La mathémusique et ses applications : apprendre et transmettre le gout des mathématiques *via* la musique

Moreno Andreatta[1], *DR CNRS en mathématiques/musique à l'Institut de recherche mathématique avancée de l'université de Strasbourg, est également chercheur associé à l'équipe Représentations musicales de l'Ircam. Diplômé en mathématiques de l'université de Pavie et en piano du conservatoire de Novara (Italie), il est docteur en musicologie computationnelle à l'EHESS de Paris. Il enseigne à présent les modèles formels dans la chanson dans le cadre de la licence en musiques actuelles de l'université de Strasbourg ainsi que les modèles mathématiques en musicologie computationnelle dans le Master ATIAM de Sorbonne Université. Parallèlement à son activité scientifique, Moreno Andreatta cultive depuis toujours sa passion pour l'improvisation et la poésie en chanson. Son premier album-concept, intitulé « Un racconto » et signé par le collectif Le Bateau Ivre, est paru en décembre 2022 chez le label « Storie di Note ».*

Résumé *: De Pythagore jusqu'à nos jours, les mathématiques et la musique n'ont cessé d'évoluer en tissant des liens plus ou moins étroits, en se nourrissant et influençant réciproquement. Après un court rappel historique sur les grandes étapes de l'évolution des rapports entre les mathématiques et la musique, l'article propose une conceptualisation de la recherche mathémusicale contemporaine à travers une approche diagrammatique dont il discute sa dynamique sous-jacente. Un élément essentiel de cette dynamique réside dans la place occupée par la modélisation informatique, à la fois dans le processus de formalisation (de la musique aux mathématiques) et d'application (des mathématiques à la musique). Deux exemples d'environnements web pour la théorie, analyse et composition assistées par ordinateur (The Tonnetz et The Rhythm Circle) sont discutés en soulignant leur potentiel dans l'apprentissage des savoirs mathémusicaux.*

INTRODUCTION

Peut-on partir des problèmes théoriques posés par la musique pour faire avancer la recherche scientifique et donner (ou redonner) le goût des mathématiques aux élèves collégiens et lycéens ainsi qu'au grand public ? C'est une question qui a guidé mes recherches dans le domaine des relations entre les mathématiques et la musique, une discipline qui a donné naissance au concept de la « mathémusique ». L'histoire remonte, du moins dans notre tradition occidentale, aux origines de la pensée mathématique, avec l'école pythagoricienne. Dans une conception de la philosophie où « tout est nombre », la musique n'y échappe pas, comme les pythagoriciens l'ont montré en mettant en évidence le lien entre longueur d'une corde et fréquence perçue lors que la corde est pincée. C'est un moment fondateur dans l'histoire de la théorie de la musique, car en coupant la corde en trois parties et en pinçant la corde d'une longueur égale à 2/3 de la corde initiale on obtient un intervalle, la quinte, qui est non seulement l'intervalle le plus consonant (après l'unisson et l'octave) mais qui a la propriété d'engendrer toutes les sept notes de la gamme diatonique (les touches blanches du piano, pour donner une idée d'une réalisation possible de cette gamme dans un instrument bien plus récent que le monocorde de Pythagore). En réitérant un peu plus le processus, c'est-à-dire après douze répétitions de l'intervalle de quinte, on obtient les douze notes de la gamme chromatique (touches blanches et noires). La musique est ainsi à l'origine du calcul des fractions chez les Grecs, comme le compositeur Iannis Xenakis aimait le souligner dans son tableau des correspondances entre certains développements de la musique et des mathématiques (1)[2].

