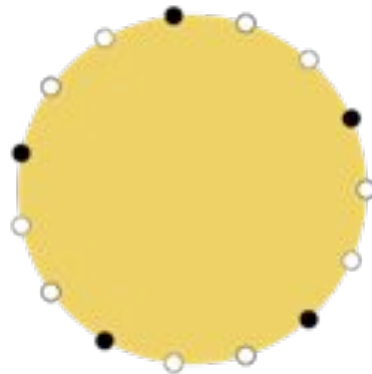


Gamme diatonique:

$\{0, 2, 4, 5, 7, 9, 10\}$

Gamme pentatonique:

$\{1, 3, 6, 8, 11\}$



$$\text{fourier}(\text{set}, t) := \sum_{k \in \text{set}} e^{2i\pi kt/12}$$

$$|F_A(5)| = 1+1+1+1+1 = 5$$

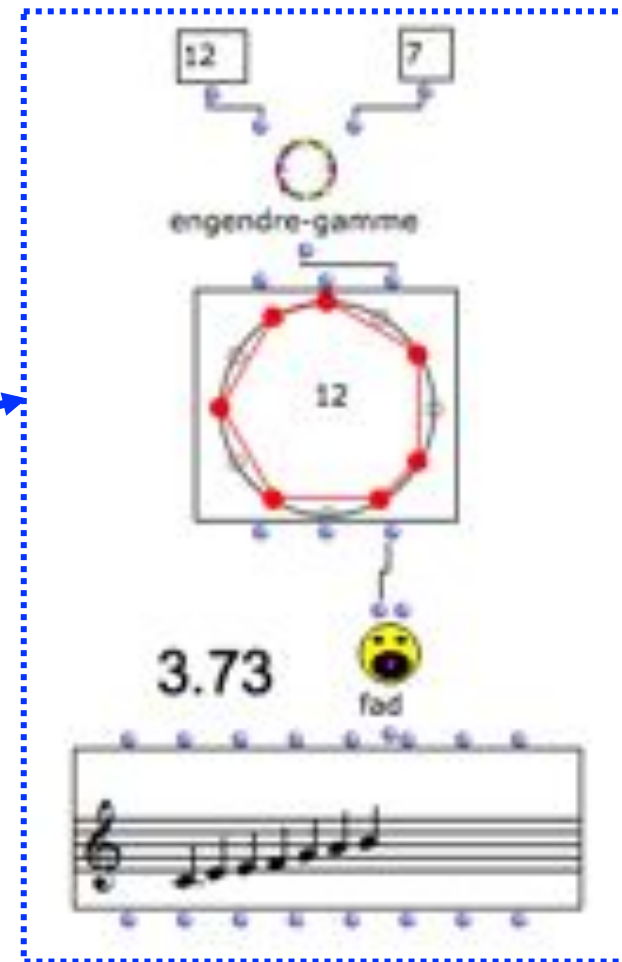
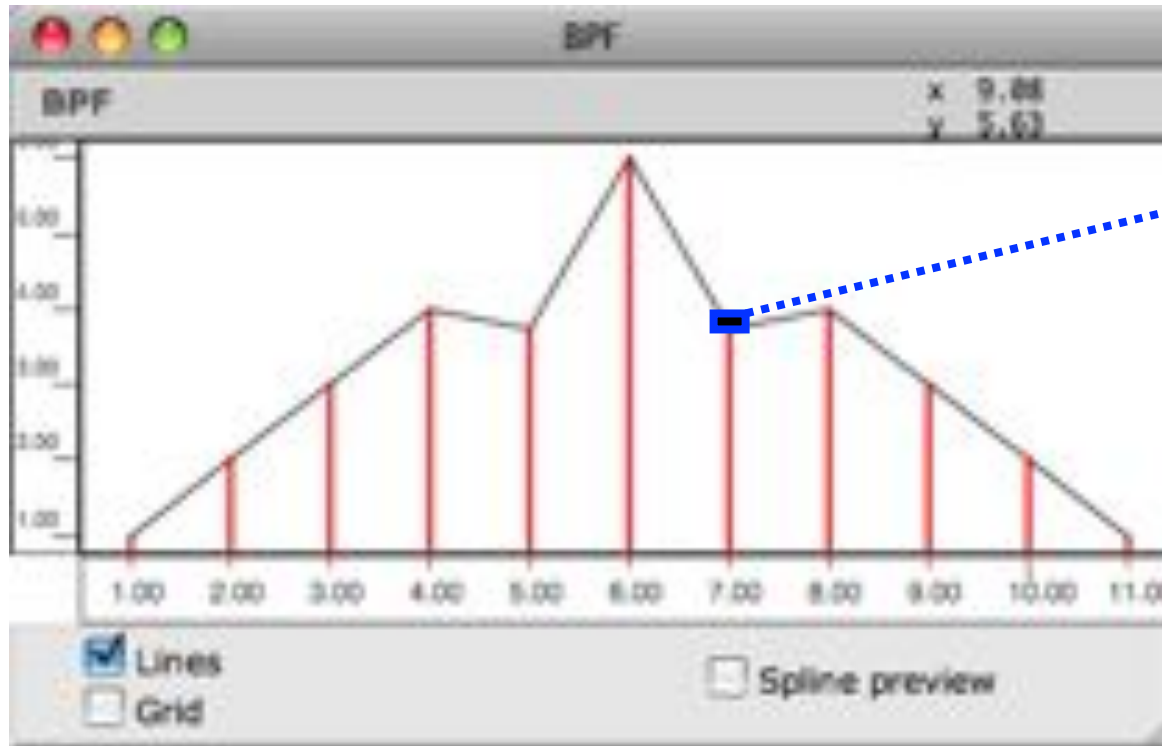
En général, $|F_A(t)| \leq \#A$

Definition (Amiot, 2005) A set A with cardinality d given equal tempered space \mathbf{Z}_c is maximally even if $|F_A(d)| \geq |F_B(d)|$ for all subsets B of cardinality d in \mathbf{Z}_c .

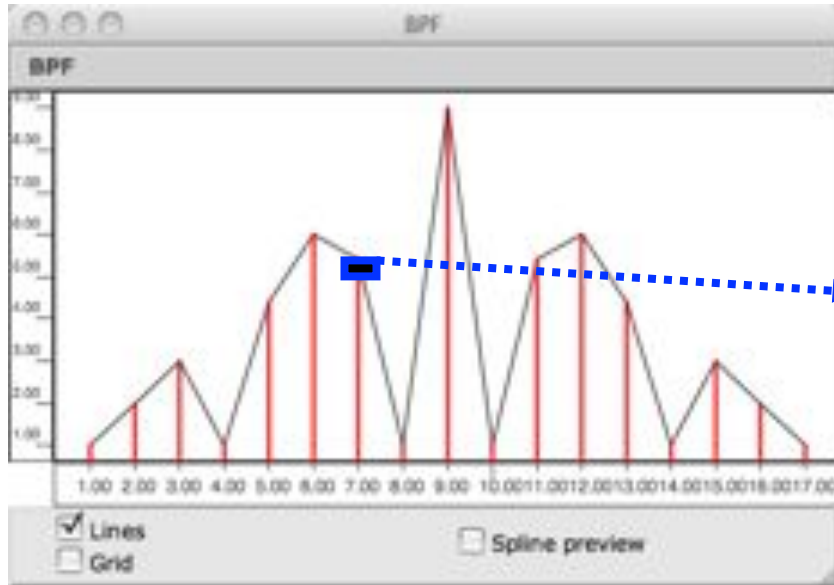
where $F_{\text{set}}(t) := \sum_{k \in \text{set}} e^{2i\pi kt/12}$

Nouvelle classification des structures musicales à l'aide de la DFT

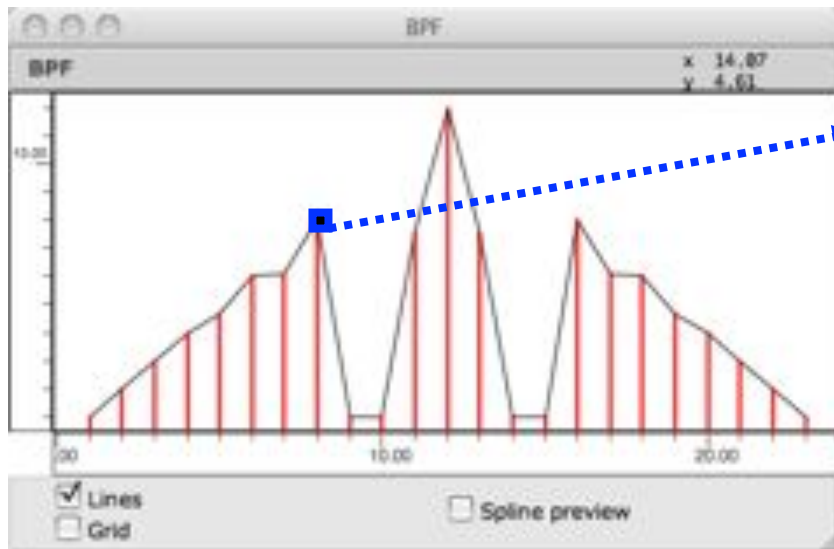
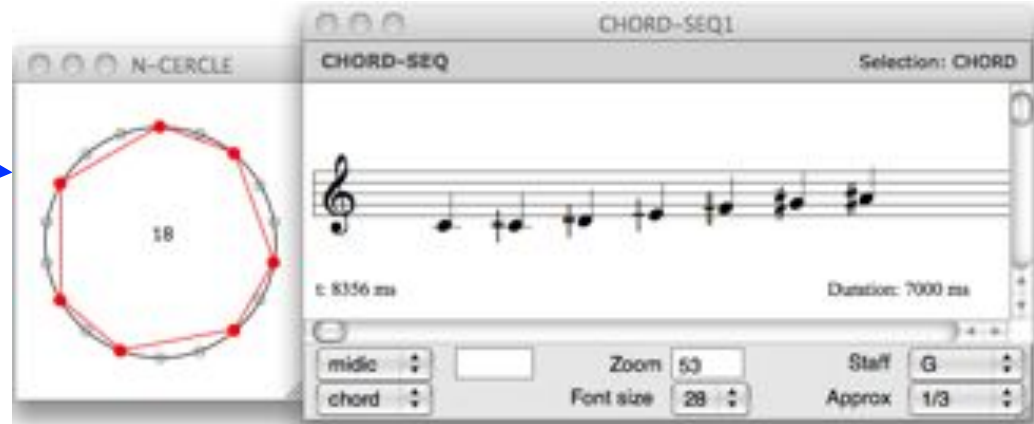
$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$



Classification des structures microtonales à l'aide de la DFT

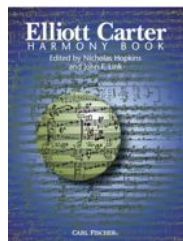


Systeme en tiers de ton



Systeme en quarts de ton

Elliott Carter : 90+ (1994)



- **Combinatoire d'accords**
 - Hexacordes
 - Tétracordes
 - Triades
 - Relation Z
- **Séries tous-intervalles**
 - *Link-chords*

 (piano: John Snijders)

alle e racconta auguri a caro Goffredo

90+

Elliott Carter
(1994)

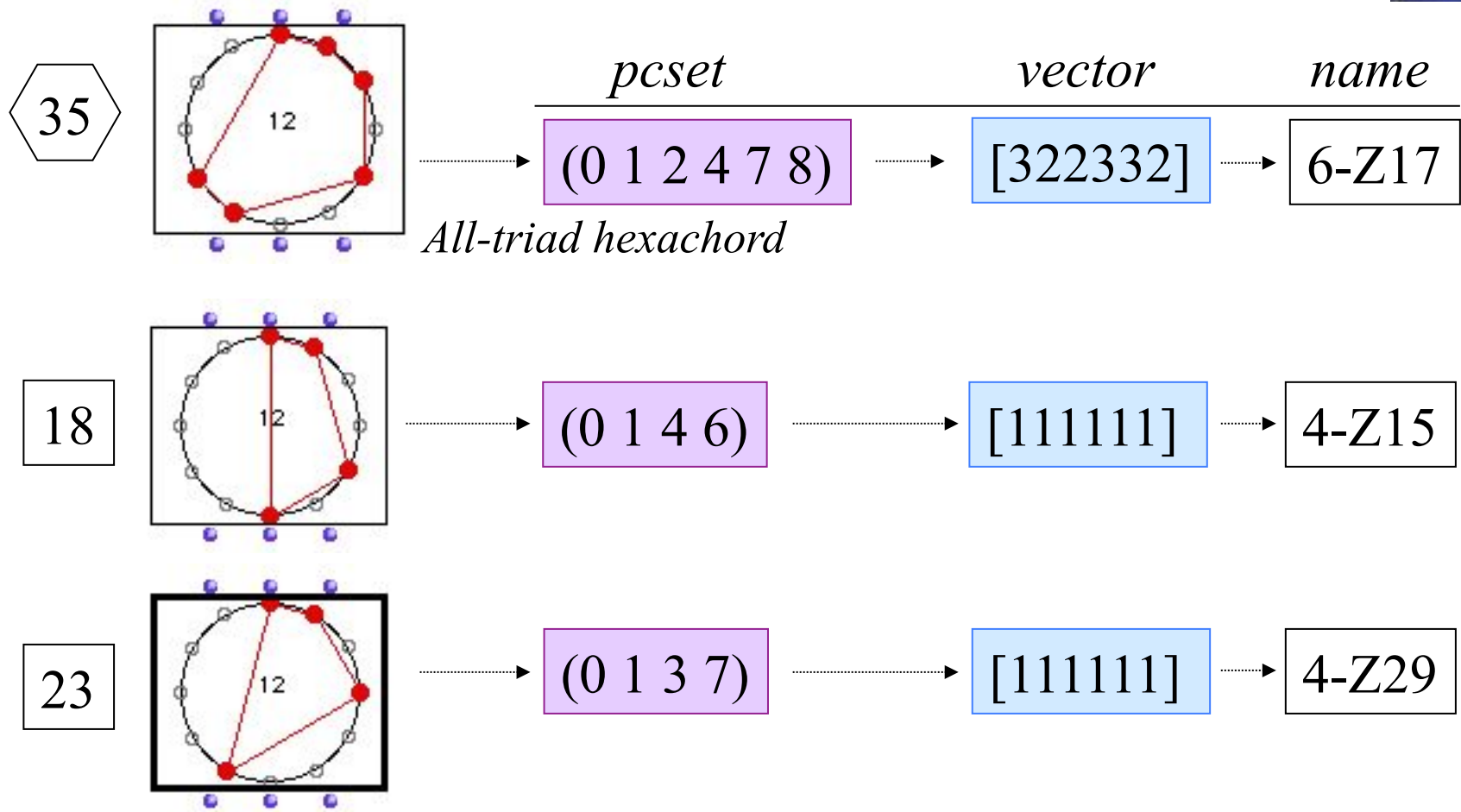
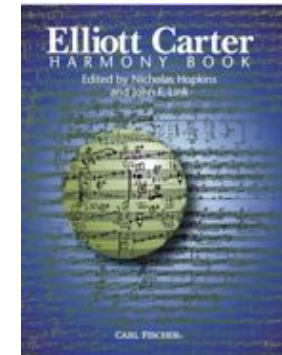
© Copyright 1994 by Hudson Music, Inc.
a Bosony & Hawkes Company.
Copyright for all countries. All rights reserved.

PIB 501

Printed in U.S.A.

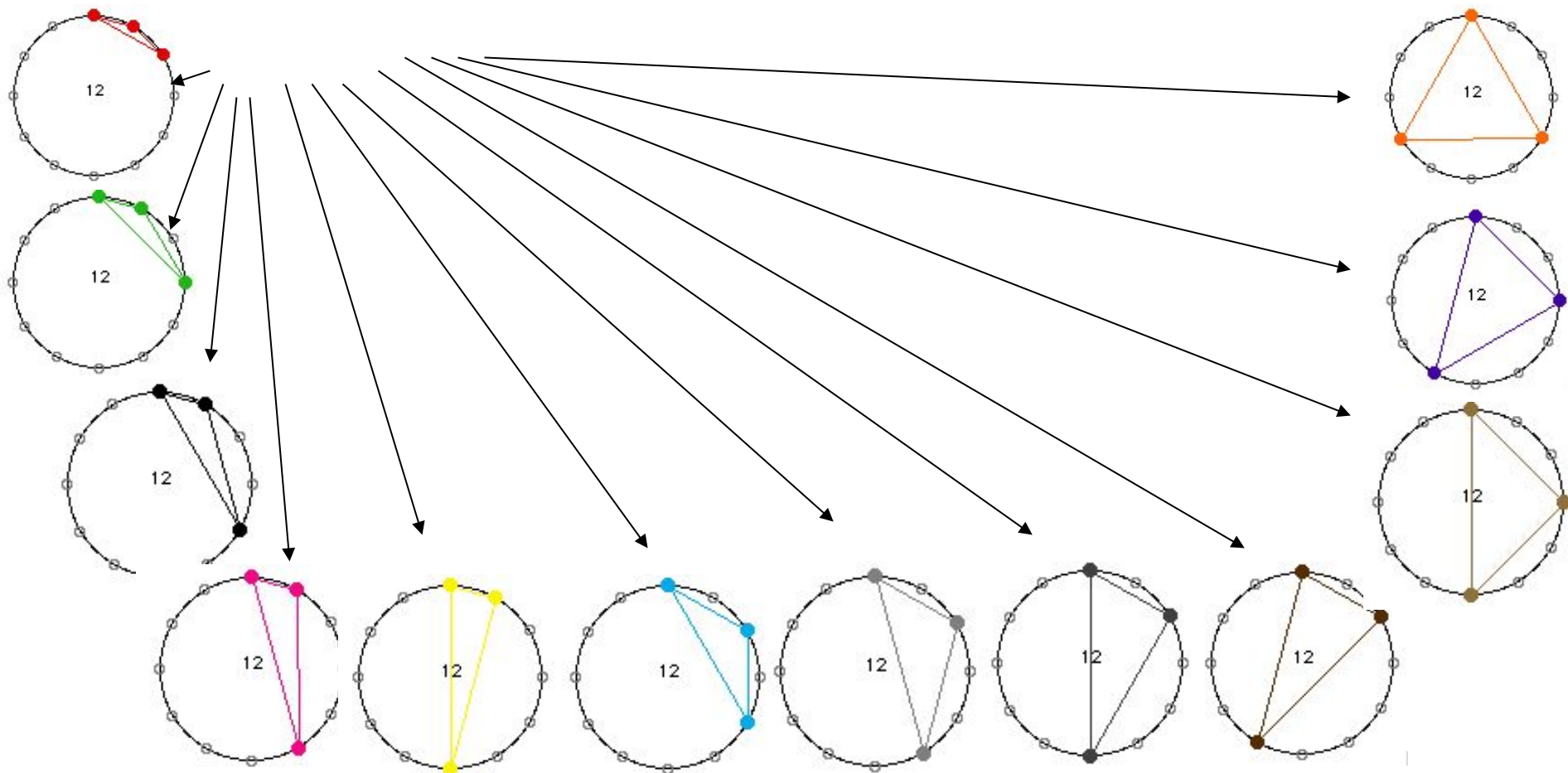
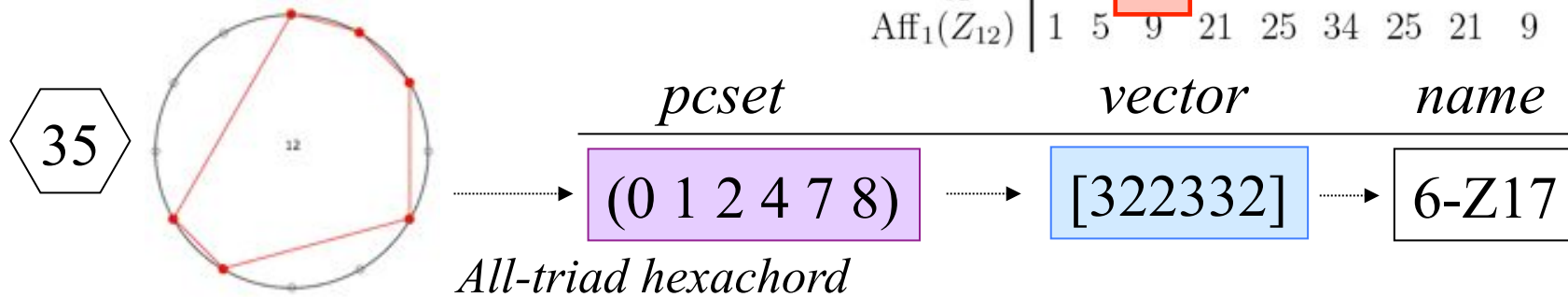
Elliott Carter: 90+ (1994)

« From about 1990, I have reduced my vocabulary of chords more and more to the six note chord n° 35 and the four note chords n° 18 and 23, which encompass all the intervals » (Harmony Book, 2002, p. ix)



Elliott Carter: 90+ (1994)

$G \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C_{12}	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1
D_{12}	1	6	12	29	38	50	38	29	12	6	1	1
$\text{Aff}_1(\mathbb{Z}_{12})$	1	5	9	21	25	34	25	21	9	5	1	1



Elliott Carter : 90+ (1994) : combinatoire tetra/tricordale

The image displays a musical score for Elliott Carter's piece "90+" (1994) with various annotations and chord diagrams. The score is divided into four systems, with specific measures highlighted by colored boxes and ovals. To the right, a grid of 18 chord diagrams (circles with 12 points and internal lines) illustrates the combinatorial structure of the music. The diagrams are arranged in three rows of six. The top row shows six diagrams with colored borders (blue, cyan, green, magenta, orange, brown). The middle row shows six diagrams with colored borders (green, light blue, purple, grey, grey, grey). The bottom row shows six diagrams with grey borders, with the last one containing a question mark. Below the score, two larger chord diagrams are shown in dashed boxes, and at the bottom, two more are shown in solid and dashed boxes. The score annotations include a blue box, a green box, and an orange box in the first system; a green oval, a cyan box, and a green oval in the second system; a purple box in the third system; and a purple box, a purple oval, and a purple oval in the fourth system. Dashed red lines indicate further groupings and relationships between measures across systems.

« *Making and Using a Pcset Network for Stockhausen's Klavierstück III* »

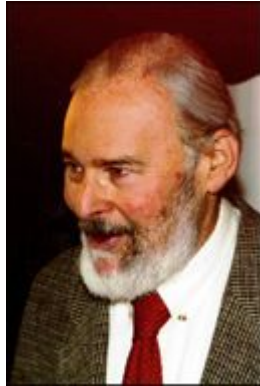
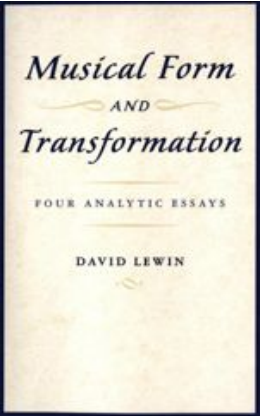


Trois interprétations :

 Henck

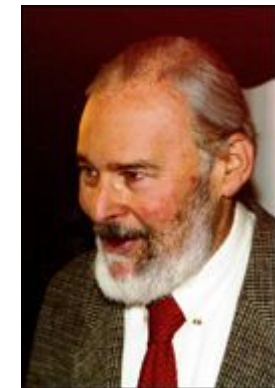
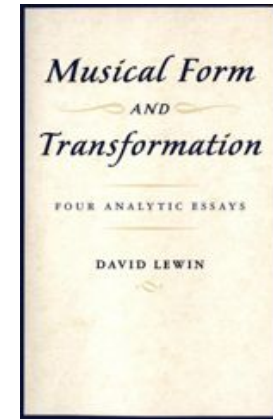
 Kontarsky

 Tudor



« Making and Using a Pcset Network for Stockhausen's Klavierstück III »

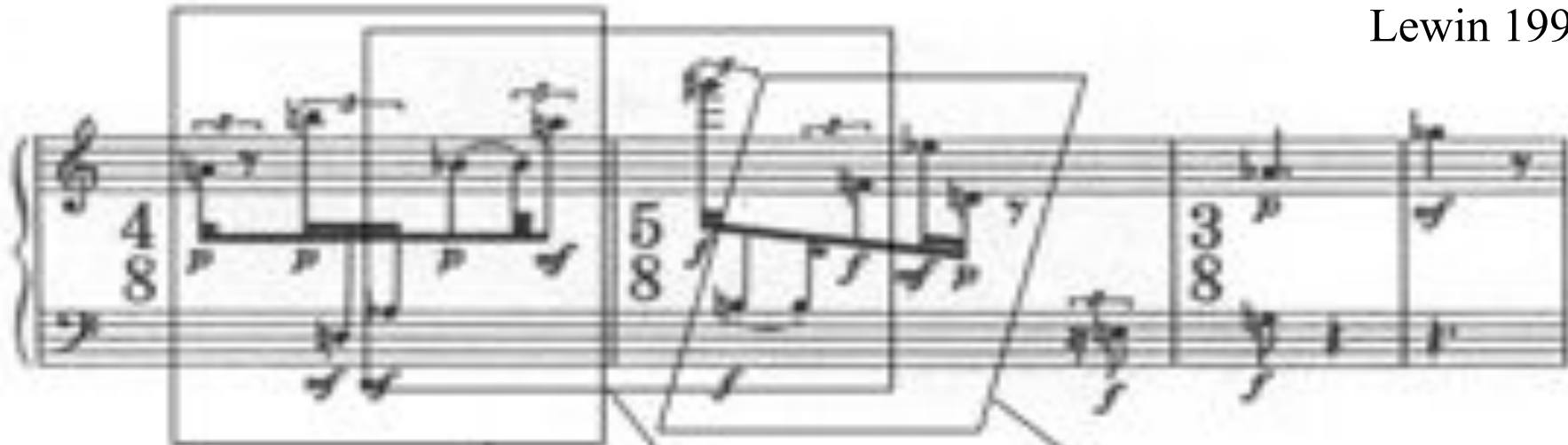
The image shows a musical score for Stockhausen's Klavierstück III. The score is in 4/8, 5/8, and 3/8 time signatures. It features various dynamics such as *p*, *mf*, *f*, and *mf*. Three sections of the score are highlighted with colored boxes: a red box, a green box, and a blue box. Below each box is a red, green, and blue arrow respectively, pointing to a corresponding pentachord diagram. Each diagram is a circle with 12 points on its circumference, representing the 12 notes of the chromatic scale. The diagrams are labeled with the number '12' in the center.



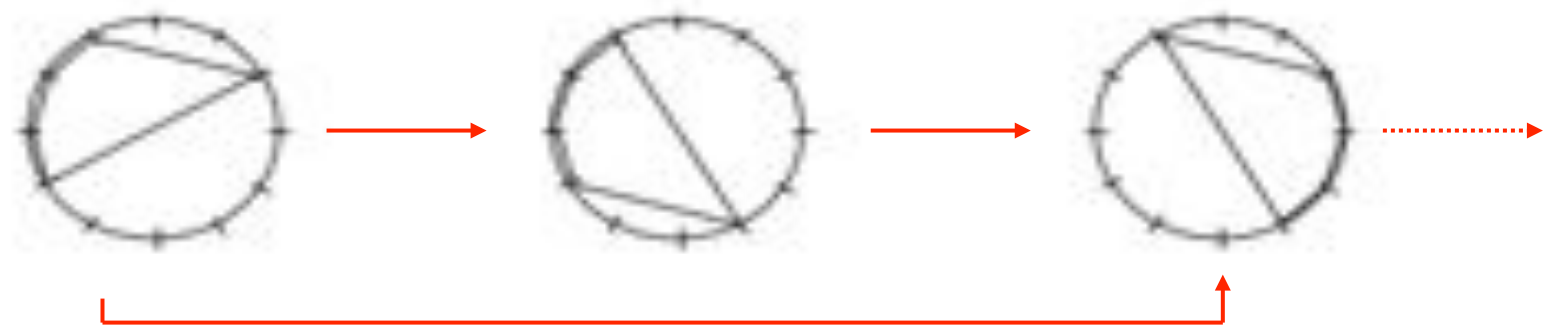
« The most ‘theoretical’ of the four essays, it focuses on the forms of one pentachord reasonably ubiquitous in the piece. A special **group of transformations** is developed, one suggested by the musical interrelations of the pentachord forms. Using that group, the essay arranges **all pentachord forms** of the music into a **spatial configuration** that illustrates network structure, for this particular phenomenon, over the entire piece. »

« *Making and Using a Pcset Network for Stockhausen's Klavierstück III* »

Lewin 1993

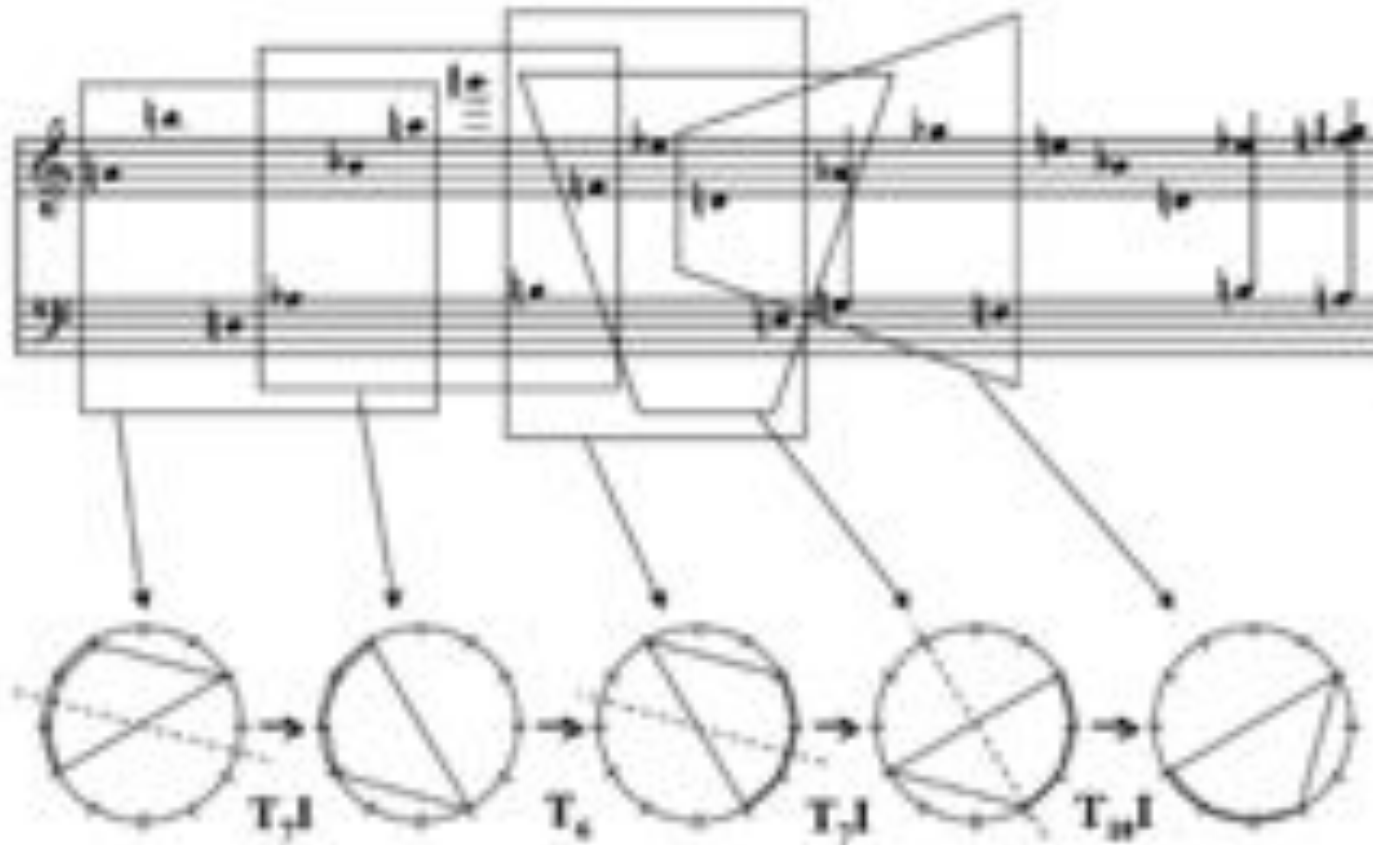


SI: (1, 1, 1, 3, 6) (6, 3, 1, 1, 1) (6, 3, 1, 1, 1)
IFUNC: [5 3 2 2 1 1 1 1 2 2 3] [5 3 2 2 1 1 1 1 2 2 3] [5 3 2 2 1 1 1 1 2 2 3]
VI: [3 2 2 1 1 1] [3 2 2 1 1 1] [3 2 2 1 1 1]



