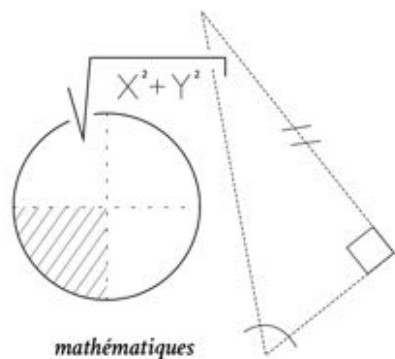
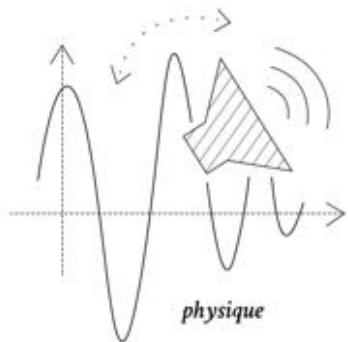
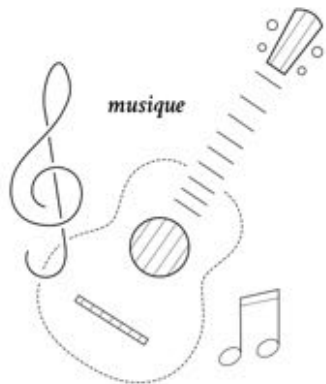


MATHÉMATIQUES, DESSINEZ-MOI LA MUSIQUE

Moreno Andreatta et Marie Marty
Lycée Albert Schweitzer, Mulhouse, 6 octobre 2020



La musique entre, maths, physique et info



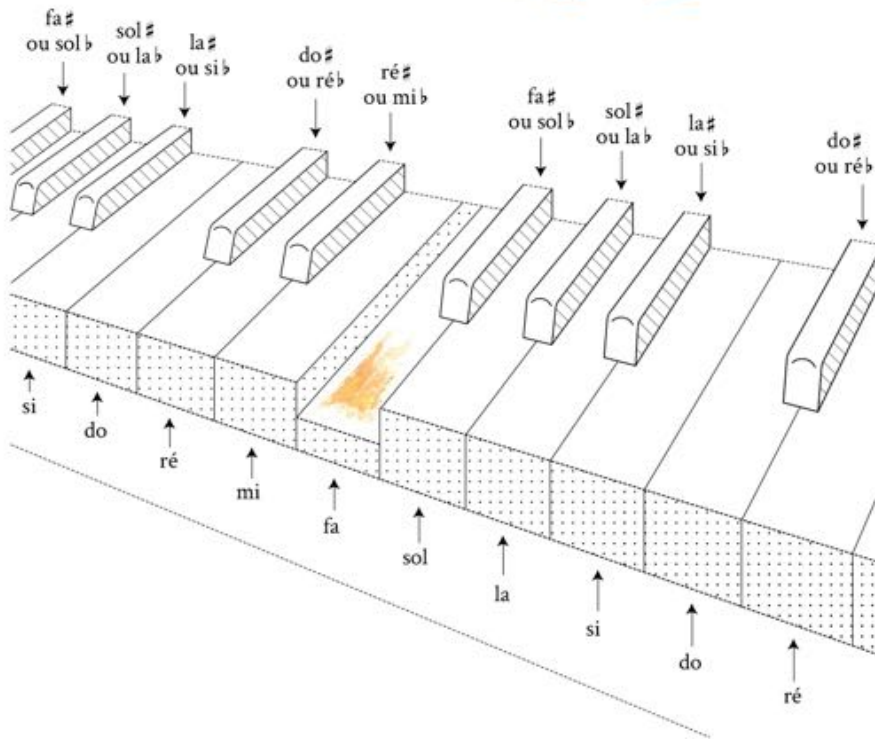
« Mathémusique » dans le programme de l'Education Nationale

L'être humain perçoit le monde à l'aide de **signaux** dont certains sont de nature sonore. De l'Antiquité jusqu'à nos jours, il a combiné les sons de manière harmonieuse pour en faire un art, la musique, qui entretient des liens privilégiés avec **les mathématiques**. **L'informatique** permet aujourd'hui de numériser les sons et la musique. La compréhension des mécanismes auditifs s'inscrit dans une perspective d'éducation à la santé.

Que connaissez-vous du clavier de piano ?

