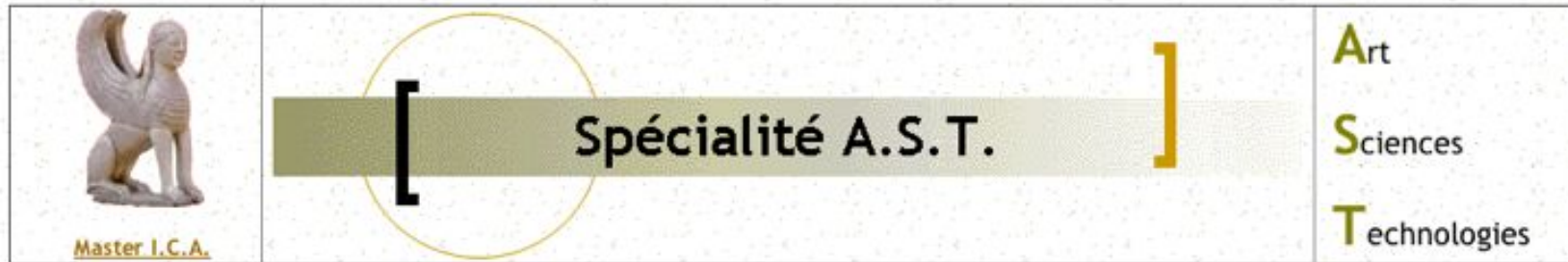


Master I.C.A.



Traitement interactif de l'image et du son

Méthodes mathématiques pour la création musicale :
aspects théoriques, informatiques et cognitifs

– Moreno Andreatta –

Equipe Représentations Musicales
IRCAM/CNRS/UPMC UMR 9912

`Moreno.Andreatta@ircam.fr`

Canons rythmiques et pavage de l'espace



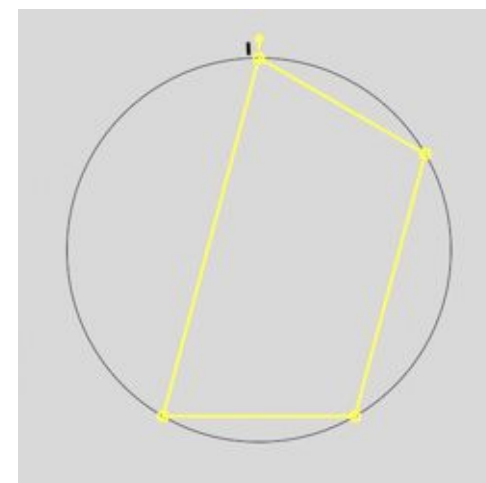
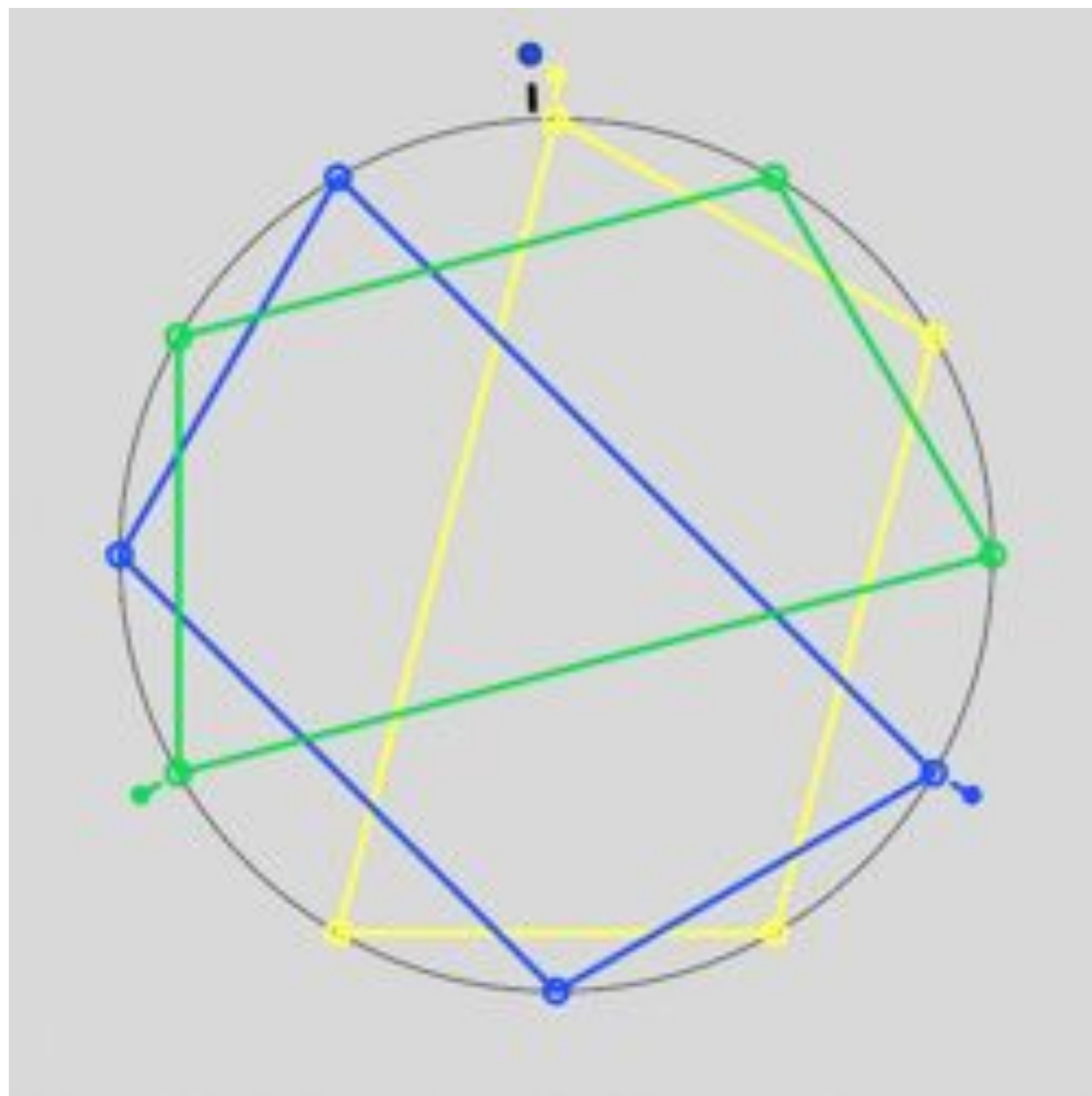
Harawi (1945)

Visions de l'Amen (1943)

**Modèle
rythmique**

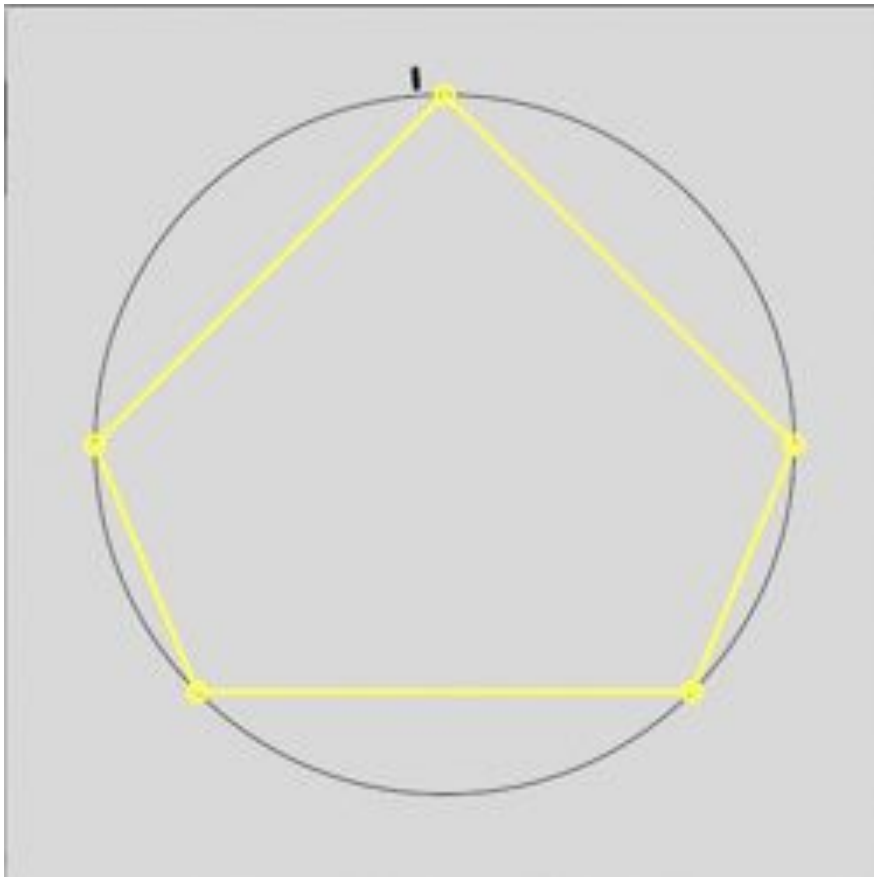
« ...il résulte de tout cela que les différentes sonorités se mélangent ou s'opposent de manières très diverses, jamais au même moment ni au même endroit [...]. C'est du désordre organisé »

Tiling the line (or the circle) with translates of one tile

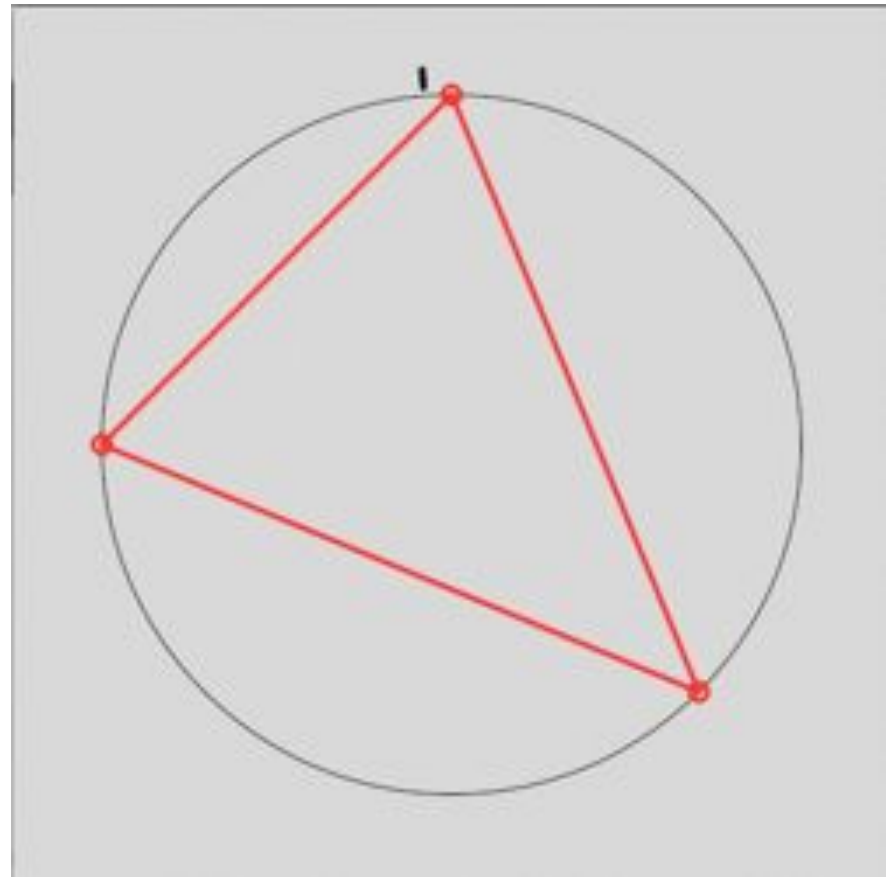


Some examples of traditional rhythms

El cincoillo

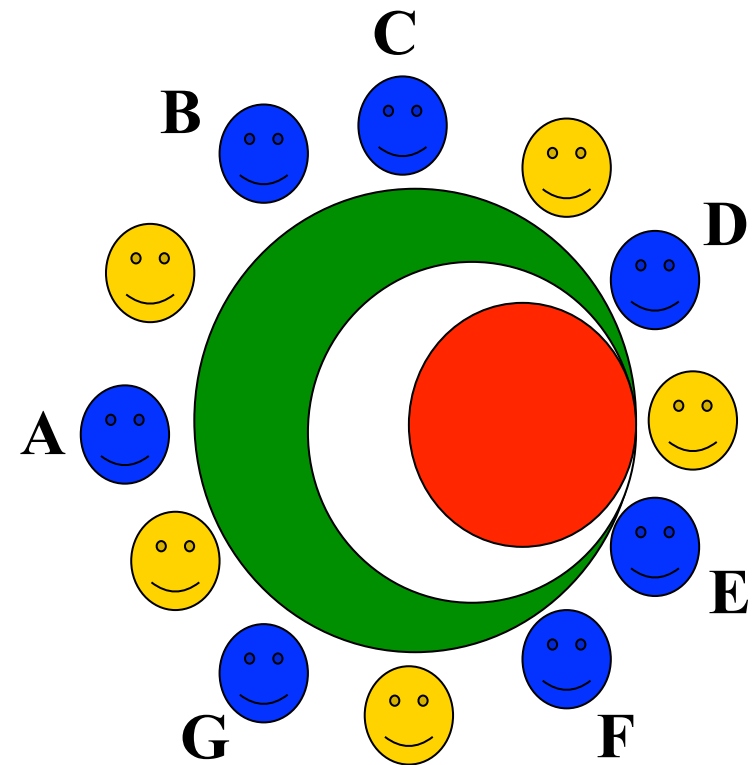
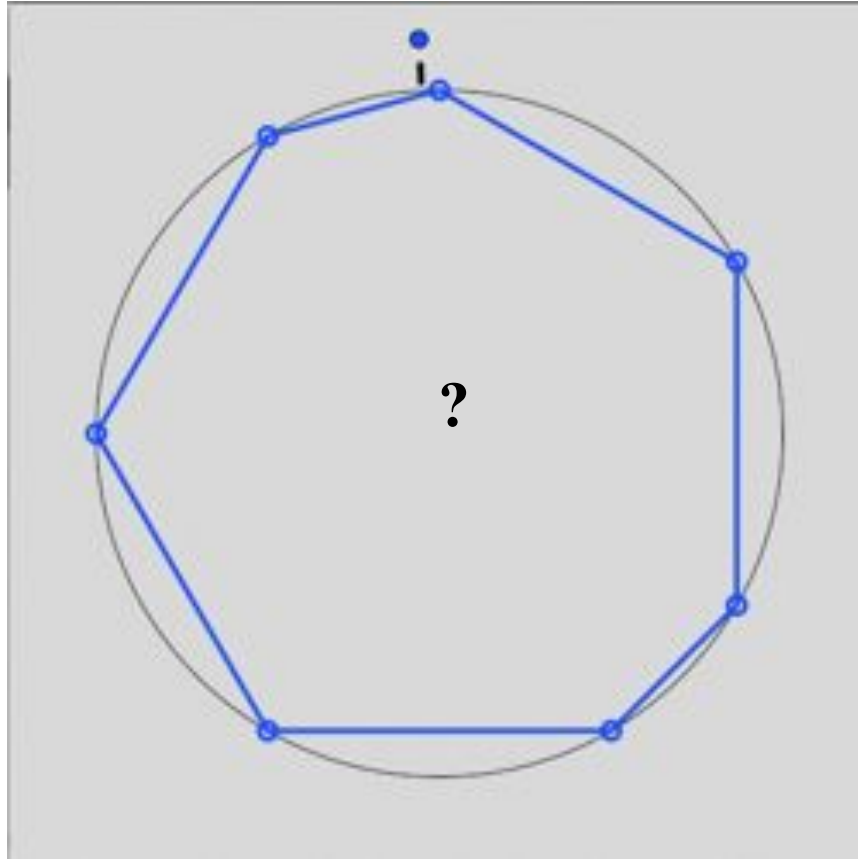


El trecillo



A very particular rhythmic pattern

Bembé



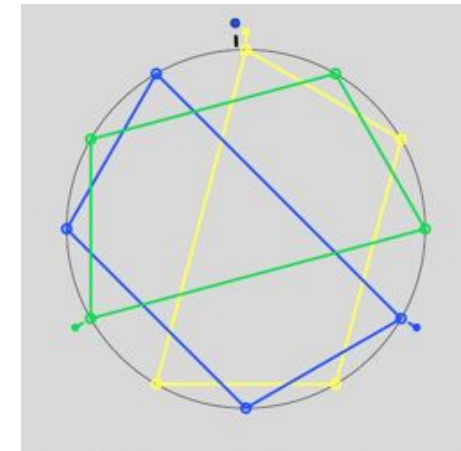
Jack Douthett & Richard Krantz, "Energy extremes and spin configurations for the one-dimensional antiferromagnetic Ising model with arbitrary-range interaction", *J. Math. Phys.* 37 (7), July 1996