Le tableau n'a aucune prétention d'être exhaustif, Xenakis étant avant tout un compositeur et pas un musicologue. J'ai donc essayé de le compléter en y ajoutant d'autres moments fondateurs dans l'histoire de la mathémusique, comme la naissance de la combinatoire ou de la théorie des graphes respectivement chez Marin Mersenne (1588-1648) et Leonhard Euler (1707-1783), tous les deux à la fois théoriciens de la musique et mathématiciens. Dans les deux cas, on peut montrer que la musique a été l'élément catalyseur permettant la naissance de nouvelles disciplines au sein des mathématiques. C'est en sifflant des mélodies et en voulant en calculer le nombre possible en faisant varier les notes et leurs possibles répétitions que Marin Mersenne a établi les outils de base du calcul combinatoire, et cela bien avant leur systématisation par le mathématicien Jacques Bernoulli dans le traité *Ars Conjectandi* (1713). Dans sa démarche d'énumération et classification des mélodies possibles, Mersenne introduit une représentation des notes de musique et des possibles intervalles qui continue à guider la recherche mathémusicale contemporaine. Il s'agit de la représentation circulaire permettant de disposer les douze notes de la gamme chromatique autour d'un cercle en traçant les segments qui séparent des notes quelconques de la gamme, ce qui correspond, d'un point de vue mathématique, à établir le graphe complet des intervalles de la gamme chromatique à partir de la représentation circulaire.

On trouve ce modèle géométrique ainsi que les tableaux d'énumération des mélodies possibles dans l'ouvrage *Harmonie universelle, contenant la théorie et la pratique de la musique* (1636-1637). Quelques années plus tard, dans l'ouvrage *De harmoniae veris principiis per speculum musicum repraesentatis* (1774), Leonhard Euler proposera une représentation alternative des douze notes de la gamme dans une portion de l'espace bidimensionnel appelée, comme l'indique le titre de l'ouvrage, *Speculum musicum*, à savoir miroir musical. C'est l'acte de naissance de la théorie des graphes, une branche des mathématiques qui continue à avoir un impact important dans la recherche mathémusicale contemporaine, en particulier à travers la structure du *Tonnetz*[3]. L'illustration suivante (Fig. 1) montre ces trois figures centrales dans l'histoire des rapports entre les mathématiques et la musique.

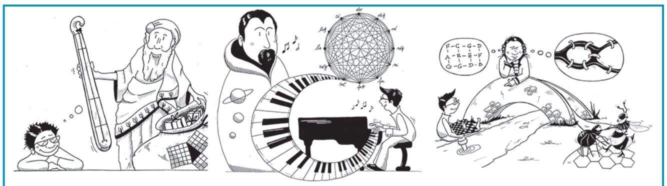

Fig. 1 : Trois moments fondateurs de la mathémusique : Pythagore et le calcul des notes de la gamme à travers des fractions ; Marin Mersenne et l'invention de la combinatoire musicale à l'aide de la représentation circulaire du tempérament musical ; Leonhard Euler et l'invention de la théorie des graphes à travers une représentation bidimensionnel de l'espace harmonique. Illustration de Wiebke Drenckhan pour « Math'n Pop ».

QUE CE QU'UNE DYNAMIQUE MATHÉMUSICALE ?

Nous avons suggéré quelques moments fondateurs de la mathémusique mais l'on pourrait évidemment poursuivre l'analyse et arriver jusqu'au XXe siècle, avec une prise de conscience progressive de la part de la communauté scientifique de l'intérêt mathématique de nombreux problèmes théoriques posés par la musique (2)[4]. Un véritable tournant a sans doute été la création en 2007, de la première revue à comité de lecture de mathématique sur mathématiques/musique (le *Journal of Mathematics and Music*), organe officiel de la *Society for Mathematics and Computation in Music*, une société savante internationale qui regroupe désormais une centaine de membres actifs dans le domaine. La société se réunit tous les deux ans, depuis 2007, dans une conférence internationale dont les actes sont régulièrement publiés chez Springer, ce qui permet de suivre l'évolution de la discipline et de son institutionnalisation au sein des différentes instances internationales, en particulier l'*European Mathematican Society* (EMS) et l'*American Mathematical Society* (AMS). Depuis 2010, le domaine des relations entre les mathématiques et la musique est répertorié au sein de la *Mathematical Subject Classification* (avec le code 00A65) et fait donc parti officiellement des disciplines qui constituent la riche architecture des mathématiques contemporaines.