Petit lexique de concepts musicaux

NOTE

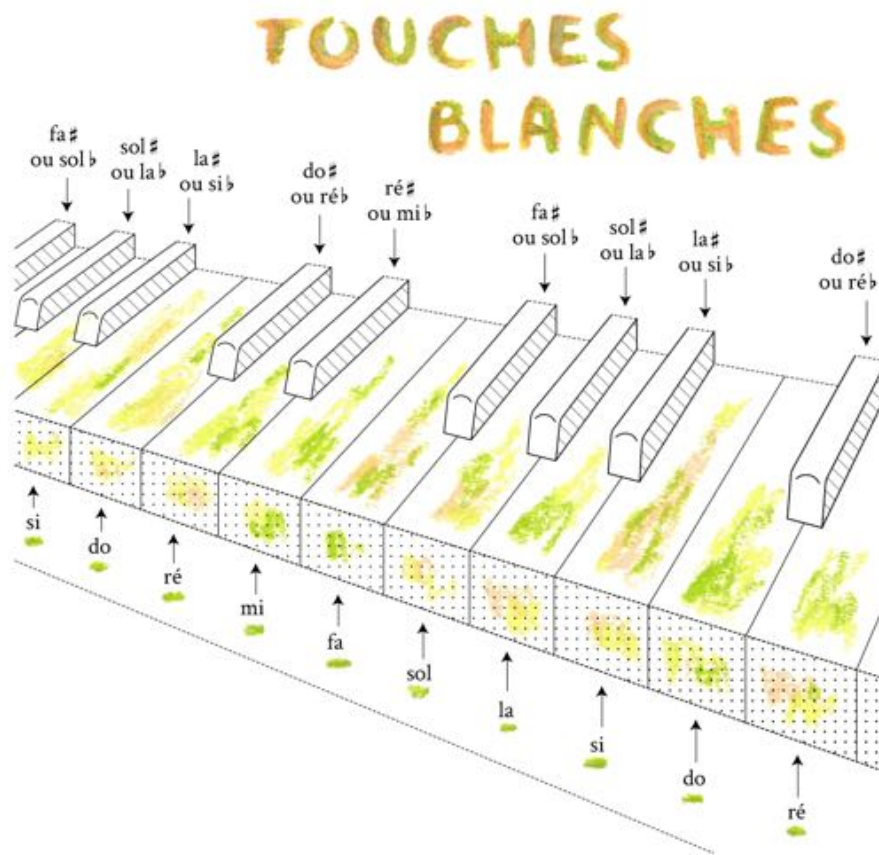


La note

En musique, une note désigne soit un **symbole** permettant de représenter la **hauteur** et la **durée** relative d'un son, soit la hauteur elle-même d'un son.

(<https://www.lire-les-notes.com/>)

Petit lexique de concepts musicaux

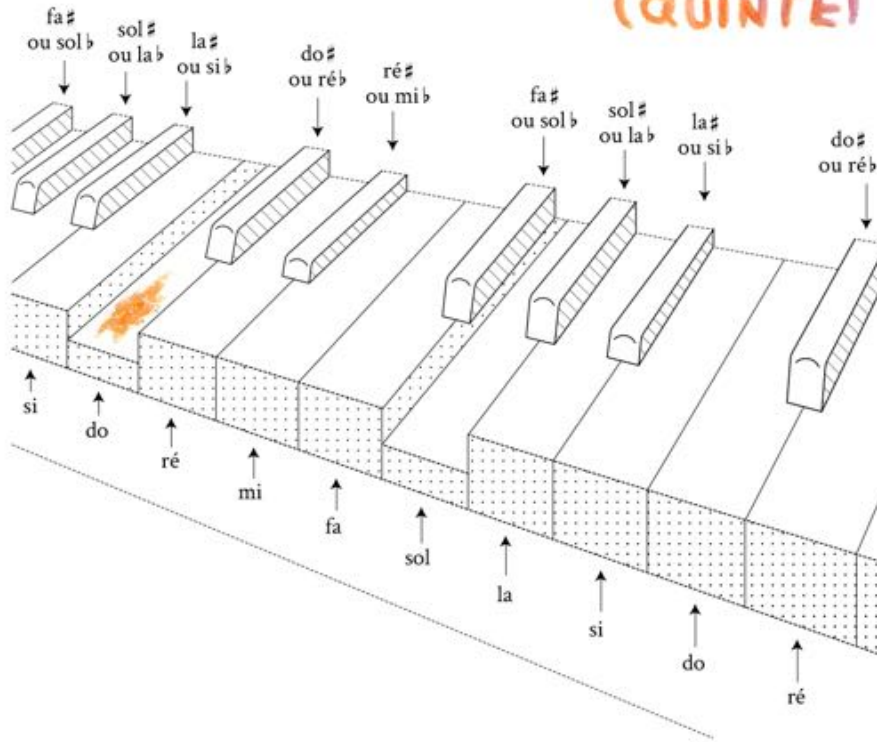


Touches blanches et noires

Le piano est constitué de deux ensembles de notes, à savoir l'ensemble des **touches blanches** et l'ensemble des **touches noires**. Ces deux ensembles sont **disjoints**. Que-ce que cela veut dire ?

Petit lexique de concepts musicaux

INTERVALLE (QUINTE)