Rhythmic Tiling Canons as group factorisations

$A < \mathbb{Z}_n$
 $B < \mathbb{Z}_n$

$\mathbb{Z}_{12} = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$

$\mathbb{Z}_{12} = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4$



$A \subset \mathbb{Z}_n$
 $B < \mathbb{Z}_n$

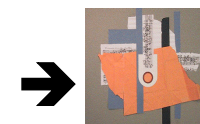
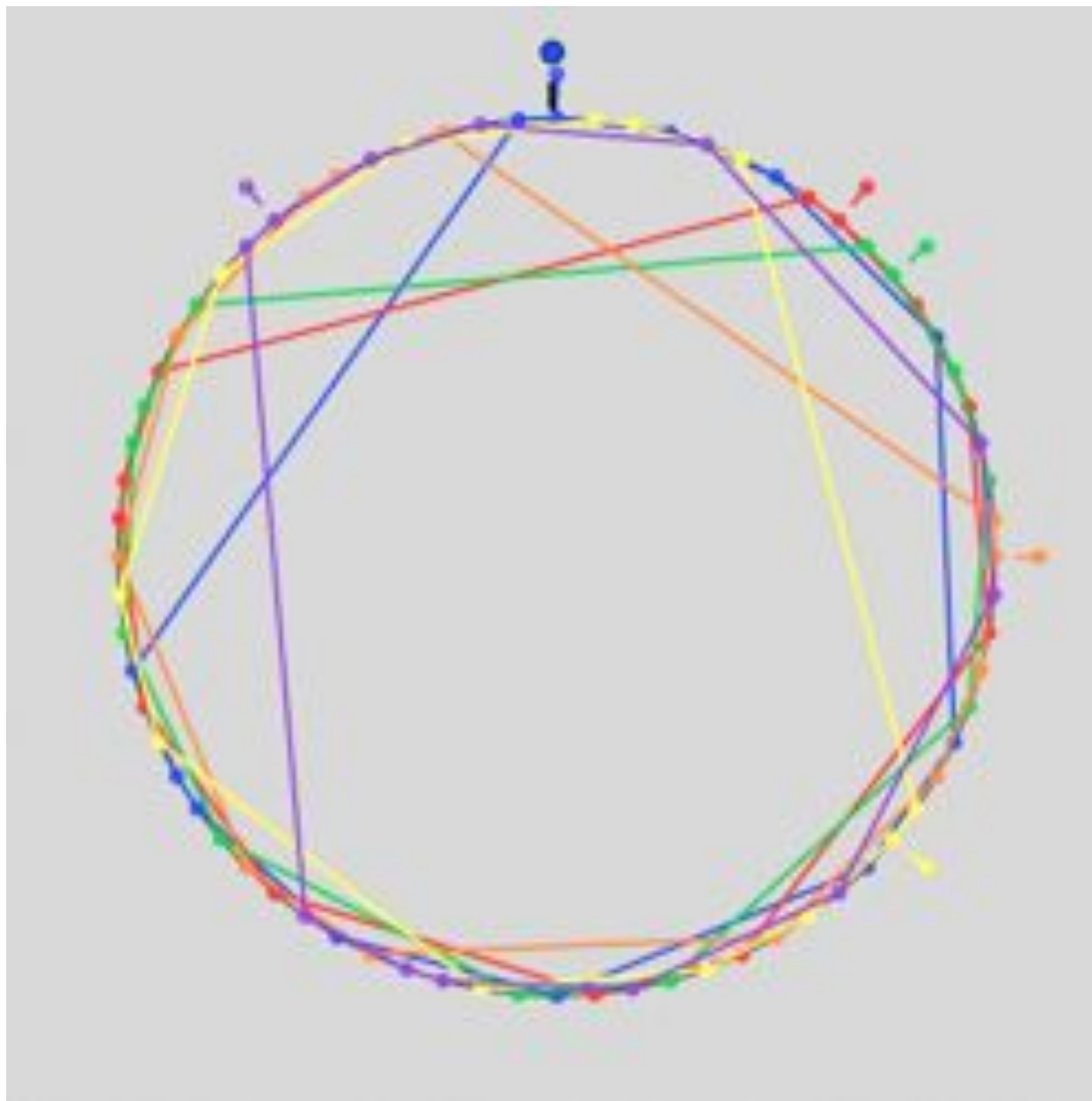
$$\mathbb{Z}_n = A \oplus B$$

$A \subset \mathbb{Z}_n$
 $B \subset \mathbb{Z}_n$
 B periodic subset

Factorisations without inner periodicity (Vuza Canons)

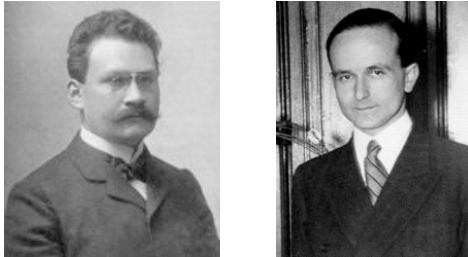
The diagram illustrates the factorization of a Vuza Canon. It features three circular chord diagrams and a musical score. The leftmost circle shows a complex chord structure with multiple overlapping lines in various colors (red, green, blue, purple, yellow). The middle and right circles, enclosed in a solid black box, show two simpler chord structures with red lines, separated by a plus sign (\oplus), indicating their sum equals the complex structure on the left. Below these circles is a musical score with five staves, each containing a sequence of notes. A speaker icon is located in the bottom right corner of the dashed box.

A Tiling rhythmic canon with unpredictable melody

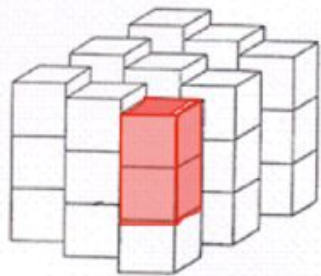


Les canons mosaïques comme problème « mathémusical »

Le problème de Minkowski/Hajos



Dans un pavage simple [*simple lattice tiling*] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de



1907-1942

Les canons mosaïques de Vieru/Vuza



Un canon de Vuza est une factorisation d'un groupe cyclique en somme directe de deux sous-ensembles non-périodiques

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = R \oplus S$$



1991

Lien entre Minkowski et Vuza (Andreatta, 1996)

Groupes de Hajós (*good groups*)

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \in \{p^\alpha, p^\alpha q, pqr, p^2q^2, p^2qr, pqr s\}$ où p, q, r, s , sont des nombres premiers distincts



Groupes non-Hajós (*bad groups*)

72
 108 120 144 168 180
 200 216 240 252 264 270 280 288
 300 312 324 336 360 378 392 396
 400 408 432 440 450 456 468 480
 500 504 520 528 540 552 560 576 588 594
 600 612 616 624 648 672 675 680 684 696
 700 702 720 728 744 750 756 760 784 792
 800 810 816 828 864 880 882 888...

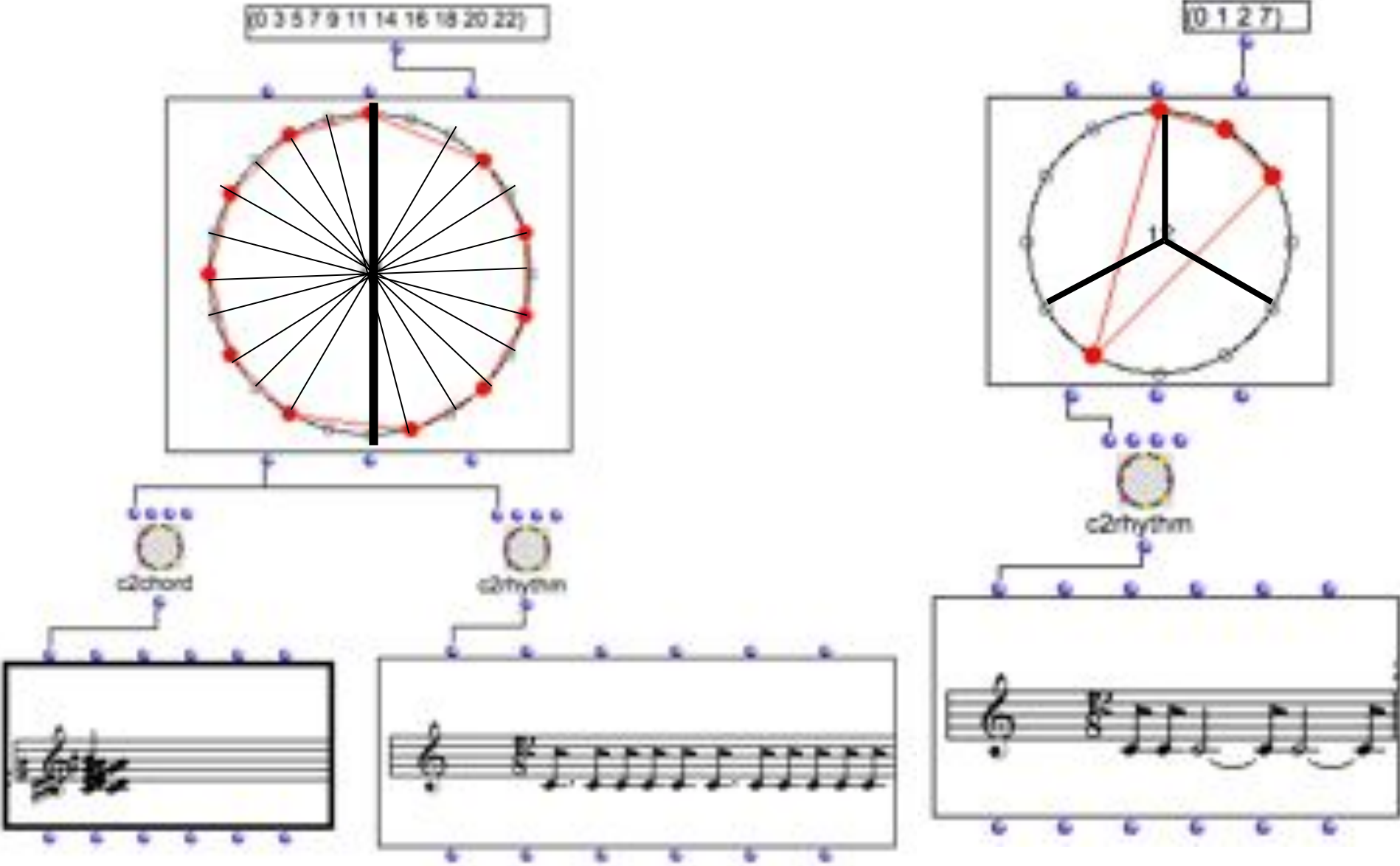
1996

M. Andreatta, « Constructing and Formalizing Tiling Rhythmic Canons: a historical Survey of a “Mathemusical” Problem », invited paper, Special Issue « Tiling Problems in Music », *Perspectives of New Music*, J. Rahn (ed.), University of Washington, Seattle (2011).

Propriété d'imparité rythmique et ses généralisations

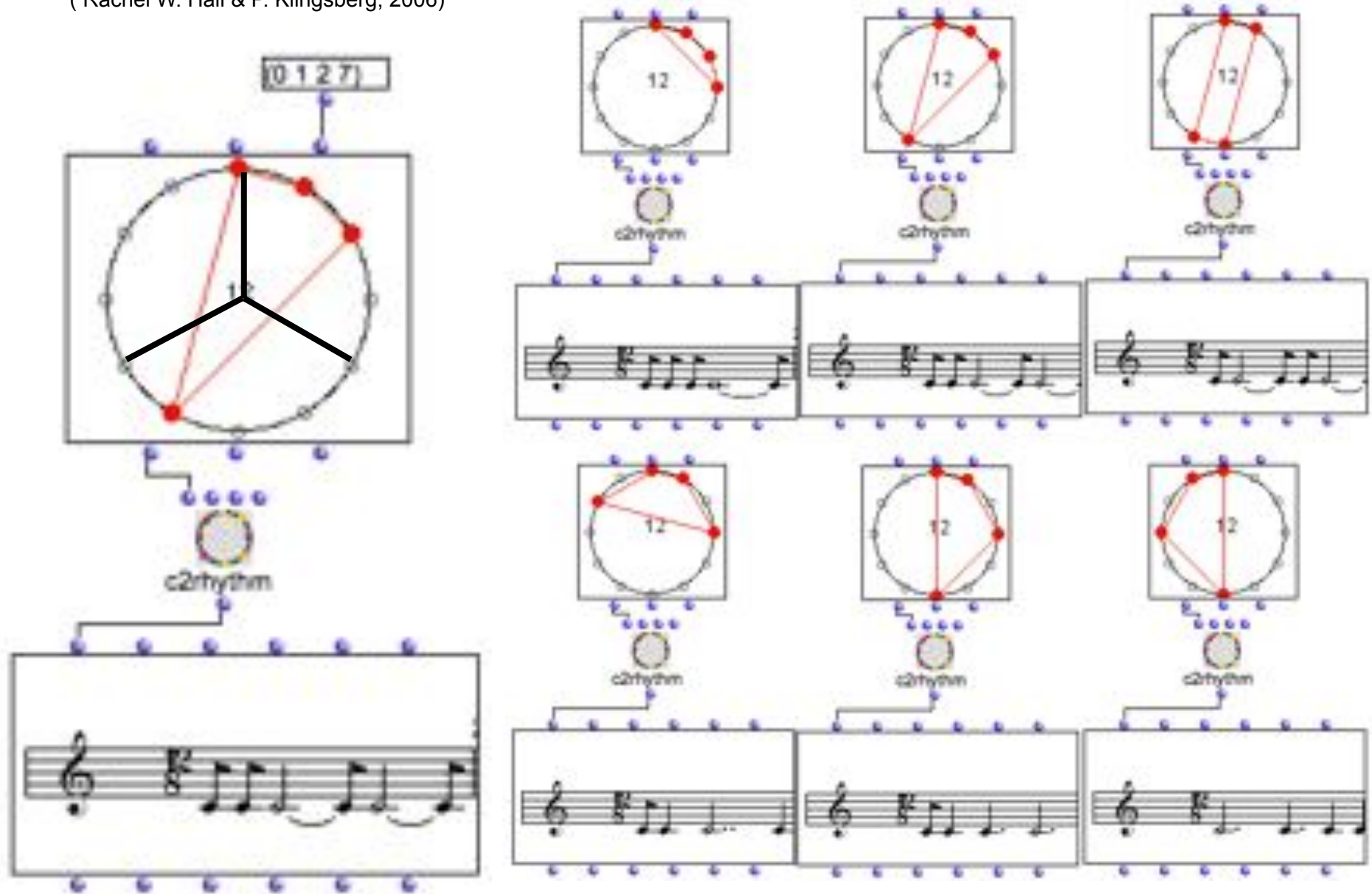
(Simha Arom & Marc Chemillier)

(R. W. Hall & P. Klingsberg, Asymmetric rhythms and tiling canons. American Mathematical Monthly 113 (2006), no.10, 887-896)



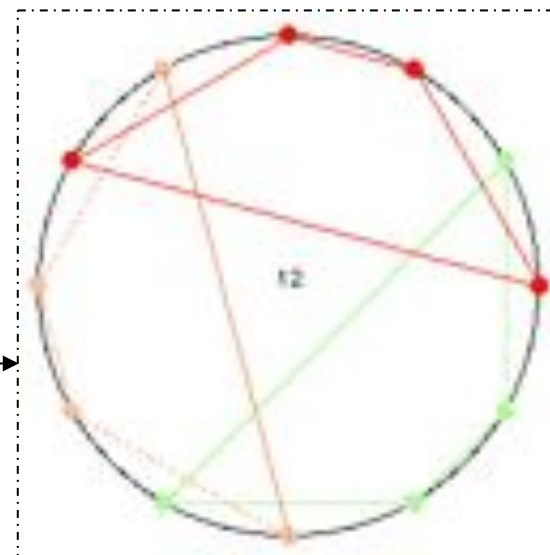
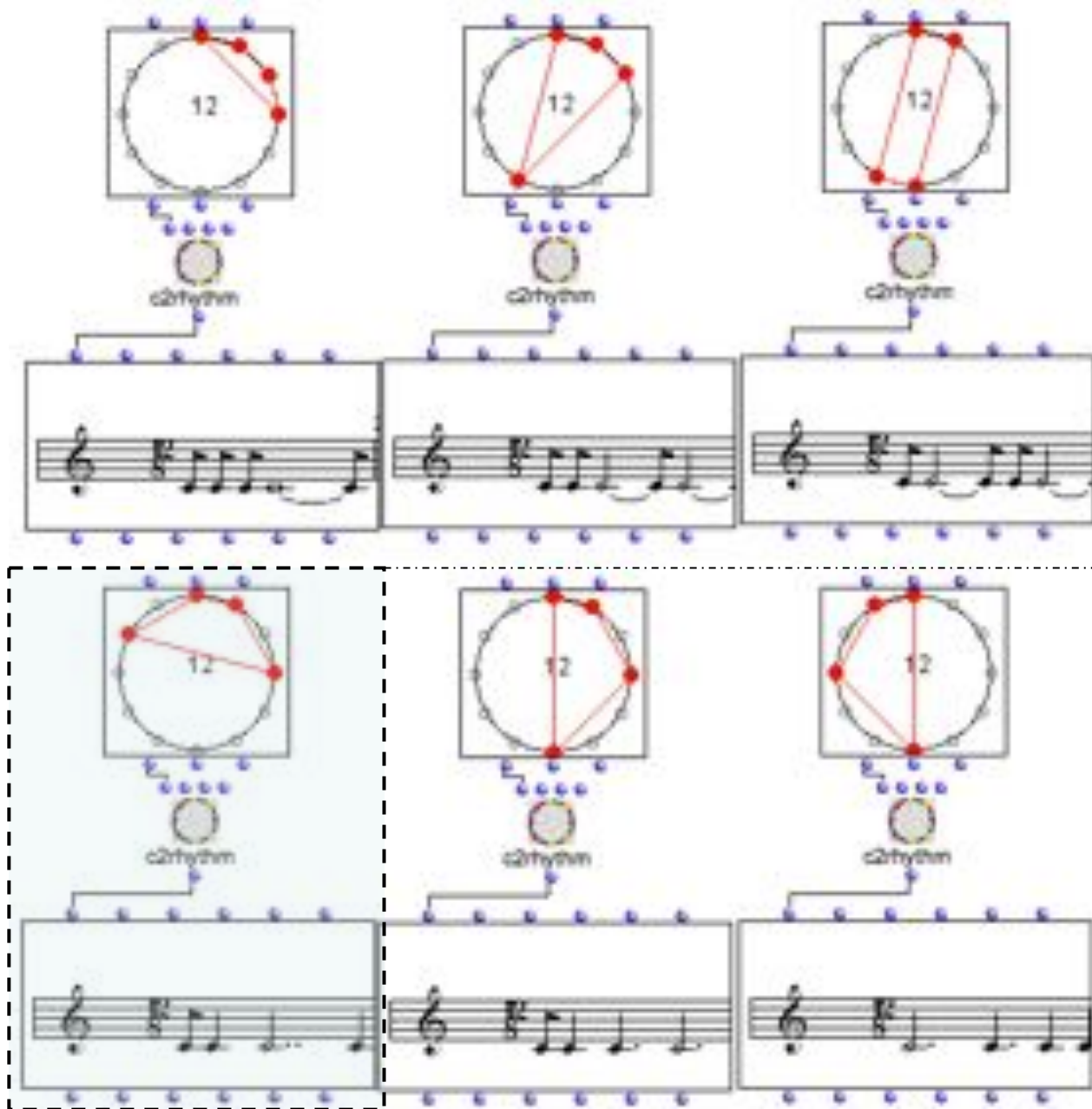
Rythmes 3-asymétriques