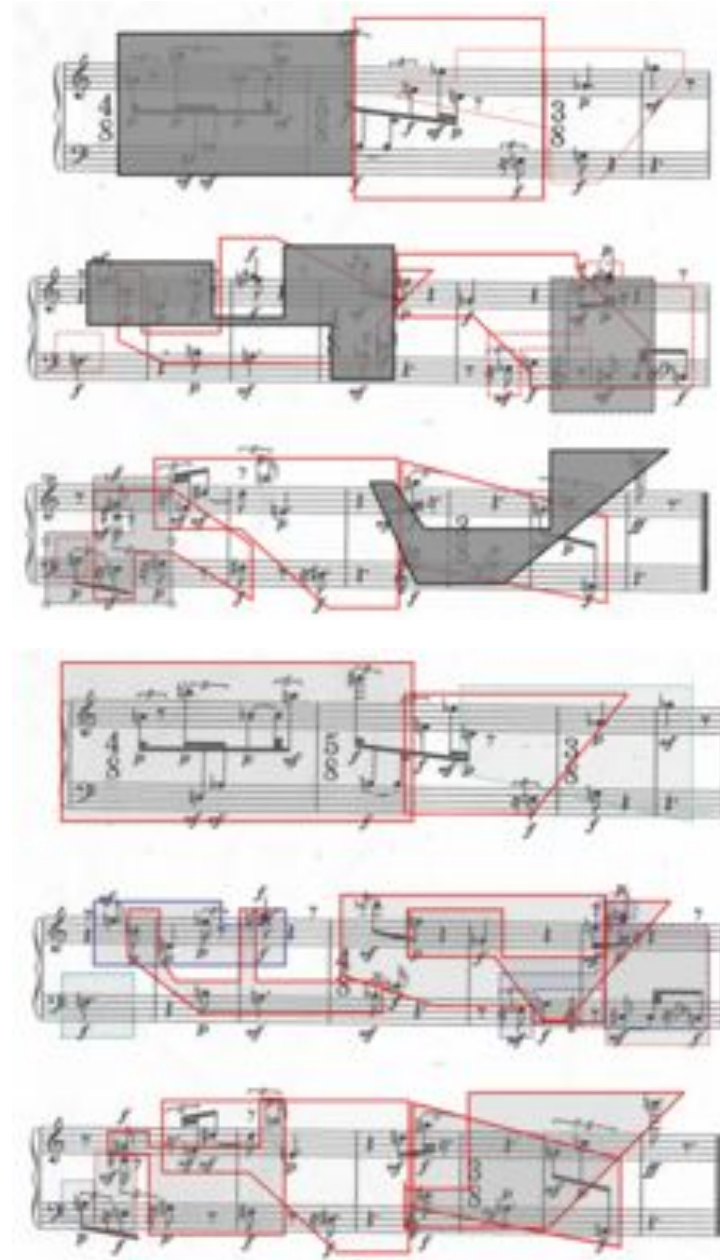
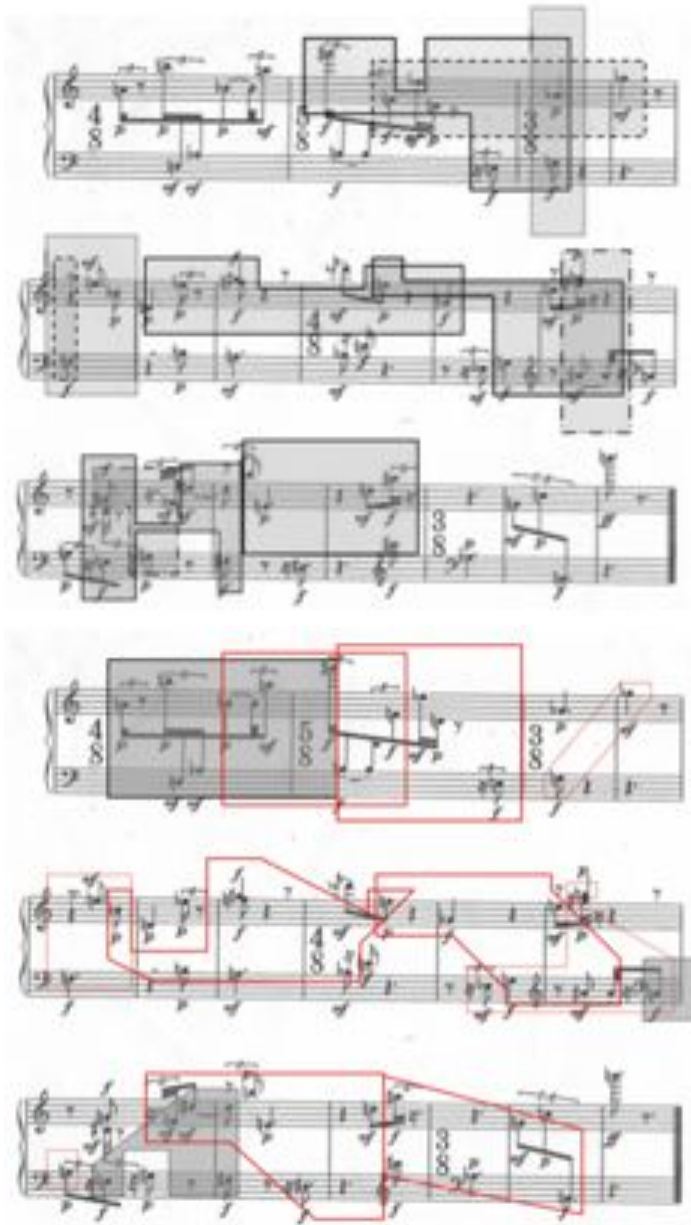
Segmentation par « imbrication »: progression transformationnelle

Stockhausen: *Klavierstück III* (Analisi di D. Lewin)



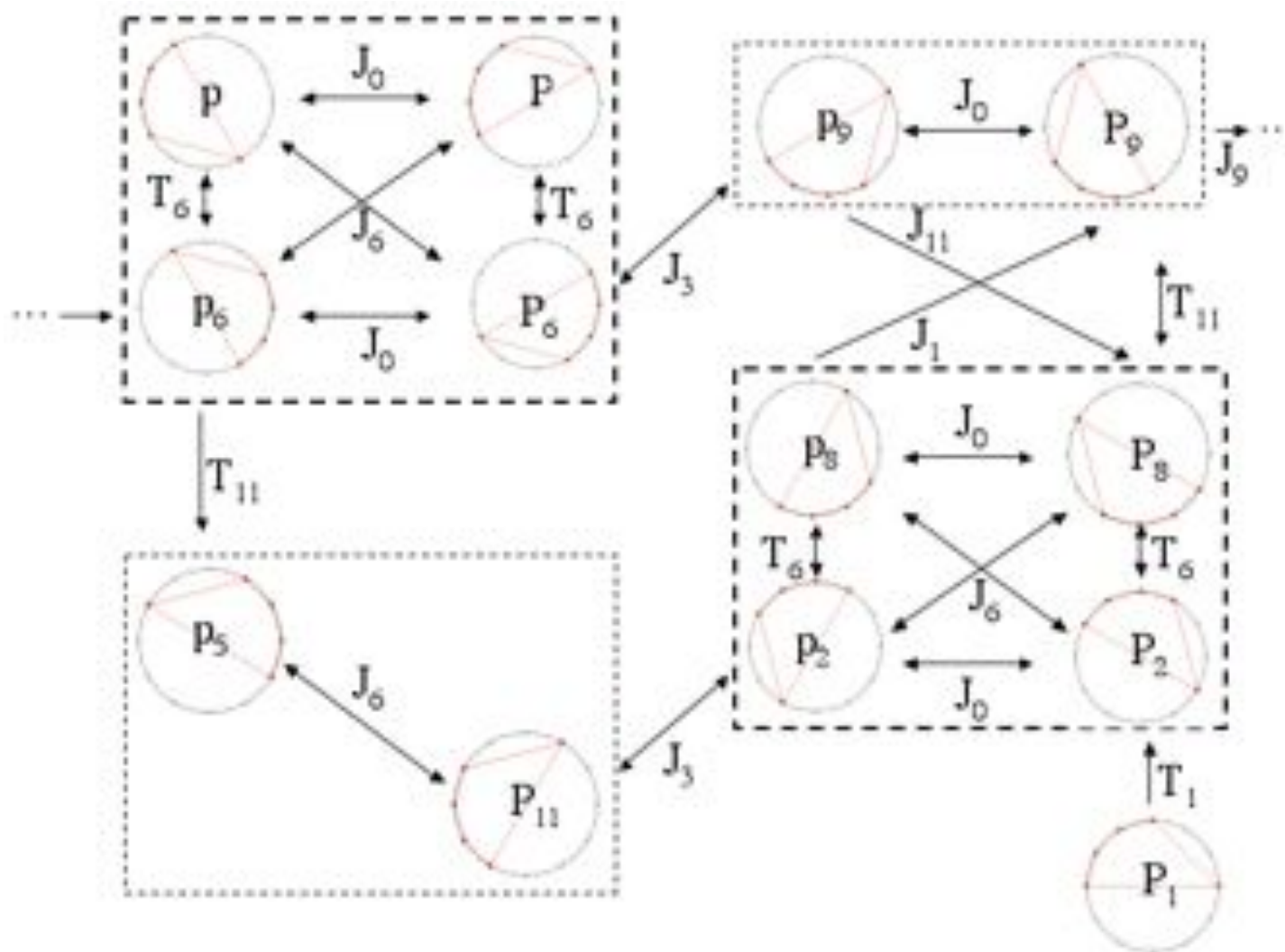
Vers une modélisation informatique de l'analyse transformationnelle

YunKang Ahn, L'analyse musicale computationnelle, thèse, Université de Paris VI / Ircam, déc 2009



Reseau transformationnel

Stockhausen: *Klavierstück III* (Analyse de D. Lewin)



« Rather than asserting a network that follows pentachord relations one at a time, according to the chronology of the piece, I shall assert instead a network that displays all the pentachord forms used and all their **potentially functional interrelationships**, in a very compactly organized little **spatial configuration**. »

« [...] the sequence of events moves within a clearly defined world of possible relationships, and because - in so moving - **it makes the abstract space of such a world accessible to our sensibilities**. That is to say that the story projects what one would traditionally call *form*. »

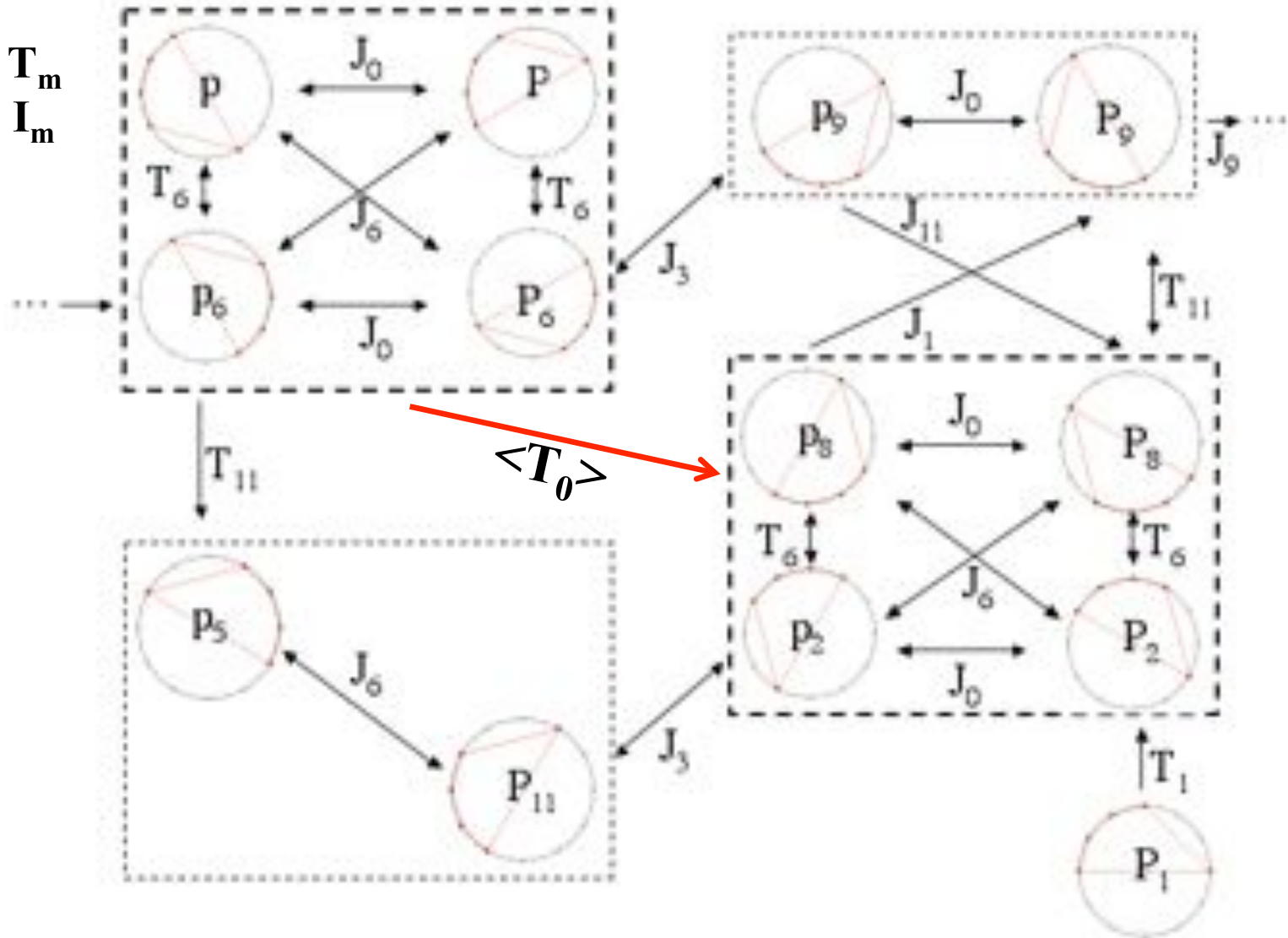
Réseau transformationnel et « isographies » (théorie des *K-nets*)

Stockhausen: *Klavierstück III* (Analyse de D. Lewin)

Isographie forte

$$\langle T_0 \rangle : T_m \rightarrow T_m$$

$$I_m \rightarrow I_m$$

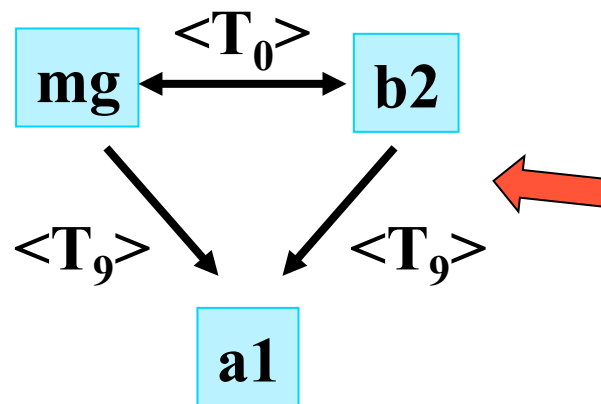
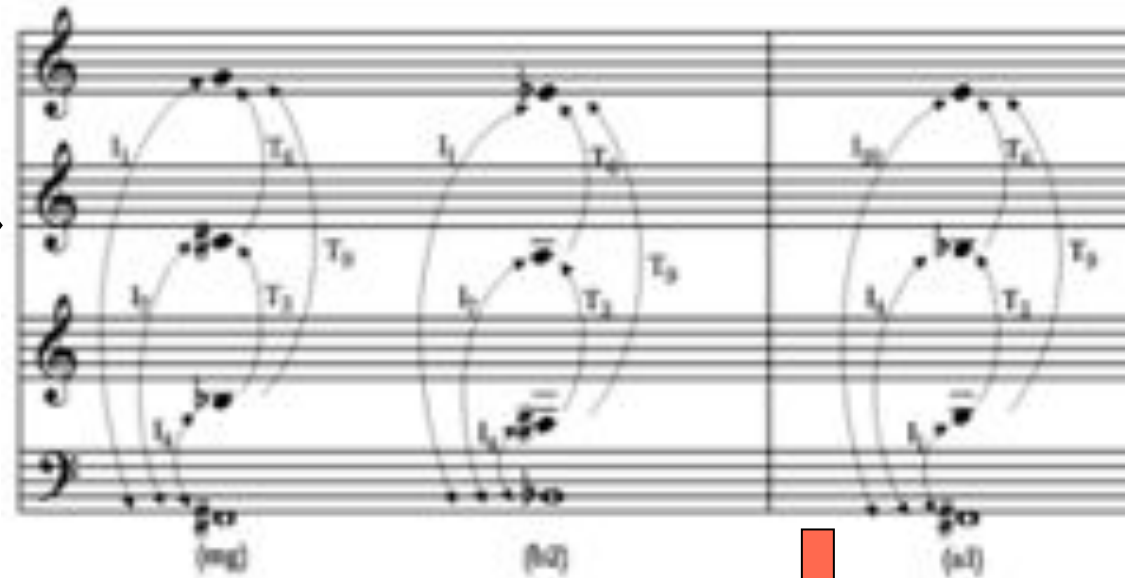


Klumpenhouver Networks (K-réseaux)

Xavier Hascher: « Liszt et les sources de la notion d'agrégat », *Analyse Musicale*, 43, 2002

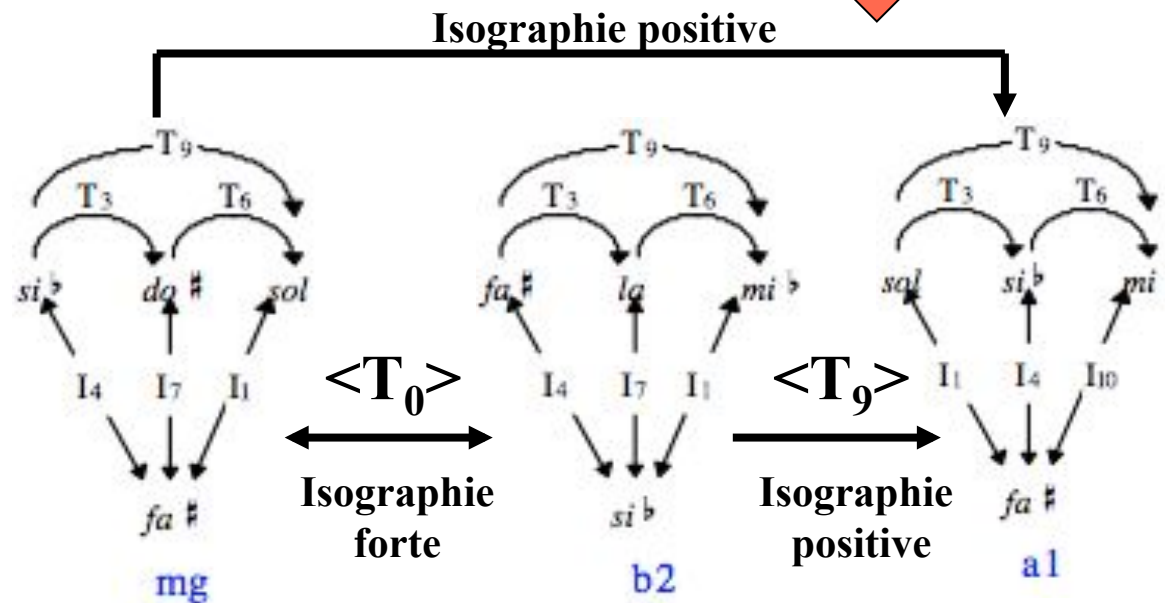


Ex. 1 - « Ladislav Teleki » (Historische ungarische Bildnisse n°4), mes. 1-7
Les agrégats dans la classification de Forte

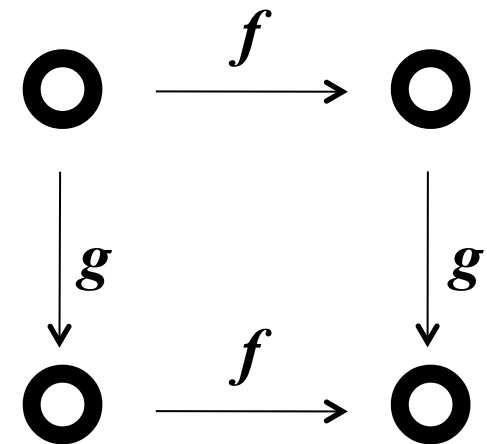
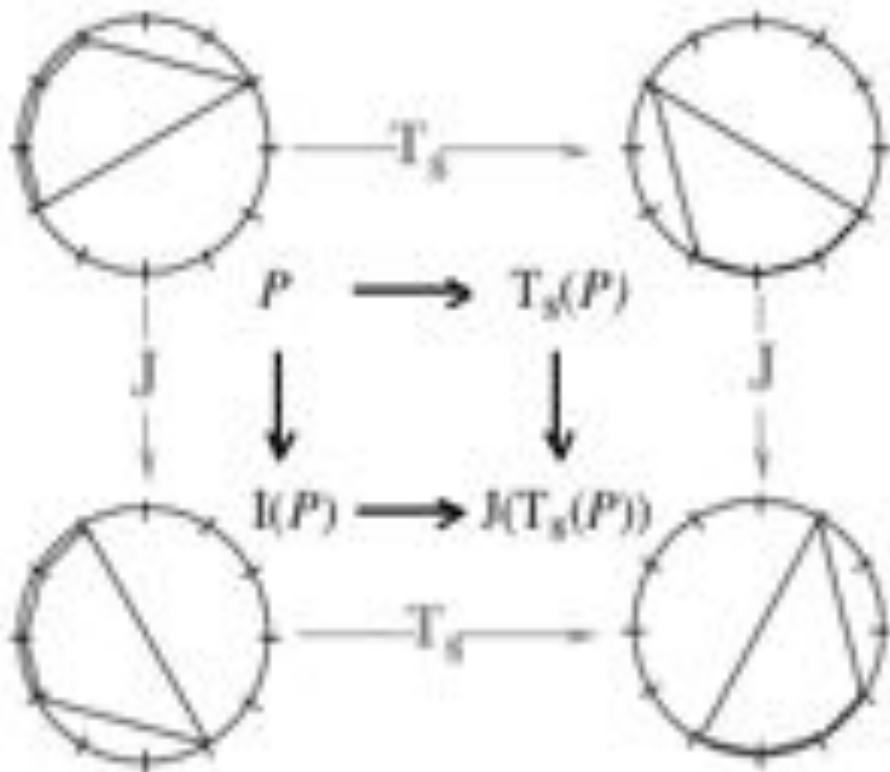


$$\langle T_k \rangle : T_m \rightarrow T_m$$

$$I_m \rightarrow I_{k+m}$$



Action de groupe et commutativité des diagrammes

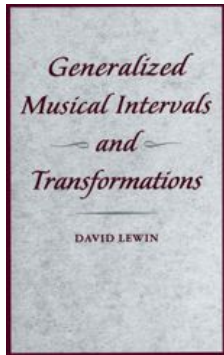


Tout diagramme commute

$$\forall f, g \in \langle T, J \rangle$$

Le groupe des 24 transformations $\sigma = \{T_0, T_1, \dots, T_{11}, T_0J, T_1J, \dots, T_{11}J\}$ est commutatif et opère de manière simplement transitive sur l'espace S des 24 formes du pentacorde de base (i.e. l'ensemble de ses 12 transpositions et de ses 12 inversions)

$\Rightarrow (S, \sigma, \text{int})$ est un GIS



Système d'Intervalles Généralisés - Système Généralisé d'Intervalles

David Lewin's *Generalized Interval System* [GMIT, 1987]

$$\text{GIS} = (S, G, \text{int})$$

S = ensemble

(G, \bullet) = groupe d'intervalles

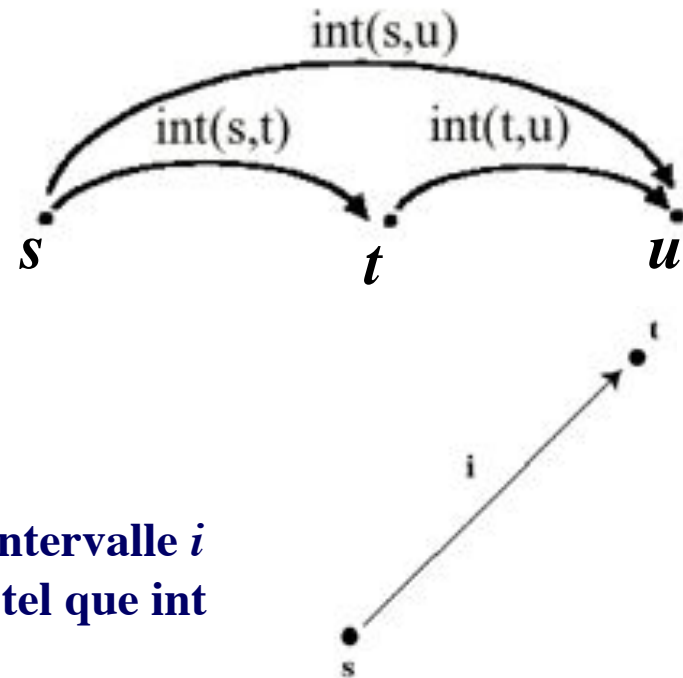
int = fonction intervallique

$$S \times S \xrightarrow{\text{int}} G$$

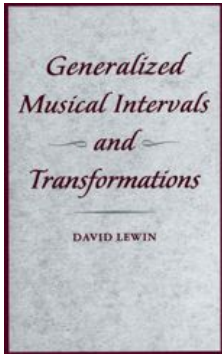
1. Pour tout objets s, t, u dans S :

$$\text{int}(s,t) \bullet \text{int}(t,u) = \text{int}(s,u)$$

2. Pour tout objet s dans S et tout intervalle i dans G il y a un seul objet t dans S tel que $\text{int}(s,t) = i$



- $S = \{\dots, do, do_{\#} = ré_b, ré, \dots, si, do', \dots\}$, $G = \mathbf{Z}$, $\text{int}(do, ré) = 2$, $\text{int}(fa, do) = -5$ etc.
- $S = \{\dots, do, ré, mi, fa, sol, la, si, do', \dots\}$, $G = \mathbf{Z}$, $\text{int}(do, ré) = 1$, $\text{int}(fa, do) = -3$ etc.
- $S = G = \mathbf{Z}_{12} = \{do, do_{\#} = ré_b, ré, \dots, si\}$, $\text{int}(do, ré) = 2$, $\text{int}(fa, do) = 7$ etc.