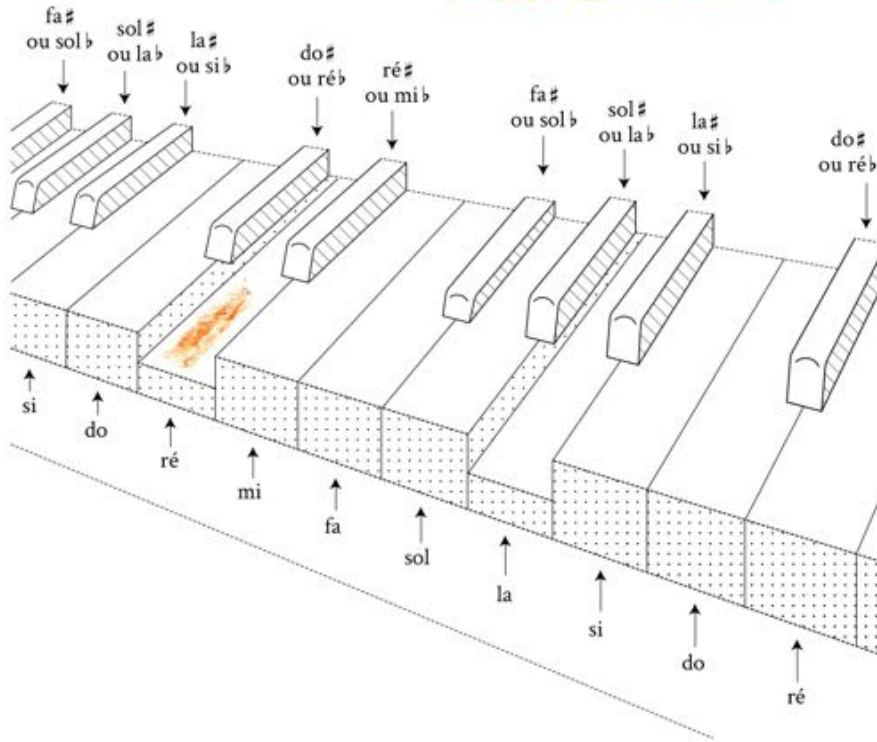


L'intervalle

Un intervalle est une **distance** entre les notes d'une gamme. Par exemple la **quinte** est l'intervalle qui correspond à une distance de 5 pas sur les touches blanches du piano (ou 7 demi-tons si l'on considère aussi les touches noires).

Petit lexique de concepts musicaux

ACCORD

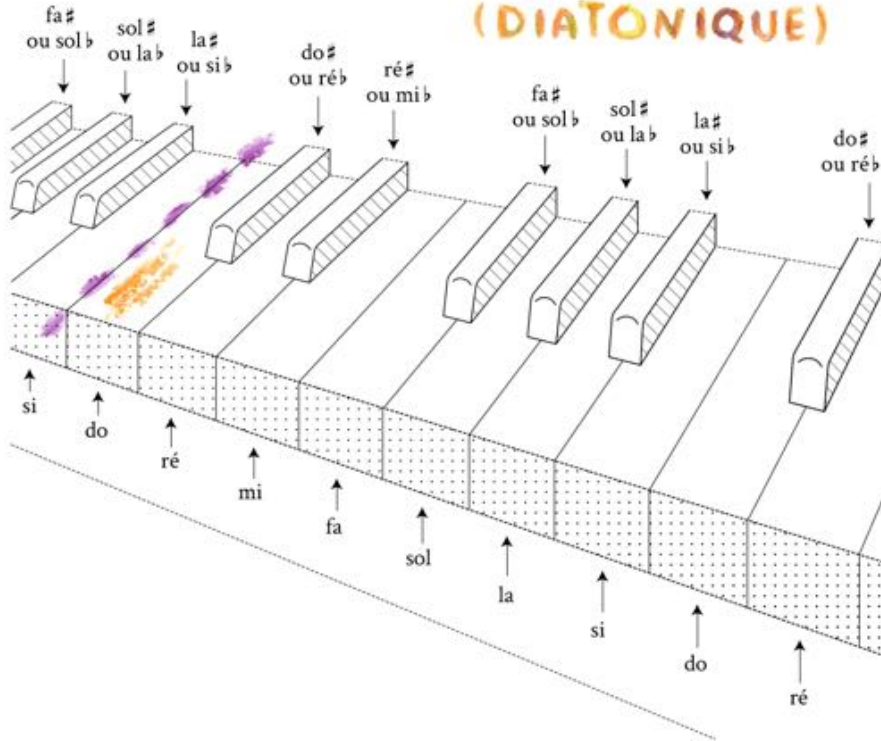


L'accord

Un accord est une **superposition** de plusieurs notes. Par exemple les trois notes en figure constituent l'accord de **ré majeur**.

Petit lexique de concepts musicaux

GAMME (DIATONIQUE)

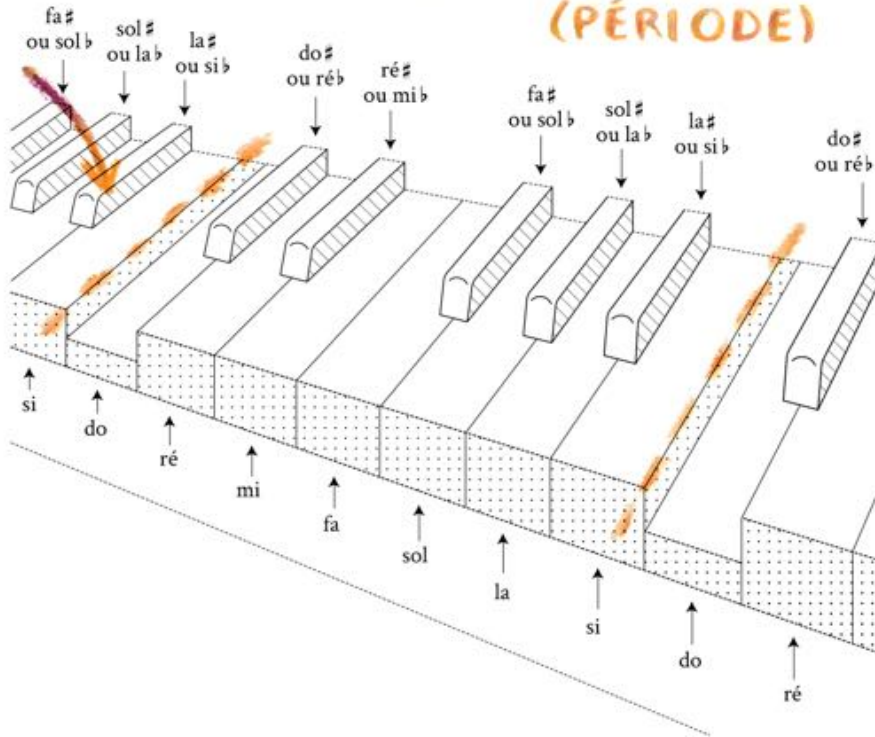


La gamme

Une gamme est une succession ordonnée de notes de musique. Par exemple les touches blanches constituent la **gamme diatonique** et les touches noires forment la **gamme pentatonique**.