(Rachel W. Hall & P. Klingsberg, 2006)



Rythmes 3-asymétriques et pavages

(Rachel W. Hall & P. Klingsberg, 2006)



=> *OpenMusic*

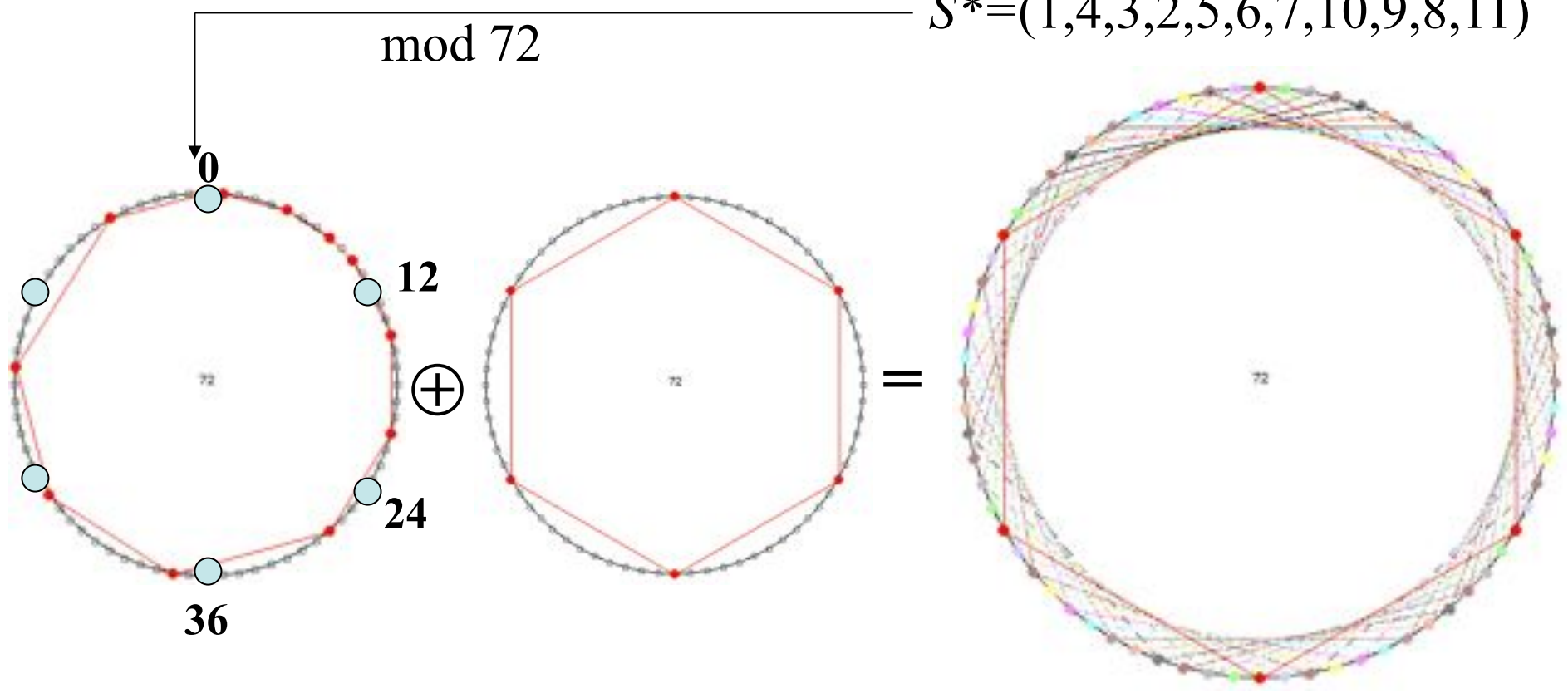
Canons rythmiques mosaïques et séries tous-intervalles

...
 ...
 36
 25
 24
 13
 12

The musical staff shows a sequence of notes with various accidentals. An arrow points from the staff to a circular diagram representing a 12-tone chromatic scale. A vertical dashed line is drawn through the center of the circle. Several chords are drawn across the circle, connecting notes at different intervals. The chords are arranged in a way that suggests a specific intervallic structure.

$S = \{0, 1, 3, 6, 7, 9, 8, 10, 11, 2, 4, 5\}$

$S^* = (1, 4, 3, 2, 5, 6, 7, 10, 9, 8, 11)$



Séries dodécaphoniques et rythmes k-asymétriques

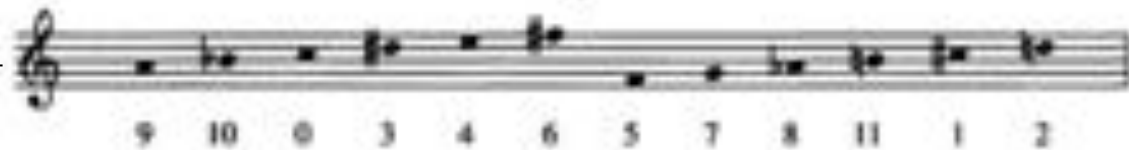
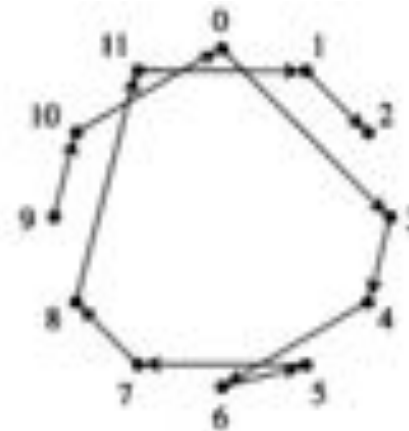
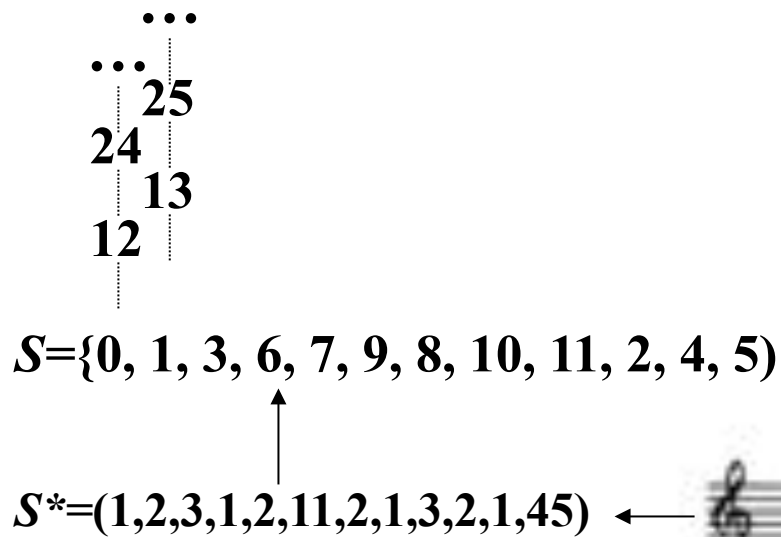
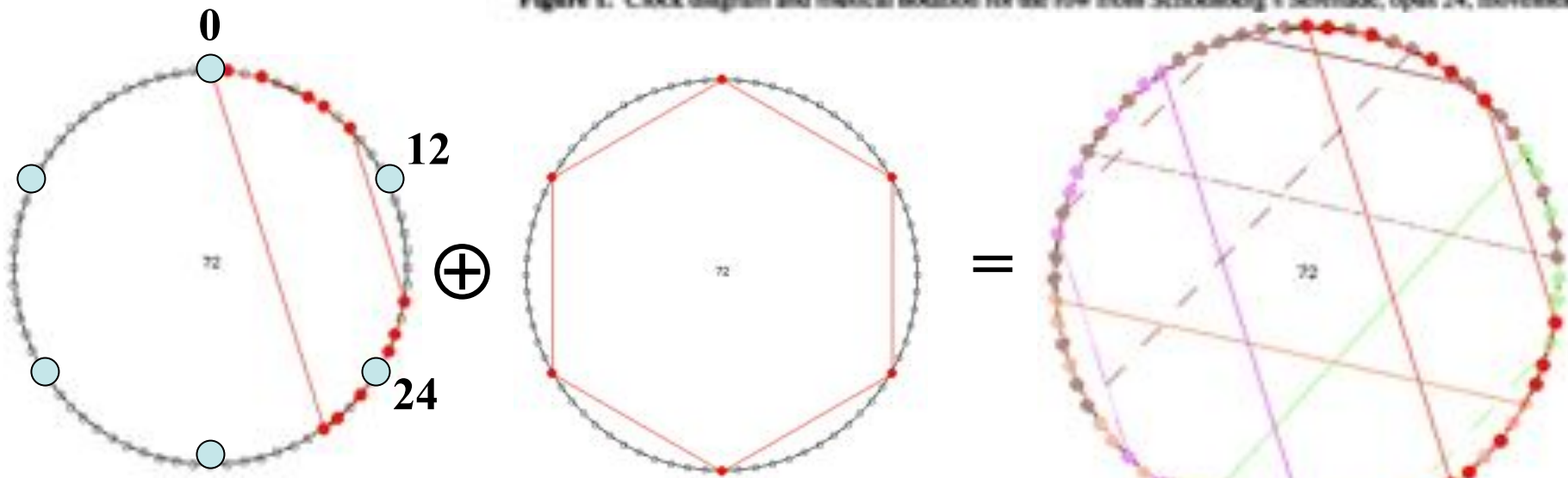


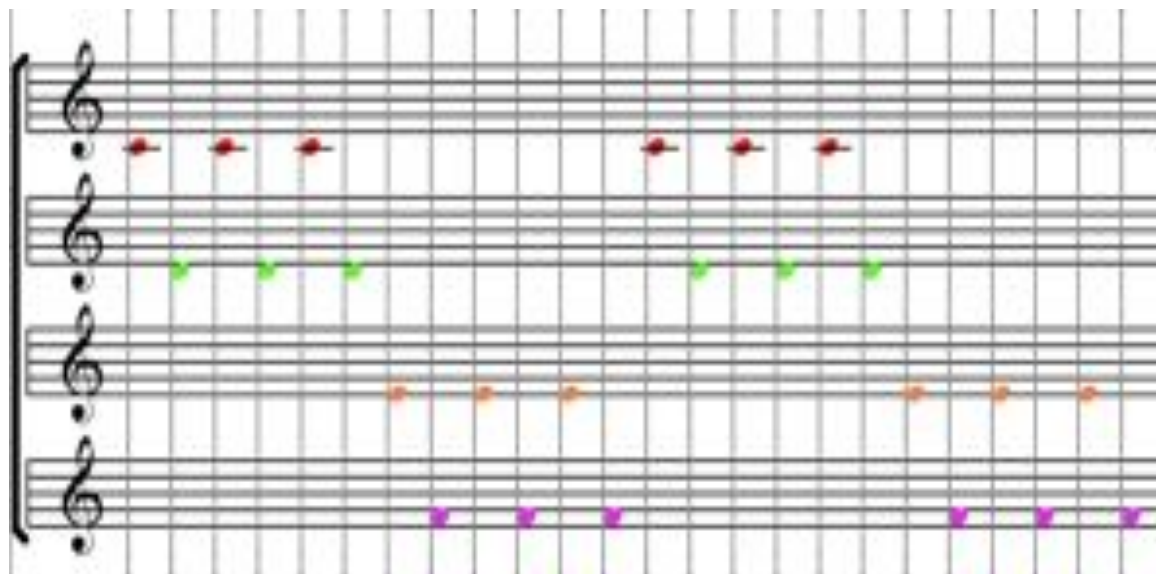
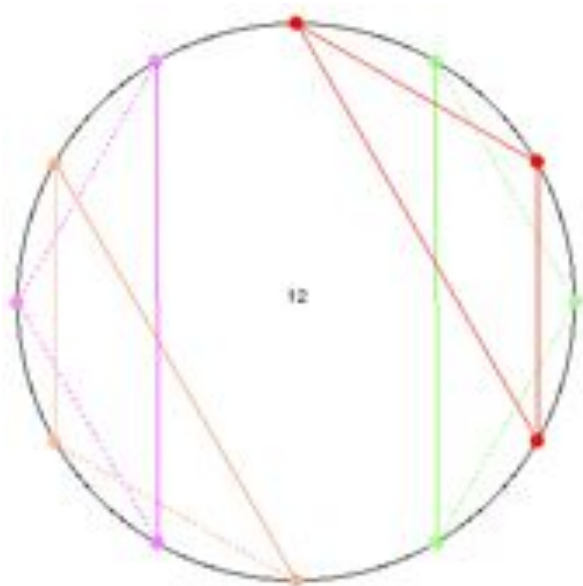
Figure 1. Clock diagram and musical notation for the row from Schoenberg's Serrade, opus 24, movement 5.



Pattern 8-asymétrique

=> OpenMusic

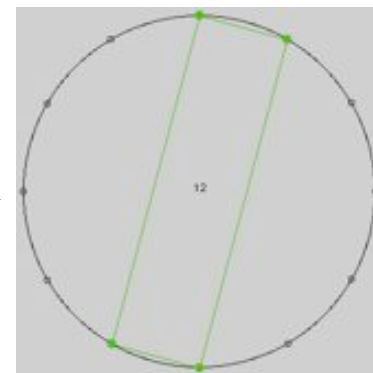
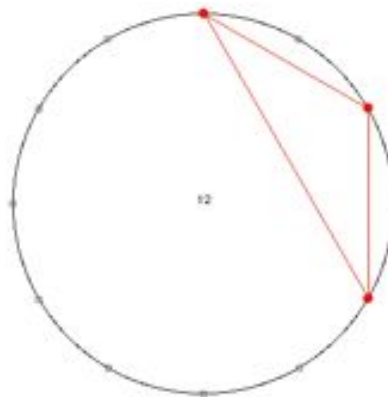
Canons mosaïques avec symétrie transpositionnelle



$$\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} = \{0, 2, 4\}$$

$$\mathbf{B} = \{0, 1, 6, 7\}$$



Groupes non Hajós et Canons de Vuza

Groupes non-Hajós (bad groups)

72
108 120 144 168 180
200 216 240 252 264 270 280 288
300 312 324 336 360 378 392 396
400 408 432 440 450 456 468 480
500 504 520 528 540 552 560 576 588 594
600 612 616 624 648 672 675 680 684 696
700 702 720 728 744 750 756 760 784 792
800 810 816 828 864 880 882 888...