Premières généralisations : transposition

$$\mathbf{GIS} = (S, G, \text{int})$$

S = ensemble

(G, \bullet) = groupe d'intervalles

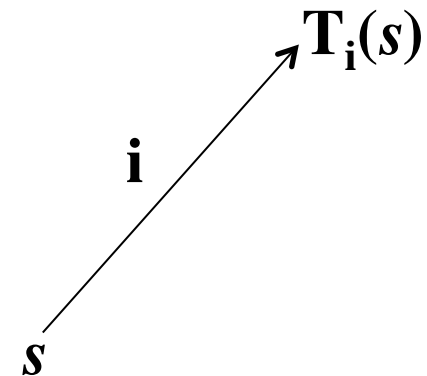
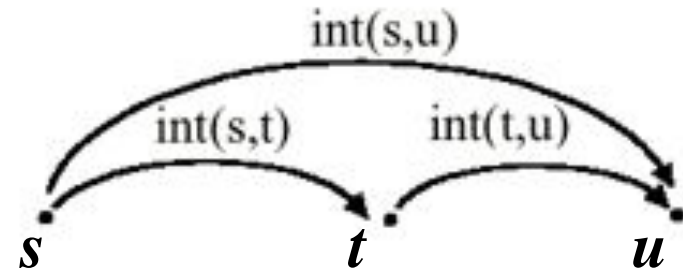
int = fonction intervallique

$$S \times S \xrightarrow{\text{int}} G$$

1. Pour tout objets s, t, u dans S :

$$\text{int}(s,t) \bullet \text{int}(t,u) = \text{int}(s,u)$$

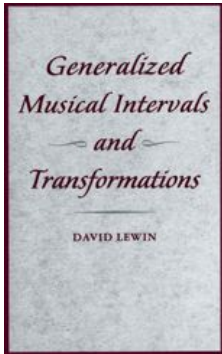
2. Pour tout objet s dans S et tout intervalle i dans G il y a un seul objet t dans S tel que $\text{int}(s,t) = i$



Généralisation de la notion de transposition (musicale)

Pour tout élément i dans G , la transposition T_i est une application

$$T_i : S \rightarrow S \quad \text{telle que} \quad \text{int}(s, T_i(s)) = i \quad \text{pour tout élément } s \text{ dans } S$$



Equivalence entre GIS et action de groupe

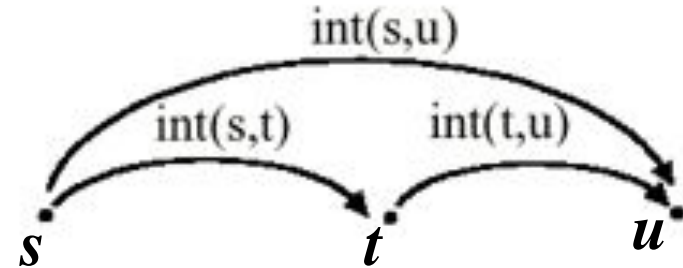
$$\text{GIS} = (S, G, \text{int})$$

S = ensemble

(G, \bullet) = groupe d'intervalles

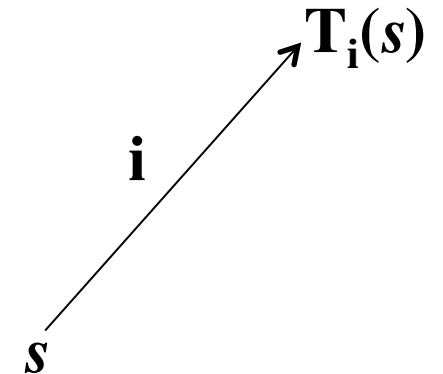
int = fonction intervallique

$$S \times S \xrightarrow{\text{int}} G$$



Action simplement transitive

1. Pour tout objets s, t, u dans S :
 $\text{int}(s,t) \bullet \text{int}(t,u) = \text{int}(s,u)$
2. Pour tout objet s dans S et tout intervalle i dans G il y a un seul objet t dans S tel que $\text{int}(s,t) = i$

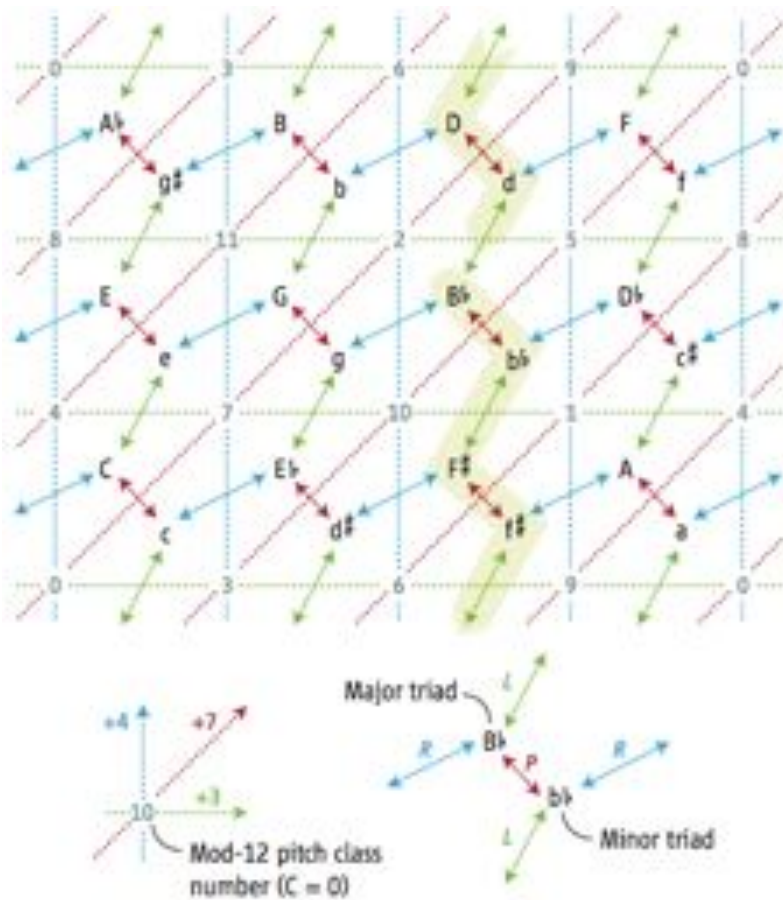


Soit $\tau = \{T_i ; i \in G\}$ le groupe des transpositions
 $\text{GIS} = (S, G, \text{int}) \Leftrightarrow \tau \times S \rightarrow S$ telle que $(T_i, s) \rightarrow T_i(s)$

Terminologies équivalentes :

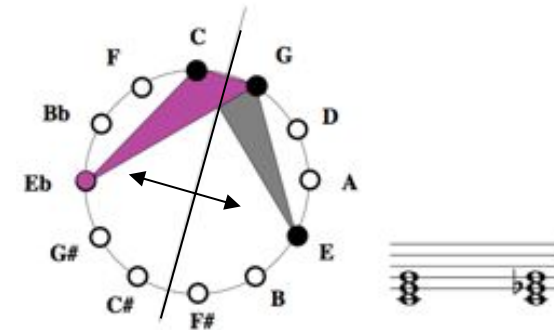
- Un GIS est un G -torseur à gauche
- S est un ensemble principal homogène [Bourbaki]

Le Tonnetz en tant que GIS

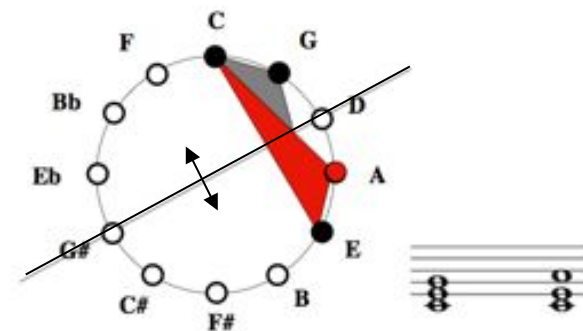


(Neo-)Riemannian Operation P = „Parallel“

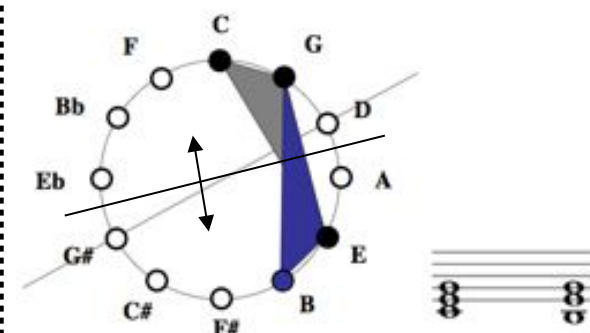
[Noll04]



(Neo-)Riemannian Operation R = „Relative“



(Neo-)Riemannian Operation L = „Leading-Tone“



$$\rho = \langle L, R \mid L^2 = (LR)^{12} = 1 ; LRL = L(LR)^{-1} \rangle$$

• ρ opère de façon simplement transitive sur l'ensemble S des 24 triades consonantes

$\Rightarrow (S, \rho, \text{int})$ est un GIS

Une autre structure de GIS sur l'espace S

L	R	RL	I_{11}
C → e	C → a	C → G	C → e
c → A \flat	c → E \flat	c → f	c → E
D \flat → f	D \flat → B \flat	D \flat → A \flat	D \flat → e \flat
c \sharp → A	c \sharp → E	c \sharp → F \sharp	c \sharp → E \flat
D → F \sharp	D → b	D → A	D → d
d → B \flat	d → F	d → g	d → D
E \flat → g	E \flat → c	E \flat → B \flat	E \flat → c \sharp
d \sharp → B	d \sharp → F \sharp	d \sharp → g \sharp	d \sharp → C \sharp
E → g \sharp	E → c \sharp	E → B	E → c
e → C	e → G	e → a	e → C
F → a	F → d	F → C	F → b
f → D \flat	f → A \flat	f → B \flat	f → B
F \sharp → a \sharp	F \sharp → d \sharp	F \sharp → C \sharp	F \sharp → B \flat
F \sharp → D	F \sharp → A	F \sharp → b	F \sharp → B \flat
G → b	G → e	G → D	G → a
g → E \flat	g → B \flat	g → c	g → A
A \flat → c	A \flat → f	A \flat → E \flat	A \flat → a \flat
g \sharp → E	g \sharp → B	g \sharp → c \sharp	g \sharp → G \sharp
A → c \sharp	A → F \sharp	A → E	A → g
a → F	a → C	a → d	a → G
B \flat → d	B \flat → g	B \flat → F	B \flat → F \sharp
a \sharp → F \sharp	a \sharp → C \sharp	a \sharp → d \sharp	a \sharp → F \sharp
B → e \flat	B → g \sharp	B → F \sharp	B → f
b → G	b → D	b → e	b → F

[Satyendra 2004]

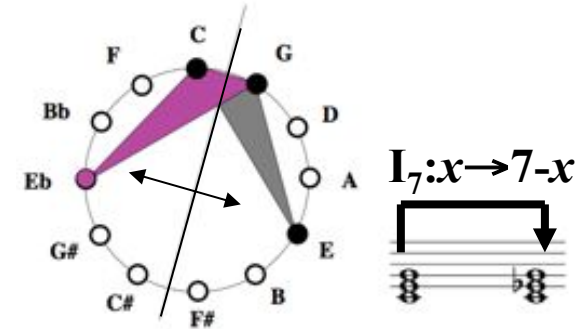
$$D_{12} = \langle I, T \mid I^2 = T^{12} = 1 ; ITI = I(IT)^{-1} \rangle$$

• D_{12} opère de façon simplement transitive sur l'ensemble S des 24 triades consonantes

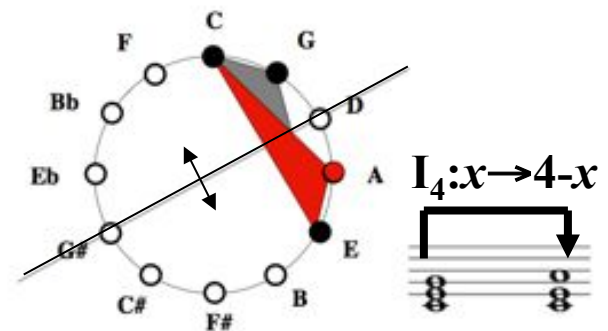
$\Rightarrow (S, D_{12}, \text{int})$ est un GIS

(Neo-)Riemannian Operation P = „Parallel“

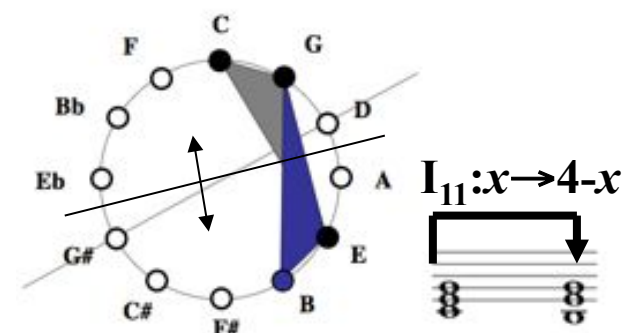
[Noll04]



(Neo-)Riemannian Operation R = „Relative“



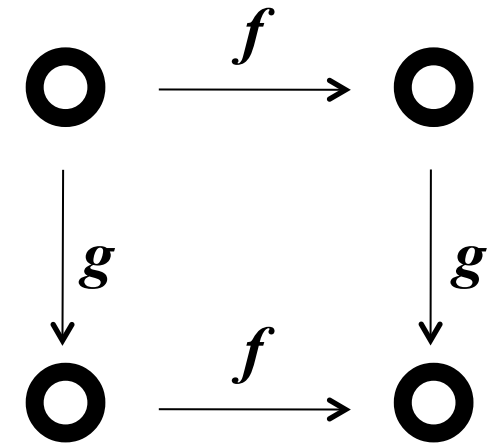
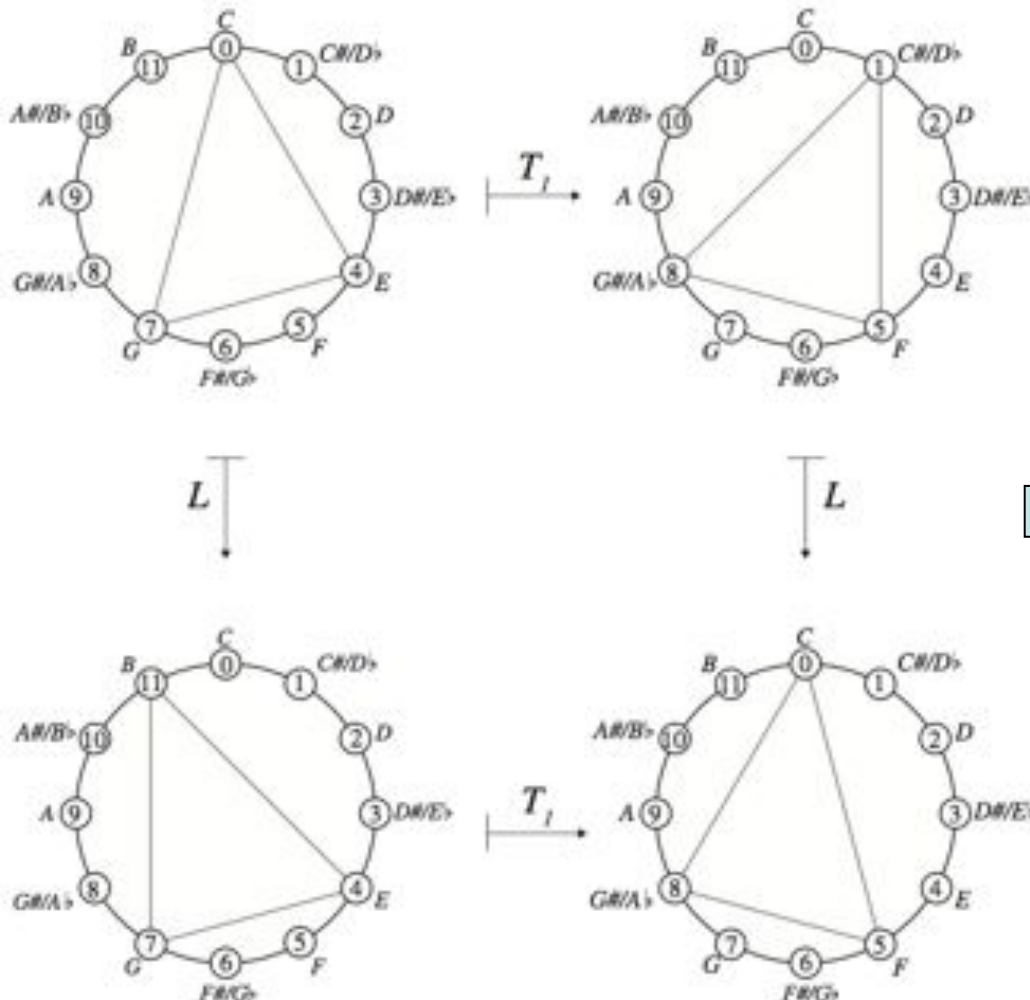
(Neo-)Riemannian Operation L = „Leading-Tone“



Dualité entre (S, ρ, int) et (S, D_{12}, int)

$$\rho = \langle L, R \mid L^2 = (LR)^{12} = 1 ; LRL = L(LR)^{-1} \rangle \iff D_{12} = \langle I, T \mid I^2 = T^{12} = 1 ; ITI = I(IT)^{-1} \rangle$$

$\Rightarrow \rho$ et D_{12} sont l'un le *centralisateur* de l'autre (dans le groupe symétrique $Sym(S)$)



Tout diagramme commute

$$\forall f \in D_{12}$$

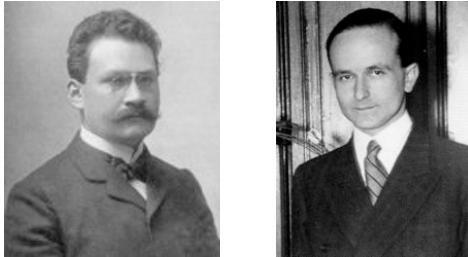
$$\forall g \in \rho$$

II. Le problème du pavage en musique

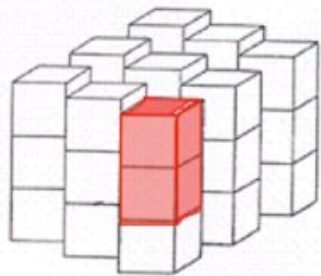
**Les canons rythmiques mosaïques :
de Minkowski à Fuglede...
...en passant par Messiaen**

Les canons mosaïques comme problème « mathémusical »

Le problème de Minkowski/Hajos



Dans un pavage simple [*simple lattice tiling*] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de



1907-1942

Les canons mosaïques de Vieru/Vuza



Un canon de Vuza est une factorisation d'un groupe cyclique en somme directe de deux sous-ensembles non-périodiques

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = R \oplus S$$



1991

Lien entre Minkowski et Vuza (Andreatta, 1996)

Groupes de Hajós (*good groups*)

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \in \{p^\alpha, p^\alpha q, pqr, p^2q^2, p^2qr, pqr s\}$ où p, q, r, s , sont des nombres premiers distincts



Groupes non-Hajós (*bad groups*)

72
 108 120 144 168 180
 200 216 240 252 264 270 280 288
 300 312 324 336 360 378 392 396
 400 408 432 440 450 456 468 480
 500 504 520 528 540 552 560 576 588 594
 600 612 616 624 648 672 675 680 684 696
 700 702 720 728 744 750 756 760 784 792
 800 810 816 828 864 880 882 888...

1996

M. Andreatta, « Constructing and Formalizing Tiling Rhythmic Canons: a historical Survey of a “Mathemusical” Problem », invited paper, Special Issue « Tiling Problems in Music », *Perspectives of New Music*, J. Rahn (ed.), University of Washington, Seattle (2011).

Canons rythmiques et pavage de l'espace



Harawi (1945)

Visions de l'Amen (1943)

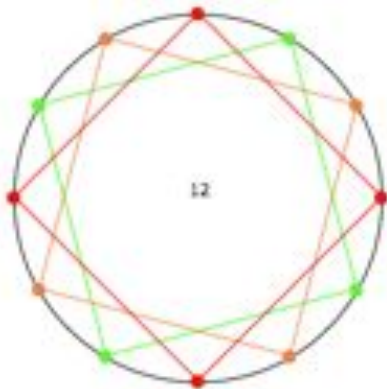
**Modèle
rythmique**

« ...il résulte de tout cela que les différentes sonorités se mélangent ou s'opposent de manières très diverses, jamais au même moment ni au même endroit [...]. C'est du désordre organisé »

Quatre types de canons rythmiques mosaïques

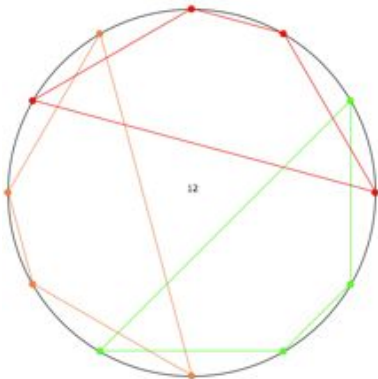
$A < \mathbb{Z}_n$

$B < \mathbb{Z}_n$



$A \subset \mathbb{Z}_n$

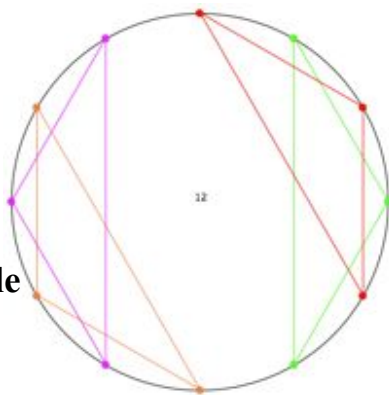
$B < \mathbb{Z}_n$



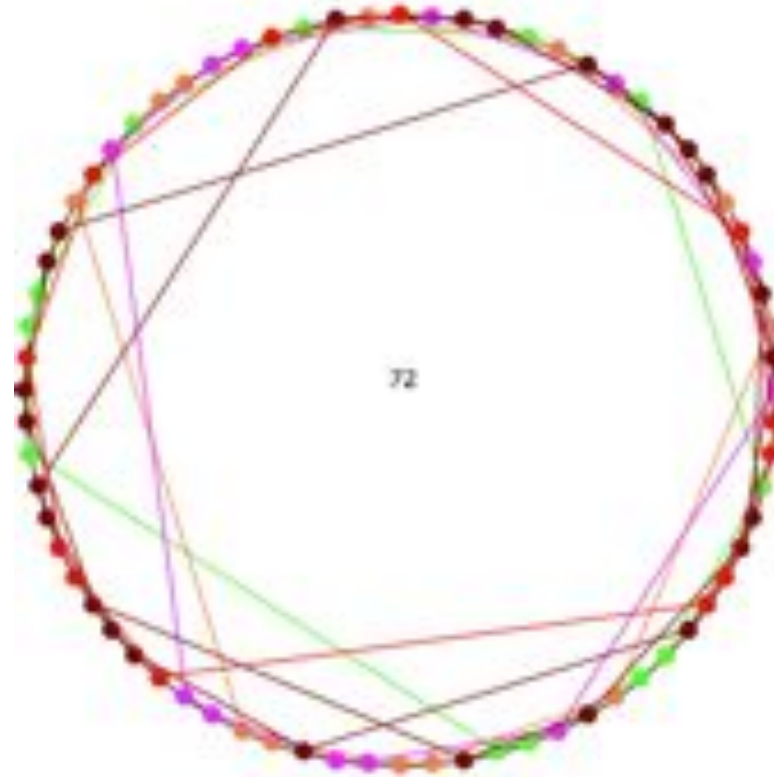
$A \subset \mathbb{Z}_n$

$B \subset \mathbb{Z}_n$

sous-ensemble
périodique



Canon de Vuza



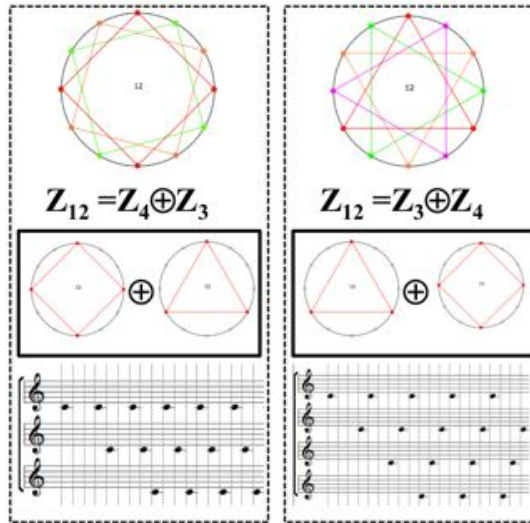
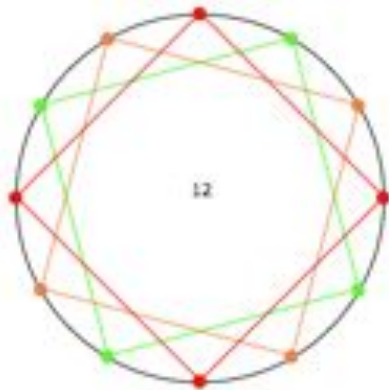
$A, B \subset \mathbb{Z}_n$

sous-ensembles non-périodiques

Quatre types de canons rythmiques mosaïques

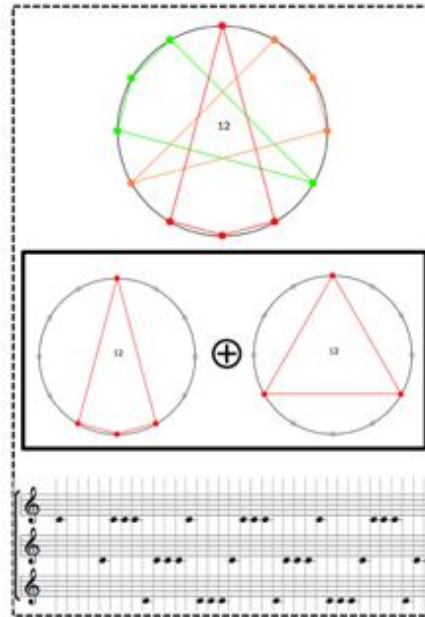
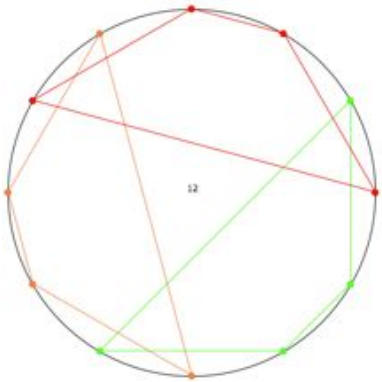
$A < Z_n$

$B < Z_n$



$A \subset Z_n$

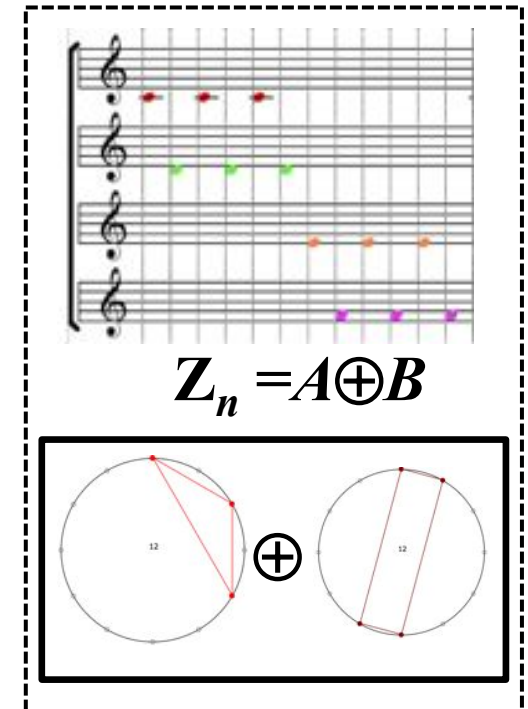
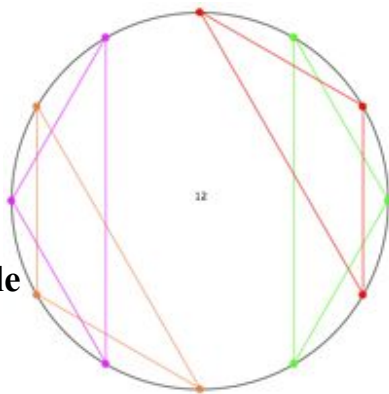
$B < Z_n$



$A \subset Z_n$

$B \subset Z_n$

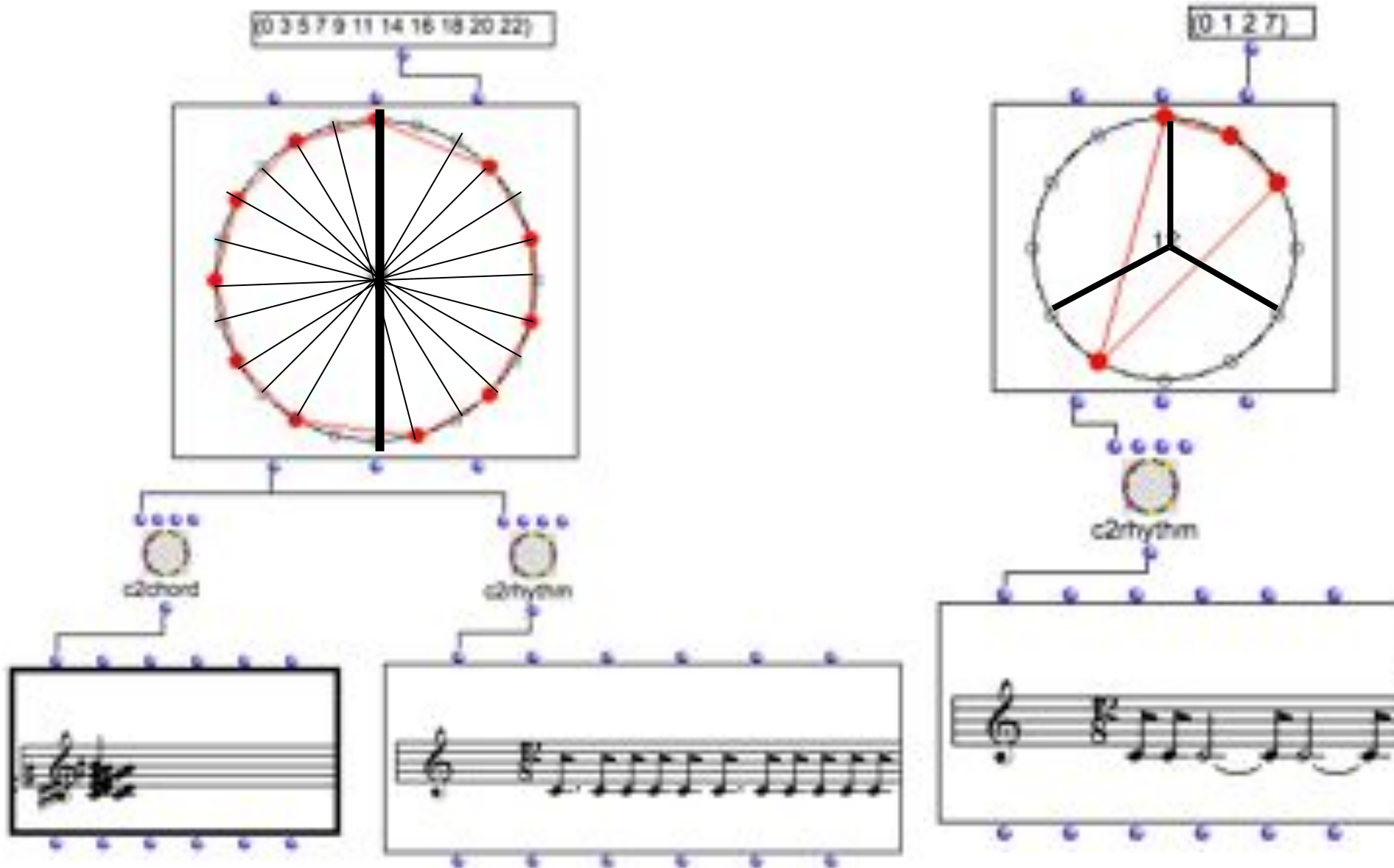
sous-ensemble
périodique



Propriété d'imparité rythmique et ses généralisations

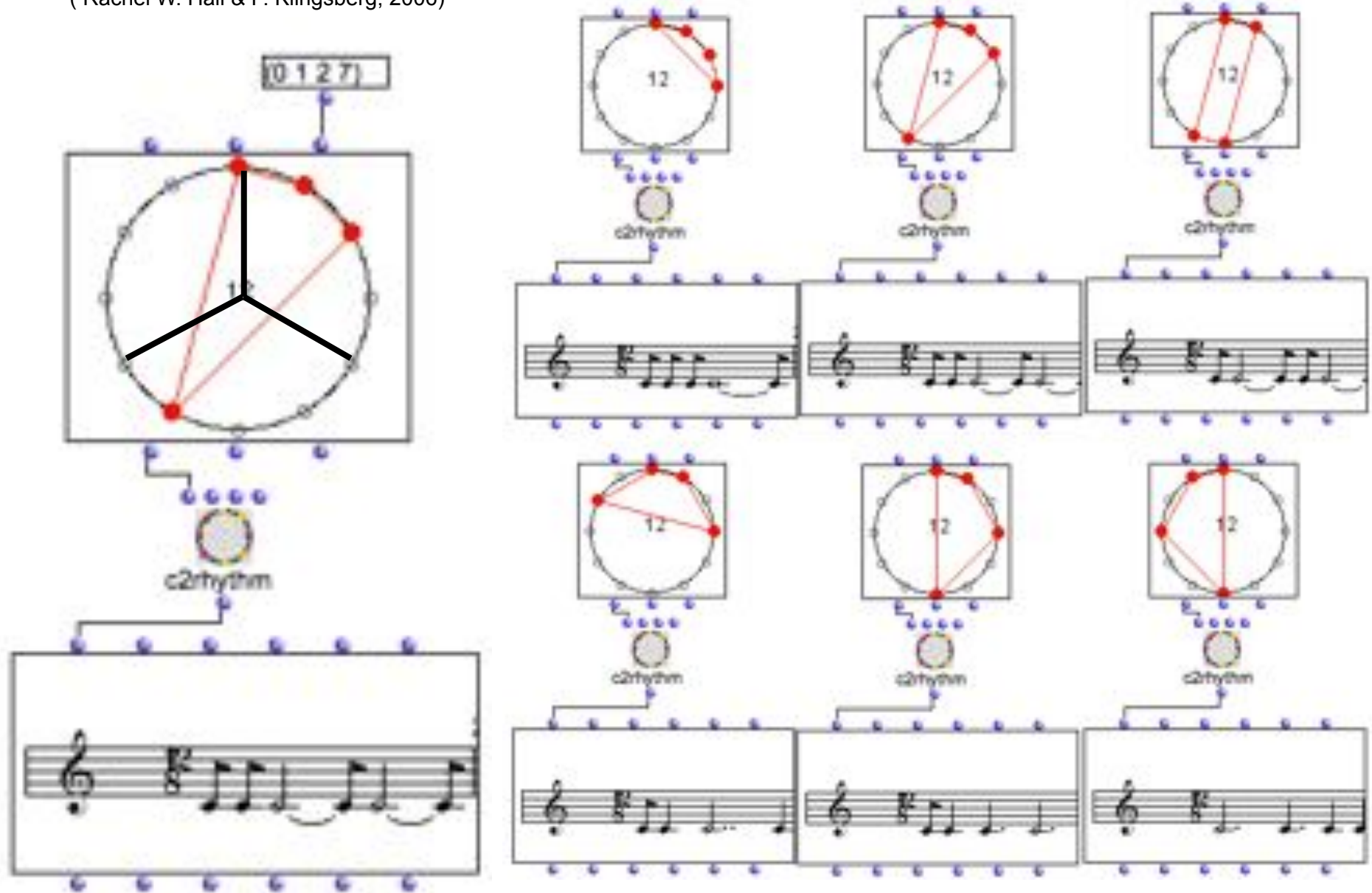
(Simha Arom & Marc Chemillier)