Si l'on essaie d'analyser ce qui a changé dans la perception des liens entre la musique et les mathématiques de la part de la communauté scientifique, on constate qu'il y eu, effectivement, une prise de conscience de l'existence de problèmes difficiles posés par la musique et susceptibles de faire avancer la recherche en mathématiques. La mise en évidence de tels problèmes musicaux constitue le point de départ d'un processus que j'ai proposé d'indiquer avec le terme « dynamique mathémusicale » afin de souligner le double mouvement, de la musique aux mathématiques et des mathématiques à la musique, qui caractérise ce domaine de recherche (3).

A partir d'un problème théorique posé par la musique, la dynamique mathémusicale se déploie en trois étapes. Un premier moment concerne la formalisation des différentes questions théoriques posées par la musique à l'aide d'outils issus de plusieurs branches des mathématiques (algèbre, géométrie, topologie, combinatoire, théorie des graphes, théorie des treillis, …). La formalisation peut être vue comme une flèche ascendante, partant de la musique et aboutissant, au sein des mathématiques, à l'expression d'un problème théorique initial à travers un énoncé mathématique. L'énoncé peut être ensuite généralisé donnant lieu à des théorèmes qui pourront à leur tour redescendre vers la musique selon les différents domaines d'application, comme, par exemple, la composition, l'analyse ou la théorie musicale (Fig. 2).

LA MODÉLISATION INFORMATIQUE ENTRE FORMALISATION MATHÉMATIQUE ET APPLICATIONS MUSICALES

Le lecteur aura sans doute remarqué la présence, dans la phase ascendante (de la musique aux mathématiques) et

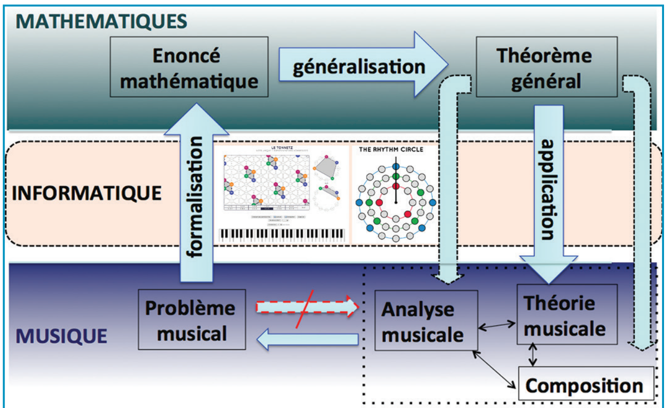

Fig. 2 : Schéma détaillant les trois étapes à la base de la dynamique mathémusicale : formalisation, généralisation et application. Entre la musique et les mathématiques, on remarquera la présence d'une région intermédiaire représentée par l'informatique et au sein de laquelle on peut placer les modélisations des structures et processus musicaux à l'aide de langages de programmation et environnements d'aide à la théorie, analyse et composition assistées par ordinateur.

dans celle descendante (des mathématiques à la musique), d'une région qui constitue une interface entre la musique et les mathématiques. C'est l'espace de la modélisation informatique, une étape qui consiste parfois dans la mise à disposition des résultats théoriques obtenus via la formalisation et généralisation en vue d'une application au domaine de l'analyse musicale et composition assistées par ordinateur. A cette catégorie appartient l'ensemble des *MathTools* qui ont été intégrés progressivement en *OpenMusic*, un langage de programmation visuelle pour la musique développée par l'équipe Représentations musicales de l'Ircam et qui constitue une référence pour la communauté des compositeurs intéressés par une utilisation d'approches algorithmiques dans une démarche de composition assistée par ordinateur. Les trois volumes de l'ouvrage *The OM Composer's Book* (4) offrent une riche présentation de l'utilisation de tels outils informatiques de la part des compositeurs et dans le cadre de projets compositionnels ayant abouti à des pièces jouées en concert. Plus récemment, des environnements *web* ont été développés permettant une mise à disposition d'outils et résultats issus des représentations et formalisations mathémusicales, non seulement pour la communauté des compositeurs, analystes et théoriciens de la musique, mais également pour le grand public. C'est le cas, par exemple, des environnements *The Tonnetz* et *Rhythm Circle*, dédiés respectivement à la représentation géométrique des espaces harmoniques et rythmiques[5]. Le caractère interactif et *open source* des deux environnements, ainsi que le fait qu'ils sont accessibles en ligne, offre à la recherche mathémusicale de nouvelles perspectives qui dépassent largement le cadre des laboratoires des recherches et touchent directement à la transmission des savoirs auprès d'un public de non spécialistes du domaine.