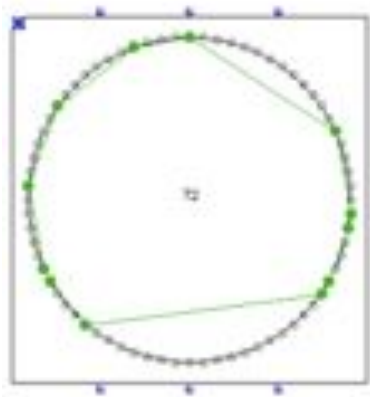
Groupes Hajós (good groups)

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec

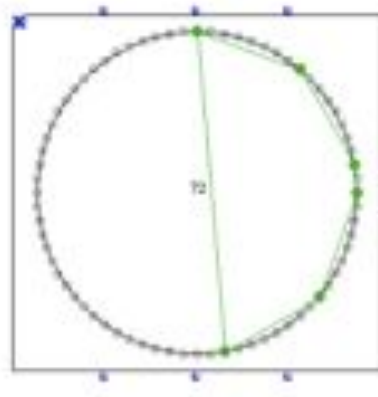
$n \in \{p^\alpha, p^\alpha q, pqr, p^2q^2, p^2qr, pqrs\}$

où p, q, r, s , sont des nombres premiers distincts

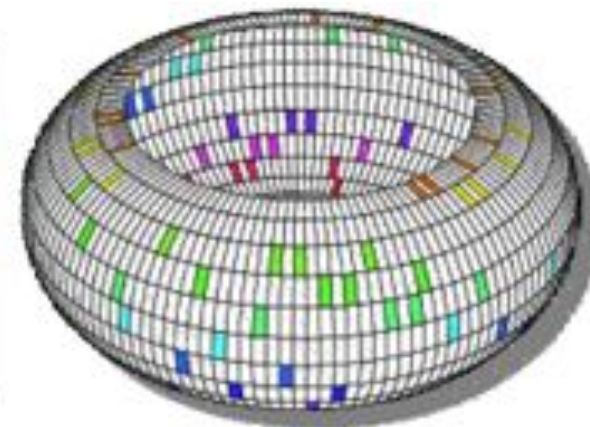
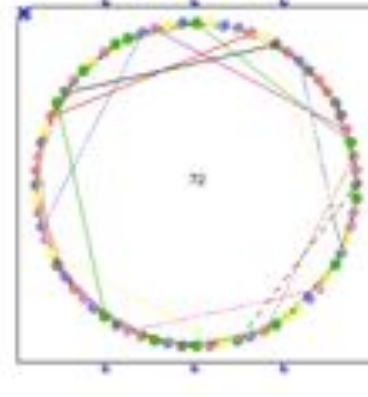
Problème ouvert : Trouver un algorithme qui permet d'obtenir toutes les factorisations d'un groupe cyclique non-Hajós en somme directe de deux sous-ensembles non périodiques (i.e. classifier tous les Canons de Vuza).



+



=




Classification « paradigmatique » des canons mosaïques de Vuza


Résultat : uniquement deux « types » de canons différents (à une transformation affine près, i.e. $f: \mathbb{Z}_{72} \rightarrow \mathbb{Z}_{72}$ t.q. $f(x) = ax + b$ avec $a \in (\mathbb{Z}_{72})^*$ et $b \in \mathbb{Z}_{72}$)




• R. Tijdeman: “Decomposition of the Integers as a direct sum of two subsets”, *Number Theory*, Cambridge University Press, 1995. The fundamental Lemma: R pave $\mathbb{Z}_n \Rightarrow aR$ pave \mathbb{Z}_n $\langle a, n \rangle = 1$

 (1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
 (20 3 1 5 6 9 4 11 6 3 3 1)
 R (1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
 (6 13 4 7 6 6 1 4 19 1 4 1)
 (1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)
 (3 3 17 4 3 6 6 5 4 15 5 1)

S (8 8 2 8 8 38)
 (16 2 14 2 16 22)
 (14 8 10 8 14 18)

 (1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
 R (1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
 (1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)

S (8 8 2 8 8 38)
 (16 2 14 2 16 22)
 (14 8 10 8 14 18)

 (1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
 R (1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
 (1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)

S (14 8 10 8 14 18)

$\mathbb{Z}/72\mathbb{Z} = R \oplus S$

Collection « Musique/ Sciences » (dir. J.-M. Bardez & M. Andreatta)



F. Lévy



G. Bloch

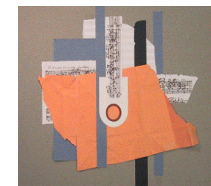


M. Lanza



T. Johnson

1999

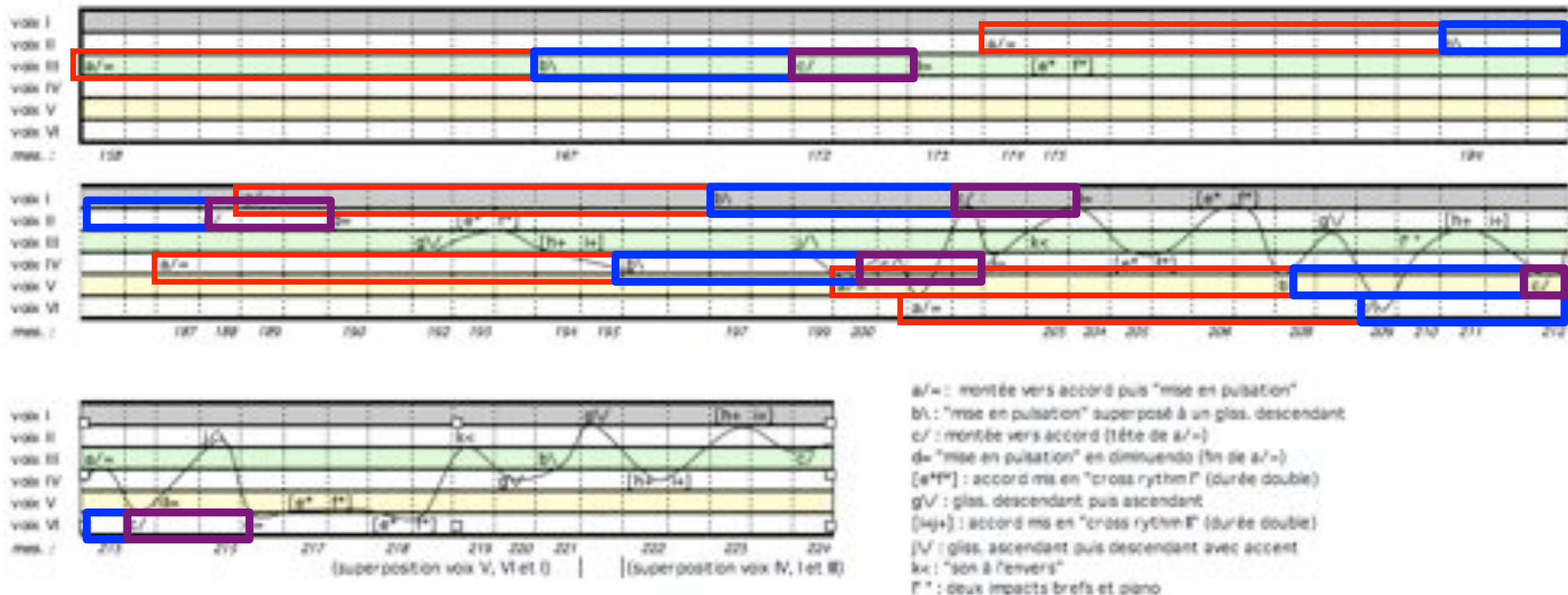


Fabien Lévy

Canons de Vuza pour une musique « morphologique »



• *Coïncidences* (pour 33 musiciens, 1999-2007)



Coïncidences - Fabien Lévy : déroulement du canon (mes. 158 à 226)
(chaque impact fait 3 temps)




Interprètes : Tokyo Symphony Orchestra, Dir.: Kazuyoshi Akiyama, 05/09/2007, Suntory Hall, Tokyo, Japon

Georges Bloch

Stratégies compositionnelles à partir d'un modèle formel



- Réduction d'un canon par auto-similarité
- Modulations métriques entre canons
- Canons mosaïques et IAO (*OMax*)
- *Projet Beyeler* (2001) 
- *Projet Hitchcock*
- *Visite des tours de la cathédrale de Reims*
- *Noël des Chasseurs*
- *Canons à marcher*
- *Canon à eau*
- *Harawun* (2004)
- *L'Homme du champ* (2005)
- *A piece based on Monk* (2007)
- *Peking Duck Soup* (2008)



• *A piece based on Monk* (2007)
(« Well You Need'nt »)

Mauro Lanza

Canons de Vuza et périodicités locales



- *La descrizione del diluvio* (Ricordi, 2007-2008)

Canon à 14 voix sur le pattern rythmique :

(1 3 25 27 1 3 11 14 27 1 3 25 27 4 25 27 1 3 25 14 13 1 3 25 27 1 3 52)

No. 1 "Aria"

Electronica

Local Dynamics :

General Dynamic: *pppp - ff*
poco a poco crescendo fino a misura 40 (ppp-fff)

*6 voix sont en live et 8 dans l'électronique. L'unité est la double-croche de triolet. Le choix des notes et des durées est fait en cherchant à souligner certaines **quasi-périodicités** du canon de Vuza, et cela donne à chaque voix un caractère beaucoup plus "redondant".*



Mauro Lanza

Canons de Vuza et périodicités locales



- *La descrizione del diluvio* (Ricordi, 2007-2008)

[...] Le choix des notes et des durées est fait en cherchant à souligner certaines quasi-périodicités du canon de Vuza, et cela donne à chaque voix un caractère beaucoup plus “redondant”.

(1 3 25 27 1 3 11 14 27 1 3 25 27 4 25 27 1 3 25 14 13 1 3 25 27 1 3 52)

(1 3 25 27 1 3 11 14 27 1 3 25 27 4 25 27 1 3 25 14 13 1 3 25 27 1 3 52)

(1 3 25 27 1 3 11 14 27 1 3 25 27 4 25 27 1 3 25 14 13 1 3 25 27 1 3 52)

(1 3 25 27 1 3 11 14 27 1 3 25 27 4 25 27 1 3 25 14 13 1 3 25 27 1 3 52)

(1 3 25 27 1 3 11 14 27 1 3 25 27 4 25 27 1 3 25 14 13 1 3 25 27 1 3 52)

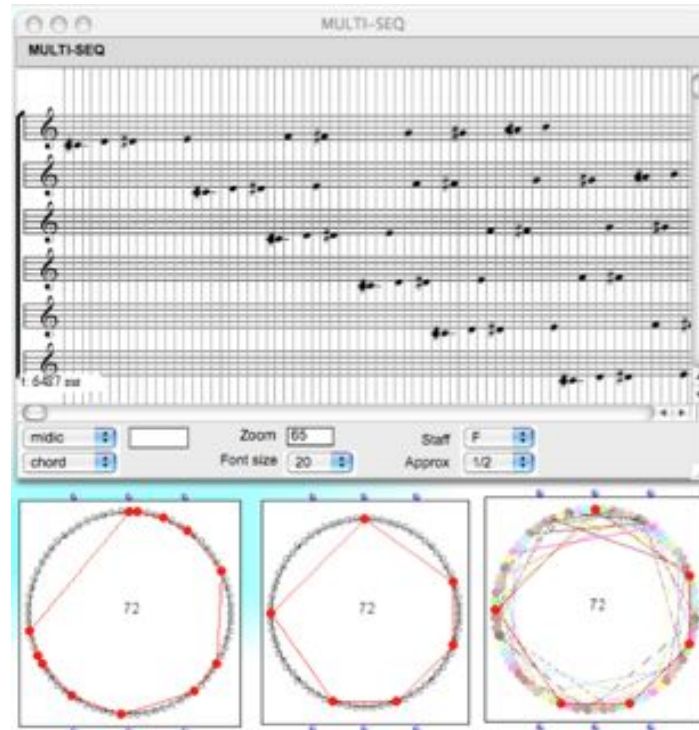
Canons mosaïques et conjecture spectrale

La conjecture de Fuglede



Un sous-ensemble de \mathbb{R}^n pave par translation ssi il est spectral (i.e. il admet une décomposition hilbertienne d'exponentiels complexes)
J. Func. Anal. 16, 1974.

Fausse en dim. $n \geq 3$
 Ouverte en dim. 1 et 2



Canons de Vuza de période n

72

108 120 144 168 180
 200 216 240 252 264 270 280 288
 300 312 324 336 360 378 392 396
 400 408 432 440 450 456 468 480
 500 504 520 528 540 552 560 576 588 594
 600 612 616 624 648 672 675 680 684 696
 700 702 720 728 744 750 756 760 784 792
 800 810 816 828 864 880 882 888...

Résultat (Amiot 2009) :
 Si A pave mais il n'est pas spectral
 $\Rightarrow A$ est le rythme d'un canon de Vuza



(M. Andreatta et
 C. Agon, eds 2009)

1974

2009

Pavage de la ligne et conjecture spectrale

Conjecture de Fuglede (1974) :

« **Commuting Self-Adjoint Partial Differential Operators and a Group Theoretic Problem** », *J. Func. Anal.* 16, 101-121, 1974.

SPECTRALITE \Leftrightarrow PAVAGE



↓
(Conjecture fautive en dimension $n \geq 3$ ouverte en dimension 1 et 2)

DEFINITION 6 A subset A of some vector space (say \mathbb{R}^n) is spectral iff it admits a Hilbert base of exponentials, i.e. if any map $f \in L^2(A)$ can be written

$$f(x) = \sum f_k \exp(2i\pi \lambda_k \cdot x)$$

for some fixed family of vectors $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ where the maps $e_k : x \mapsto \exp(2i\pi \lambda_k \cdot x)$ are mutually orthogonal (i.e. $\int_A \bar{e}_k e_j = 0$ whenever $k \neq j$).

E. Coven & A. Meyerowitz: “Tiling the integers with translates of one finite set”, *J. Algebra*, 212, pp. 161-174, 1999. Deux conditions de C&M :

- **T1 + T2 \Rightarrow pavage**
- **pavage \Rightarrow T1**

Racines de l'unité et polynômes cyclotomiques

Racines n -ièmes de l'unité : $z^n = 1$

$$n=3 \longrightarrow \left\{ 1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$n=4 \longrightarrow \{1, +i, -1, -i\}$$

Les racines n -ièmes de l'unité peuvent s'écrire sous la forme :

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k, n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq k < n)$$

Elles sont exactement les racines du polynôme : $P(X) = X^n - 1$

Les racines n -ièmes primitives de l'unité : $e^{\frac{2ki\pi}{n}} \quad (n, k)=1$

Elles sont exactement les racines du polynôme cyclotomique :

$$\Phi_n(X) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)} (X - z_k) \quad \longleftrightarrow \quad X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

Pavage de la ligne et polynômes cyclotomiques

$$\Phi_n(X) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)} (X - z_k) \longleftrightarrow X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

$$\Phi_1(X) = X - 1 \quad \longleftrightarrow \quad (-1, 1)$$

$$\Phi_2(X) = 1 + X \quad \longleftrightarrow \quad (1, 1)$$

$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2 \quad \longleftrightarrow \quad (1, 1, 1)$$

$$\Phi_4(X) = 1 + X^2 \quad \longleftrightarrow \quad (1, 0, 1)$$

$$\Phi_5(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 \quad \longleftrightarrow \quad (1, 1, 1, 1, 1)$$

$$\Phi_6(X) = 1 - X + X^2 \quad \longleftrightarrow \quad (1, -1, 1)$$

$$\Delta_n = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} = \prod_{\substack{d|n \\ d \neq 1}} \Phi_d(X)$$

$$\Delta_4 = 1 + X + X^2 + X^3 = \Phi_2(X) \times \Phi_4(X)$$

$$A(x) \times B(x) = (A \oplus B)(x) \equiv 1 + x + \dots + x^{n-1} \pmod{X^n - 1}$$

Bonnes et mauvaises factorisations

$$\Delta_n = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} = \prod_{\substack{d | n \\ d \neq 1}} \Phi_d(X)$$

$\Phi_2(X) = 1 + X$	←-----→	(1, 1)
$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$	←-----→	(1, 1, 1)
$\Phi_4(X) = 1 + X^2$	←-----→	(1, 0, 1)
$\Phi_6(X) = 1 - X + X^2$	←-----→	(1, -1, 1)

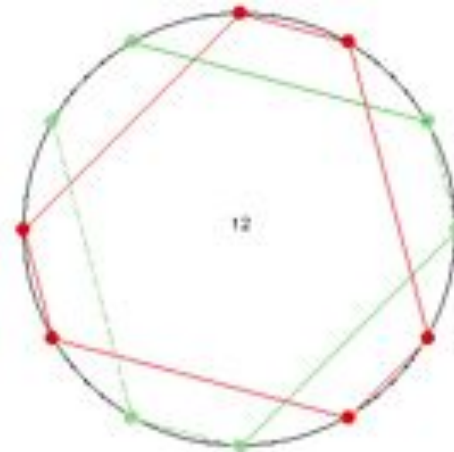
$$\Delta_{12} = 1 + X + \dots + X^{11} = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_4 \times \Phi_6 \times \Phi_{12}$$

$$A(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12} = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9$$

$$B(X) = \Phi_4 = 1 + X^2$$

$$S = \{0, 2\}$$

$$R = \{0, 1, 4, 5, 8, 9\}$$



$$A^*(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_{12}$$

$$B^*(X) = \Phi_4 \times \Phi_6$$

Cette décomposition ne marche pas

Les conditions de Coven-Meyerowitz

- E. Coven & A. Meyerowitz : “Tiling the integers with translates of one finite set”, *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999

There is no loss of generality in restricting attention to translates of a finite set A of *nonnegative* integers. Then $A(x) = \sum_{a \in A} x^a$ is a polynomial such that $\#A = A(1)$. Let S_A be the set of prime powers s such that the s -th cyclotomic polynomial $\Phi_s(x)$ divides $A(x)$. Consider the following conditions on $A(x)$.

$$(T1) \quad A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1).$$

(T2) If $s_1, \dots, s_m \in S_A$ are powers of distinct primes, then $\Phi_{s_1 \dots s_m}(x)$ divides $A(x)$.