(R. W. Hall & P. Klingsberg, Asymmetric rhythms and tiling canons.
American Mathematical Monthly 113 (2006), no.10, 887-896)



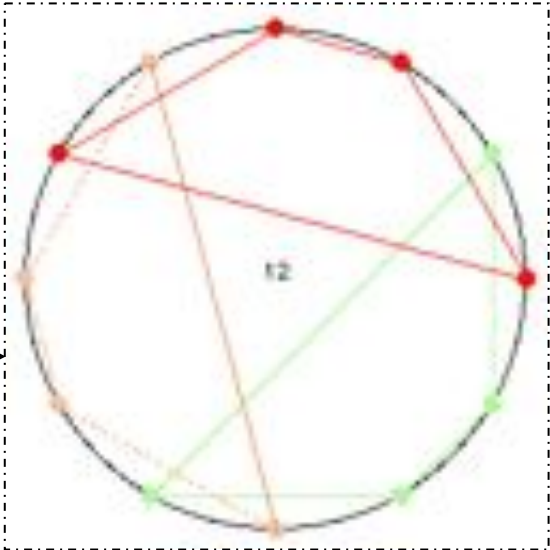
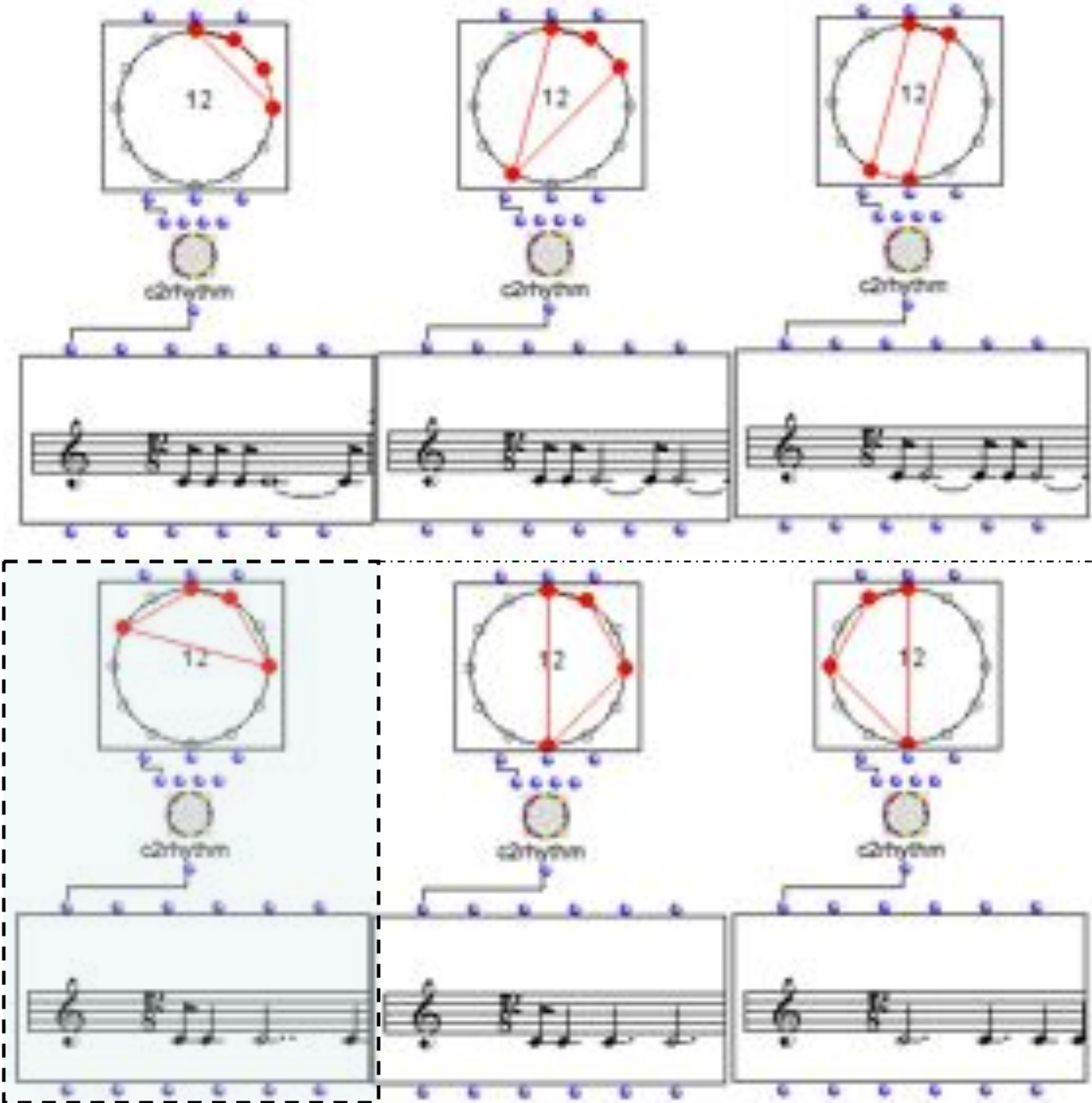
Rythmes 3-asymétriques

(Rachel W. Hall & P. Klingsberg, 2006)



Rythmes 3-asymétriques et pavages

(Rachel W. Hall & P. Klingsberg, 2006)



=> *OpenMusic*

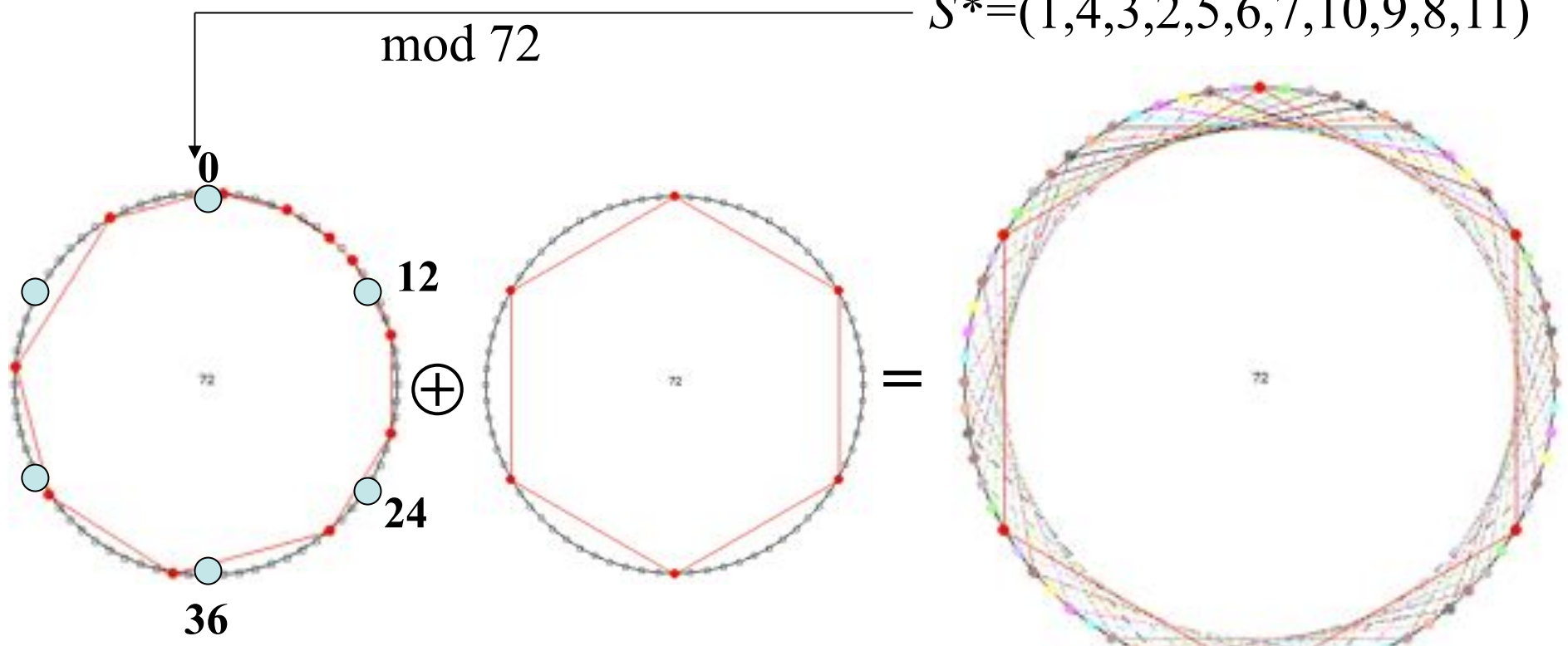
Canons rythmiques mosaïques et séries tous-intervalles

...
 ...
 36
 25
 24
 13
 12

The musical staff shows a sequence of notes with various accidentals. An arrow points from the staff to a circular diagram representing a 72-note scale. The diagram features a vertical dashed line and several chords (triads and dyads) drawn across the circle, illustrating the intervallic structure of the scale.

$S = \{0, 1, 3, 6, 7, 9, 8, 10, 11, 2, 4, 5\}$

$S^* = (1, 4, 3, 2, 5, 6, 7, 10, 9, 8, 11)$



Séries dodécaphoniques et rythmes k-asymétriques

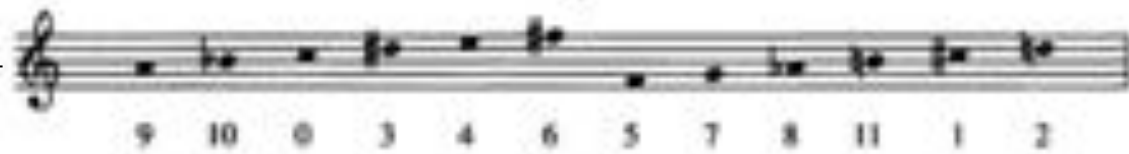
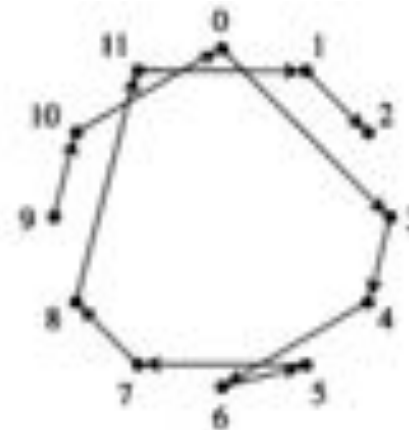
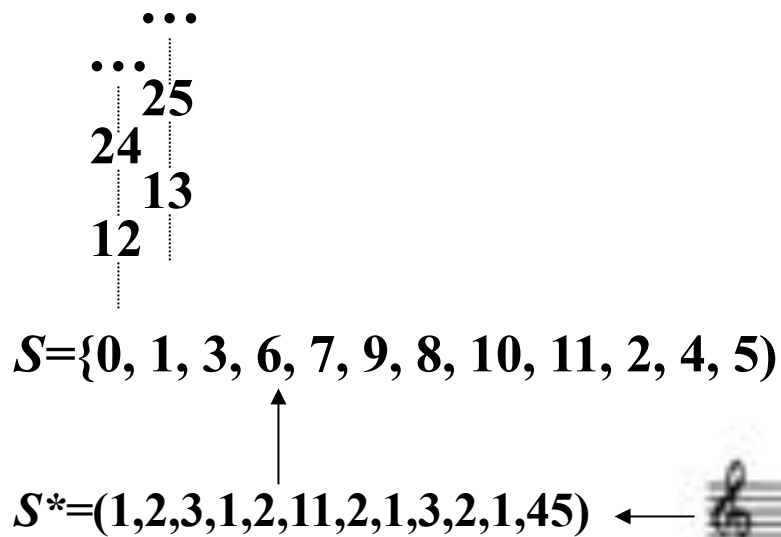
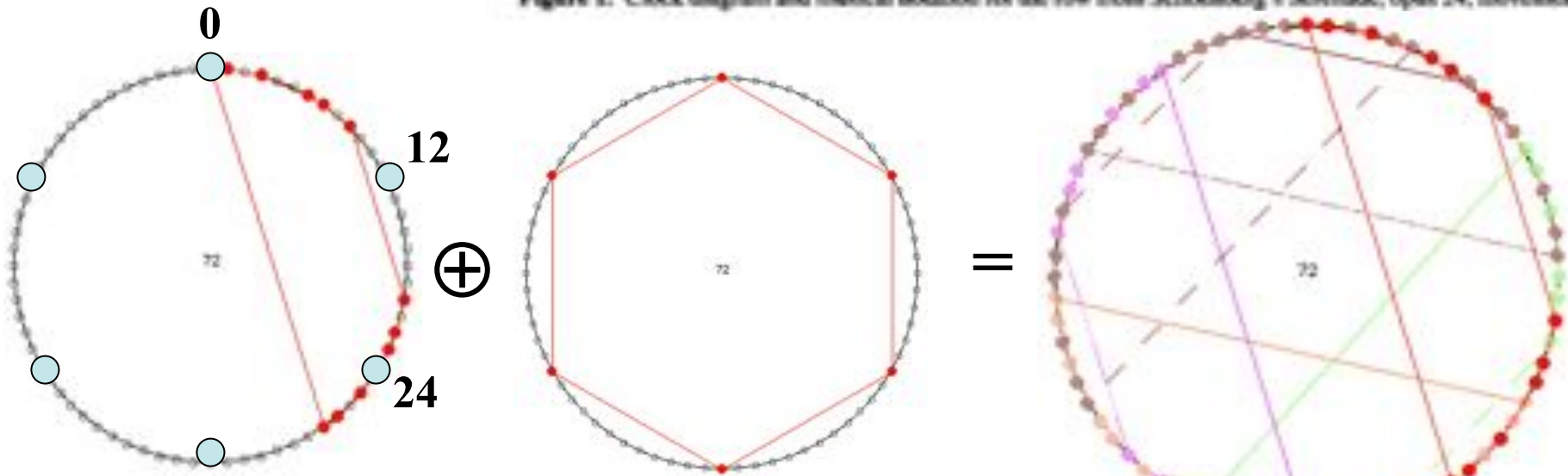


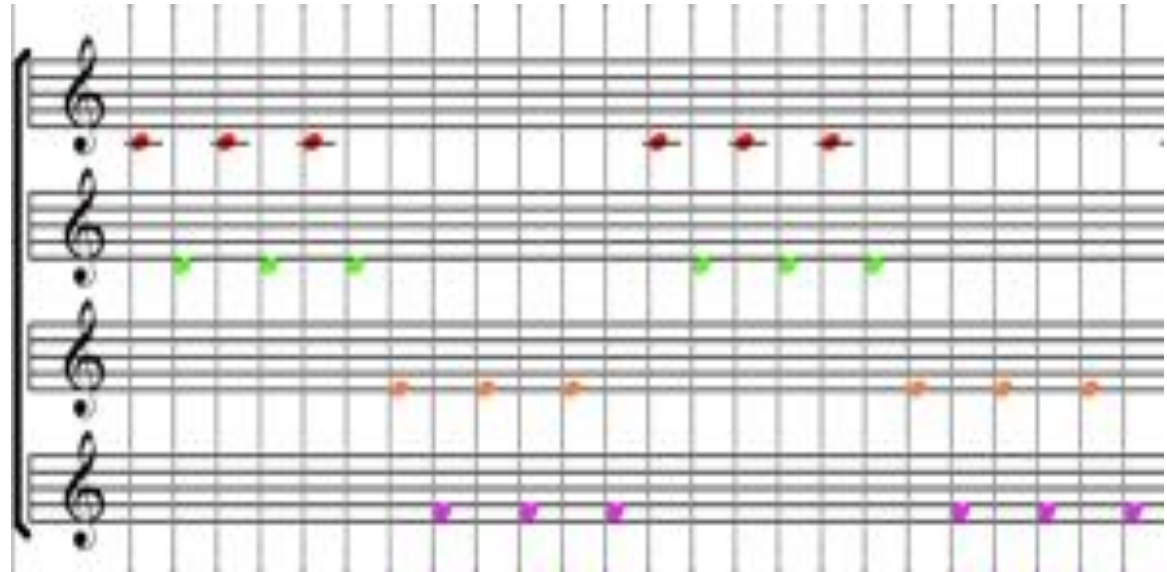
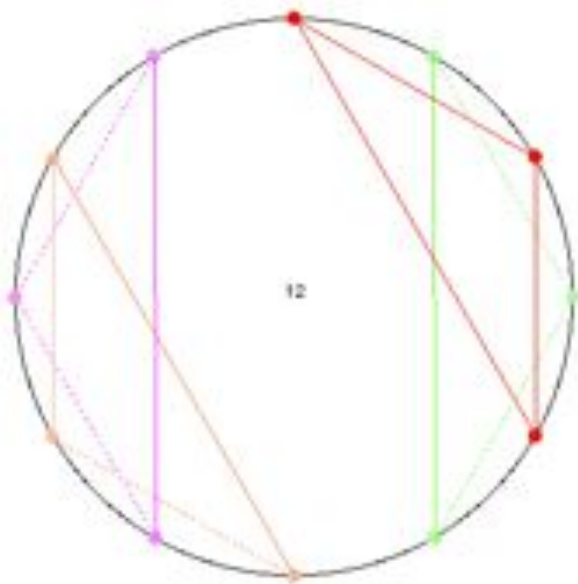
Figure 1. Clock diagram and musical notation for the row from Schoenberg's Serrade, opus 24, movement 5.



Pattern 8-asymétrique

=> OpenMusic

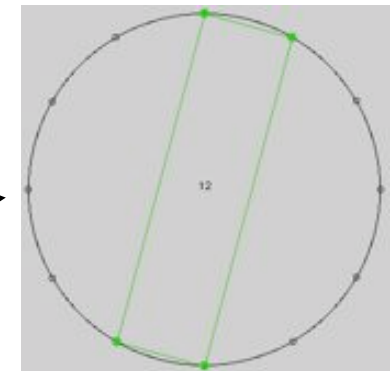
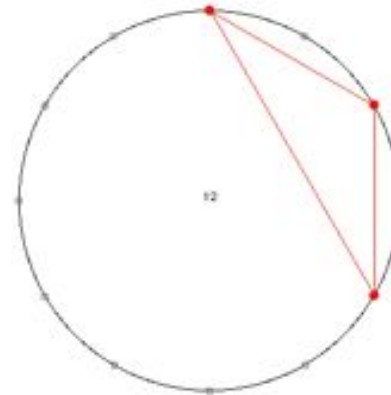
Canons mosaïques avec symétrie transpositionnelle



$$\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} = \{0, 2, 4\}$$

$$\mathbf{B} = \{0, 1, 6, 7\}$$

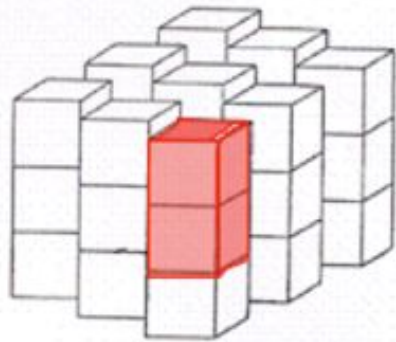


Canons mosaïques sans symétrie transpositionnelle (Vuza)

The diagram illustrates mosaic canons without transpositional symmetry (Vuza). It consists of three circular chromatic scales (chromatic circles) and a musical score below them.

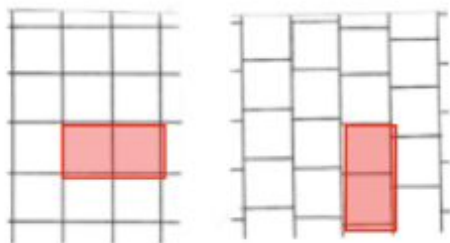
- The leftmost circle shows a complex network of colored lines connecting notes on the circle, representing a mosaic canon.
- The middle and right circles are connected by a plus sign (\oplus), indicating their combination to form the canon on the left.
- The musical score below shows five staves, each containing a sequence of notes corresponding to the chromatic scale, illustrating the canon's structure.

De la Conjecture de Minkowski aux groupes de Hajos



Conjecture de Minkowski (1896/1907)

Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension $n-1$.



(Cf. S. Stein, S. Szabó : *Algebra and Tiling*, 1994)

Théorème de Hajós (1942)

Soit G un groupe abélien fini et soient a_1, a_2, \dots, a_n n éléments de G . Si l'on suppose que le groupe admet comme factorisation la somme directe des sous-ensembles $A_1 \dots A_n$

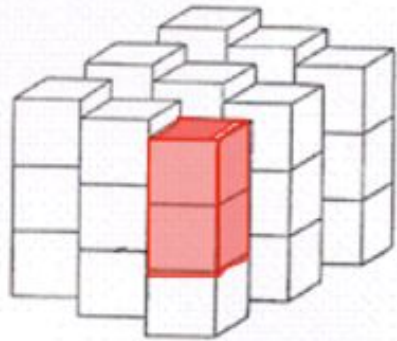
$$A_1 = \{1, a_1, \dots, a_1^{m_1-1}\}, A_2 = \{1, a_2, \dots, a_2^{m_2-1}\}, \dots, A_n = \{1, a_n, \dots, a_n^{m_n-1}\}$$

avec $m_i > 0$ pour tout $i=1, 2, \dots, n$, alors un des A_i est un groupe

Groupes de Hajos (good groups)

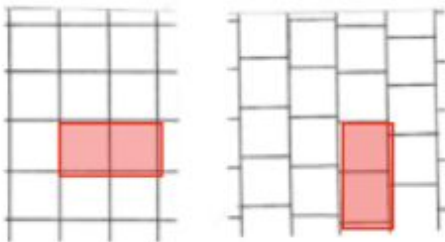
Rédei 1947	(p, p)	Sands 1962	$(p, 3, 3)$
Hajós 1950	\mathbb{Z}		$(p, 2^2, 2)$
De Brujin 1953	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n=p^\alpha$		$(p, 2, 2, 2, 2)$
	(p^α, q)		$(p^2, 2, 2, 2)$
	(p, q, r)		$(p^3, 2, 2)$
Sands 1957	(p^2, q^2)		$(p, q, 2, 2)$
	(p^2, q, r)		
	(p, q, r, s)	Sands 1964 Q	$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
Sands 1959	$(2^2, 2^2)$		$\mathbb{Q} + \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
	$(3^2, 3)$		
	$(2^n, 2)$		

Quelques versions faibles de la conjecture de Minkowski



Conjecture de Minkowski (1896/1907)

Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension $n-1$.



- *Les quatre conditions de la Conjecture de Minkowski*
 - [1] Les cubes sont tous obtenus par translation
 - [2] Les vecteurs de translations forment un réseau [lattice]
 - [3] Les parties internes des cubes sont disjointes
 - [4] Tout point de l'espace qui n'est pas dans le bord d'un cube est contenu exactement dans un cube

- *Conjecture de Keller (1930) = Minkowski – [2]*
 - Vraie pour $n \leq 6$ (Perron, 1940)
 - Fausse pour $n \geq 10$ (Lagarias et Shor, 1992)
 - Fausse pour $n=8$ et $n=9$ (Mackey, 2000)
 - Ouverte pour $n=7$

- *Conjecture de Furtwangler = Minkowski – [3 et 4] + nouvelle condition :*
 - [4'] Tout point de l'espace qui n'est pas dans le bord de chaque cube est contenu dans exactement k cubes
 - La conjecture est vraie ssi $n \leq 3$ (Hajos 1941)

- *Conjecture semi-périodique de Hajos (1950) : toute factorisation d'un groupe $G = A+B$ est semipériodique i.e. $B=B_1, \dots, B_m$ et s'il existe un sousgroupe $G'=\{g_1, \dots, g_m\}$ telle que $A+B_i=g_i+A+B_1$.*

Groupes non Hajós et Canons de Vuza

Groupes non-Hajós (bad groups)

72
 108 120 144 168 180
 200 216 240 252 264 270 280 288
 300 312 324 336 360 378 392 396
 400 408 432 440 450 456 468 480
 500 504 520 528 540 552 560 576 588 594
 600 612 616 624 648 672 675 680 684 696
 700 702 720 728 744 750 756 760 784 792
 800 810 816 828 864 880 882 888...

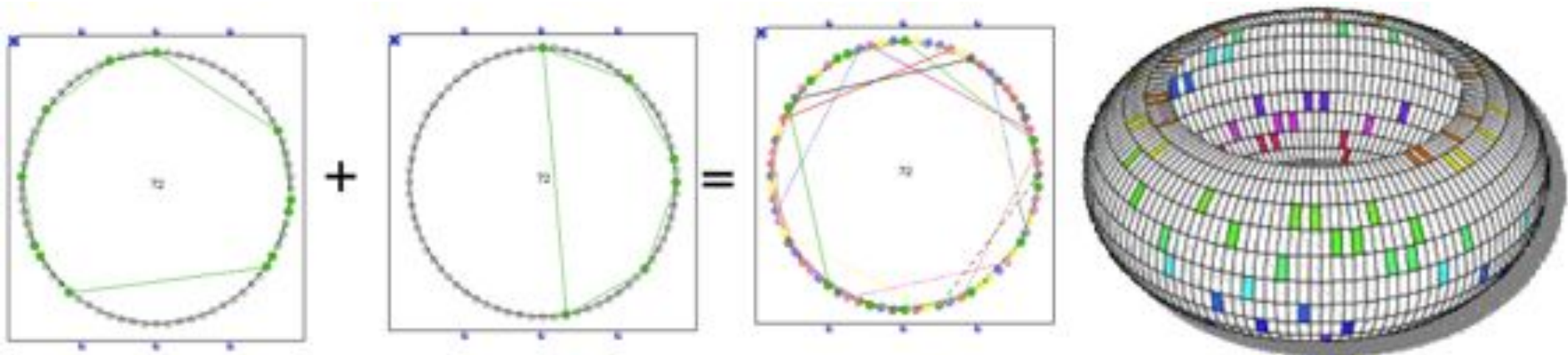
Groupes Hajós (good groups)

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec

$n \in \{p^\alpha, p^\alpha q, pqr, p^2q^2, p^2qr, pqrs\}$

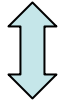
où p, q, r, s , sont des nombres premiers distincts

Problème ouvert : Trouver un algorithme qui permet d'obtenir toutes les factorisations d'un groupe cyclique non-Hajós en somme directe de deux sous-ensembles non périodiques (i.e. classifier tous les Canons de Vuza).




Classification « paradigmatic » des canons mosaïques de Vuza


Résultat : uniquement deux « types » de canons différents (à une transformation affine près, i.e. $f: \mathbb{Z}_{72} \rightarrow \mathbb{Z}_{72}$ t.q. $f(x)=ax+b$ avec $a \in (\mathbb{Z}_{72})^*$ et $b \in \mathbb{Z}_{72}$)




• R. Tijdeman: “Decomposition of the Integers as a direct sum of two subsets”, *Number Theory*, Cambridge University Press, 1995. The fundamental Lemma: R pave $\mathbb{Z}_n \Rightarrow aR$ pave \mathbb{Z}_n $\langle a, n \rangle = 1$

 (1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
 (20 3 1 5 6 9 4 11 6 3 3 1)
 R (1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
 (6 13 4 7 6 6 1 4 19 1 4 1)
 (1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)
 (3 3 17 4 3 6 6 5 4 15 5 1)

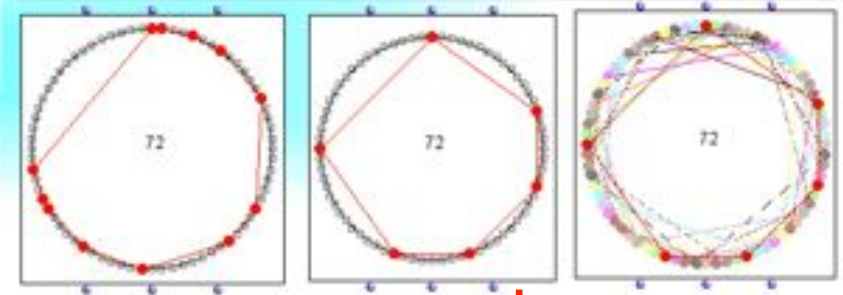
S (8 8 2 8 8 38)
 (16 2 14 2 16 22)
 (14 8 10 8 14 18)

 (1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
 R (1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
 (1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)

S (8 8 2 8 8 38)
 (16 2 14 2 16 22)
 (14 8 10 8 14 18)

 (1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
 R (1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
 (1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)

S (14 8 10 8 14 18)



$\mathbb{Z}/72\mathbb{Z} = R \oplus S$

Collection « Musique/ Sciences » (dir. J.-M. Bardez & M. Andreatta)



F. Lévy



G. Bloch

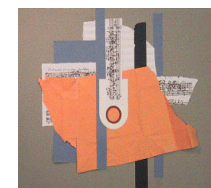


M. Lanza



T. Johnson

1999

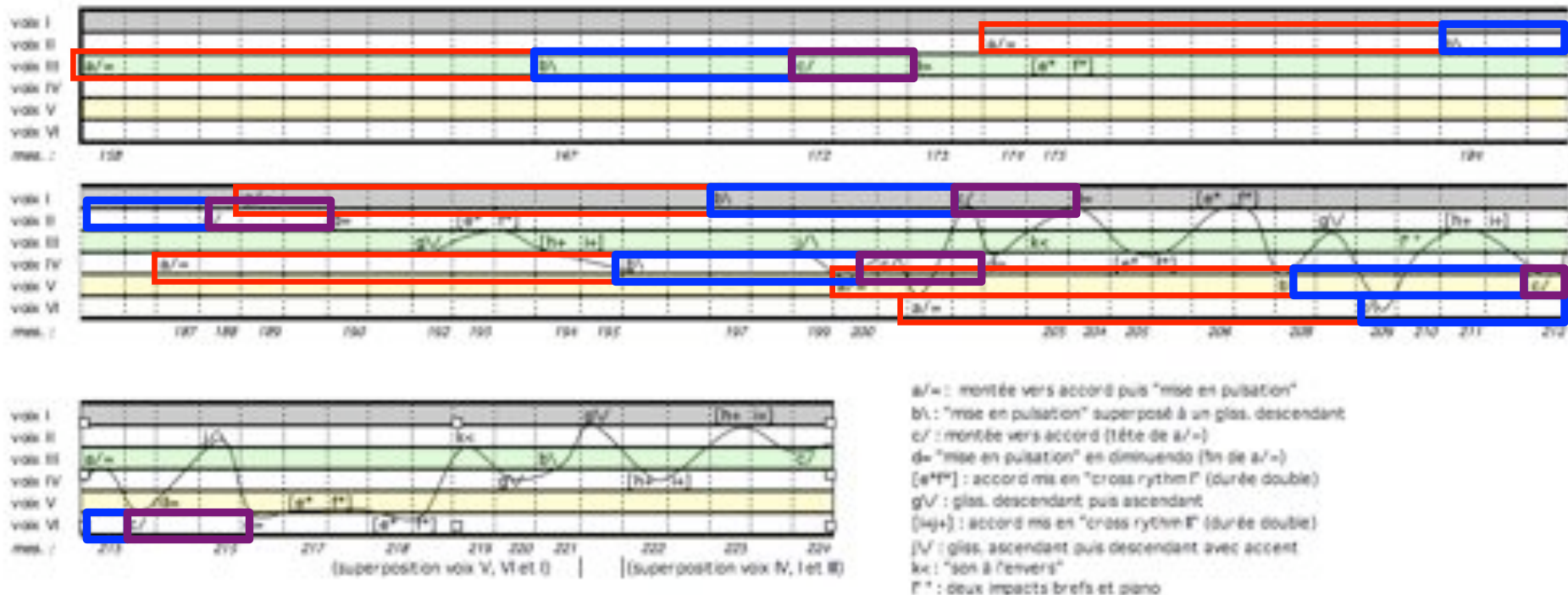


Fabien Lévy

Canons de Vuza pour une musique « morphologique »



• *Coïncidences* (pour 33 musiciens, 1999-2007)



Coïncidences - Fabien Lévy : déroulement du canon (mes. 158 à 226)
(chaque impact fait 3 temps)




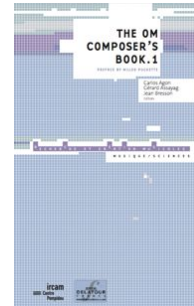
Interprètes : Tokyo Symphony Orchestra, Dir.: Kazuyoshi Akiyama, 05/09/2007, Suntory Hall, Tokyo, Japon

Georges Bloch

Stratégies compositionnelles à partir d'un modèle formel



- Réduction d'un canon par auto-similarité
- Modulations métriques entre canons
- Canons mosaïques et IAO (*OMax*)
- *Projet Beyeler* (2001) 
- *Projet Hitchcock*
- *Visite des tours de la cathédrale de Reims*
- *Noël des Chasseurs*
- *Canons à marcher*
- *Canon à eau*
- *Harawun* (2004)
- *L'Homme du champ* (2005)
- *A piece based on Monk* (2007)
- *Peking Duck Soup* (2008)



• *A piece based on Monk* (2007)
(« Well You Need'nt »)

Mauro Lanza

Canons de Vuza et périodicités locales



- *La descrizione del diluvio* (Ricordi, 2007-2008)

Canon à 14 voix sur le pattern rythmique :

(1 3 25 27 1 3 11 14 27 1 3 25 27 4 25 27 1 3 25 14 13 1 3 25 27 1 3 52)

No. 1 "Aria"

Local Dynamics :

ppp

ppp

ppp - ff

General Dynamic: pppp - ff

poco a poco crescendo fino a misura 40 (ppp - ff)

*6 voix sont en live et 8 dans l'électronique. L'unité est la double-croche de triolet. Le choix des notes et des durées est fait en cherchant à souligner certaines **quasi-périodicités** du canon de Vuza, et cela donne à chaque voix un caractère beaucoup plus "redondant".*



Mauro Lanza

Canons de Vuza et périodicités locales



- *La descrizione del diluvio* (Ricordi, 2007-2008)

[...] Le choix des notes et des durées est fait en cherchant à souligner certaines quasi-périodicités du canon de Vuza, et cela donne à chaque voix un caractère beaucoup plus “redondant”.