LE PROJET LAMAMU OU COMMENT TRANSMETTRE LES MATHÉMATIQUES VIA LA MUSIQUE

Diverses actions en direction d'un public scolaire ainsi que du grand public ont été menées depuis plusieurs années afin de rendre accessibles les résultats de la recherche mathémusicale à un public de non spécialistes. Récemment, un projet financé par la cellule « Science et Société » de l'université de Strasbourg a permis de structurer les diverses actions pédagogiques en partenariat avec l'éducation nationale et en relation étroite avec des acteurs du monde socio-économique. Il s'agit du projet « LaboMathéMusique : transmettre les mathématiques *via* la musique au collège et au lycée », dont l'enjeux principal est précisément celui de structurer les activités mathémusicales à travers une démarche coordonnée intégrant, avant tout, les « laboratoires des mathématiques » (ou LabosMaths en abrégé)[6]. Ce sont des dispositifs pédagogiques rattachés à certains collèges et lycées dans l'ensembles des académies relevant de l'éducation nationale qui visent à promouvoir des actions interdisciplinaires à destination à la fois des enseignants et des élèves. Le projet LaboMathéMusique (ou LaMaMu en abrégé) déploie une série d'actions autour de la transmission des savoirs mathémusicaux à destination des élèves de collège et lycée à travers des ateliers pédagogiques réalisés en collaboration étroite avec des enseignants. Les ateliers permettent aux élèves de collège et lycée de se familiariser avec plusieurs concepts de mathématiques à partir de la musique et, plus exactement, de la musique qui est écoutée au quotidien, à savoir la chanson. Deux ateliers, en particulier, sont proposés visant à explorer les diverses représentations géométriques à la base des espaces harmoniques et rythmiques. La figure 3 offre un aperçu du contenu des deux ateliers pédagogiques, intitulés respectivement « Mathématiques, dessinez-moi la musique » et « Mathématiques, dessinez-moi le rythme ». Parmi les concepts théoriques introduits et discutés à partir de la musique, on retrouve la construction de la gamme pythagoricienne à partir de l'intervalle de quinte juste (donc du rapport 3/2) avec la démonstration du fait que la spirale des quintes est infinie, un bon exemple de démonstration par l'absurde qui permet aux élèves de découvrir l'un des théorèmes fondamentaux du tempérament musical.

L'enjeu principal de ces ateliers est celui de permettre à l'élève de développer une maitrise des diverses représen-

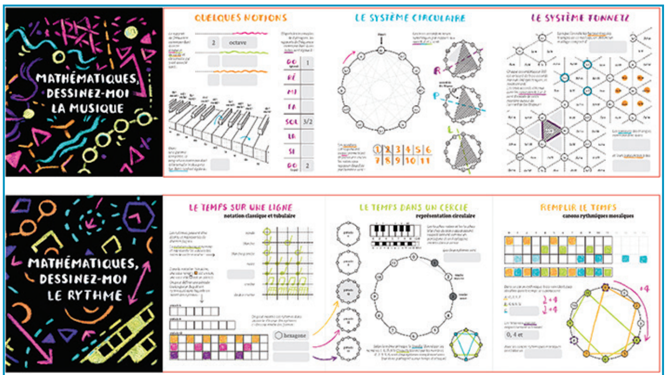

Fig. 3 : Un aperçu des concepts mathématiques traités lors des deux ateliers pédagogiques « Mathématiques, dessinez-moi la musique » et « Mathématiques, dessinez-moi le rythme », consacrés respectivement à la formalisation des principes de bases de l'harmonie et du rythme.