Theorem A. *If $A(x)$ satisfies (T1) and (T2), then A tiles the integers.*

Theorem B1. *If A tiles the integers, then $A(x)$ satisfies (T1).*

Theorem B2. *If A tiles the integers and $\#A$ has at most two prime factors, then $A(x)$ satisfies (T2).*

Corollary. *If $\#A$ has at most two prime factors, then A tiles the integers if and only if $A(x)$ satisfies (T1) and (T2).*

Les conditions de Coven-Meyerowitz

$$(T1) A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1).$$

(T2) If $s_1, \dots, s_m \in S_A$ are powers of distinct primes, then $\Phi_{s_1 \dots s_m}(x)$ divides $A(x)$.

Theorem A. *If $A(x)$ satisfies (T1) and (T2), then A tiles the integers.*

$$A(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12} = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9$$

$$\Phi_2(X) = 1 + X$$

$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$$

$$(T1) A(1) = 6 = \Phi_2(1) \times \Phi_3(1) = 2 \times 3$$

$$(T2) \Phi_2 \mid A(X) \text{ et } \Phi_3 \mid A(X) \Rightarrow \Phi_{2 \times 3} \mid A(X)$$

Theorem B1. *If A tiles the integers, then $A(x)$ satisfies (T1).*

$$A^*(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_{12} = 1 + 2X + 2X^2 - X^3 - X^4 + X^5 + 2X^6 + X^7$$

$$A^*(1) = 7 \neq \Phi_2(1) \times \Phi_3(1) = 6$$

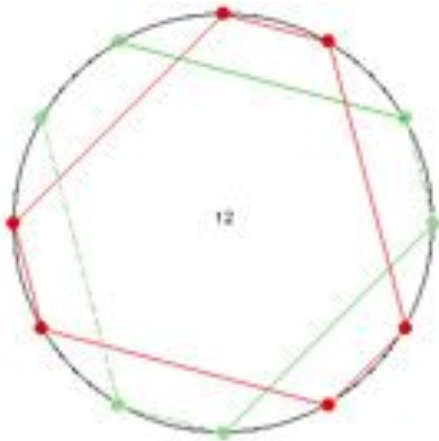
Conjecture de Fuglede et canons rythmiques mosaïques

• E. Coven & A. Meyerowitz: “Tiling the integers with translates of one finite set”, *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999

Deux conditions de C&M :

T1 + T2 => pavage

pavage => T1



$$A(X) = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9 = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12}$$

$$\Phi_2(X) = 1 + X$$

$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$$

$$(T1) A(1) = 6 = \Phi_2(1) \times \Phi_3(1) = 2 \times 3$$

$$(T2) \Phi_2 \mid A(X) \text{ et } \Phi_3 \mid A(X) \Rightarrow \Phi_{2 \times 3} \mid A(X)$$

Canons de Vuza de période n

72

108 120 144 168 180

200 216 240 252 264 270 280 288

300 312 324 336 360 378 392 396

400 408 432 440 450 456 468 480

500 504 520 528 540 552 560 576 588 594

600 612 616 624 648 672 675 680 684 696

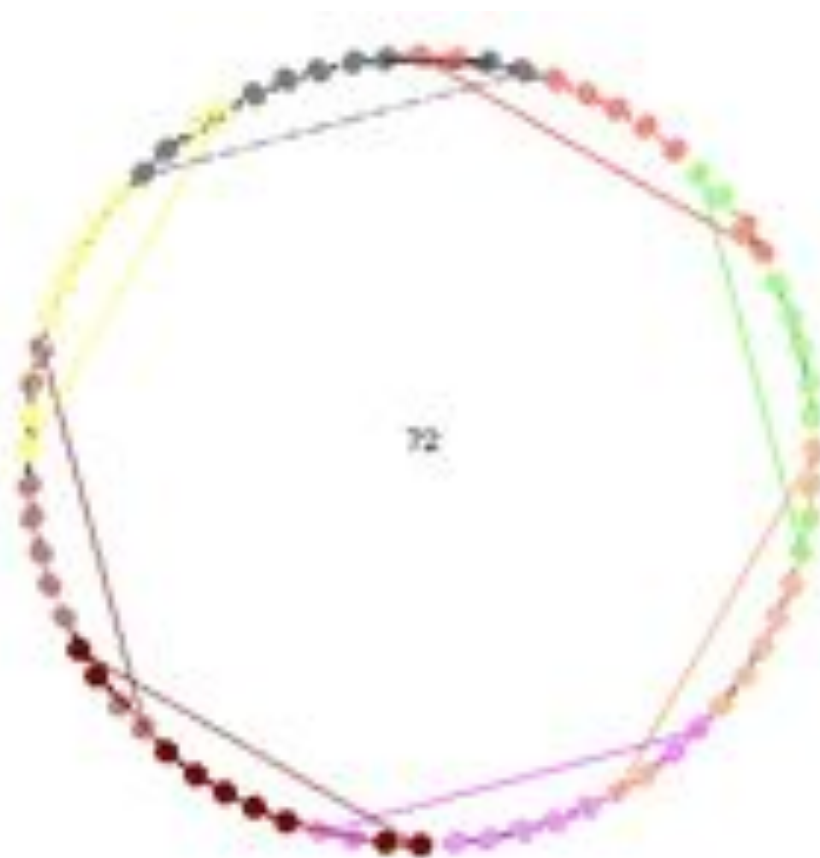
700 702 720 728 744 750 756 760 784 792

800 810 816 828 864 880 882 888...



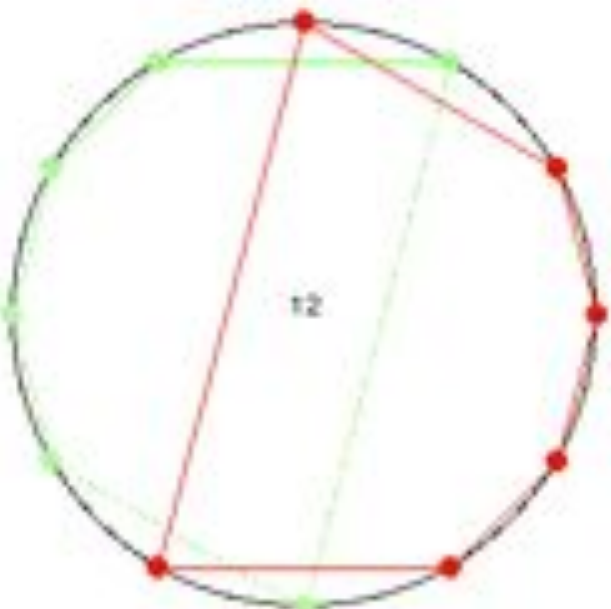
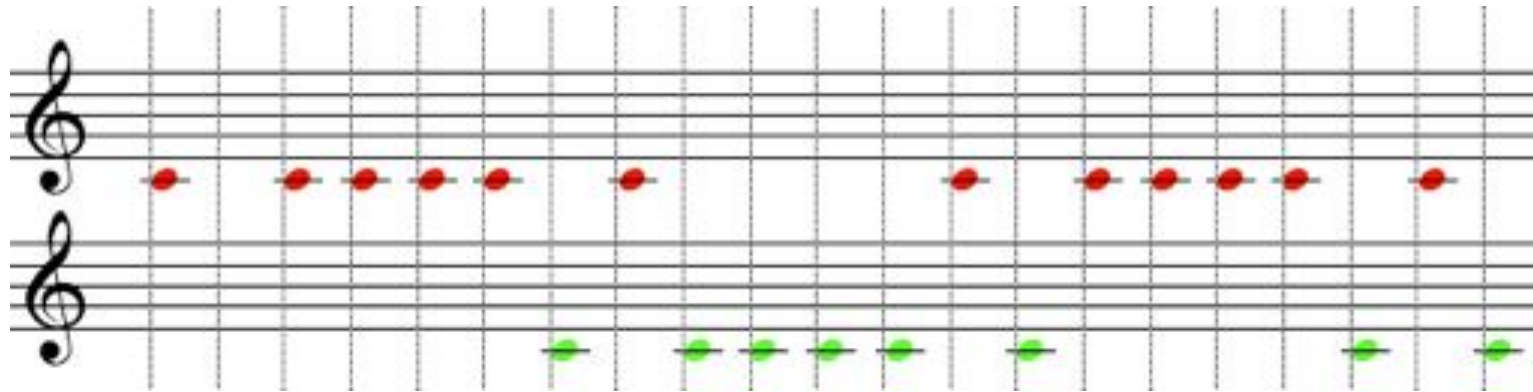
Si A pave mais il n'est pas spectral $\Rightarrow A$ est le rythme d'un canon de Vuza

La famille des « canons cyclotomiques »



- E. Amiot, M. Andreatta, C. Agon: « Tiling the (musical) line with polynomial: some theoretical and implementational aspects », *ICMC*, Barcelona, 2005, pp.227-230.

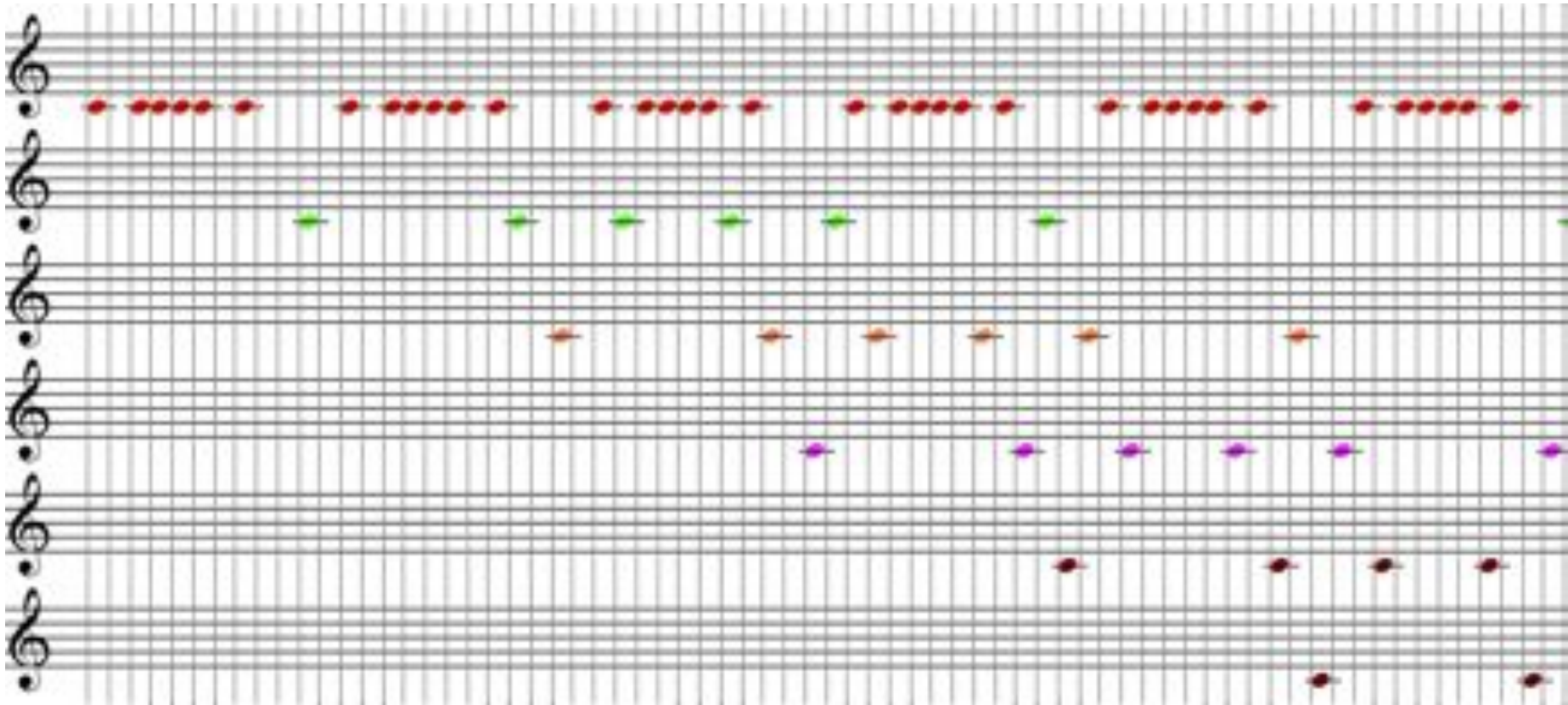
Canons mosaïques par translation et augmentation



$((0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 6)\ ((1\ 11)))$
 $((0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5)\ ((1\ 11)\ (1\ 1)))$
 $((0\ 1\ 2\ 3\ 5\ 7)\ ((1\ 11)\ (1\ 7)))$
 $((0\ 1\ 3\ 4\ 7\ 8)\ ((1\ 5)))$
 $((0\ 1\ 2\ 3\ 6\ 7)\ ((1\ 11)))$
 $((0\ 1\ 3\ 4\ 6\ 9)\ ((1\ 11)\ (1\ 5)))$
 $((0\ 1\ 3\ 6\ 7\ 9)\ ((1\ 11)\ (1\ 5)))$
 $((0\ 1\ 2\ 6\ 7\ 8)\ ((1\ 11)\ (1\ 7)\ (1\ 5)\ (1\ 1)))$
 $((0\ 1\ 4\ 5\ 8\ 9)\ ((1\ 11)\ (1\ 7)\ (1\ 5)\ (1\ 1)))$
 $((0\ 1\ 2\ 5\ 6\ 7)\ ((1\ 7)\ (1\ 5)))$
 $((0\ 2\ 3\ 4\ 5\ 7)\ ((1\ 11)\ (1\ 7)\ (1\ 5)\ (1\ 1)))$ ←
 $((0\ 1\ 4\ 5\ 6\ 8)\ ((1\ 11)\ (1\ 7)))$
 $((0\ 1\ 2\ 4\ 5\ 7)\ ((1\ 5)))$
 $((0\ 1\ 3\ 4\ 5\ 8)\ ((1\ 5)\ (1\ 1)))$
 $((0\ 1\ 2\ 4\ 5\ 8)\ ((1\ 11)))$
 $((0\ 1\ 2\ 4\ 6\ 8)\ ((1\ 11)\ (1\ 7)))$
 $((0\ 2\ 3\ 4\ 6\ 8)\ ((1\ 11)))$
 $((0\ 2\ 4\ 6\ 8\ 10)\ ((1\ 11)\ (1\ 7)\ (1\ 5)\ (1\ 1)))$

Augmented Tiling Canons ou l'action du groupe affine

(en collaboration avec Thomas Noll)



Tom Johnson's « Self-Similar Melodies »

The image displays two systems of musical notation, each consisting of a treble and a bass staff. The melody in the treble staff is a simple, repetitive sequence of notes: G4, A4, B4, C5, B4, A4, G4, F4, E4, D4, C4. The lyrics are written below the treble staff. The first system contains the lyrics: "La vie est si courte, le mort est si long-que. La vie est si courte." The second system contains the lyrics: "le mort est si long-que. La vie est si courte, le mort est si long-que." The bass staff in both systems contains a simple harmonic accompaniment of single notes: G3, F3, E3, D3, C3, B2, A2, G2.

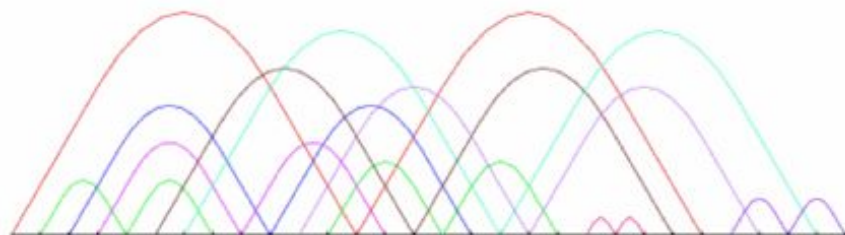
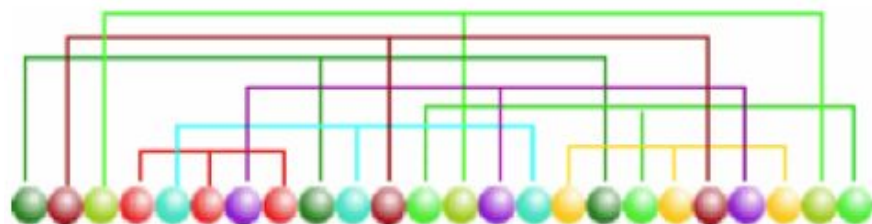
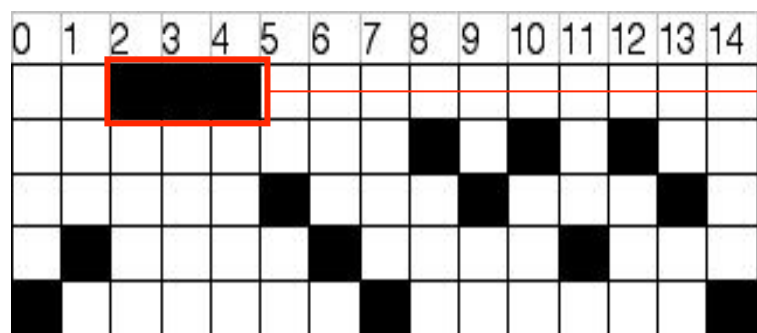
La vie est si courte, le mort est si long-que. La vie est si courte.

le mort est si long-que. La vie est si courte, le mort est si long-que.