Petit lexique de concepts musicaux

OCTAVE (PÉRIODE)

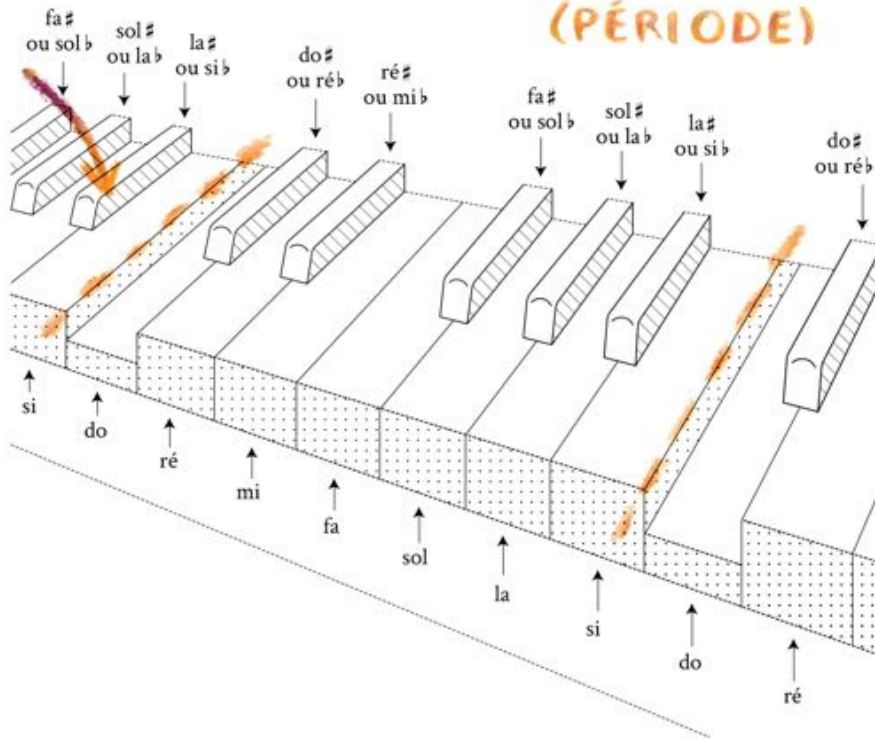


L'octave

L'octave est l'**intervalle** entre deux notes à distance de 12 demi-tons. D'un point de vue physique, l'intervalle d'octave correspond à **doubler la fréquence** d'une note (c'est-à-dire le nombre de vibrations par second de l'onde sonore associée à la note de musique).

Petit lexique de concepts musicaux

OCTAVE (PÉRIODE)



L'octave

L'octave est l'**intervalle** entre deux notes à distance de 12 demi-tons. D'un point de vue physique, l'intervalle d'octave correspond à **doubler la fréquence** d'une note (c'est-à-dire le nombre de vibrations par second de l'onde sonore associée à la note de musique).

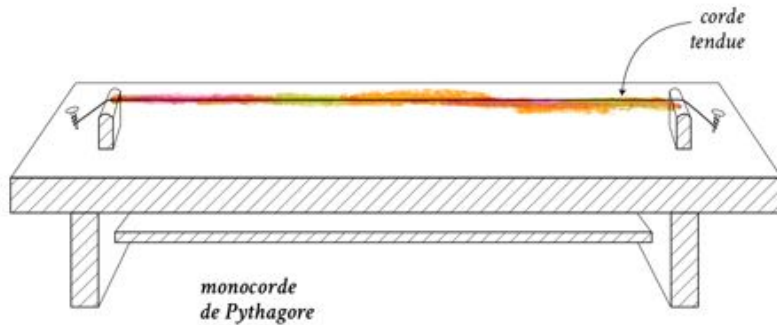
Faisons donc un pas en arrière...

Avant le piano... le monocorde !

Pythagore et le monocorde



Les intervalles selon le monocorde



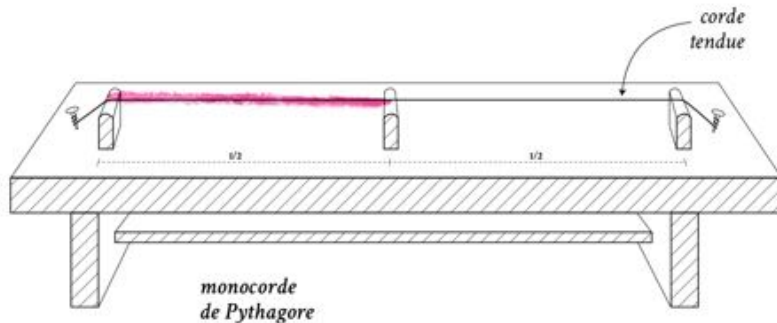
VOICI UNE NOTE

Le monocorde est un instrument contenant une unique corde tendue et une caisse de résonance.

Plus cette corde est courte, plus le son obtenu en la pinçant est aigu, car la **fréquence du son est inversement proportionnelle à la longueur de la corde**.

Ainsi, si le rapport de longueur de la corde est égal à 1 (comme ici), son rapport de fréquence sera égal à $1/1$ donc 1 !