tations géométriques des structures musicales. La représentation circulaire est sans doute celle qui permet des « transferts de structure » entre le domaine de l'harmonie et celui des rythmes. Dans les deux cas, en effet, la présence d'une périodicité permet de représenter les structures musicales (gammes, accords, et rythmes) à l'aide d'un cercle divisé en 12 parties égales (ou, plus en général, en *n* parties égales). La figure 4 montre la gamme diatonique (les touches blanches du piano) dans le cercle chromatique et dans le cercle correspondant au cycle des quintes.

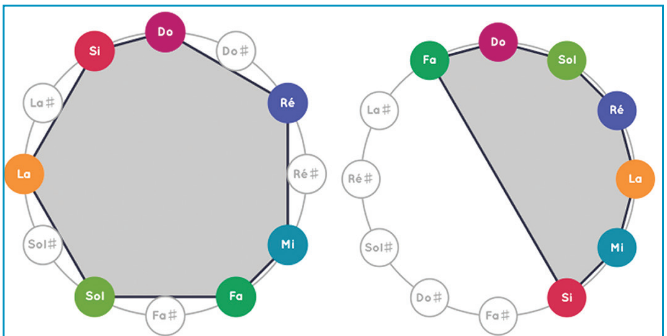

Fig. 4 : La gamme diatonique dans le cercle chromatique (à gauche) et dans la représentation circulaire associée au cycle des quintes (à droite).

D'un point de vue combinatoire, la gamme diatonique correspond à la meilleure répartition de sept points autour d'un cercle divisé en 12 parties égales. Ce problème combinatoire, connu comme le *Dinner Table Problem* (ou problème du diner à table), est tout à fait transposable au domaine rythmique. Le *pattern rythmique* correspondant, appelé *Bembé* (dans la tradition afro-cubaine) ou *Abadja* (dans des cultures traditionnelles d'Afrique de l'Ouest), n'est que l'une des solutions à ce problème combinatoire, la table du diner pouvant contenir 8 chaises occupés par trois invités ou encore 16 chaises avec seulement 5 invités. Dans le deuxième cas, on parlera de rythme de *tresillo* alors que dans le troisième cas on est face au célèbre rythme de *bossa* (5). Les trois rythmes sont représentés dans les trois cercles concentriques de la figure 5.

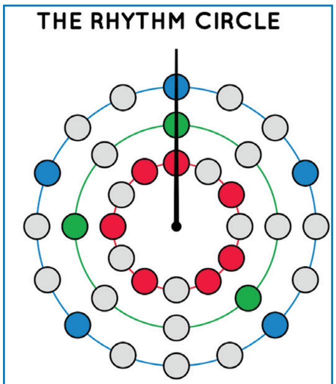

Fig. 5 : Les trois rythmes solutions du Dinner Table Problem *dans le cas, respectivement, d'un ensemble de cardinalité 7 contenu dans un cercle divisé en 12 parties (Bembé), d'un ensemble de cardinalité 3 contenu dans un cercle divisé en 8 parties (tresillo) et d'un ensemble de cardinalité 5 contenu dans un cercle divisé en 16 parties (bossa). L'environnement web* Rhythm Circle *est conçue et développé par Paul Lascabettes et Corentin Guichaoua (https://rhythm-circle.com/).*

La représentation circulaire est bien adaptée pour mettre en évidence les propriétés de symétrie des structures harmoniques et rythmiques, ainsi que les opérations algébriques liées aux transformations de base de la musique (en particulier la transposition et l'inversion). A partir d'un accord de *k* notes, représenté comme un polygone de *k* côtés inscrit dans le cercle, il n'est pas difficile de montrer que d'un point de vue géométrique, la transposition musicale correspond à une rotation du polygone, tandis que l'inversion correspond à une symétrie axiale. Ces transformations musicales peuvent également être étudiées à l'aide d'une deuxième représentation : le *Tonnetz*[3] (Fig. 6).