Tom Johnson's Perfect Tilings

Tilework for Piano

perfect triplet tilings, 5th order
with thanks to Jon Wild and Erich Neuwirth



short pauses between sections

Jean-Paul Davalan, « Perfect Rhythmic Tilings » (to appear in *Tiling Problems in Music*, M. Andreatta & C. Agon eds., Collection « Musique/Sciences », 2008)



Transformée de Fourier discrète et pavage

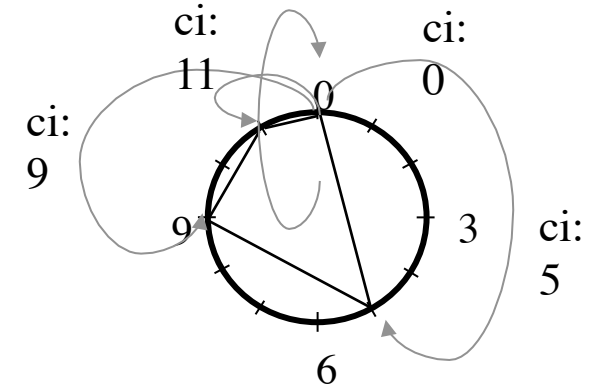
TILING

Let $Z_A = \{ t \in \mathbb{Z}_c, F_A(t)=0 \}$

A tiles \mathbb{Z}_c when equivalently:

- ☉ There exists B , $A \oplus B = \mathbb{Z}_c$
- ☉ $1_A \star 1_B = 1$
- ☉ $F_A \times F_B(t) = 1 + e^{-2i\pi t/c} + \dots + e^{-2i\pi t(c-1)/c}$ (0 unless $t=0$)
- ☉ $Z_A \cup Z_B = \{1, 2 \dots c-1\}$ AND $\text{Card } A \times \text{Card } B = c$
- ☉ $IC_A \star IC_B = IC(\mathbb{Z}_c) = c$ and $\text{Card } A \times \text{Card } B = c$

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$



$$A = \{0, 5, 9, 11\}$$

$$IC_A(k) = 1 \quad \forall k = 1 \dots 11$$

$$IC_A(k) = \text{Card}\{(x, y) \in A \times A \mid x + k = y\}$$

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$



E. Amiot, « New Perspectives on Rhythmic Canons and the Spectral Conjecture », *Journal of Mathematics and Music*, 2009.

Homometry and Tiling Rhythmic Canons

TILING

Let $Z_A = \{ t \in \mathbb{Z}_c, F_A(t)=0 \}$

A tiles \mathbb{Z}_c when equivalently:

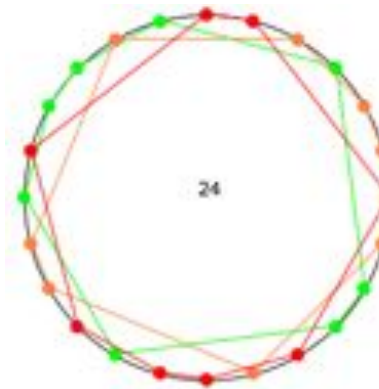
- There exists B, $A \oplus B = \mathbb{Z}_c$
- $1_A \star 1_B = 1$
- $F_A \times F_B(t) = 1 + e^{-2i\pi t/c} + \dots + e^{-2i\pi t(c-1)/c}$ (0 unless $t=0$)
- $Z_A \cup Z_B = \{1, 2 \dots c-1\}$ AND Card A \times Card B = c
- $IC_A \star IC_B = IC(\mathbb{Z}_c) = c$ and Card A \times Card B = c

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

A musical offering:

- **Theorem:**
If A tiles with B and A' has the same IC, then A' tiles with B, too.



Homometry and Tiling Rhythmic Canons

TILING

Let $Z_A = \{ t \in \mathbb{Z}_c, F_A(t)=0 \}$

A tiles \mathbb{Z}_c when equivalently:

- There exists B, $A \oplus B = \mathbb{Z}_c$
- $1_A \star 1_B = 1$
- $F_A \times F_B(t) = 1 + e^{-2i\pi t/c} + \dots + e^{-2i\pi t(c-1)/c}$ (0 unless $t=0$)
- $Z_A \cup Z_B = \{1, 2 \dots c-1\}$ AND Card A \times Card B = c
- $IC_A \star IC_B = IC(\mathbb{Z}_c) = c$ and Card A \times Card B = c

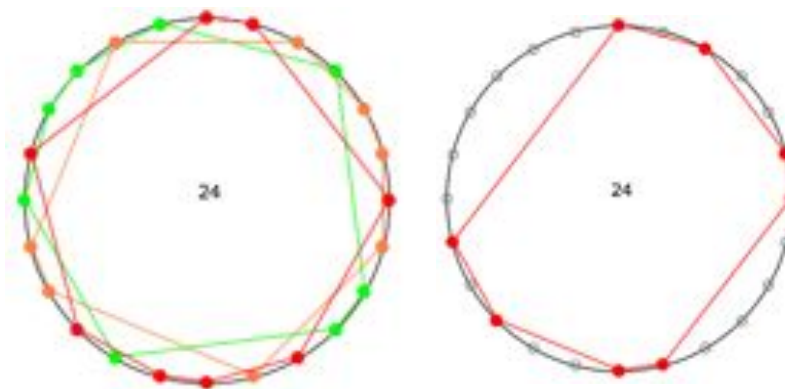
$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

A musical offering:

• *Theorem:*

If A tiles with B and A' has the same IC, then A' tiles with B, too.



Homometry and Tiling Rhythmic Canons

TILING

Let $Z_A = \{ t \in \mathbb{Z}_c, F_A(t)=0 \}$

A tiles \mathbb{Z}_c when equivalently:

- There exists B, $A \oplus B = \mathbb{Z}_c$
- $1_A \star 1_B = 1$
- $F_A \times F_B(t) = 1 + e^{-2i\pi t/c} + \dots + e^{-2i\pi t(c-1)/c}$ (0 unless $t=0$)
- $Z_A \cup Z_B = \{1, 2 \dots c-1\}$ AND Card A \times Card B = c
- $IC_A \star IC_B = IC(\mathbb{Z}_c) = c$ and Card A \times Card B = c

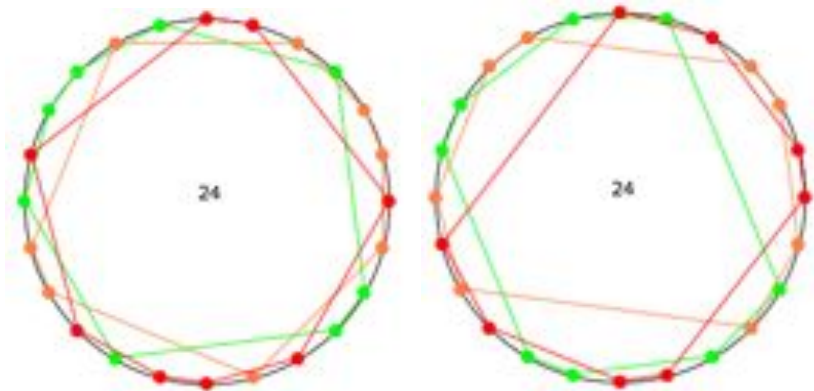
$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

A musical offering:

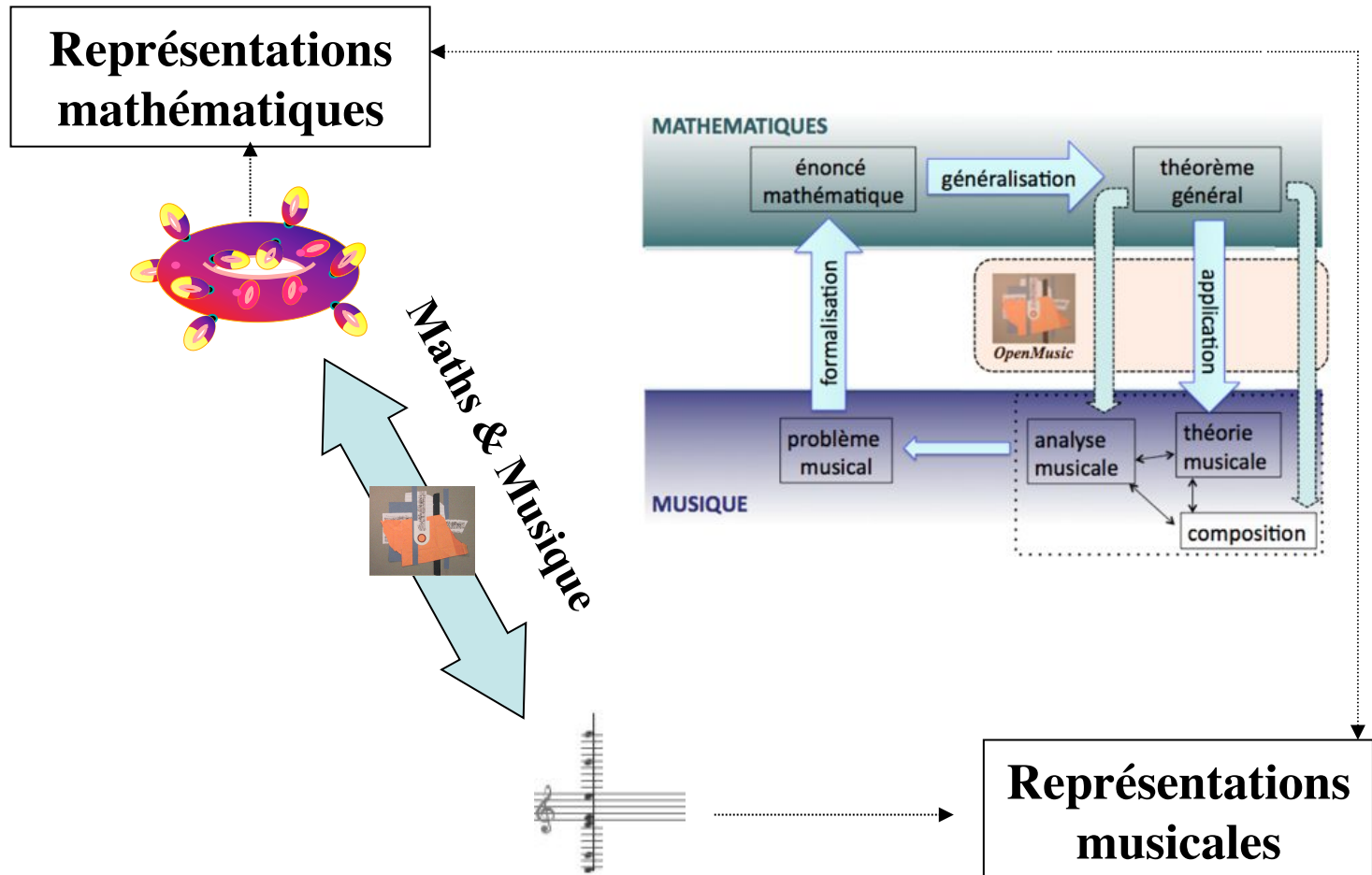
• *Theorem:*

If A tiles with B and A' has the same IC, then A' tiles with B, too.



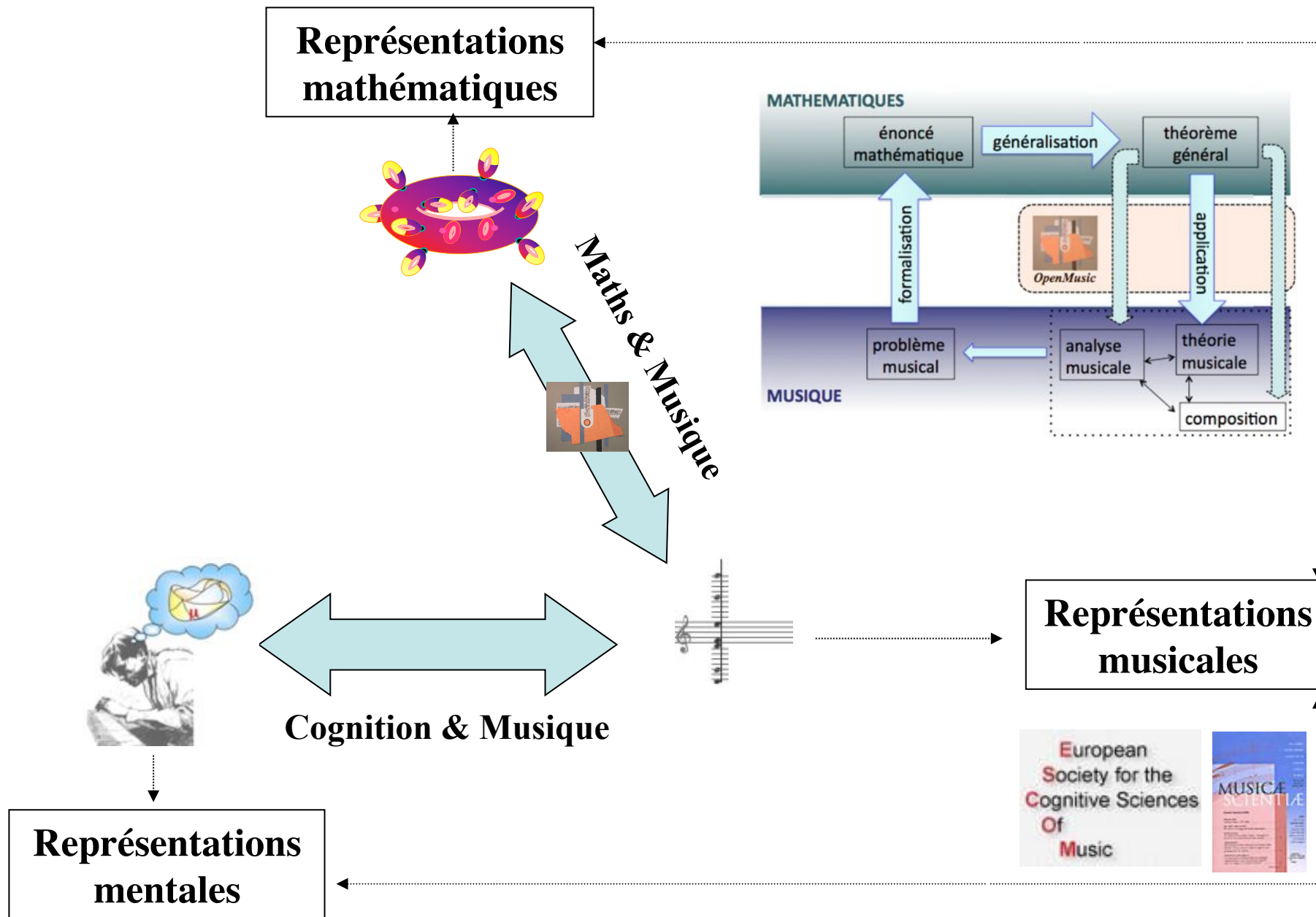
Quelle est la place de la cognition ?

<http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/Cognition.html>



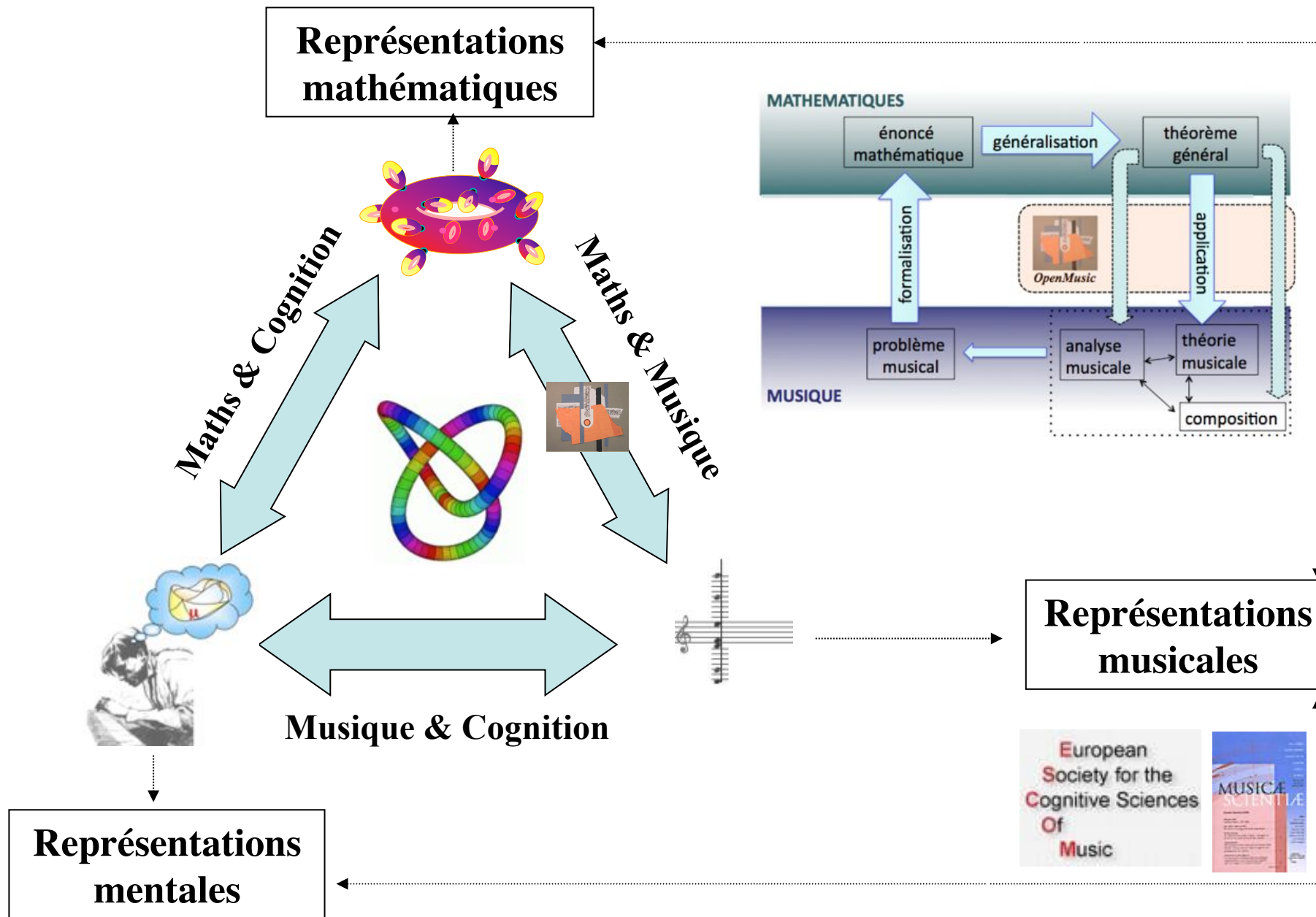
Quelle est la place de la cognition ?