Les intervalles selon le monocorde



Longueur
de la corde

$1/2$

Rapport
de fréquence

2

Intervalle
correspondant

OCTAVE

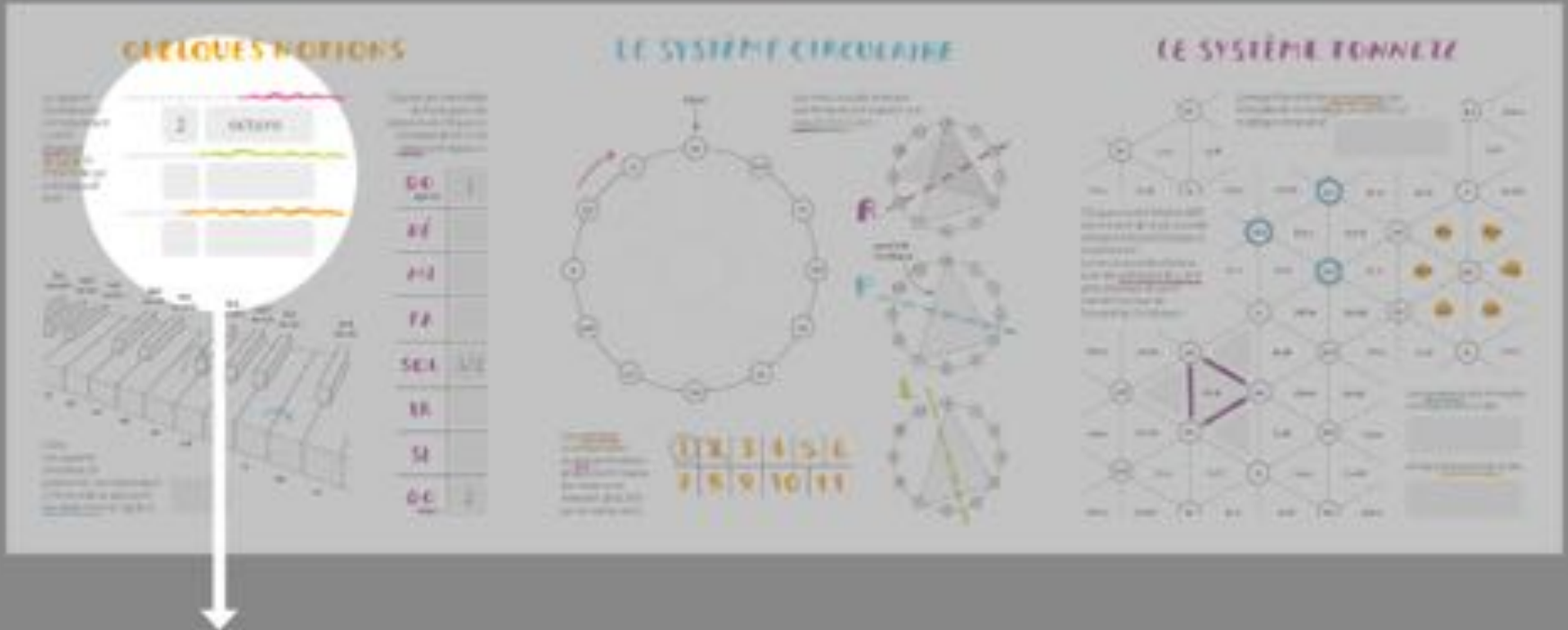
Le monocorde est un instrument contenant une unique corde tendue et une caisse de résonance.

Plus cette corde est courte, plus le son obtenu en la pinçant est aigu, car la **fréquence du son est inversement proportionnelle à la longueur de la corde**.

Ainsi, si le rapport de longueur de la corde est égal à 1 (comme ici), son rapport de fréquence sera égal à $1/1$ donc 1 !

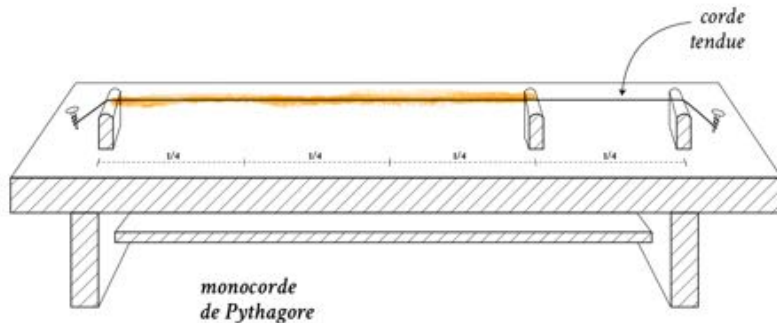
Si le rapport de longueur de la corde est égal à $1/2$, son rapport de fréquence sera égal à $1/(1/2)$ donc 2, ce qu'on appelle l'intervalle d'**octave**

Les intervalles selon le monocorde



Après avoir mesuré la longueur des segments de corde colorés par rapport à la longueur totale de la corde, en déduire le rapport de fréquence qui y correspond

Les intervalles selon le monocorde



Longueur
de la corde

$3/4$

Rapport
de fréquence

$4/3$

Intervalle
correspondant

QUARTE

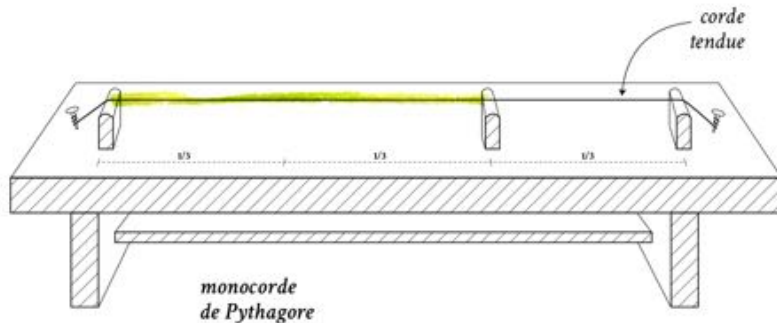
Le monocorde est un instrument contenant une unique corde tendue et une caisse de résonance.