Comme dans le cas de la représentation circulaire, qui capture l'idée d'équivalence modulo l'octave, le *Tonnetz* n'est pas un ensemble infini du plan. Les accords et les gammes y sont représentées à des multiples positions du plan, la triangulation ou le maillage hexagonal étant périodiques. La figure 7 montre la gamme diatonique en tant que région connexe et convexe du *Tonnetz*, aussi bien dans celui formé par des triangles (à gauche) que dans celui constitué d'hexagones (à droite).

D'un point de vue topologique, le *Tonnetz* est équivalent à un tore, comme montré dans la figure 8 qui détaille le double processus d'identification à partir d'une région du plan. Les côtés opposés correspondent en effet aux

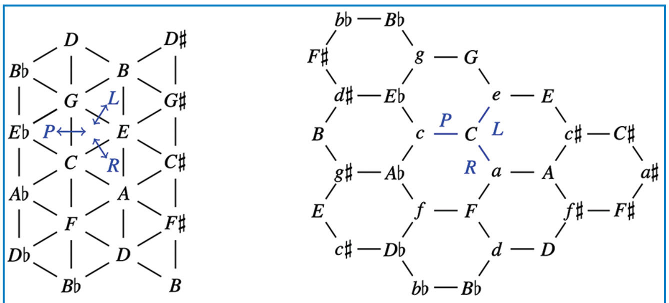

Fig. 6 : Le Tonnetz *en tant que triangulation du plan (gauche) ou, par dualité, maillage hexagonal en nid d'abeille (droite).*

mêmes ensembles des notes et peuvent donc être recollés, ce qui permet d'obtenir la structure toroïdale correspondante à la triangulation du plan dans laquelle les triangles représentent des accords majeurs ou des accords mineurs.

Des triangulations différentes associées à d'autres accords de trois notes engendrent des espaces topologiques différents, dont la classification peut être réalisée à l'aide des invariants algébriques tels les « nombres de Betti », comme montré par Paul Lascabettes dans son mémoire de master (6).

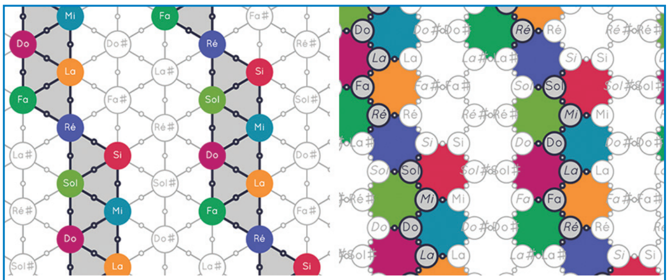

Fig. 7 : Représentation de la gamme diatonique en tant que région connexe et convexe du Tonnetz (à gauche) et de son dual (à droite). L'environnement web The Tonnetz *est conçu et développé par Corentin Guichaoua et Moreno Andreatta (https://thetonnetz.com/)*

LE SPECTACLE MATH'N POP : UNE MISE EN SCÈNE DE LA MATHÉMUSIQUE

Ces mêmes constructions théoriques qui sont à la base des ateliers scolaires sont également au cœur d'une conférence-concert théâtralisée, le spectacle Math'n Pop, conçu avec le metteur en scène et comédien Laurent Mandeix, spécialisé dans le théâtre scientifique. Le spectacle, initialement labellisé par le CNRS dans le cadre des célébrations pour ses 80 ans, propose une mise en scène d'idées et concepts mathématiques à travers la