<http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/Cognition.html>

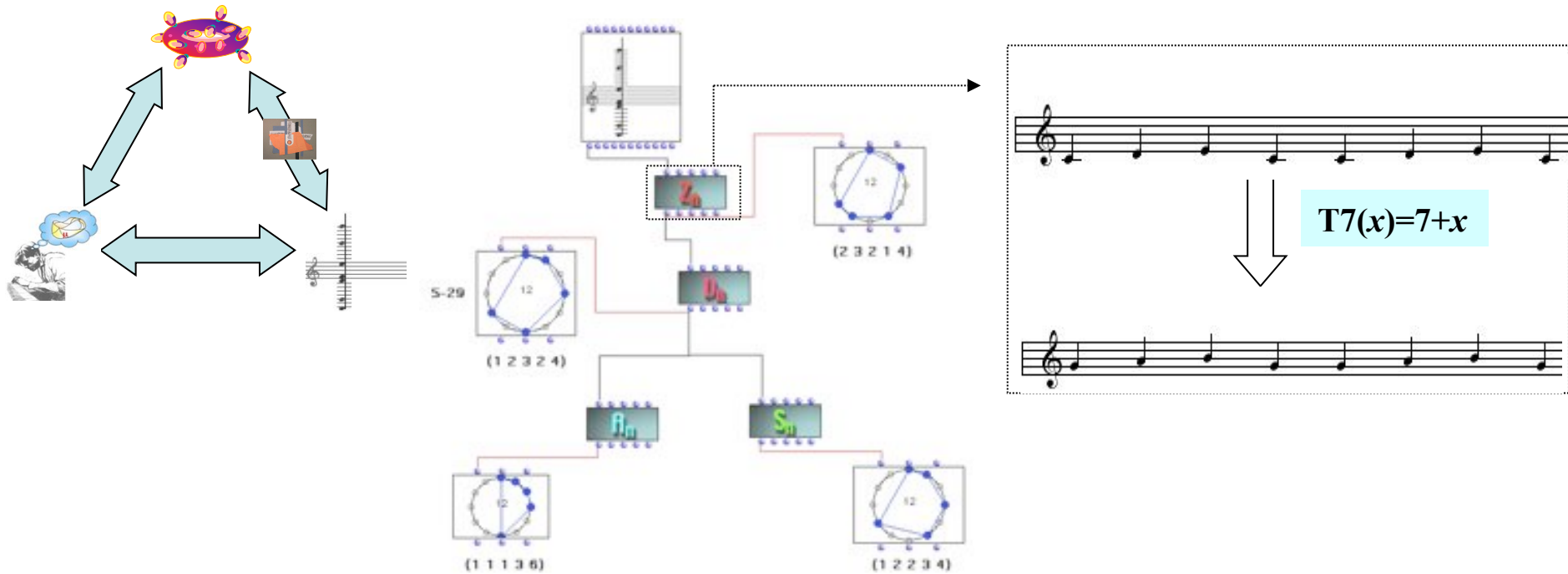


Quelle est la place de la cognition ?

<http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/Cognition.html>



Approche paradigmatic et perception



The nature of a given geometry is [...] defined by the *reference* to a determinate group and the way in which spatial forms are related within that type of geometry. [Cf. *Felix Klein Erlangen Program - 1872*][...] We may raise the question whether there are any concepts and principles that are, although in different ways and different degrees of distinctness, necessary conditions for both the *constitution* of the perceptual world and the construction of the universe of geometrical thought. It seems to me that the concept of group and the concept of invariance are such principles.



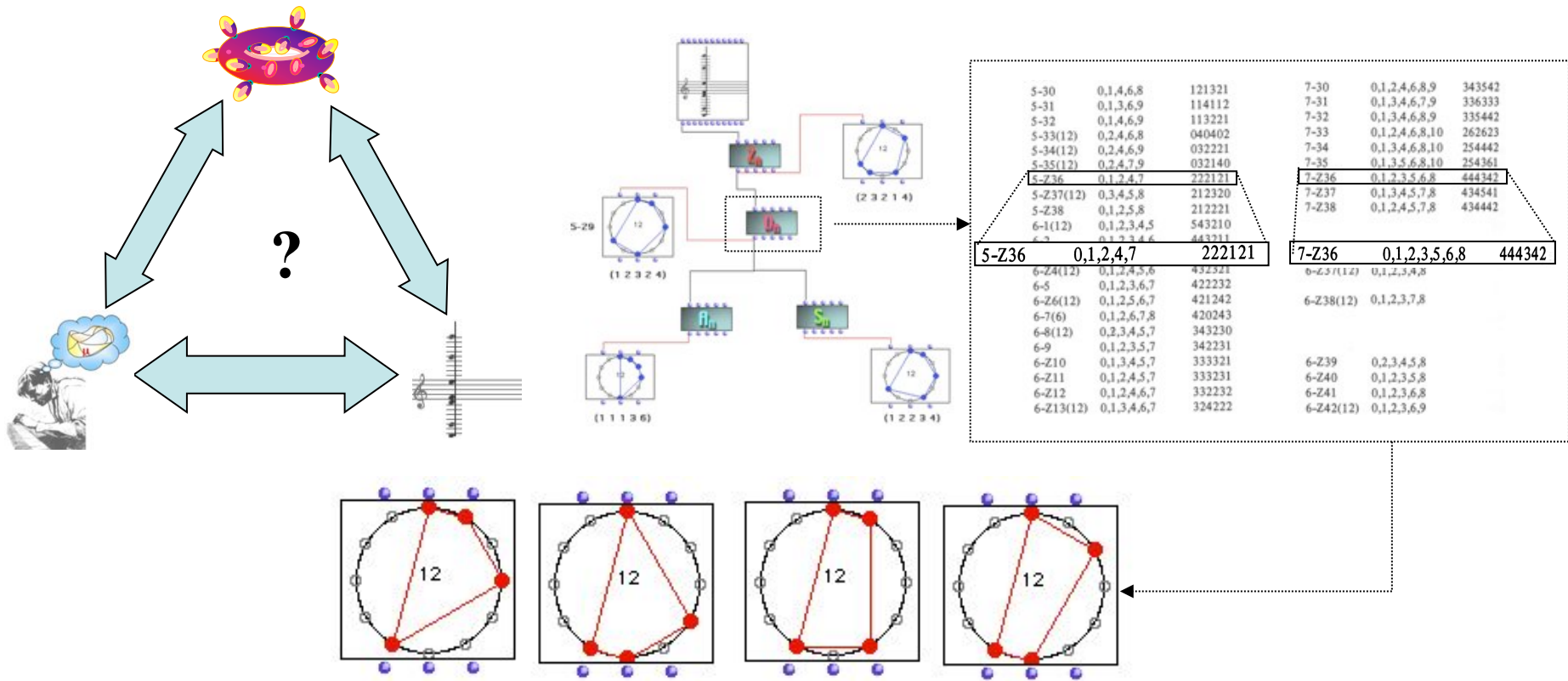
Felix Klein



Ernst Cassirer

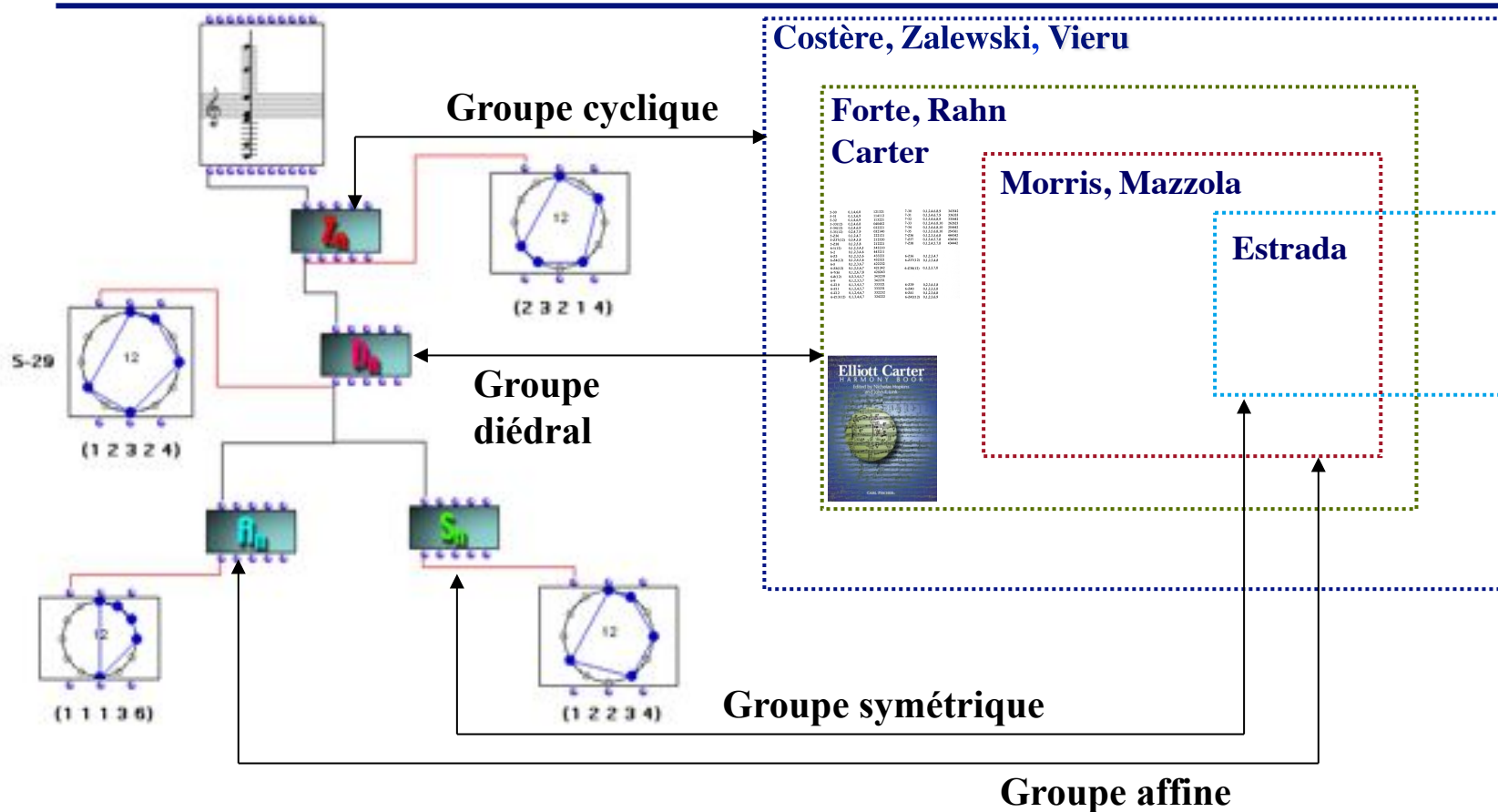
E. Cassirer : « The concept of group and the theory of perception », 1944

Approches « set-théoriques » et perception musicale



« Trained musicians rated the similarity of 24 instances of set classes [0137/0467] and [0157/0267] at three different transposition levels and two different spacing types. [...] The results are consistent with the hypothesis that even musicians with significant experience of atonal music do not use the equivalence relation TnI in making similarity judgments »

Architecture paradigmatique et dualité objectale/opératoire



« [C'est la notion de groupe qui] donne un sens précis à l'idée de structure d'un ensemble [et] permet de déterminer les éléments efficaces des transformations en réduisant en quelque sorte à son schéma opératoire le domaine envisagé. [...] L'objet véritable de la science est le système des relations et non pas les termes supposés qu'il relie. [...] Intégrer les résultats - symbolisés - d'une expérience nouvelle revient [...] à créer un canevas nouveau, un groupe de transformations plus complexe et plus compréhensif »

G.-G. Granger : « Pygmalion. Réflexions sur la pensée formelle », 1947

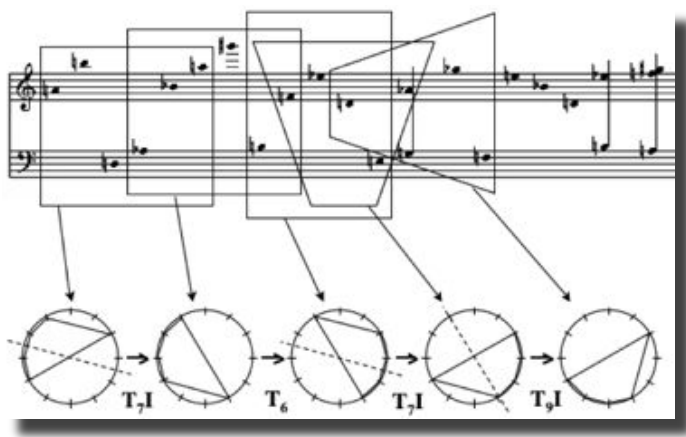
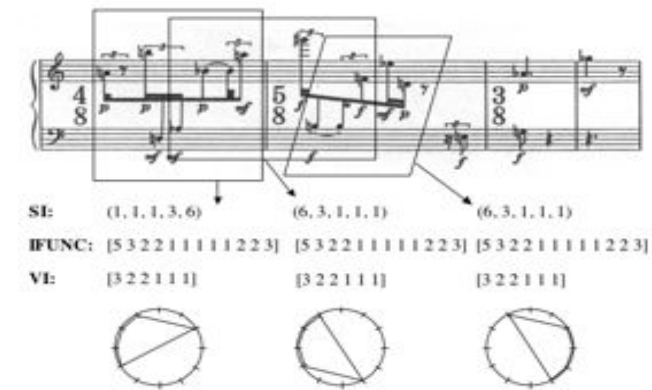


G.-G. Granger

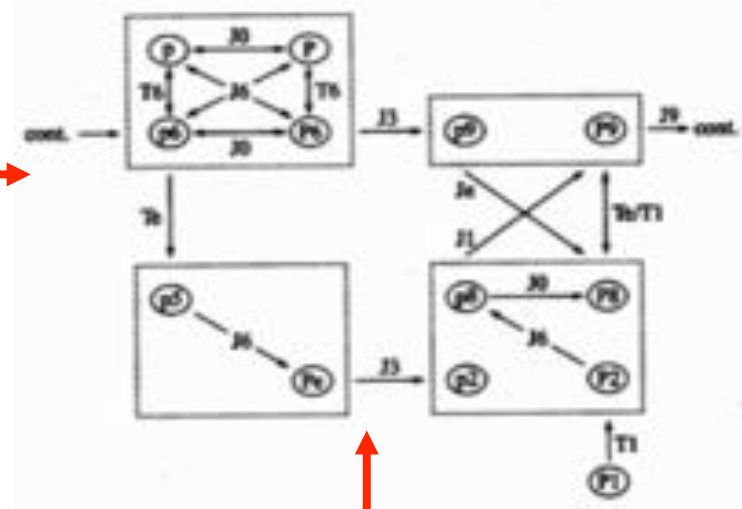
Progression transformationnelle vs réseau transformationnel

« Group Theory has emerged as a powerful tool for analyzing cognitive structure. The number of cognitive disciplines using group theory is now enormous. The power of group theory lies in its ability to identify organization, and to express organization in terms of **generative actions that structure a space** »

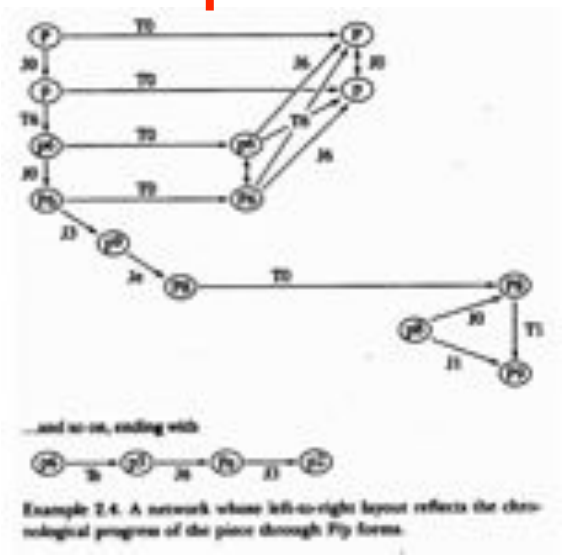
Michael Leyton, The International Society for Group Theory in Cognitive Science



?