Plus cette corde est courte, plus le son obtenu en la pinçant est aigu, car la **fréquence du son est inversement proportionnelle à la longueur de la corde.**

Ainsi, si le rapport de longueur de la corde est égal à 1 (comme ici), son rapport de fréquence sera égal à $1/1$ donc 1 !

Si le rapport de longueur de la corde est égal à $3/4$, son rapport de fréquence sera égal à $1/(3/4)$ donc $4/3$, ce qu'on appelle l'intervalle de **quarte.**

Les intervalles selon le monocorde



Longueur
de la corde

2/3

Rapport
de fréquence

3/2

Intervalle
correspondant

QUINTE

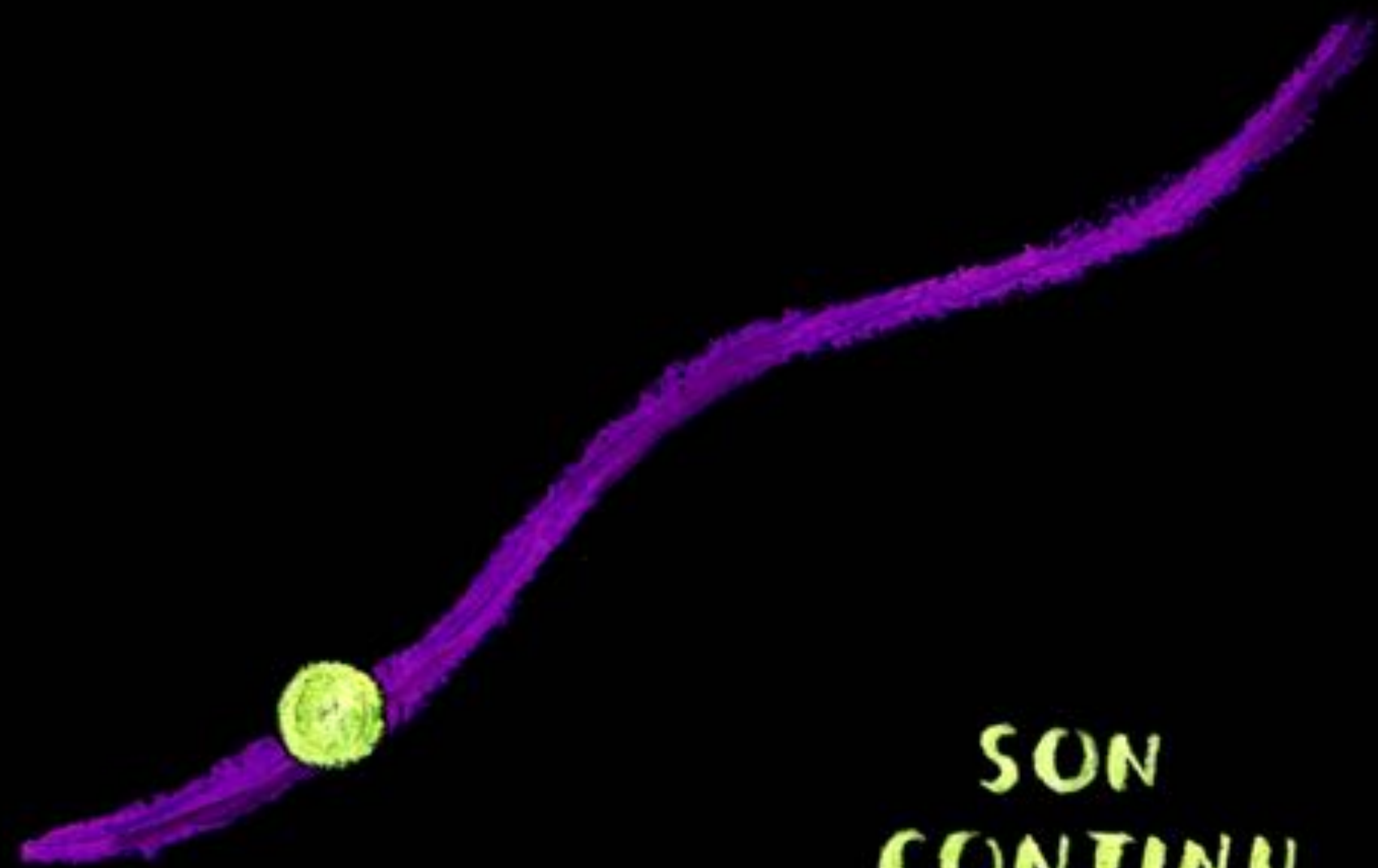
Le monocorde est un instrument contenant une unique corde tendue et une caisse de résonance.

Plus cette corde est courte, plus le son obtenu en la pinçant est aigu, car la **fréquence du son est inversement proportionnelle à la longueur de la corde.**

Ainsi, si le rapport de longueur de la corde est égal à 1 (comme ici), son rapport de fréquence sera égal à $1/1$ donc 1 !