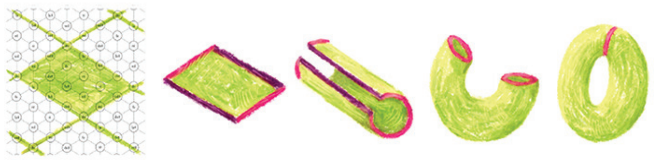

Fig. 8 : La construction de la représentation toroïdale à partir du Tonnetz par un double recollement des côtés opposés de la région fondamentale du plan associée à l'espace chromatique. Illustration de Marie Marty.

musique, à partir de Pythagore et jusqu'aux développements les plus récents autour du *Tonnetz*. Véritable spectacle « itinérant adaptatif », Math'n Pop se propose de révéler de façon ludique et interactive des concepts issus de différents domaines des mathématiques à partir de la musique et à travers des interprétations live de chansons célèbres (avec remaniement du texte) et des chansons originales composées et adaptées pour le spectacle. Le spectacle s'appuie également sur l'environnement web *The Tonnetz* pour représenter des façon interactive les structures musicales en jeu et permettre ainsi au public de participer activement au spectacle à travers la manipulation des outils informatiques (Fig. 9).

AUTRES ACTIONS AUTOUR DE LA DIFFUSION DES SAVOIRS MATHÉMUSICAUX

Nous avons esquissé les principales modalités d'apprentissage et transmission des savoirs mathémusicaux auprès des élèves du collège et du lycée ainsi que du grand public. D'autres actions sont prévues dans le cadre du projet LaMaMu, touchant également les enseignants du supérieur, comme le lancement d'un groupe de recherche dans le domaine au sein des instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM). Le manque d'un tel groupe nous a incité à en créer au sein de l'IREM de l'université de Strasbourg. Le groupe est à présent coor-

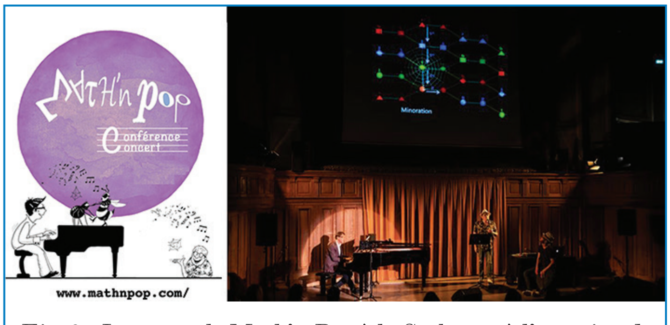

Fig. 9 : Le spectacle Math'n Pop à la Sorbonne à l'occasion de l'ouverture de l'année des mathématiques en 2019. À gauche, l'affiche de présentation ; à droite, un extrait du spectacle.

donné par Victoria Callet, chercheuse en mathémusique à l'IRMA (Institut de recherche mathématique avancée) et membre également de l'ITI CREAA (Centre de recherche et d'expérimentation sur l'acte artistique). On peut en effet difficilement imaginer de pouvoir structurer les activités pédagogiques autour des rapports entre les mathématiques et la musique sans impliquer directement les enseignants du secondaire. La spécificité des IREM est de renforcer les collaborations entre enseignants de collège et lycée et les chercheurs. De plus, la participation du dispositif LaboMath à ce groupe de recherche permettra de développer des outils pédagogiques innovants dans le domaine de la mathémusique, outils susceptibles de mieux cibler les besoins des élèves dans le cadre des ateliers pédagogiques et les adapter au contenu des programmes de l'éducation nationale. Les ateliers avaient, en effet, été conçus à partir du contenu du thème « Son et musique, porteurs d'information », option pédagogique incluse dans le programme de première scientifique. Le groupe de recherche IREM sur mathématiques et musique pourra ainsi accompagner l'évolution des enseignements interdisciplinaires autour de la mathémusique sans se focaliser exclusivement sur les classes de première, mais en déployant des outils pédagogiques tout au long de la scolarité des élèves, à partir du collège, et peut-être même au niveau de l'école primaire.