(1 3 25 27 1 3 11 14 27 1 3 25 27 4 25 27 1 3 25 14 13 1 3 25 27 1 3 52)

(1 3 25 27 1 3 11 14 27 1 3 25 27 4 25 27 1 3 25 14 13 1 3 25 27 1 3 52)

(1 3 25 27 1 3 11 14 27 1 3 25 27 4 25 27 1 3 25 14 13 1 3 25 27 1 3 52)

(1 3 25 27 1 3 11 14 27 1 3 25 27 4 25 27 1 3 25 14 13 1 3 25 27 1 3 52)

(1 3 25 27 1 3 11 14 27 1 3 25 27 4 25 27 1 3 25 14 13 1 3 25 27 1 3 52)

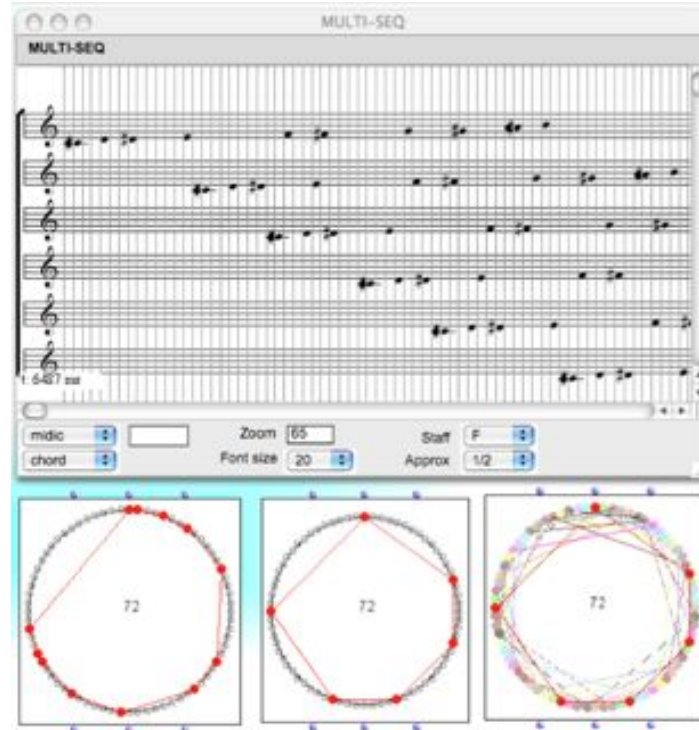
Canons mosaïques et conjecture spectrale

La conjecture de Fuglede



Un sous-ensemble de \mathbb{R}^n pave par translation ssi il est spectral (i.e. il admet une décomposition hilbertienne d'exponentiels complexes)
J. Func. Anal. 16, 1974.

Fausse en dim. $n \geq 3$
 Ouverte en dim. 1 et 2



Canons de Vuza de période n

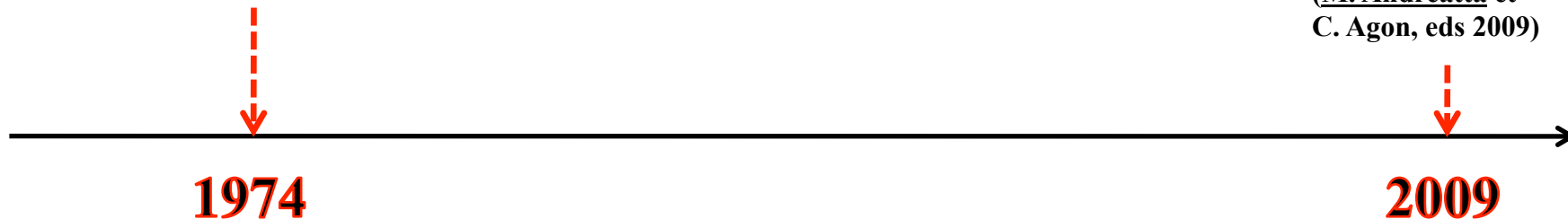
72

108 120 144 168 180
 200 216 240 252 264 270 280 288
 300 312 324 336 360 378 392 396
 400 408 432 440 450 456 468 480
 500 504 520 528 540 552 560 576 588 594
 600 612 616 624 648 672 675 680 684 696
 700 702 720 728 744 750 756 760 784 792
 800 810 816 828 864 880 882 888...

Résultat (Amiot 2009) :
 Si A pave mais il n'est pas spectral
 $\Rightarrow A$ est le rythme d'un canon de Vuza



(M. Andreatta et
 C. Agon, eds 2009)



Pavage de la ligne et conjecture spectrale

Conjecture de Fuglede (1974) :

« **Commuting Self-Adjoint Partial Differential Operators and a Group Theoretic Problem** », *J. Func. Anal.* 16, 101-121, 1974.



SPECTRALITE \Leftrightarrow PAVAGE

↓ (Conjecture fautive en dimension $n \geq 3$ ouverte en dimension 1 et 2)

DEFINITION 6 A subset A of some vector space (say \mathbb{R}^n) is spectral iff it admits a Hilbert base of exponentials, i.e. if any map $f \in L^2(A)$ can be written

$$f(x) = \sum f_k \exp(2i\pi \lambda_k \cdot x)$$

for some fixed family of vectors $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ where the maps $e_k : x \mapsto \exp(2i\pi \lambda_k \cdot x)$ are mutually orthogonal (i.e. $\int_A \bar{e}_k e_j = 0$ whenever $k \neq j$).

E. Coven & A. Meyerowitz: “Tiling the integers with translates of one finite set”, *J. Algebra*, 212, pp. 161-174, 1999. Deux conditions de C&M :

- **T1 + T2 \Rightarrow pavage**
- **pavage \Rightarrow T1**

Les conjectures de Minkowski/Fuglede et les canons rythmiques

- Minkowski's conjecture (1896/1907)
- Hajos algebraic solution (1942)
- Hajos quasi-periodic conjecture
- The classification of Hajos groups (Hajos, de Bruijn, Sands, ...)
- Classification of factorizations for non-Hajos groups (Vuza, Andreatta, Agon, Amiot, Fripertinger, ...)
- ...
- The Tiling of the line problem and Fuglede's Conjecture (Tijdeman, Coven-Meyerowitz, Lagarias, Laba, Kolountzakis...)
- Given a finite set that tiles \mathbf{Z} , what will be the period (Kolountzakis, Steinberger, ...)
- Fuglede's Conjecture and Vuza's Canons (Amiot, 2004)
- ...

• R. Tijdeman: "Decomposition of the Integers as a direct sum of two subsets", *Number Theory*, Cambridge University Press, 1995. The fundamental Lemma:
 A tiles $\mathbf{Z}_n \Rightarrow pA$ tiles \mathbf{Z}_n when $\langle p, n \rangle = 1$

• I. Laba : "The spectral set conjecture and multiplicative properties of roots of polynomials", *J. Lond Math Soc*, 2002
 $T_1 + T_2 \Rightarrow$ spectral
 $T_2 \Rightarrow$ spectral
 spectral $\Rightarrow T_1$

• E. Coven & A. Meyerowitz: "Tiling the integers with translates of one finite set", *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999
 $T_1 + T_2 \Rightarrow$ tile
 Tile $\Rightarrow T_1$

• E. Amiot : "A propos des canons rythmiques", *Gazette des Mathématiciens*, n°106, Octobre 2005.
 if A tiles with period n and \mathbf{Z}_n is Hajos
 $\Rightarrow A$ has T_2 ($\Rightarrow A$ is spectral)

Si A pave mais il n'est pas spectral $\Rightarrow A$ est le rythme d'un canon de Vuza

Racines de l'unité et polynômes cyclotomiques

Racines n -ièmes de l'unité : $z^n = 1$

$$n=3 \longrightarrow \left\{ 1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$n=4 \longrightarrow \{1, +i, -1, -i\}$$

Les racines n -ièmes de l'unité peuvent s'écrire sous la forme :

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k, n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq k < n)$$

Elles sont exactement les racines du polynôme : $P(X) = X^n - 1$

Les racines n -ièmes primitives de l'unité : $e^{\frac{2ki\pi}{n}} \quad (n,k)=1$

Elles sont exactement les racines du polynôme cyclotomique :

$$\Phi_n(X) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)} (X - z_k) \longleftrightarrow X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

Pavage de la ligne et polynômes cyclotomiques

$$\Phi_n(X) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)} (X - z_k) \longleftrightarrow X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

$$\Phi_1(X) = X - 1 \quad \longleftrightarrow \quad (-1, 1)$$

$$\Phi_2(X) = 1 + X \quad \longleftrightarrow \quad (1, 1)$$

$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2 \quad \longleftrightarrow \quad (1, 1, 1)$$

$$\Phi_4(X) = 1 + X^2 \quad \longleftrightarrow \quad (1, 0, 1)$$

$$\Phi_5(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 \quad \longleftrightarrow \quad (1, 1, 1, 1, 1)$$

$$\Phi_6(X) = 1 - X + X^2 \quad \longleftrightarrow \quad (1, -1, 1)$$

$$\Delta_n = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} = \prod_{\substack{d|n \\ d \neq 1}} \Phi_d(X)$$

$$\Delta_4 = 1 + X + X^2 + X^3 = \Phi_2(X) \times \Phi_4(X)$$

$$A(x) \times B(x) = (A \oplus B)(x) \equiv 1 + x + \dots + x^{n-1} \pmod{X^n - 1}$$

Bonnes et mauvaises factorisations

$$\Delta_n = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} = \prod_{\substack{d | n \\ d \neq 1}} \Phi_d(X)$$

$\Phi_2(X) = 1 + X$	←-----→	(1, 1)
$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$	←-----→	(1, 1, 1)
$\Phi_4(X) = 1 + X^2$	←-----→	(1, 0, 1)
$\Phi_6(X) = 1 - X + X^2$	←-----→	(1, -1, 1)

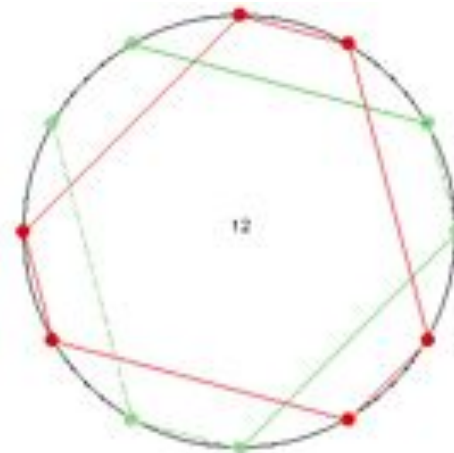
$$\Delta_{12} = 1 + X + \dots + X^{11} = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_4 \times \Phi_6 \times \Phi_{12}$$

$$A(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12} = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9$$

$$B(X) = \Phi_4 = 1 + X^2$$

$$S = \{0, 2\}$$

$$R = \{0, 1, 4, 5, 8, 9\}$$



$$A^*(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_{12}$$

$$B^*(X) = \Phi_4 \times \Phi_6$$

Cette décomposition ne marche pas

Les conditions de Coven-Meyerowitz

- E. Coven & A. Meyerowitz : “Tiling the integers with translates of one finite set”, *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999

There is no loss of generality in restricting attention to translates of a finite set A of *nonnegative* integers. Then $A(x) = \sum_{a \in A} x^a$ is a polynomial such that $\#A = A(1)$. Let S_A be the set of prime powers s such that the s -th cyclotomic polynomial $\Phi_s(x)$ divides $A(x)$. Consider the following conditions on $A(x)$.

(T1) $A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1)$.

(T2) If $s_1, \dots, s_m \in S_A$ are powers of distinct primes, then $\Phi_{s_1 \dots s_m}(x)$ divides $A(x)$.

Theorem A. *If $A(x)$ satisfies (T1) and (T2), then A tiles the integers.*

Theorem B1. *If A tiles the integers, then $A(x)$ satisfies (T1).*

Theorem B2. *If A tiles the integers and $\#A$ has at most two prime factors, then $A(x)$ satisfies (T2).*

Corollary. *If $\#A$ has at most two prime factors, then A tiles the integers if and only if $A(x)$ satisfies (T1) and (T2).*

Les conditions de Coven-Meyerowitz

$$(T1) A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1).$$

(T2) If $s_1, \dots, s_m \in S_A$ are powers of distinct primes, then $\Phi_{s_1 \dots s_m}(x)$ divides $A(x)$.

Theorem A. *If $A(x)$ satisfies (T1) and (T2), then A tiles the integers.*

$$A(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12} = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9$$

$$\Phi_2(X) = 1 + X$$

$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$$

$$(T1) A(1) = 6 = \Phi_2(1) \times \Phi_3(1) = 2 \times 3$$

$$(T2) \Phi_2 \mid A(X) \text{ et } \Phi_3 \mid A(X) \Rightarrow \Phi_{2 \times 3} \mid A(X)$$

Theorem B1. *If A tiles the integers, then $A(x)$ satisfies (T1).*

$$A^*(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_{12} = 1 + 2X + 2X^2 - X^3 - X^4 + X^5 + 2X^6 + X^7$$

$$A^*(1) = 7 \neq \Phi_2(1) \times \Phi_3(1) = 6$$

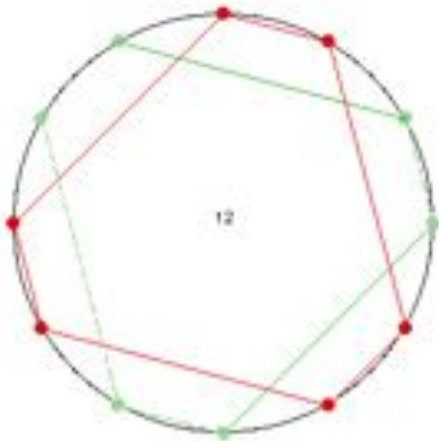
Conditions de C&M et canons mosaïques

• E. Coven & A. Meyerowitz: "Tiling the integers with translates of one finite set", *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999

Deux conditions de C&M :

T1 + T2 => pavage

pavage => T1



$$A(X) = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9 = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12}$$

$$\Phi_2(X) = 1 + X$$

$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$$

$$(T1) A(1) = 6 = \Phi_2(1) \times \Phi_3(1) = 2 \times 3$$

$$(T2) \Phi_2 \mid A(X) \text{ et } \Phi_3 \mid A(X) \Rightarrow \Phi_{2 \times 3} \mid A(X)$$

Canons de Vuza de période n

72

108 120 144 168 180

200 216 240 252 264 270 280 288

300 312 324 336 360 378 392 396

400 408 432 440 450 456 468 480

500 504 520 528 540 552 560 576 588 594

600 612 616 624 648 672 675 680 684 696

700 702 720 728 744 750 756 760 784 792

800 810 816 828 864 880 882 888...

VOLUME 3 NUMBER 2 JULY 2009 ISSN 1745-9737	
Journal of Mathematics & Music	
Mathematical and Computational Approaches to Music Theory, Analysis, Composition and Performance	
Special Issue on Tiling Problems in Music Guest Editors: Moreno Andreatta and Carlos Agon	
Guest Editors' Foreword Moreno Andreatta and Carlos Agon	63 - 70
New perspectives on rhythmic canons and the spectral conjecture Emmanuel Amiot	71 - 84
Algorithms for translational tiling Mihai N. Kolountzakis and Miki Maitani	85 - 97
Tiling the integers with aperiodic tiles Francis Jedrzejewski	98 - 115

Si A pave mais il n'a pas T2 => A est le rythme d'un canon de Vuza

Transformée de Fourier discrète et pavage

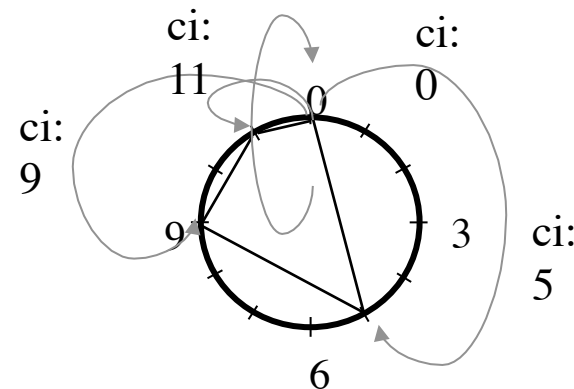
TILING

Let $Z_A = \{ t \in \mathbb{Z}_c, F_A(t)=0 \}$

A tiles \mathbb{Z}_c when equivalently:

- ☉ There exists B , $A \oplus B = \mathbb{Z}_c$
- ☉ $1_A \star 1_B = 1$
- ☉ $F_A \times F_B(t) = 1 + e^{-2i\pi t/c} + \dots + e^{-2i\pi t(c-1)/c}$ (0 unless $t=0$)
- ☉ $Z_A \cup Z_B = \{1, 2 \dots c-1\}$ AND $\text{Card } A \times \text{Card } B = c$
- ☉ $IC_A \star IC_B = IC(\mathbb{Z}_c) = c$ and $\text{Card } A \times \text{Card } B = c$

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$



$$A = \{0, 5, 9, 11\}$$

$$IC_A(k) = 1 \quad \forall k = 1 \dots 11$$

$$IC_A(k) = \text{Card}\{(x, y) \in A \times A \mid x + k = y\}$$

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$



E. Amiot, « New Perspectives on Rhythmic Canons and the Spectral Conjecture », *Journal of Mathematics and Music*, 2009.

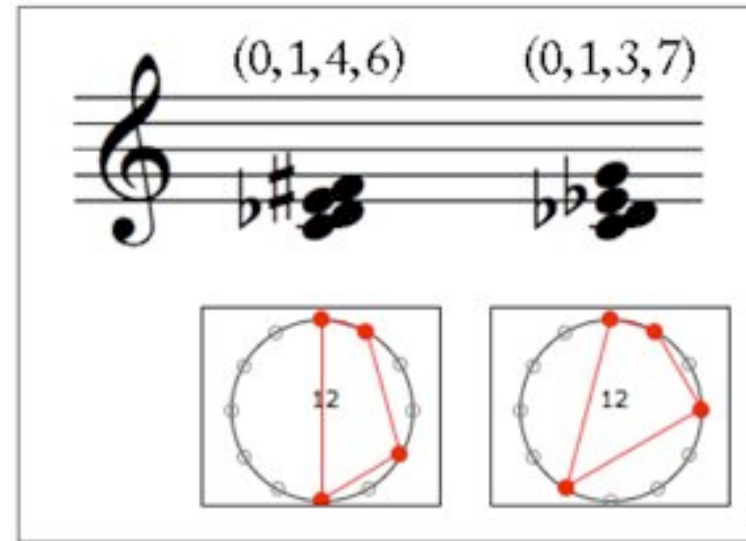
Pavage et Z-relation (homométrie)

- Deux ensembles sont en Z-relations s'ils ont le même module de la DFT

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

$$\mathcal{F}(IC_A) = \mathcal{F}_A \times \mathcal{F}_{-A} = |\mathcal{F}_A|^2$$



➔ Reconstruction de la phase

- Mandereau J., D. Ghisi, E. Amiot, M. Andreatta, C. Agon, (2011a), « Z-relation and homometry in musical distributions », *Journal of Mathematics and Music*, vol. 5, n° 2, p. 83-98.
- Mandereau J., D. Ghisi, E. Amiot, M. Andreatta, C. Agon (2011b), « Discrete phase retrieval in musical structures », *Journal of Mathematics and Music*, vol. 5, n° 2, p. 99-116.

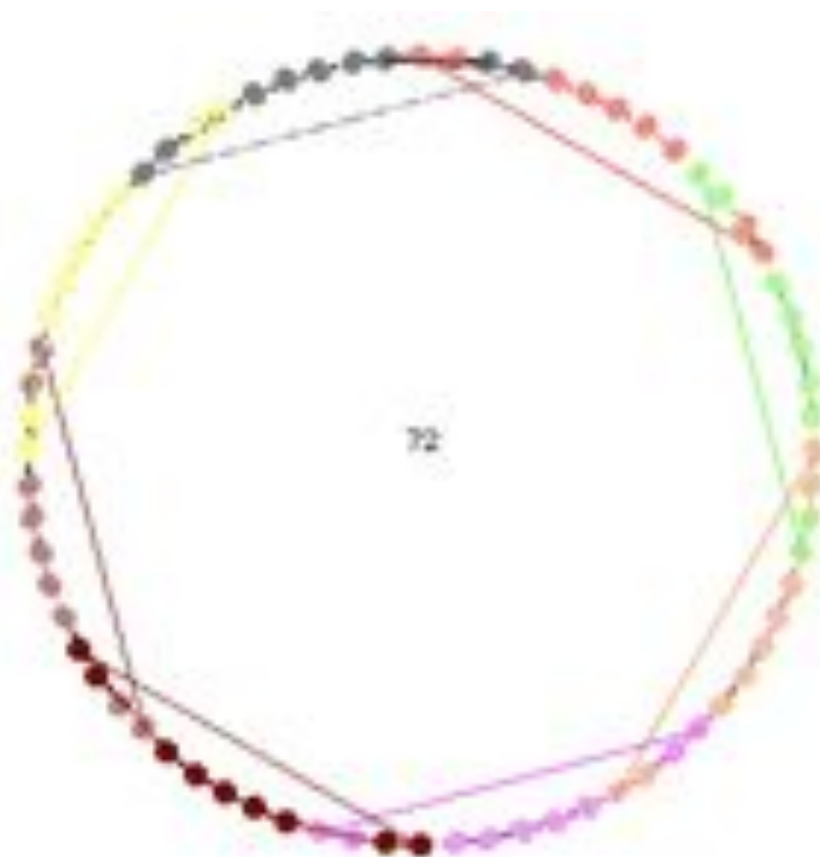
A musical offering:

• *Theorem:*

If A tiles with B and A' has the same IC, then A' tiles with B, too.

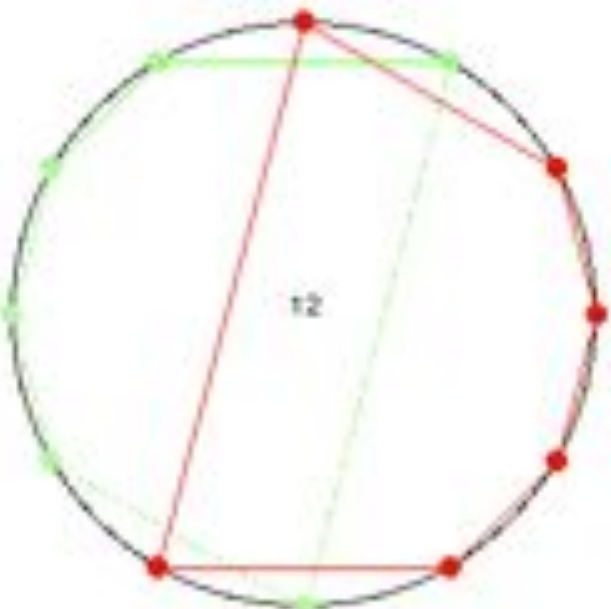
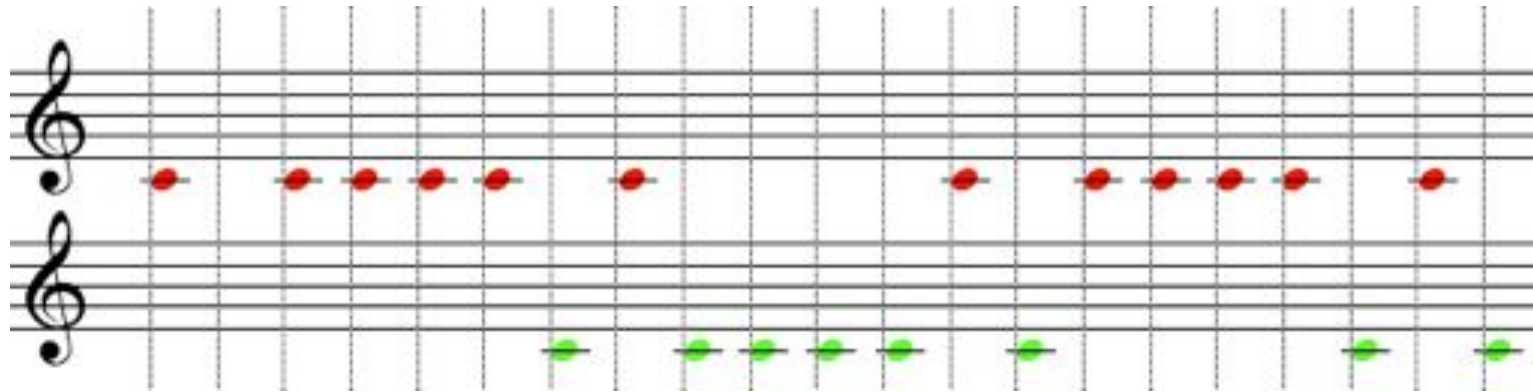


La famille des « canons cyclotomiques »



- E. Amiot, M. Andreatta, C. Agon: « Tiling the (musical) line with polynomial: some theoretical and implementational aspects », *ICMC*, Barcelona, 2005, pp.227-230.