Si le rapport de longueur de la corde est égal à $2/3$, son rapport de fréquence sera égal à $1/(2/3)$ donc $3/2$, ce qu'on appelle l'intervalle de **quinte.**

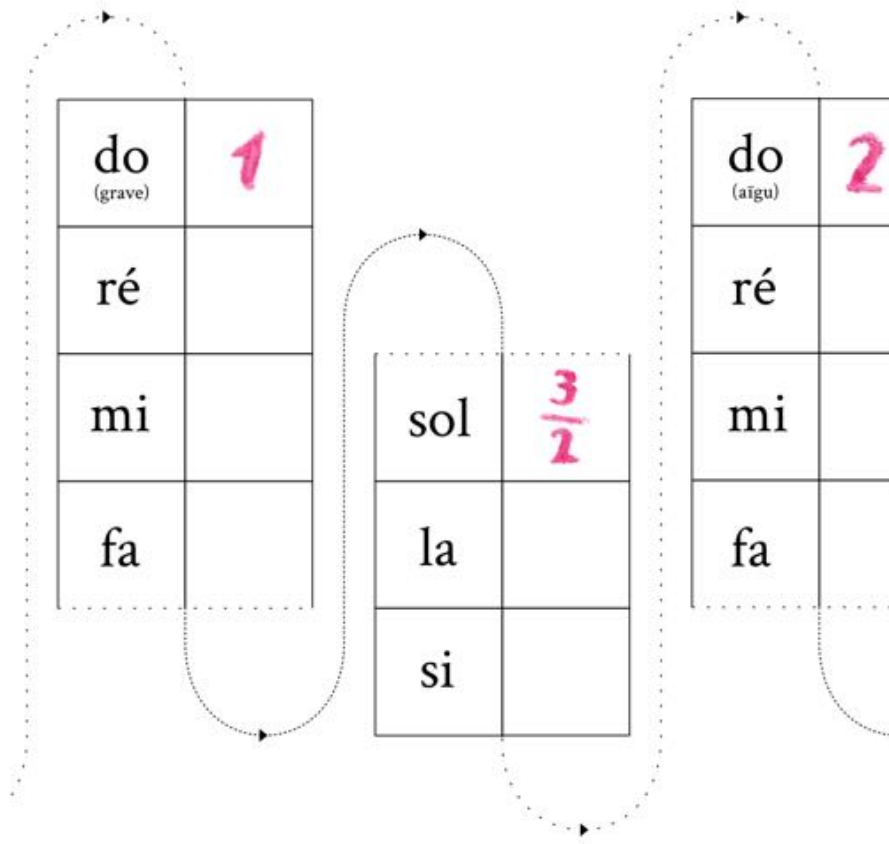
**Comment construire une gamme à partir de la
quinte (juste) ?**



SON
CONTINU

A vous de jouer !

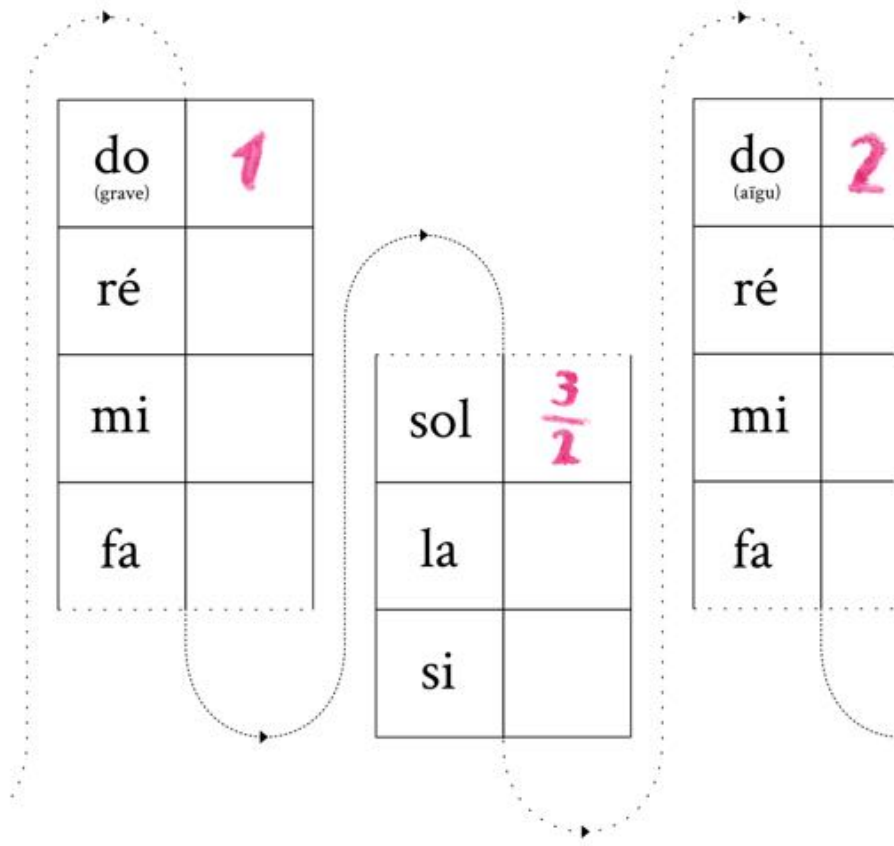
De quinte en quinte...



Calculer des puissances et des quotients en lien avec le **cycle des quintes**.

Mettre en place un raisonnement mathématique pour prouver que le cycle des quintes est infini.