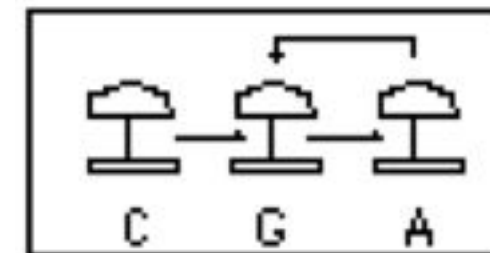
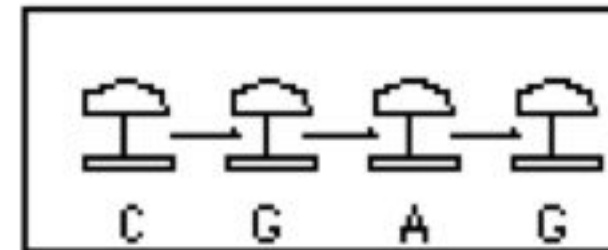
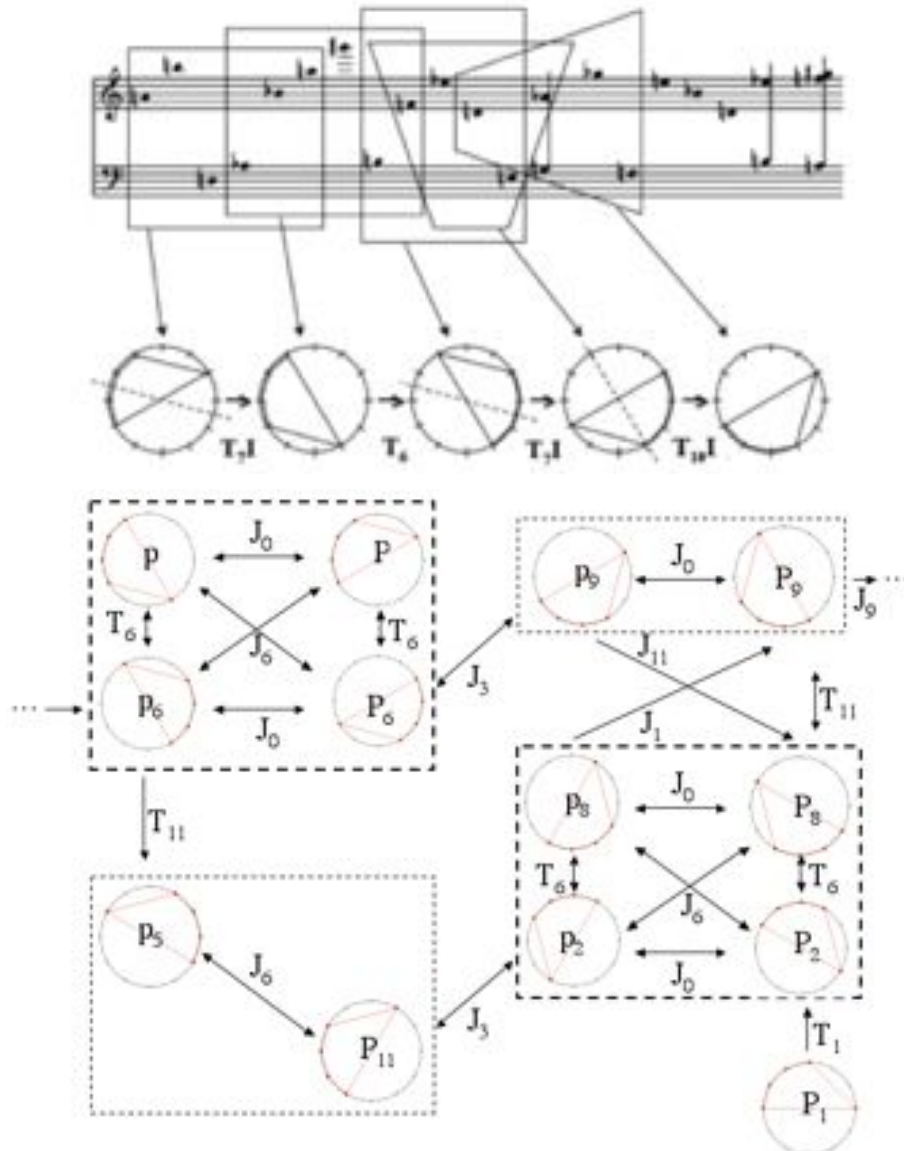
→



Réseau transformationnel et cognition (musicale)



Bamberger, J. (1986). Cognitive issues in the development of musically gifted children. In *Conceptions of giftedness* (eds., R. J. Sternberg, & J. E. Davidson), pp. 388-413. Cambridge University Press, Cambridge



Bamberger, J. (2006). "What develops in musical development?" In G. MacPherson (ed.) *The child as musician: Musical development from conception to adolescence*. Oxford, U.K. Oxford University Press.

Réseau transformationnel et cognition/perception musicales

The figure illustrates six target sonorities used for Phase I pitch-detection tasks, organized into two sections: MELODIC EXCERPT I and MELODIC EXCERPT V. Each section shows three target sonorities (P₅) and their corresponding melodic excerpts. The target sonorities are circled in dashed-line boxes. The melodic excerpts are labeled with fingerings (e.g., 9, 2, 3, 1) and are connected to the target sonorities by vertical lines.

MELODIC EXCERPT I:

- Target Sonority 1: P₅ (circled in dashed-line box)
- Target Sonority 2: P₅ (circled in dashed-line box)
- Target Sonority 3: P₅ (circled in dashed-line box)
- Melodic Excerpt I: Fingerings: 9, 2, 3, 1; 5, 3, 2, 4; (7), 6, 5, 4, 1

MELODIC EXCERPT V:

- Target Sonority 4: P₅ (circled in dashed-line box)
- Target Sonority 5: P₅ (circled in dashed-line box)
- Target Sonority 6: P₅ (circled in dashed-line box)
- Melodic Excerpt V: Fingerings: (7), 8, 5, 6, 0; 4, 3, 2, (11); (11), 7, 0, 0

FIGURE 5. Six target sonorities used for Phase I pitch-detection tasks (circled in dashed-line boxes): Single Pentachords appeared in form of 'st' or 'ts' according to Lewin's ear-training aid (*MFT*, Example 2.7, p. 42). Their corresponding melodies are either Excerpt I or V.

De Piaget aux Systèmes évolutifs à mémoire

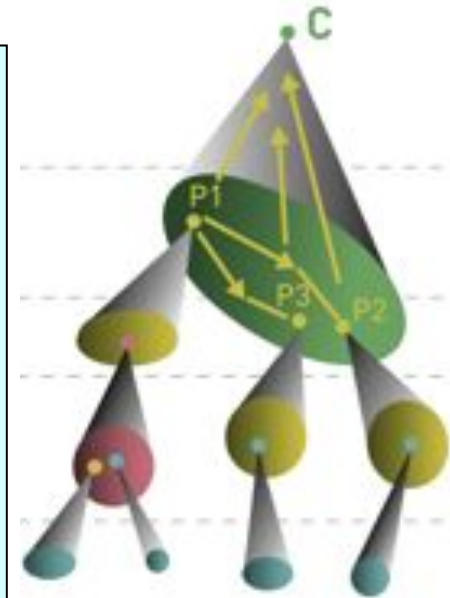
« La théorie des catégories est une théorie des constructions mathématiques, qui est macroscopique, et procède d'étage en étage. Elle est un bel exemple d'abstraction réfléchissante, cette dernière reprenant elle-même un principe constructeur présent dès le stade sensori-moteur. Le style catégoriel qui est ainsi à l'image d'un aspect important de la genèse des facultés cognitives, est un style adéquat à la description de cette genèse »



J. Piaget

Jean Piaget, Gil Henriques et Edgar Ascher, *Morphismes et Catégories. Comparer et transformer*, 1990

« [...]L'émergence d'une œuvre d'art est l'expression d'une dynamique se développant dans un système hiérarchique de complexité croissante à multiples temporalités. Notamment, dans le cadre de notre modèle mathématique « les systèmes évolutifs à mémoire » (SEM), nous analysons l'existence d'objets multiformes émergeant dans le système sociétal d'un « monde artistique »; il pourrait s'agir de courants artistiques, issus de mouvements de pensée, de mouvements sociaux, culturels, scientifiques, technologiques. » (Colloque « Complexité dans les sciences et dans les arts », Ircam, 8-19 juin 2009)



A. Ehresmann et J.-P. Vanbremeersch, « Petite mathématique de la création », *L'étincelle*, n° 6, novembre 2009

Vers une « algèbre des objets mentaux » (Changeux) en musique

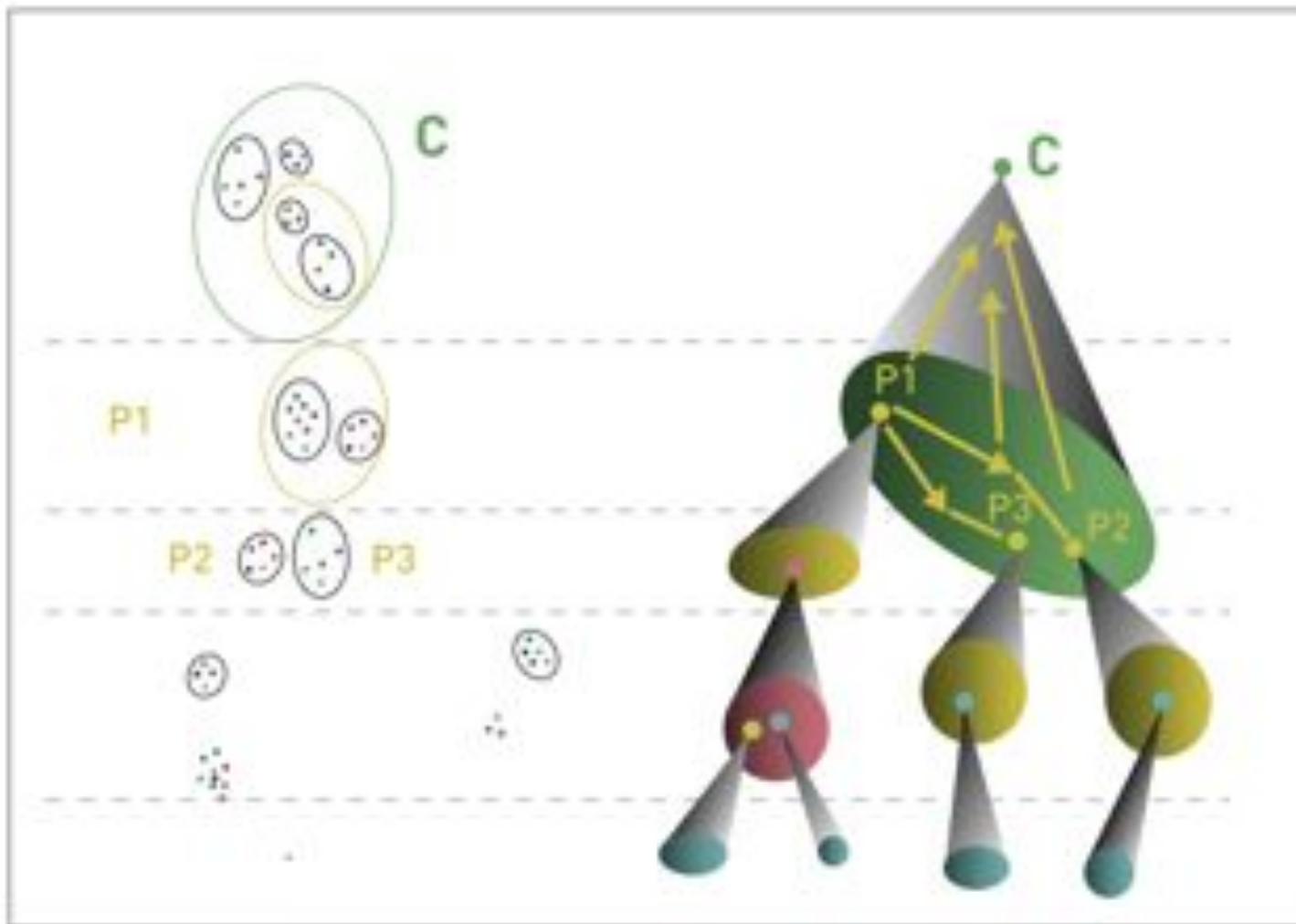
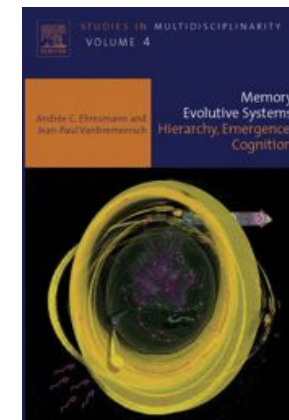
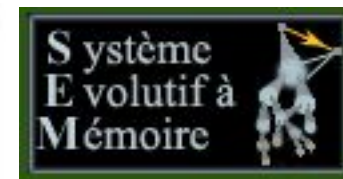
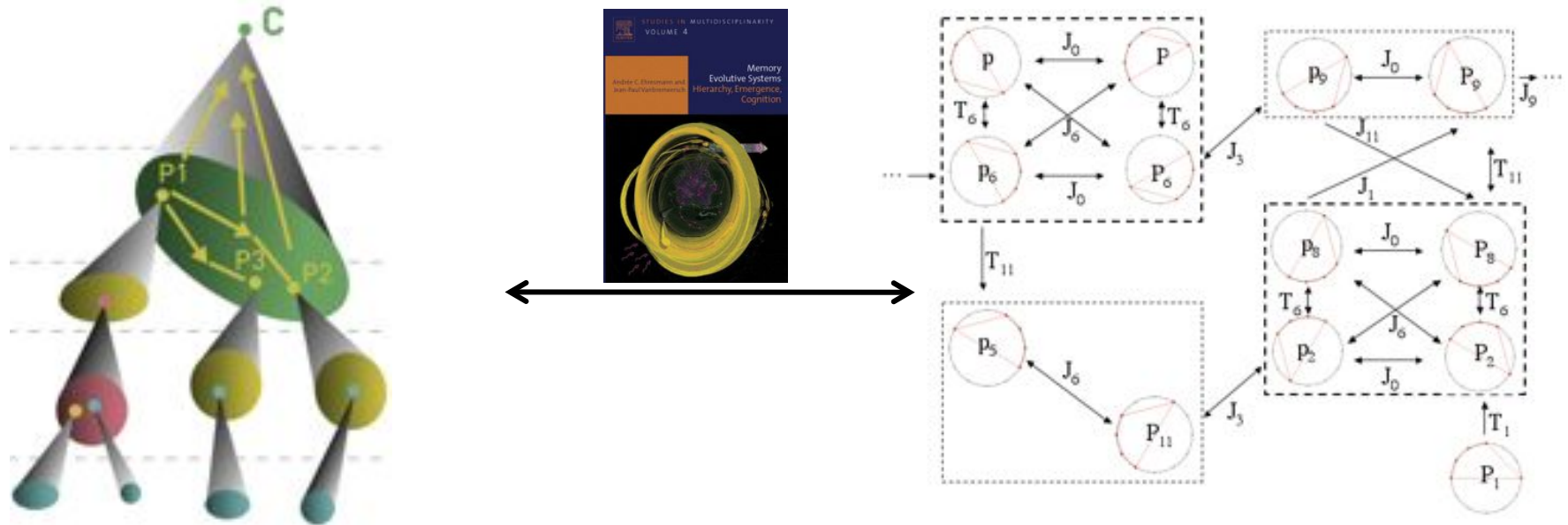


FIGURE 1 : À GAUCHE, FORMATION PROGRESSIVE D'UN OBJET COMPLEXE C PAR RECOLLEMENT D'OBJETS PLUS SIMPLES. À DROITE MODÈLE CATÉGORIQUE DE LA RAMIFICATION DE C, DÉPLOYÉE « DE HAUT EN BAS ».



Portrait of Anna Maria
1900-1900
1900-1900
1900-1900
1900-1900

Vers une explication catégorielle de la perception musicale ?



- G. S. Halford & W. H. Wilson, “A Category Theory Approach to Cognitive Development”, *Cognitive Psychology*, 12, 1980
- J. Macnamara & G. E. Reyes, *The Logical Foundation of Cognition*, OUP, 1994
- A. Ehresmann, J.-P Vanbremeersch, *Memory Evolutive Systems, Hierarchy, Emergence, Cognition*, 2007
- ...
- S. Phillips, W. H. Wilson, “Categorical Compositionality: A Category Theory Explanation for the Systematicity of Human Cognition”, *PLoS Comp. Biology*, 6(7), July 2010