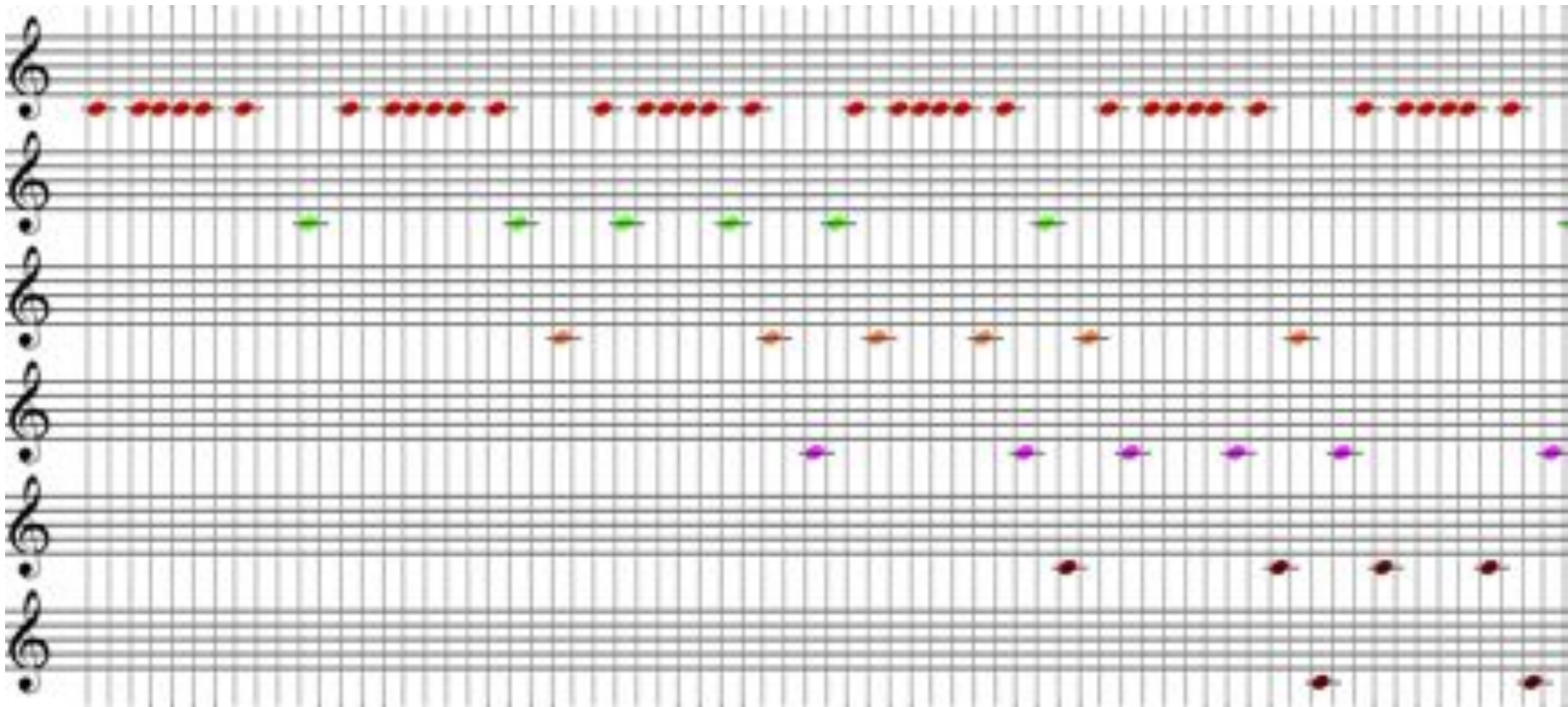
Canons mosaïques par translation et augmentation



$((0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 6)\ ((1\ 11)))$
 $((0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5)\ ((1\ 11)\ (1\ 1)))$
 $((0\ 1\ 2\ 3\ 5\ 7)\ ((1\ 11)\ (1\ 7)))$
 $((0\ 1\ 3\ 4\ 7\ 8)\ ((1\ 5)))$
 $((0\ 1\ 2\ 3\ 6\ 7)\ ((1\ 11)))$
 $((0\ 1\ 3\ 4\ 6\ 9)\ ((1\ 11)\ (1\ 5)))$
 $((0\ 1\ 3\ 6\ 7\ 9)\ ((1\ 11)\ (1\ 5)))$
 $((0\ 1\ 2\ 6\ 7\ 8)\ ((1\ 11)\ (1\ 7)\ (1\ 5)\ (1\ 1)))$
 $((0\ 1\ 4\ 5\ 8\ 9)\ ((1\ 11)\ (1\ 7)\ (1\ 5)\ (1\ 1)))$
 $((0\ 1\ 2\ 5\ 6\ 7)\ ((1\ 7)\ (1\ 5)))$
 $((0\ 2\ 3\ 4\ 5\ 7)\ ((1\ 11)\ (1\ 7)\ (1\ 5)\ (1\ 1)))$ ←
 $((0\ 1\ 4\ 5\ 6\ 8)\ ((1\ 11)\ (1\ 7)))$
 $((0\ 1\ 2\ 4\ 5\ 7)\ ((1\ 5)))$
 $((0\ 1\ 3\ 4\ 5\ 8)\ ((1\ 5)\ (1\ 1)))$
 $((0\ 1\ 2\ 4\ 5\ 8)\ ((1\ 11)))$
 $((0\ 1\ 2\ 4\ 6\ 8)\ ((1\ 11)\ (1\ 7)))$
 $((0\ 2\ 3\ 4\ 6\ 8)\ ((1\ 11)))$
 $((0\ 2\ 4\ 6\ 8\ 10)\ ((1\ 11)\ (1\ 7)\ (1\ 5)\ (1\ 1)))$

Augmented Tiling Canons ou l'action du groupe affine

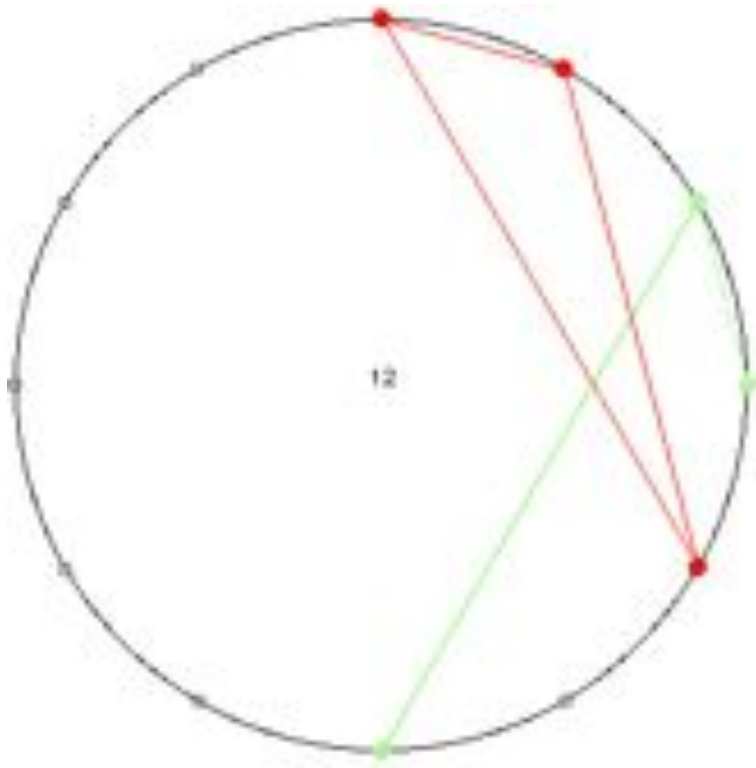
(en collaboration avec Thomas Noll)



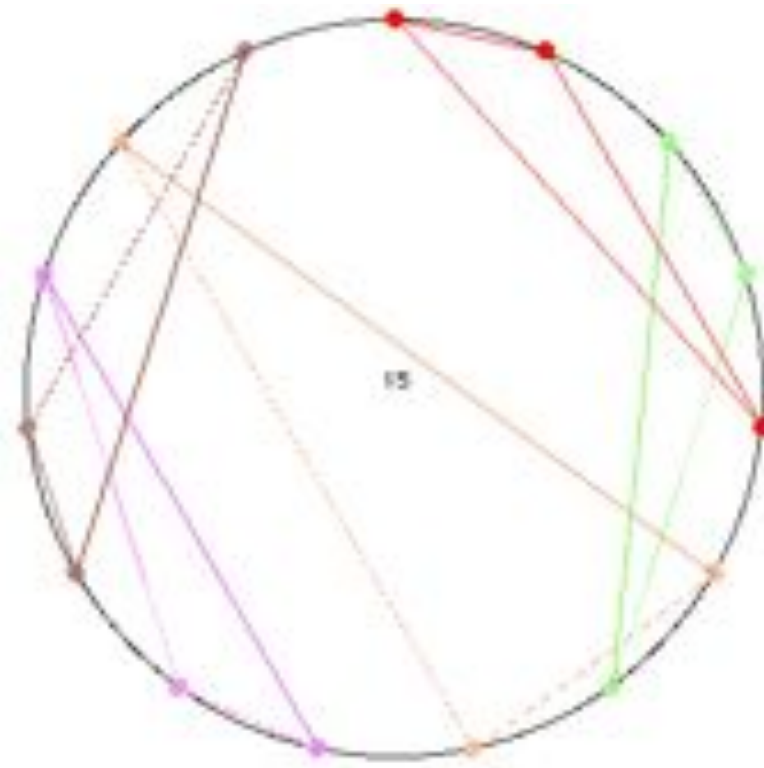
Tiling the line and/or circle with augmentations

- **Tom Johnson (2001): tiling the line with a given rhythmic pattern**
 - ex. (0 1 4). Does it tile? With augmentations? With which period?

• **Theorem (Amiot, 2002) : Any tiling of the line with the pattern (0 1 4) and its augmentations is periodic and the period is equal to a multiple of 15**



$n = 12$



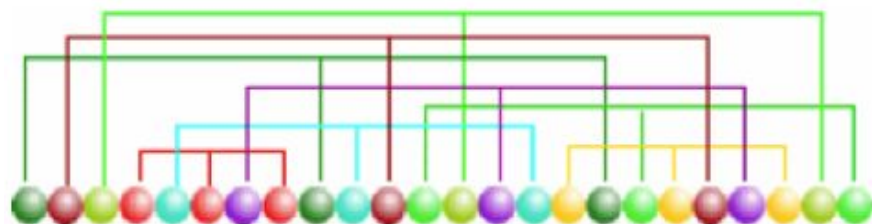
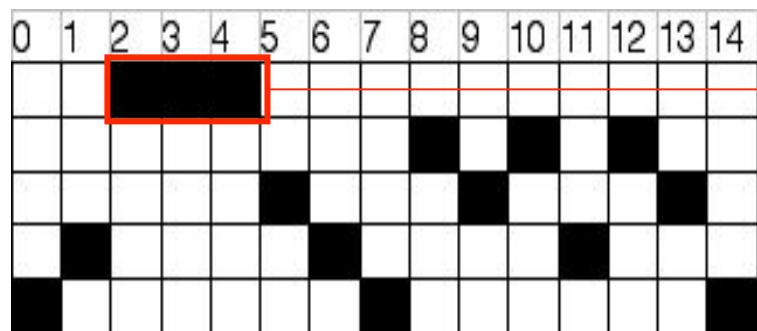
$n = 15$

Tom Johnson's Perfect Tilings

Tilework for Piano

perfect triplet tilings, 5th order

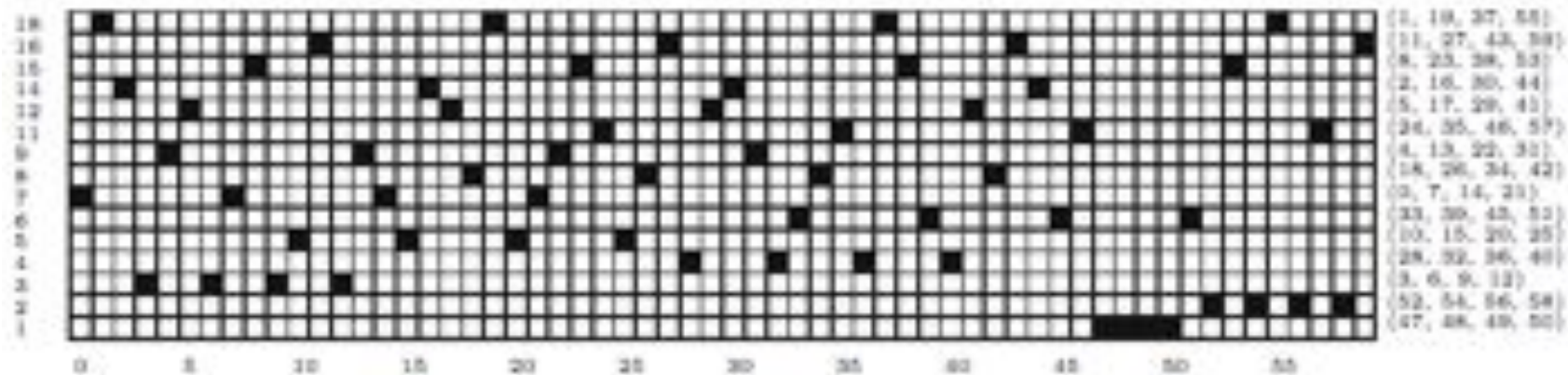
with thanks to Jon Wild and Erich Neuwirth



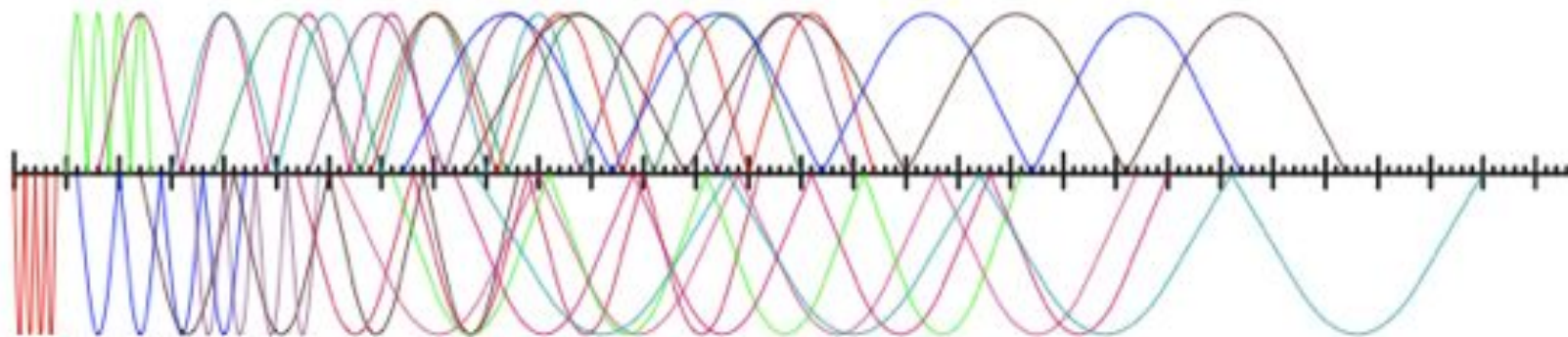
Jean-Paul Davalan, « Perfect Rhythmic Tilings » (to appear in *Tiling Problems in Music*, M. Andreatta & C. Agon eds., Collection « Musique/Sciences », 2008)



Perfect Rhythmic Tilings and open problems



Does it exist a quintuple perfect tiling canon?



Séquences périodiques et calcul des différences finies

$$Df(x) = f(x) - f(x-1)$$

$$\begin{aligned}
 f &= 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \dots \\
 Df &= 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \dots \\
 D^2f &= 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ 0 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ 0 \dots \\
 D^3f &= 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \dots \\
 D^kf &= \dots
 \end{aligned}$$



Anatol Vieru (1926-1998)

dalassimo

V	0	3	8	7	11	0	11	10	6	9	0	9	1	2	9	8	4	3	6
VIII	0	0	0	0	3	3	7	2	0	0	0	6	3	3	3	4	8	0	0
IV	3	3	4	4	1	11	11	8	3	3	9	4	1	7	11	8	11	3	9
IX	0	0	0	0	0	3	6	[1]	3	3	3	3	9	0	3	6	[10]	6	6
IV	0	10	3	9	10	0	9	7	0	6	7	9	6	4	9	3	4	6	3

Anatol Vieru: *Zone d'oubli* pour alto (1973)

Periodic sequences and finite difference calculus

=> OpenMusic

$$\begin{array}{rcl}
 f & = & 11 \ 6 \ 7 \ 2 \ 3 \ 10 \ 11 \ 6 \ \dots \\
 Df & = & \begin{array}{cccccc} & \diagdown & \diagup & & & \\ & 7 & & 1 & & 7 \\ & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown \\ & 6 & & 6 & & 6 \end{array} 6 \ 6 \ 6 \ \dots \\
 D^2f & = & \begin{array}{ccc} & \diagdown & \diagup \\ & 0 & & 0 \\ & \diagdown & \diagup \\ & 0 & & 0 \end{array} 0 \ 0 \ 0 \ \dots \\
 D^4f & = & 0 \ 0 \ 0
 \end{array}$$

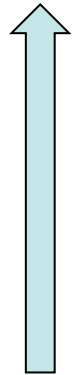
Reducible sequences:
 $\exists k \geq 1$ such that $D^k f = 0$

Théorème de décomposition: Toute sequence périodique (à valeurs dans un groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) peut se décomposer de façon unique en somme d'une sequence reductible et d'une sequence reproductible (2001)

$$\begin{array}{rcl}
 f & = & 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ \dots \\
 Df & = & \begin{array}{cccccc} & \diagdown & \diagup & & & \\ & 4 & & 11 & & 1 \\ & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown \\ & 7 & & 2 & & 7 \end{array} 2 \ 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ \dots \\
 D^2f & = & \begin{array}{cccccc} & \diagdown & \diagup & & & \\ & 7 & & 5 & & 4 \\ & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown \\ & 10 & & 11 & & 7 \end{array} 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ \dots \\
 D^3f & = & 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ \dots \\
 D^4f & = & 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ \dots \\
 D^5f & = & 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ \dots \\
 D^6f & = & 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ \dots
 \end{array}$$

Reproducible sequences:
 $\exists k \geq 1$ such that $D^k f = f$

Growing by additions



$$\begin{array}{rcl} A^3 f & = & 0 \quad 1 \quad 5 \quad \dots \\ & & \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \\ A^2 f & = & 1 \quad 4 \quad 9 \quad 4 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 4 \dots \\ & & \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \\ A f & = & 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 1 \quad 3 \quad 5 \dots \\ & & \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \\ f & = & 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array}$$

Growing by additions and proliferation of values

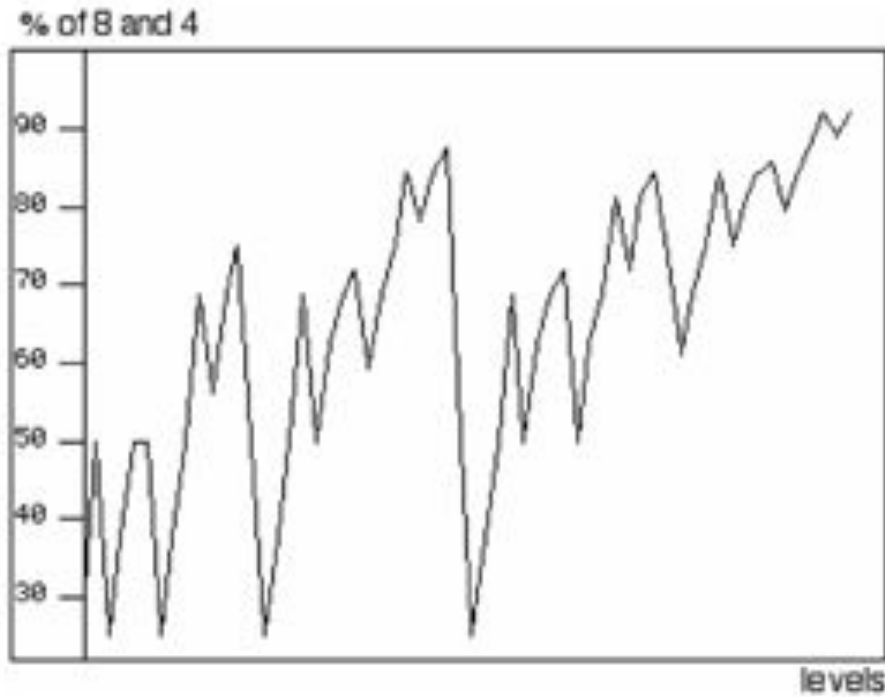
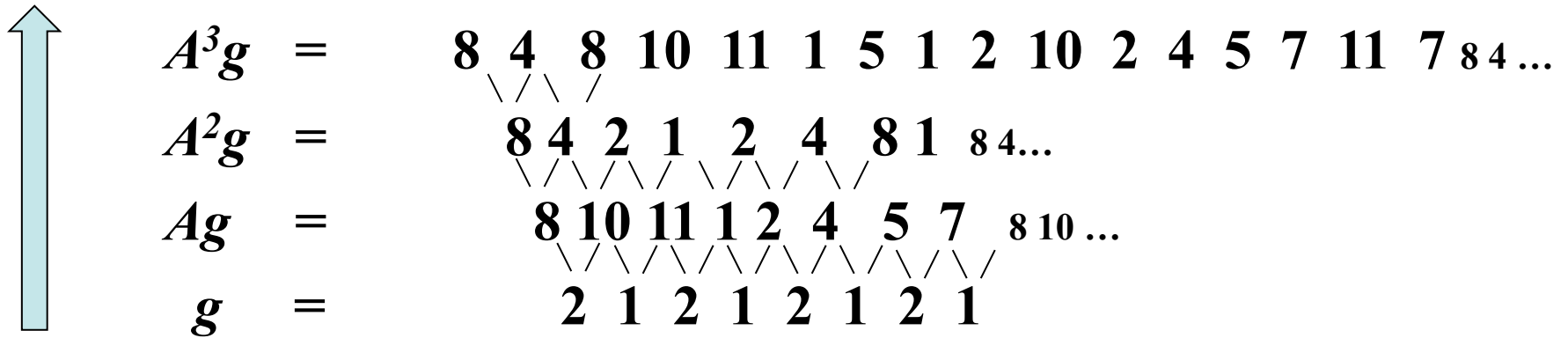


Fig. 11 Initial values equal to 8

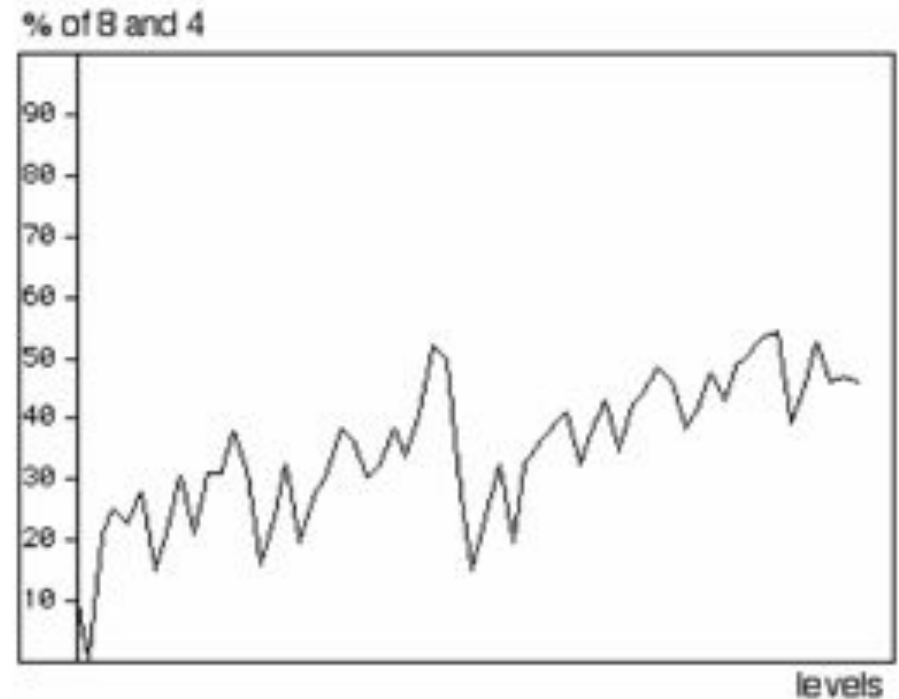


Fig. 15 Initial values equal to 4

Séquences réductibles et séquences reproductibles

=> OpenMusic

$$\begin{array}{rcl}
 f & = & 11 \ 6 \ 7 \ 2 \ 3 \ 10 \ 11 \ 6 \ \dots \\
 Df & = & \begin{array}{cccccc} & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / \\ & 7 & 1 & 7 & 1 & 7 & 1 & 7 & 1 \dots \end{array} \\
 D^2f & = & \begin{array}{cccccc} & & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / \\ & & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \dots \end{array} \\
 D^4f & = & \begin{array}{ccc} & \backslash & / \\ & 0 & 0 & 0 \end{array}
 \end{array}$$

Séquences réductibles :
 $\exists k \geq 1$ tel que $D^k f = 0$

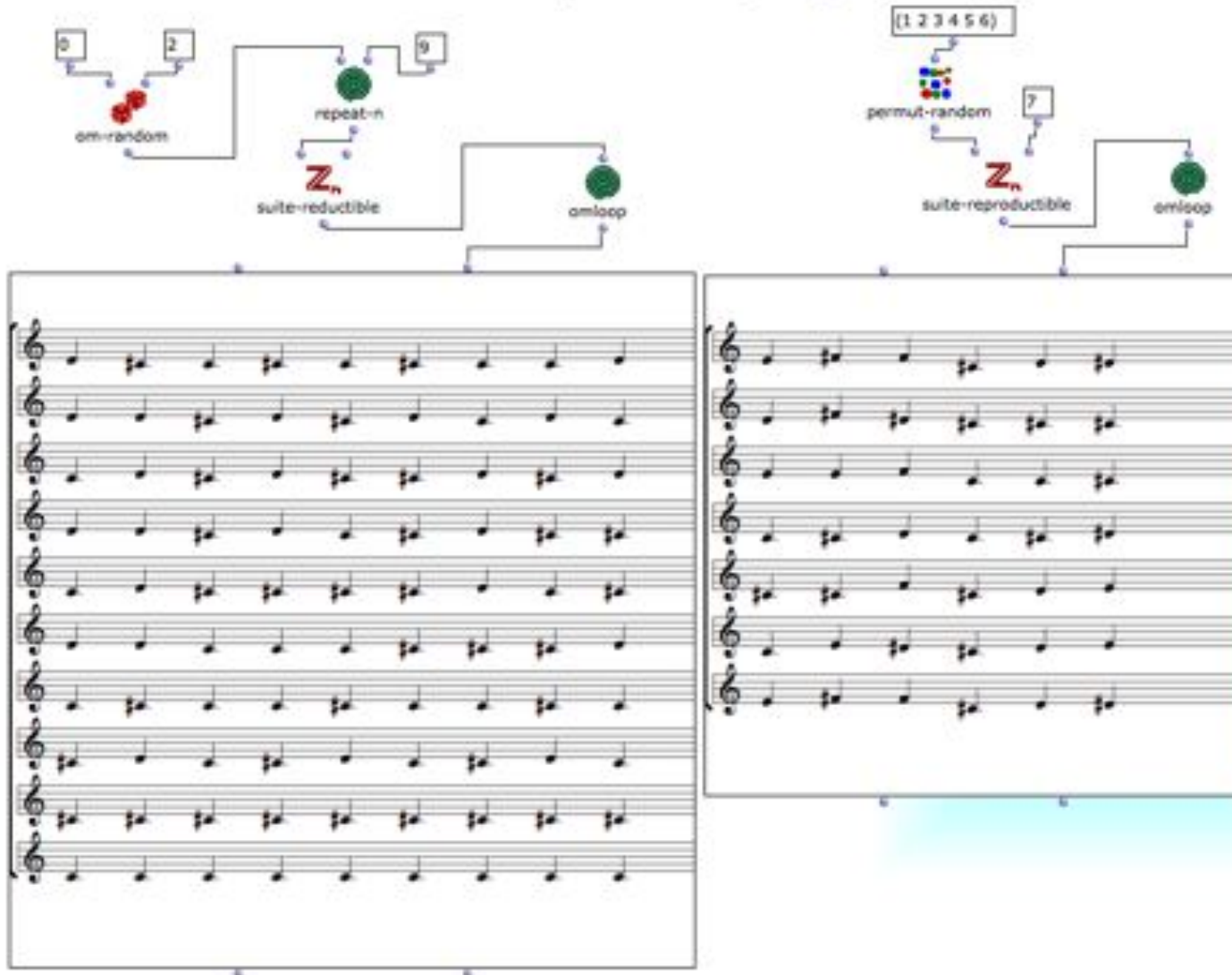
$$\begin{array}{rcl}
 f & = & 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ \dots \\
 Df & = & \begin{array}{cccccc} & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / \\ & 4 & 11 & 1 & 8 & 7 & 5 & 4 & 11 & 1 \dots \end{array} \\
 D^2f & = & \begin{array}{cccccc} & & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / \\ & & 7 & 2 & 7 & 11 & 10 & 11 & 7 & 2 & 7 \dots \end{array} \\
 D^3f & = & \begin{array}{cccccc} & & & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / \\ & & & 7 & 5 & 4 & 11 & 1 & 8 & 7 & 5 & 4 & 11 & 1 & 8 \dots \end{array} \\
 D^4f & = & \begin{array}{cccccc} & & & & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / \\ & & & & 10 & 11 & 7 & 2 & 7 & 11 & 10 & 11 \dots \end{array} \\
 D^5f & = & \begin{array}{cccccc} & & & & & \backslash & / & \backslash & / \\ & & & & & 1 & 8 & 7 & 5 & 4 & 11 & 1 & 8 \dots \end{array} \\
 D^6f & = & \begin{array}{cccccc} & & & & & & \backslash & / & \backslash & / \\ & & & & & & 7 & 11 & 10 & 11 & 7 & 2 & 7 & 11 \dots \end{array}
 \end{array}$$

Séquences reproductibles :
 $\exists k \geq 1$ tel que $D^k f = f$

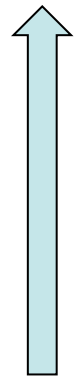
Critères de réductibilité et de reproductibilité

Toute séquence de période p^n à valeurs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est réductible

Toute séquence de $p-1$ nombres différents à valeurs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est reproductible



Additions successives à valeurs dans un groupe


$$\begin{array}{rcl} A^3 f & = & 0 \quad 1 \quad 5 \quad \dots \\ & & \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \\ A^2 f & = & 1 \quad 4 \quad 9 \quad 4 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 4 \dots \\ & & \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \\ A f & = & 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 1 \quad 3 \quad 5 \dots \\ & & \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \\ f & = & 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array}$$

Additions successives et prolifération des valeurs

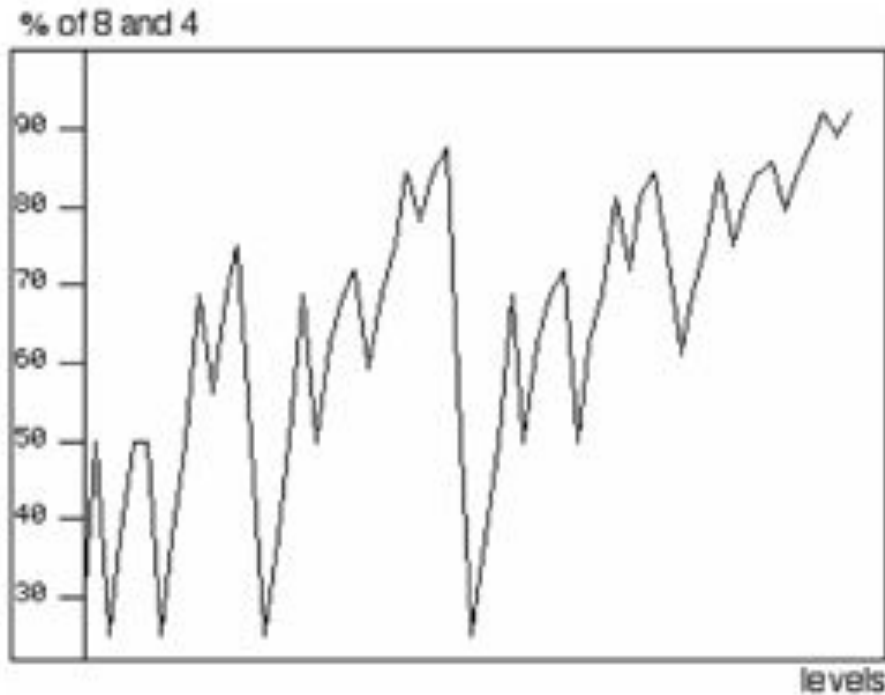
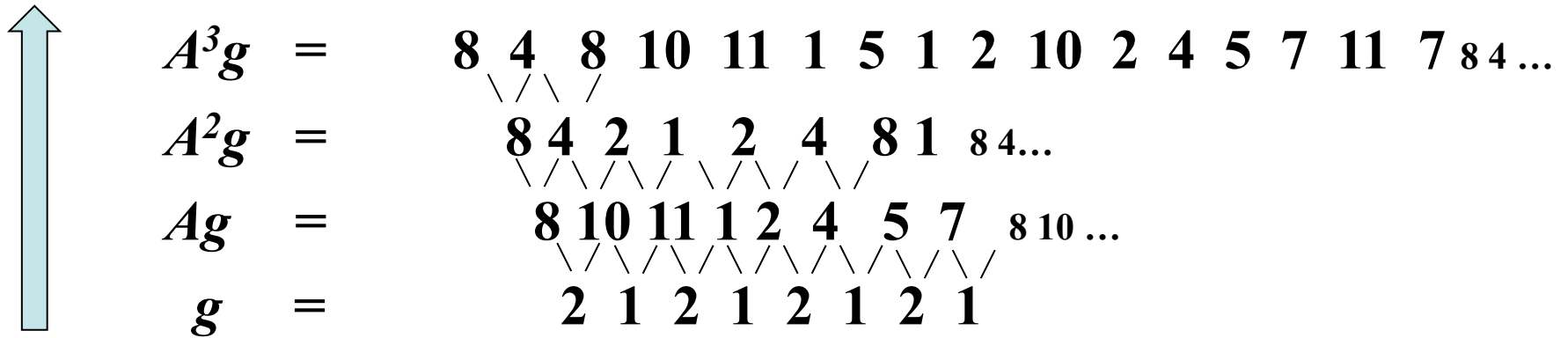