A toutes ces modalités d'apprentissage et de transmission des savoirs mathémusicaux, ajoutons en conclusion le projet de rédaction du futur calendrier des mathématiques, un « calendrier pour faire travailler ses méninges au jour le jour, véritable programme quotidien pour entraîner son cerveau et tester son esprit mathématique ! », comme le souhaitent les éditeurs scientifiques de cet objet très aimé par le grand public et dont l'édition 2025 sera consacrée à la mathémusique. Il s'agit, en effet, d'une initiative qui touche à la fois le grand public mais qui pourra également nourrir le travail des enseignants du secondaire et intéresser également les collègues scientifiques et les musiciens intrigués par le domaine de la mathémusique. Douze thèmes mathémusicaux – rédigés par Emmanuel Amiot, Paul Lascabettes et moi-même et accompagnés par des exercices conçus en collaboration avec les éditeurs scientifiques du calendrier – seront mis à l'honneur tout au long de l'année 2025. Le choix devrait permettre au lecteur d'avoir un panorama assez exhaustif du domaine des rapports entre les mathématiques et la musique, de Pythagore jusqu'aux enjeux de l'intelligence artificielle. Une ultérieure invitation pour un nouveau voyage, que nous espérons riche en surprises et découvertes, au pays de la mathémusique !

RÉFÉRENCES

(1) Xenakis I (1971) *Musique. Architecture.* Casterman, Tournai, 160 pages (Nouvelle édition, augmentée 1976 : Casterman, Tournai, 237 pages).

(2) Assayag G, Feichtinger HG, Rodrigues JF eds. (2002) *Mathematics and Music. A Diderot Mathematical Forum.* Springer Verlag, Berlin and Heidelberg, 288 pages.

(3) Andreatta M (2010) *Mathematica est exercitium musicae. La recherche 'mathémusicale' et ses interactions avec les autres disciplines.* HDR en mathématiques, IRMA/Université de Strasbourg. https://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/moreno/TexteHDR.pdf

(4) Agon C, Assayag G, Bresson J (2006-2016) *The OM Composer's Book* (en trois volumes, parus en 2006, 2007 et 2016). Collection « Musique Sciences », Delatour France / Ircam.

(5) Toussaint G T (2013) *The Geometry of Musical Rhythm. What Makes a "Good" Rhythm Good?* CRC Press, Boca Raton, 365 pages.

(6) Lascabettes P (2018) *Homologie Persistante Appliquée à la Reconnaissance de Genres Musicaux.* Mémoire de M1, ENS Paris / Université de Strasbourg. Disponible en ligne sur la page du projet SMIR (http://repmus.ircam.fr/moreno/smir).

(7) Cohen G dir. (2010) *Maths & musique. Des destinées parallèles.* Tangente, hors-série n° 11. Éd POLE, Paris, 158 pages.

(8) Jedrzejewski F (2006) *Mathematical Theory of Music.* Collection « Musique-Sciences », Delatour France/Ircam, 352 pages.

(9) Benson D (2007) Music. *A Mathematical Offering.* Cambridge University Press, 426 pages.

(10) Amiot E (2024) *Une Introduction aux mathématiques de la musique.* Calvage et Mounet, Paris, 156 pages.

NOTES

[1] Page web : www.morenoandreatta.com. [2] Le tableau est également repris dans le numéro spécial de la revue Tangente consacré aux « destinées parallèles » des mathématiques et de la musique (7). [3] Un graphe qui reprend de facto les principes de base du Speculum musicum d'Euler pour en généraliser le domaine d'application grâce à toute une panoplie d'espaces géométriques et topologiques associés aux différentes représentations bidimensionnelles de la gamme chromatique. [4] On pourrait citer également d'autres ouvrages qui témoignent de l'intérêt croissant de la part des mathématiciens pour les problèmes théoriques posés par la musique (8, 9). Pour le lecteur ayant de bonnes connaissances en musique, nous conseillons l'ouvrage récent d'Emmanuel Amiot (10). [5] Les environnements web sont accessibles à partir de la page www.mathemusique.fr. [6] Page web : https://eduscol.education.fr/1469/laboratoires-de-mathematiques