Fig. 11 Initial values equal to 8

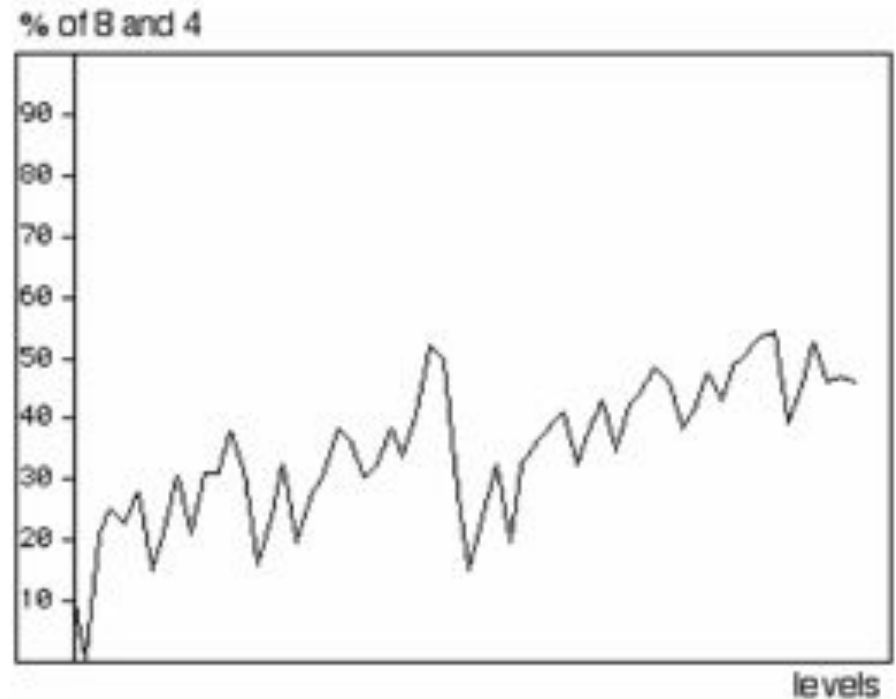


Fig. 15 Initial values equal to 4

Théorème de décomposition

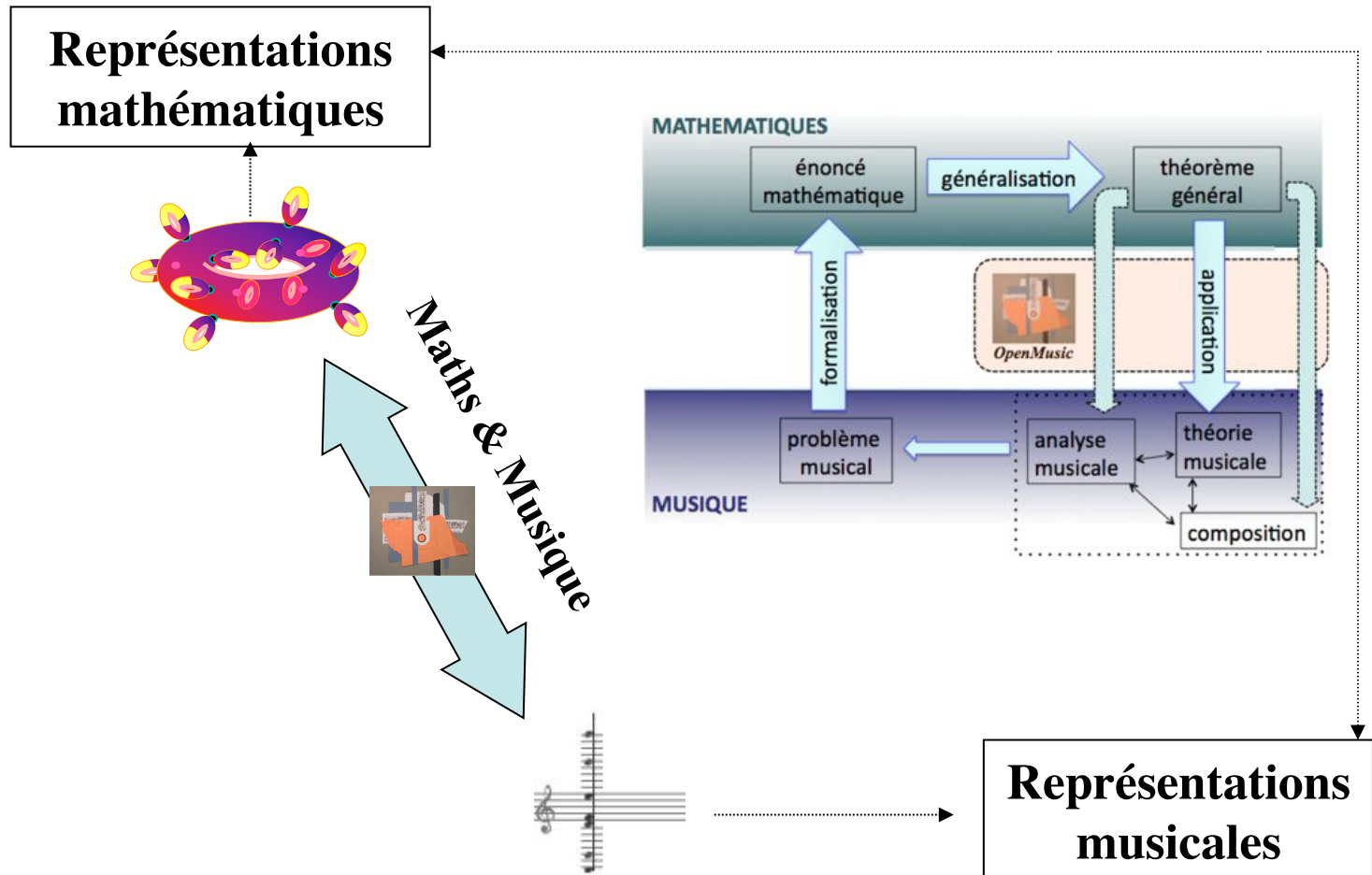
Toute séquence périodique (à valeurs dans un groupe cyclique $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$) peut se décomposer de façon unique en somme d'une séquence réductible et d'une séquence reproductible (2001)



	5	4	0	9	7	2	8	1	3	6	10	11
Red	1	4	10	7	1	4	10	7	1	4	10	7
Rep	4	0	2	2	6	10	10	6	2	2	0	4

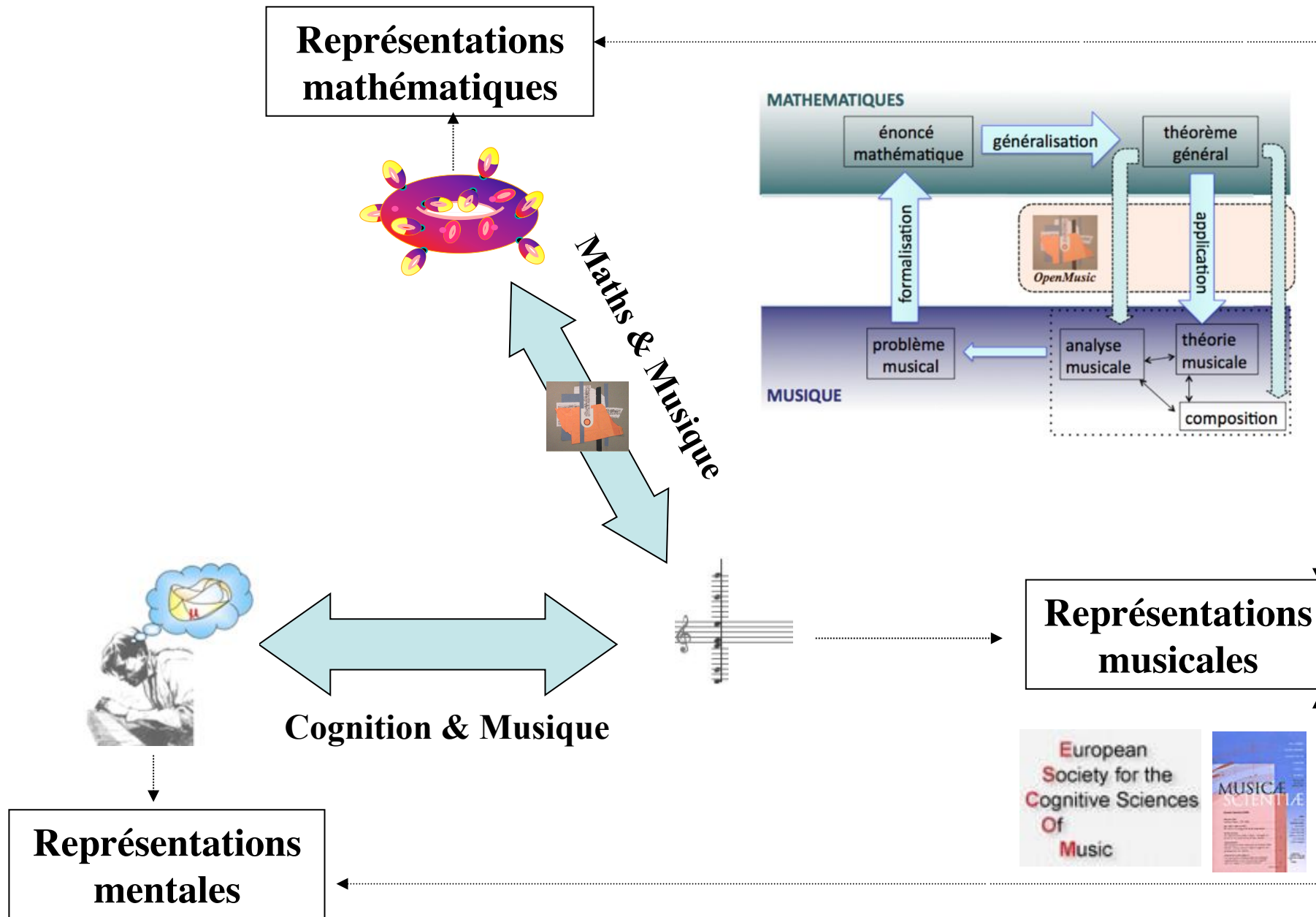
Quelle est la place de la cognition ?

<http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/Cognition.html>



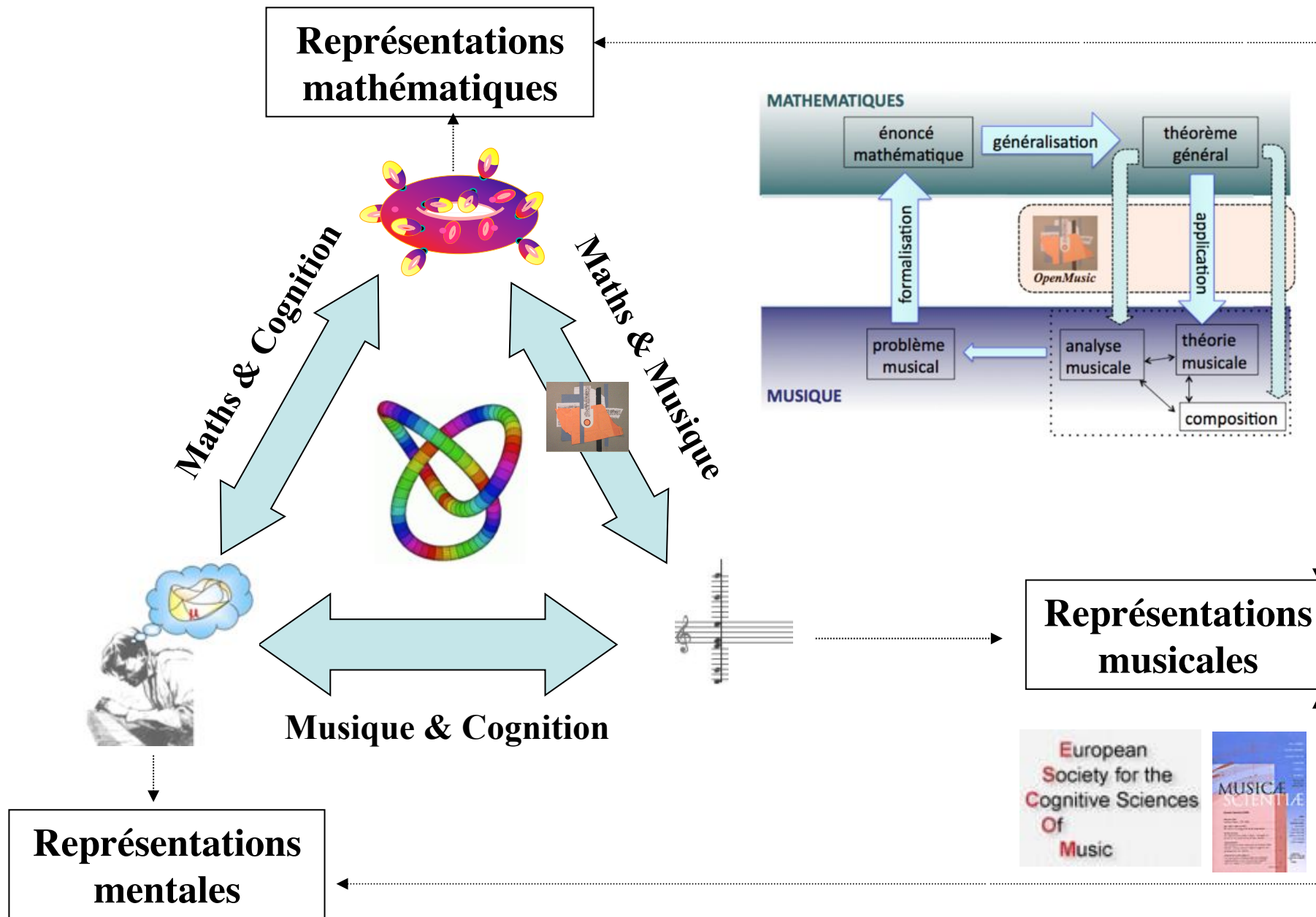
Quelle est la place de la cognition ?

<http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/Cognition.html>

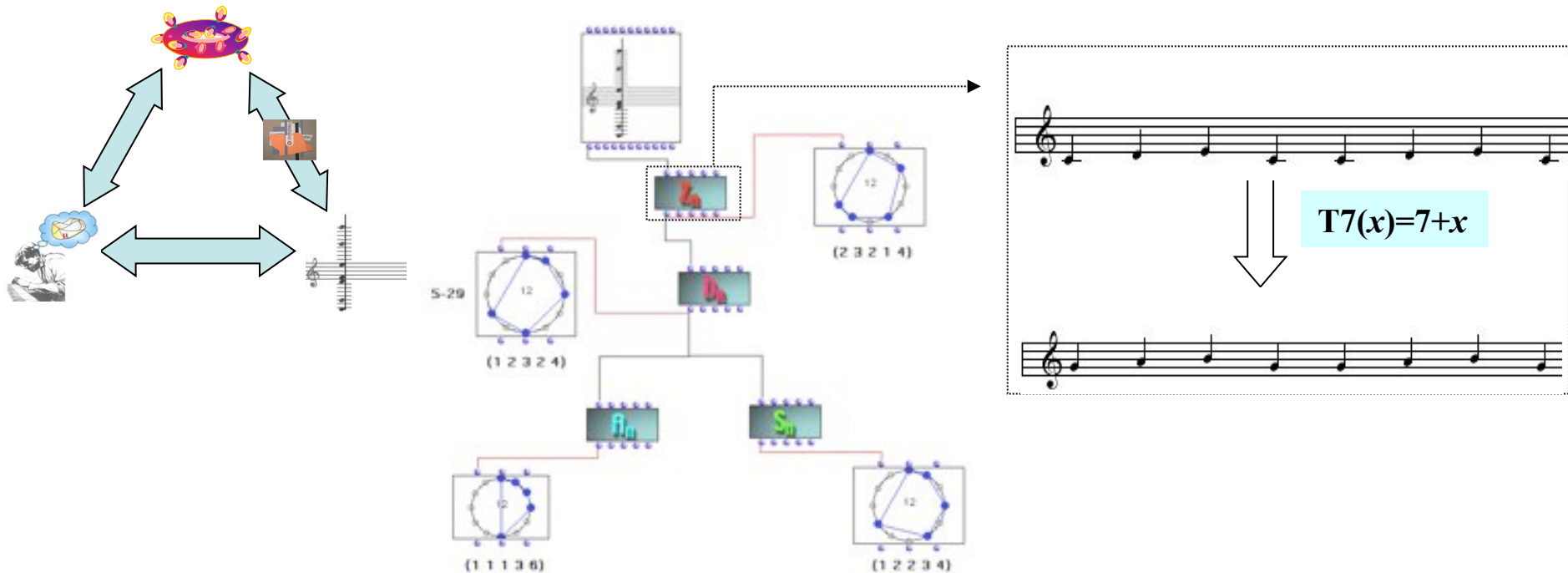


Quelle est la place de la cognition ?

<http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/Cognition.html>



Approche paradigmatique et perception



The nature of a given geometry is [...] defined by the *reference* to a determinate group and the way in which spatial forms are related within that type of geometry. [Cf. *Felix Klein Erlangen Program - 1872*][...] We may raise the question whether there are any concepts and principles that are, although in different ways and different degrees of distinctness, necessary conditions for both the *constitution* of the perceptual world and the construction of the universe of geometrical thought. It seems to me that the concept of group and the concept of invariance are such principles.



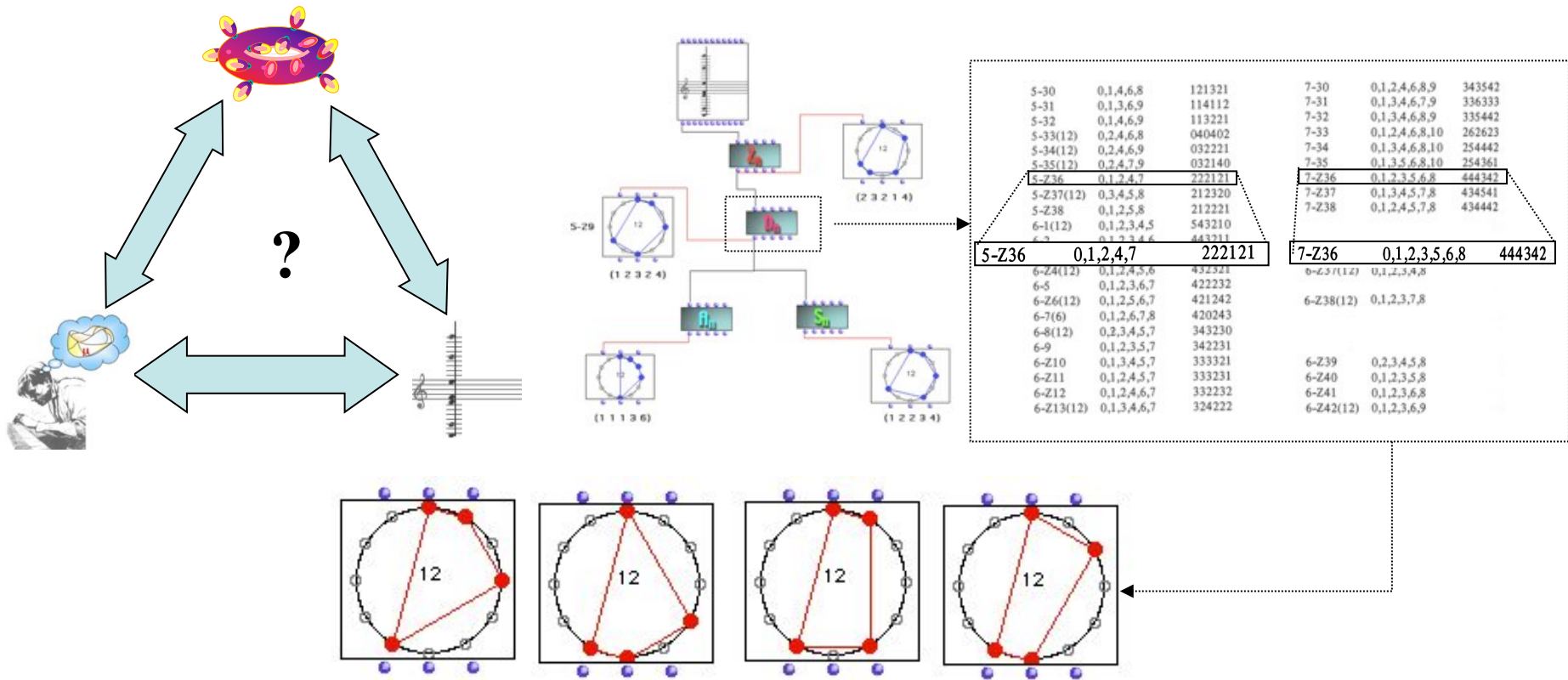
Felix Klein



Ernst Cassirer

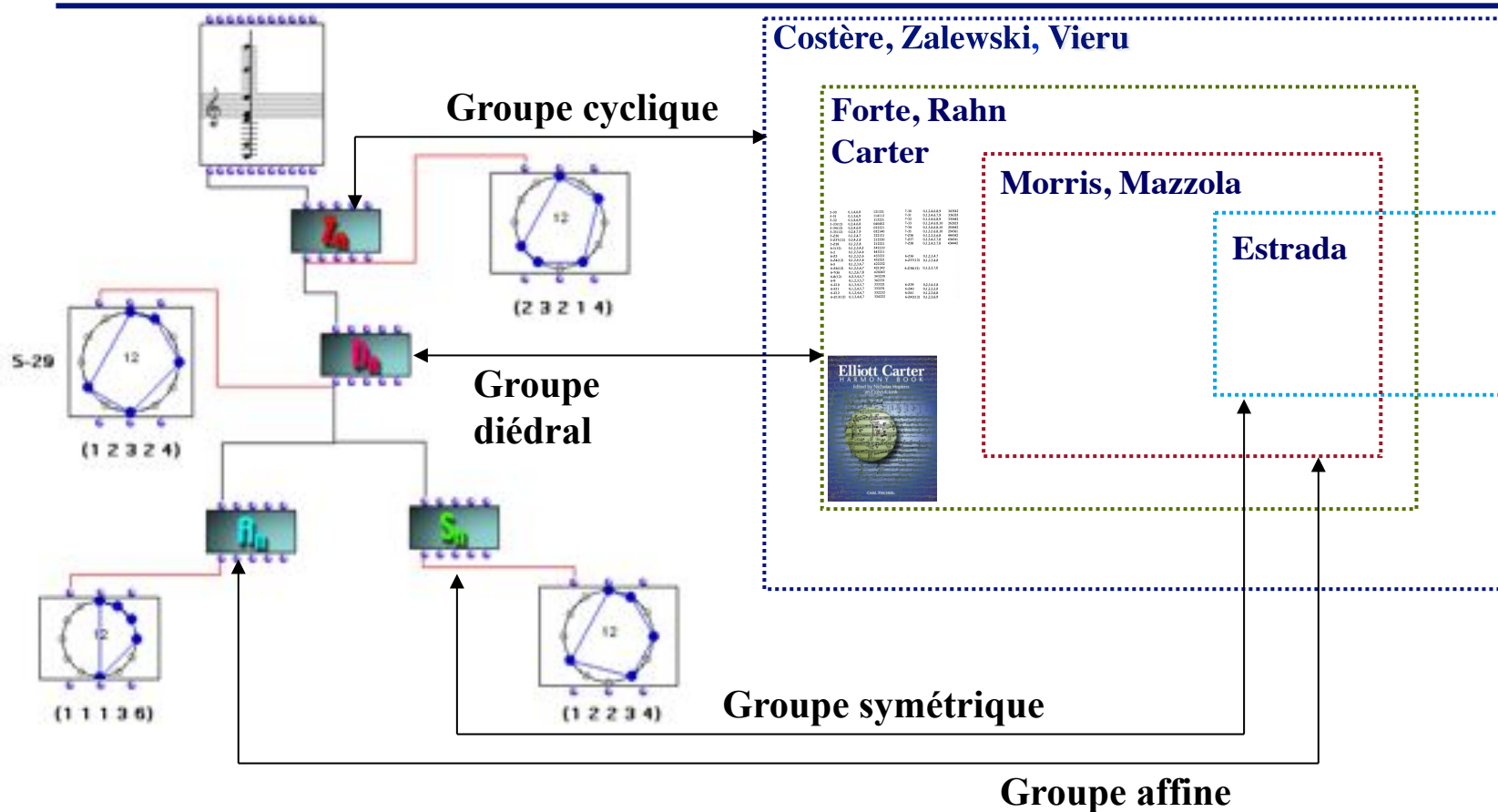
E. Cassirer : « The concept of group and the theory of perception », 1944

Approches « set-théoriques » et perception musicale



« Trained musicians rated the similarity of 24 instances of set classes [0137/0467] and [0157/0267] at three different transposition levels and two different spacing types. [...] The results are consistent with the hypothesis that even musicians with significant experience of atonal music do not use the equivalence relation TnI in making similarity judgments »

Architecture paradigmatique et dualité objectale/opératoire



« [C'est la notion de groupe qui] donne un sens précis à l'idée de structure d'un ensemble [et] permet de déterminer les éléments efficaces des transformations en réduisant en quelque sorte à son schéma opératoire le domaine envisagé. [...] L'objet véritable de la science est le système des relations et non pas les termes supposés qu'il relie. [...] Intégrer les résultats - symbolisés - d'une expérience nouvelle revient [...] à créer un canevas nouveau, un groupe de transformations plus complexe et plus compréhensif »

G.-G. Granger : « Pygmalion. Réflexions sur la pensée formelle », 1947

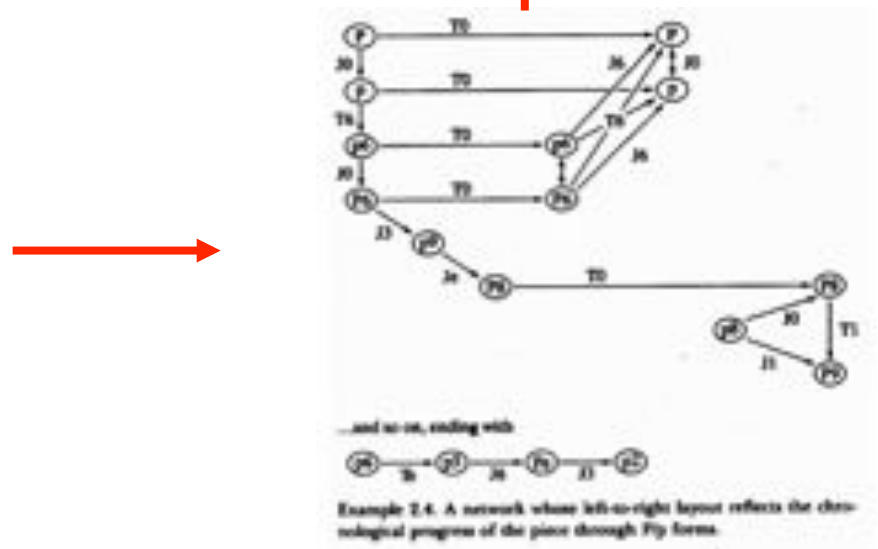
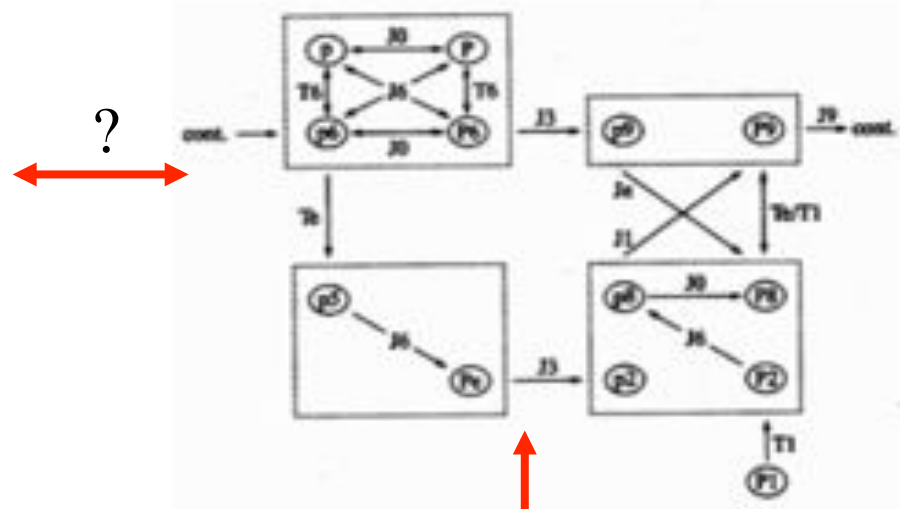
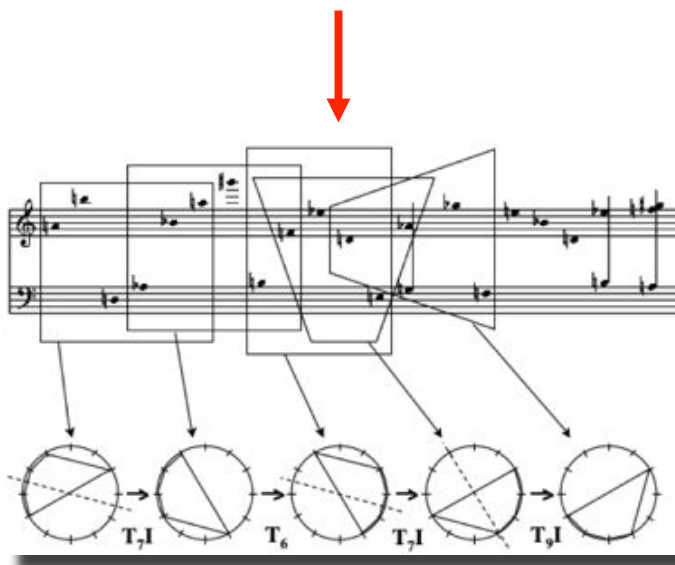
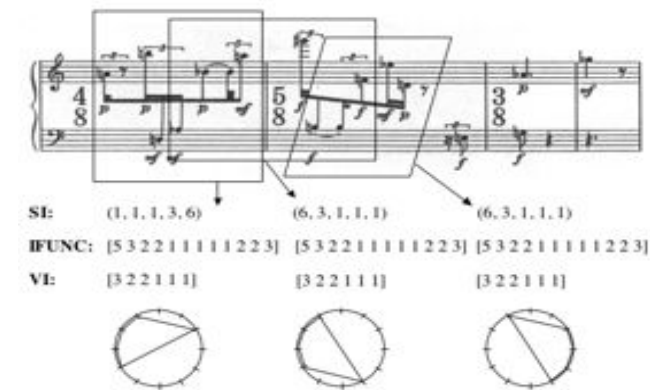


G.-G. Granger

Progression transformationnelle vs réseau transformationnel

« Group Theory has emerged as a powerful tool for analyzing cognitive structure. The number of cognitive disciplines using group theory is now enormous. The power of group theory lies in its ability to identify organization, and to express organization in terms of **generative actions that structure a space** »

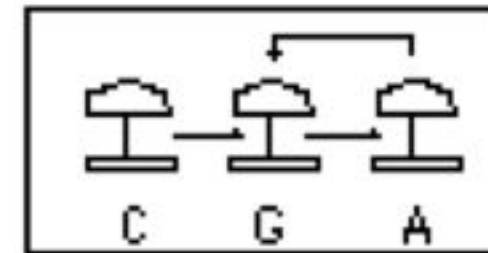
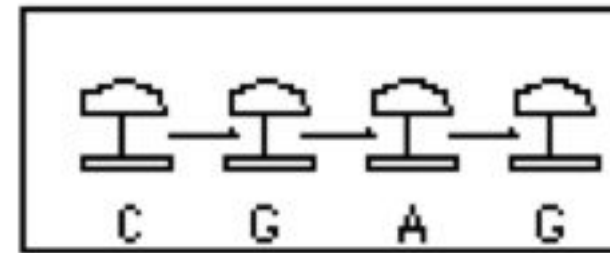
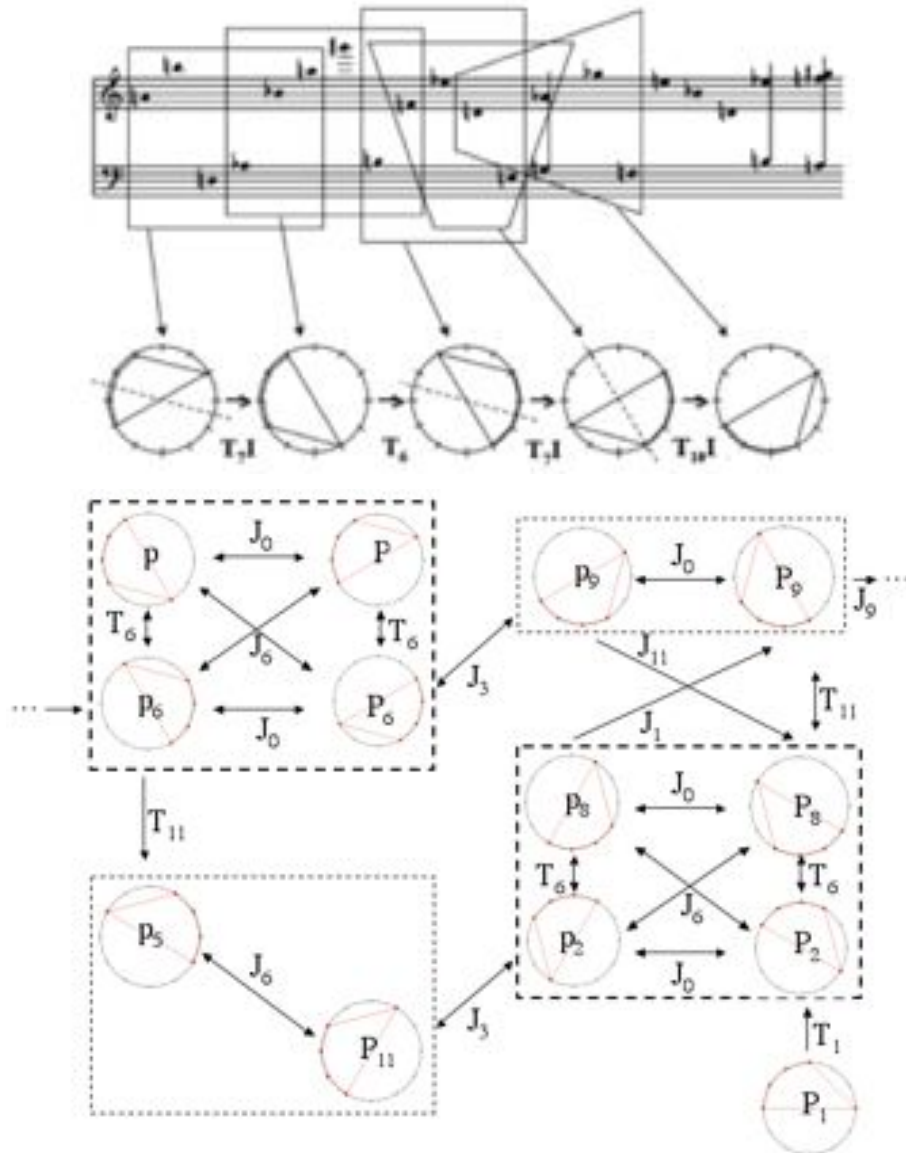
Michael Leyton, The International Society for Group Theory in Cognitive Science



Réseau transformationnel et cognition (musicale)



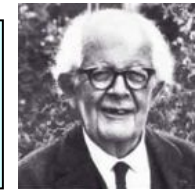
Bamberger, J. (1986). Cognitive issues in the development of musically gifted children. In *Conceptions of giftedness* (eds., R. J. Sternberg, & J. E. Davidson), pp. 388-413. Cambridge University Press, Cambridge



Bamberger, J. (2006). "What develops in musical development?" In G. MacPherson (ed.) *The child as musician: Musical development from conception to adolescence*. Oxford, U.K. Oxford University Press.

Aspects cognitifs d'une approche catégorielle en musique

« De même qu'en mathématique le structuralisme des Bourbaki est déjà doublé par un mouvement faisant appel à des **structures plus dynamiques** (les « catégories » [...]) de même toutes les formes actuelles du structuralisme [...] sont certainement grosses de développements multiples... »

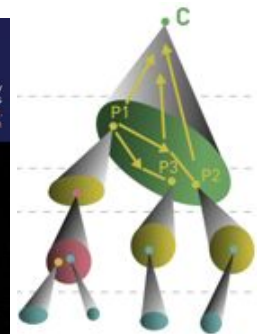
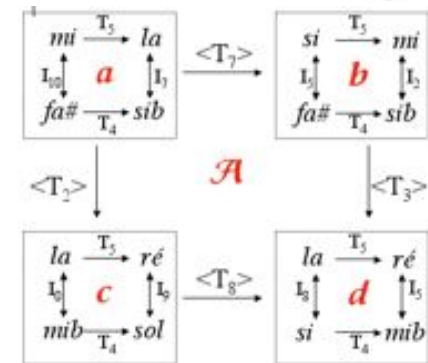
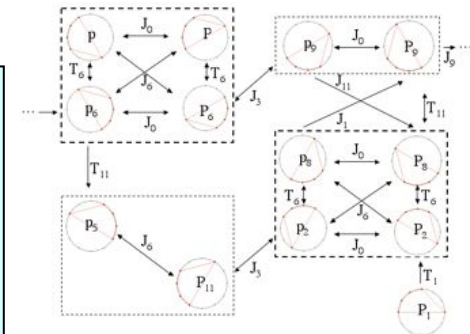


J. Piaget: *Le structuralisme*, 1968

« La théorie des catégories est une théorie des constructions mathématiques, qui est macroscopique, et procède d'étage en étage. Elle est un bel exemple d'abstraction réfléchissante, cette dernière reprenant elle-même un principe constructeur présent dès le stade sensori-moteur. Le **style catégoriel** qui est ainsi à l'image d'un aspect important de la **genèse des facultés cognitives**, est un style adéquat à la description de cette genèse »

Jean Piaget, Gil Henriques et Edgar Ascher, *Morphismes et Catégories. Comparer et transformer*, 1990

- G. S. Halford & W. H. Wilson, "A Category Theory Approach to Cognitive Development", *Cognitive Psychology*, 12, 1980
- J. Macnamara & G. E. Reyes, *The Logical Foundation of Cognition*, OUP, 1994
- A. Ehresmann, J.-P Vanbremerch, *Memory Evolutive Systems, Hierarchy, Emergence, Cognition*, 2007
- ...
- S. Phillips, W. H. Wilson, "Categorical Compositionality: A Category Theory Explanation for the Systematicity of Human Cognition", *PLoS Comp. Biology*, 6 (7), July 2010



De Piaget aux Systèmes évolutifs à mémoire

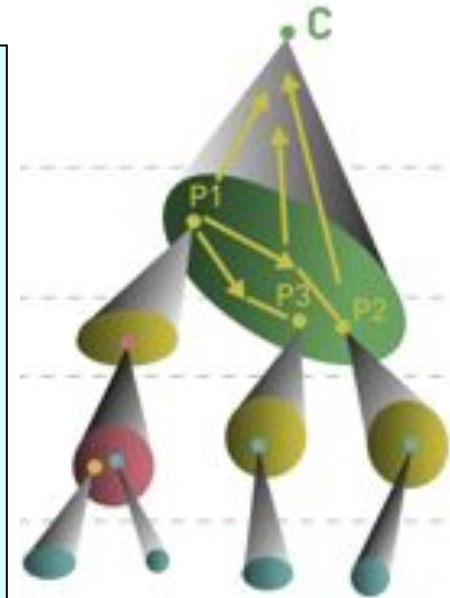
« La théorie des catégories est une théorie des constructions mathématiques, qui est macroscopique, et procède d'étage en étage. Elle est un bel exemple d'abstraction réfléchissante, cette dernière reprenant elle-même un principe constructeur présent dès le stade sensori-moteur. Le style catégoriel qui est ainsi à l'image d'un aspect important de la genèse des facultés cognitives, est un style adéquat à la description de cette genèse »



J. Piaget

Jean Piaget, Gil Henriques et Edgar Ascher, *Morphismes et Catégories. Comparer et transformer*, 1990

« [...]L'émergence d'une œuvre d'art est l'expression d'une dynamique se développant dans un système hiérarchique de complexité croissante à multiples temporalités. Notamment, dans le cadre de notre modèle mathématique « les systèmes évolutifs à mémoire » (SEM), nous analysons l'existence d'objets multiformes émergeant dans le système sociétal d'un « monde artistique »; il pourrait s'agir de courants artistiques, issus de mouvements de pensée, de mouvements sociaux, culturels, scientifiques, technologiques. » (Colloque « Complexité dans les sciences et dans les arts », Ircam, 8-19 juin 2009)



A. Ehresmann et J.-P. Vanbremeersch, « Petite mathématique de la création », *L'étincelle*, n° 6, novembre 2009

Vers une « algèbre des objets mentaux » (Changeux) en musique

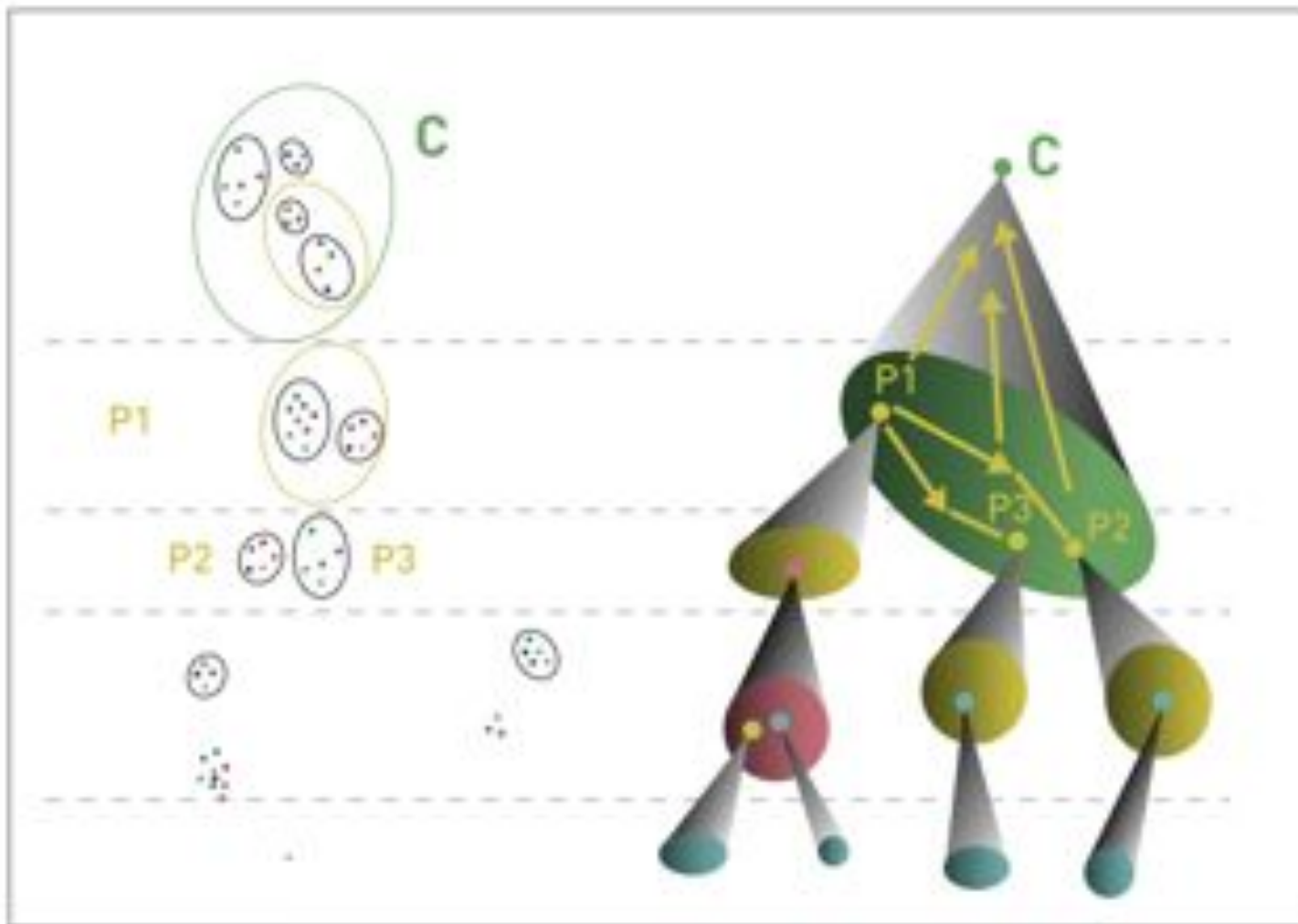
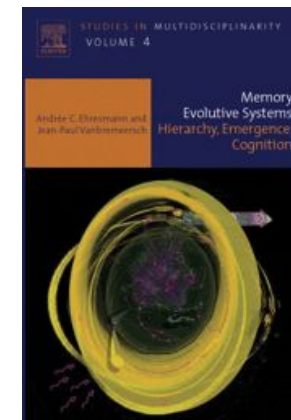
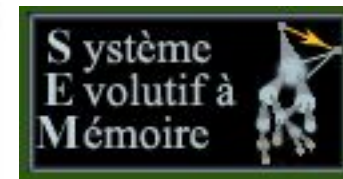


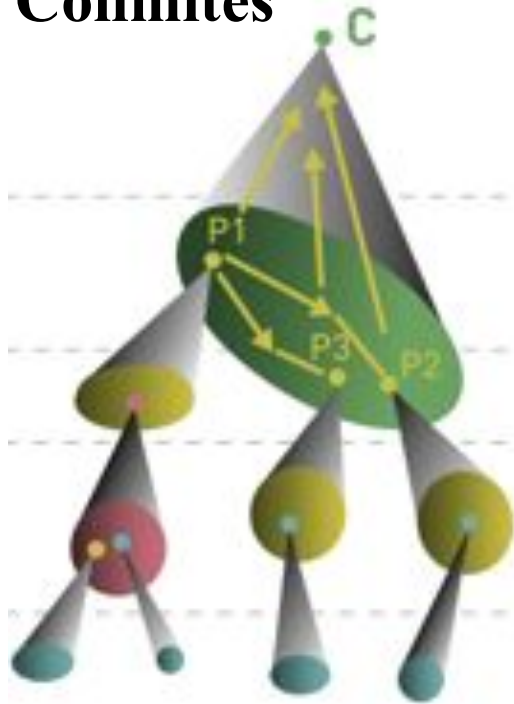
FIGURE 1 : À GAUCHE, FORMATION PROGRESSIVE D'UN OBJET COMPLEXE C PAR RECOLLEMENT D'OBJETS PLUS SIMPLES. À DROITE MODÈLE CATEGORIQUE DE LA RAMIFICATION DE C, DÉPLOYÉE « DE HAUT EN BAS ».



Portrait of Julia Ross
1965
Oil on canvas
100 x 100 cm
Edition 1/100
© 2008

Systemes évolutifs à mémoire et K -réseaux ?

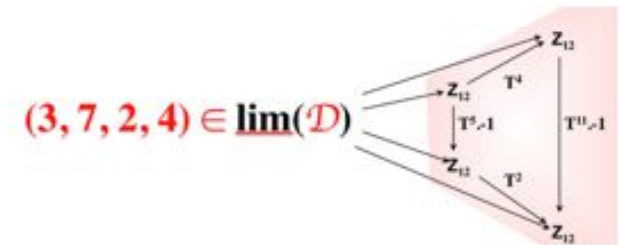
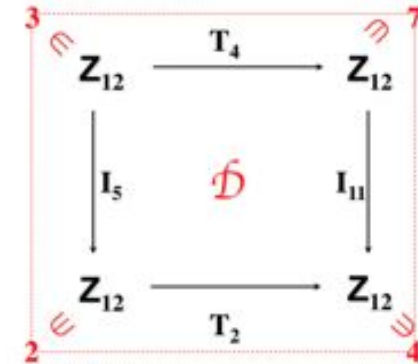
Colimites



dualité

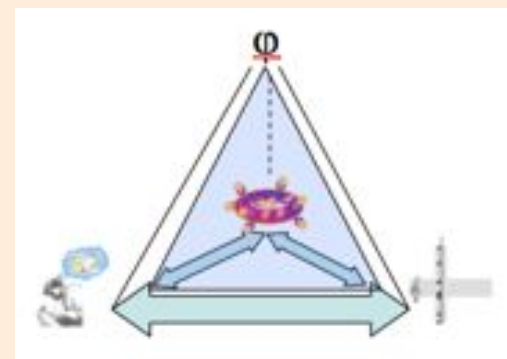


Limites



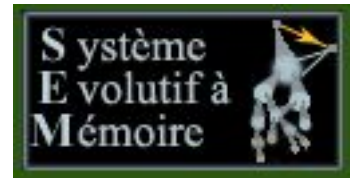
La représentation d'un état mental, tel un processus cognitif complexe, par un cat-neurone d'ordre supérieur conduit à une nouvelle approche du problème philosophique de l'identité entre états mentaux et états physiques du cerveau.

?



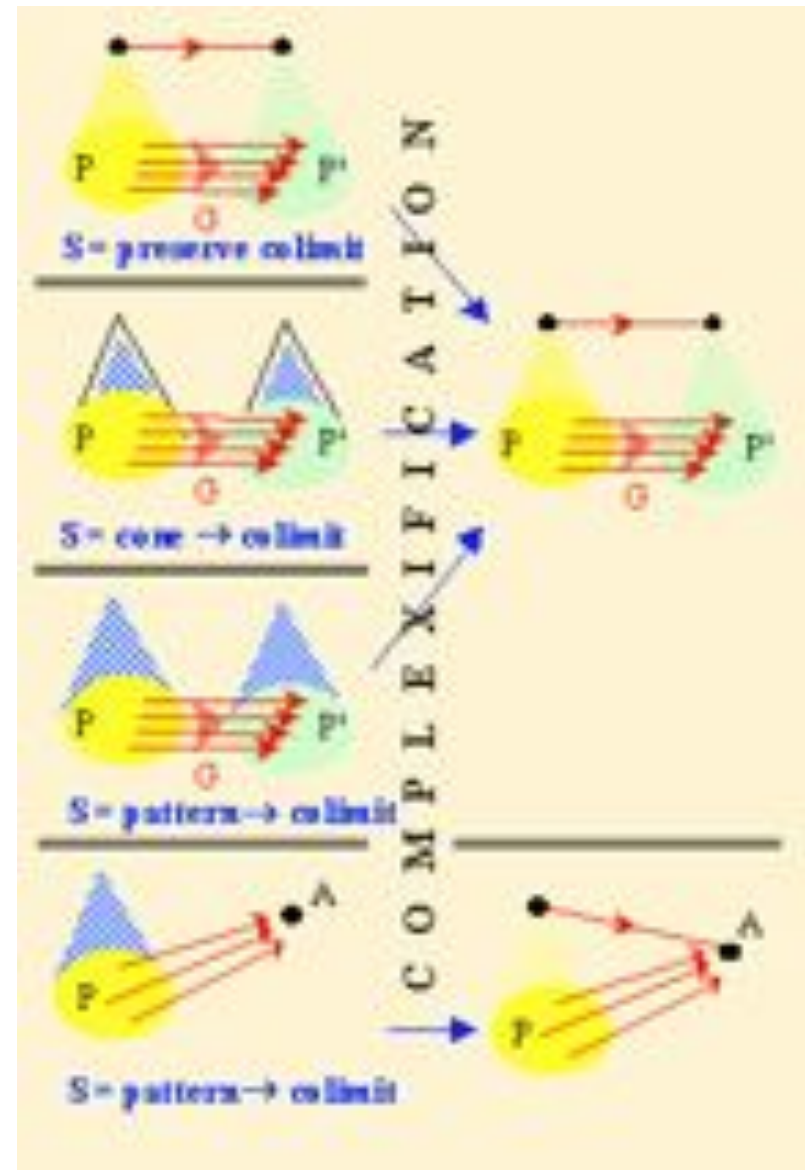
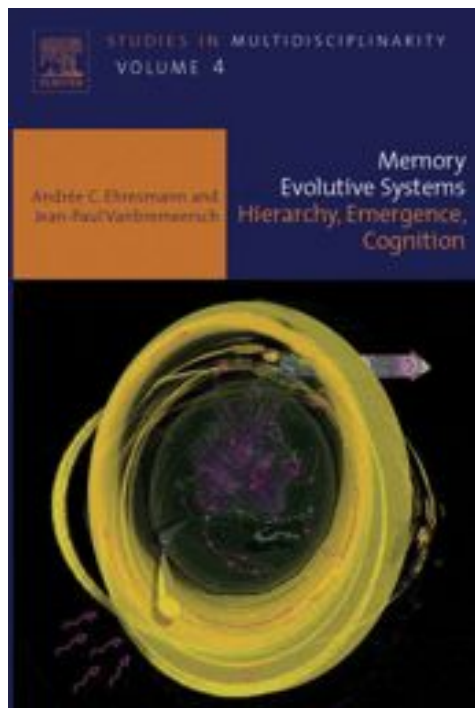
Quelle philosophie pour la recherche mathématique ?

« Memory Evolutive Systems » et neurones catégoriels



<http://pagesperso-orange.fr/vbm-ehr/>

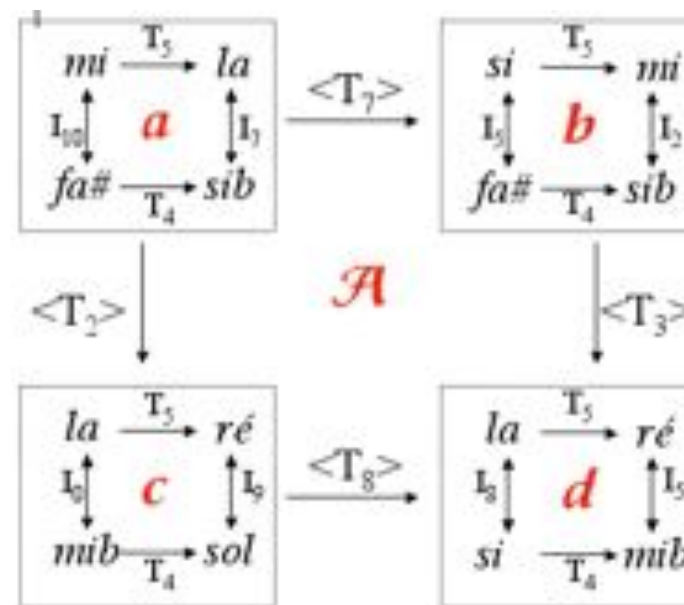
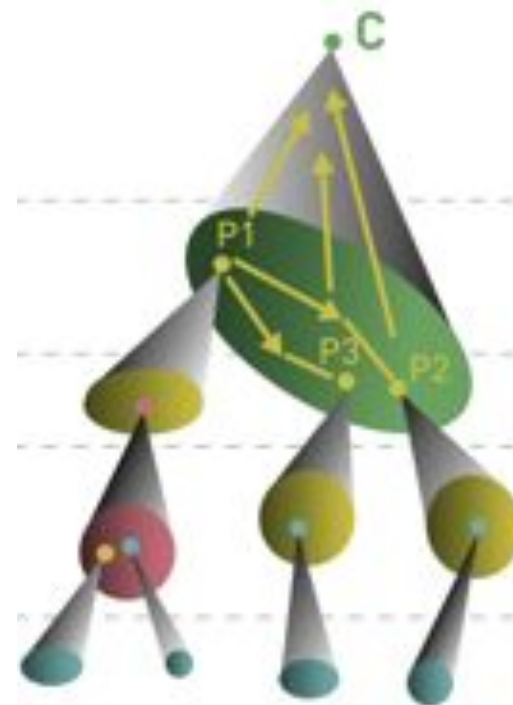
A 'simple' cat-neuron emerges as the colimit in a complexification of Neur of a pattern of neurons which has no colimit neuron in Neur, but acts as a synchronous coherent assembly of neurons in the sense of Hebb. An iteration of the process leads to cat-neurons of order 2 which correspond to a super-assembly (or 'assembly of assemblies') of neurons, which cannot be reduced to a (large) synchronous assembly of simple neurons. Higher order cat-neurons in successive complexifications represent super-super-assemblies, and so on.



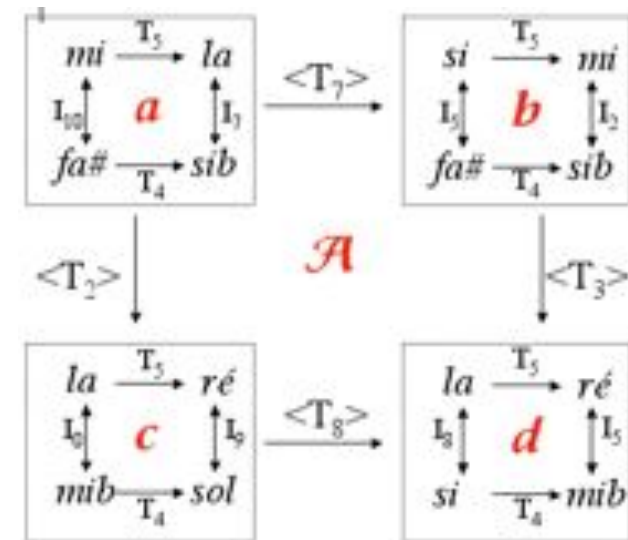
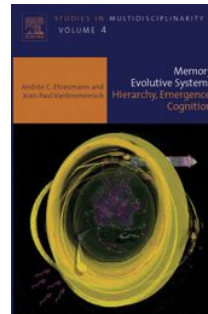
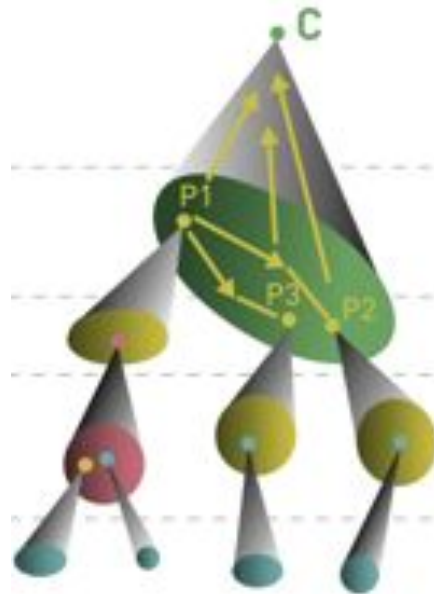
Les cat-neurones et la dualité corps/esprit

<http://pagesperso-orange.fr/vbm-ehr/>

La **représentation** d'un **état mental**, tel un processus cognitif complexe, par un **cat-neurone** d'ordre supérieur conduit à une nouvelle approche du problème philosophique de l'identité entre **états mentaux et états physiques du cerveau**. En effet, un état physique, tel qu'il est vu par imagerie médicale, correspond à l'activation d'une simple assemblée de neurones (modélisée par un cat-neurone simple). Mais un cat-neurone d'ordre supérieur n'est pas (directement) réductible à une telle assemblée, bien qu'il soit construit par des complexifications successives à partir du niveau des neurones, et qu'il ait des ramifications jusqu'à ce niveau. Ainsi son activation exige plusieurs étapes, passant par les niveaux intermédiaires d'une de ses ramifications, jusqu'au niveau des états physiques; et, à chaque étape, elle peut se propager par l'une ou l'autre des décompositions non-équivalentes d'objets multifaces, avec balancement entre elles qui peut être d'origine aléatoire (bruit) ou contrôlé. Bien que ce processus représente un "événement" physique bien déterminé, il ne s'identifie pas à un "état" physique: **on peut dire que les états mentaux émergent de manière dynamique (au travers du déploiement graduel d'une ramification) des états physiques, sans leur être identiques**. Ceci définirait un monisme émergentiste au sens de Bunge.



Vers une explication catégorielle de la perception musicale ?



A 'simple' **cat-neuron** emerges as the colimit in a complexification of Neur of a pattern of neurons which has no colimit neuron in Neur, but acts as a synchronous coherent assembly of neurons in the sense of Hebb.

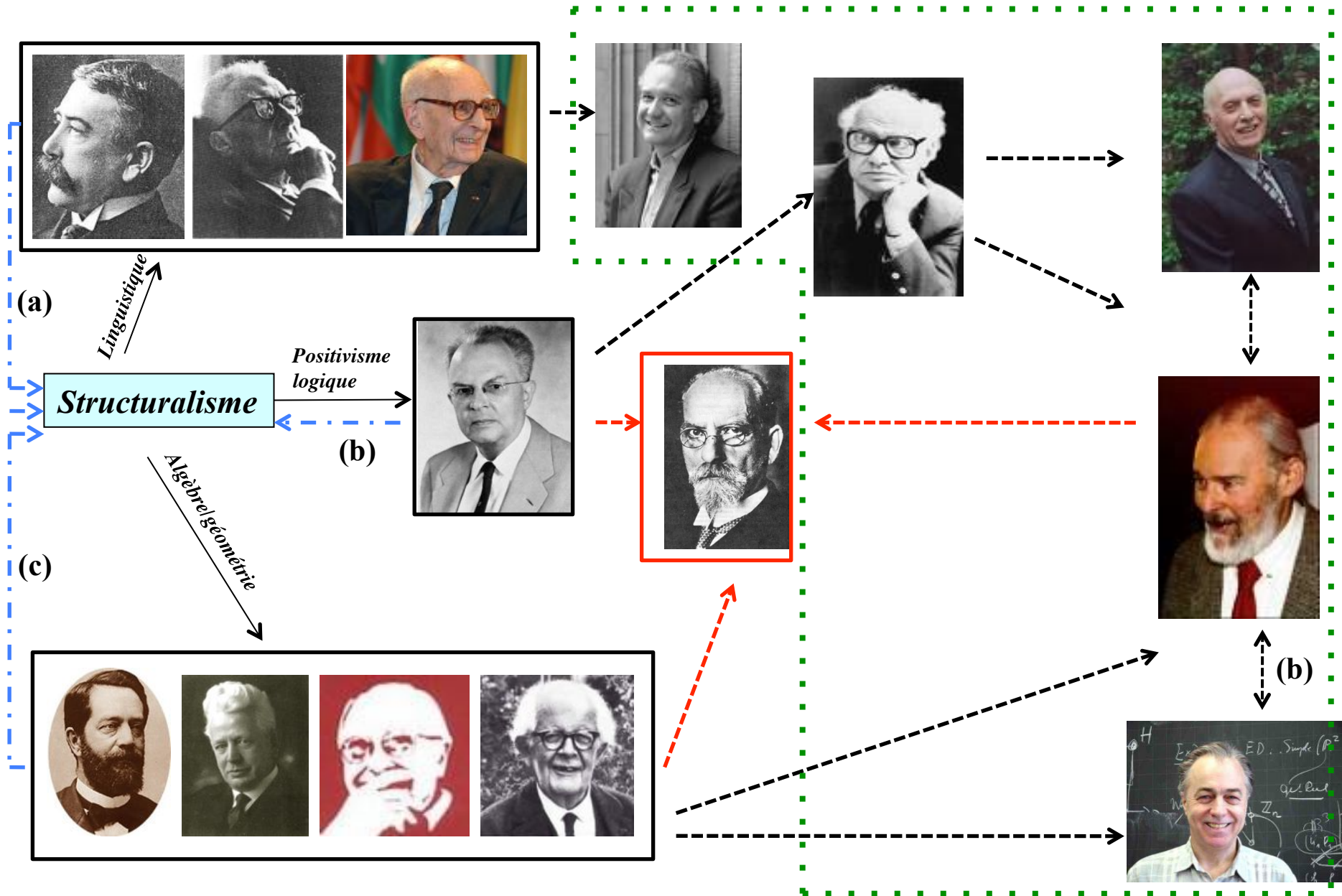
[A. Ehresmann, J.-P Vanbremeersch, *Memory Evolutive Systems, Hierarchy, Emergence, Cognition*, 2007]

Category theory offers a re-conceptualization for cognitive science, analogous to the one that Copernicus provided for astronomy, where representational states are no longer the center of the cognitive universe — replaced by the relationships between the maps that transform them.

[S. Phillips, W. H. Wilson, “Categorical Compositionality: A Category Theory Explanation for the Systematicity of Human Cognition”, *PLoS Comp. Biology*, 6(7), July 2010]

Démarche structurale et approche phénoménologique

Repenser la généalogie du structuralisme et le rôle des structures



Vers un structuralisme-phénoménologique en musique ?

Mathématiques, perception esthétique et cognition/perception musicales

Modèles mathématiques

Perception esthétique

Cognition/perception musicales