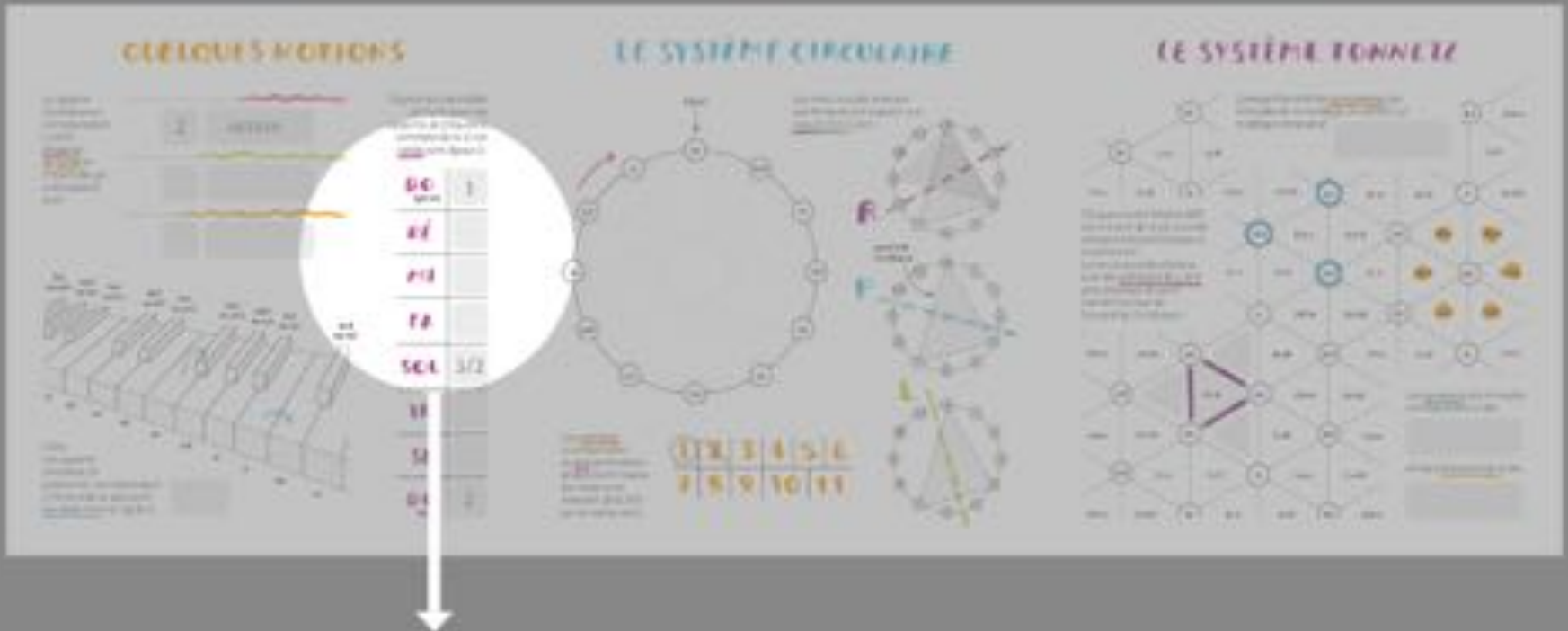
De quinte en quinte...



Calculer des puissances et des quotients en lien avec le **cycle des quintes**.

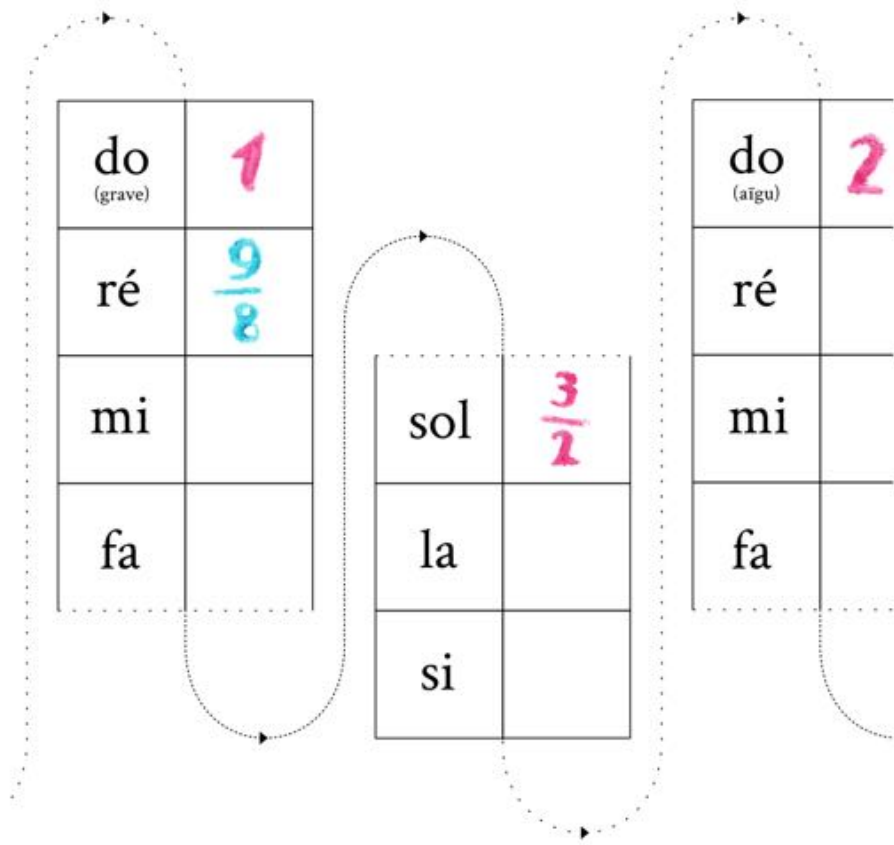
Mettre en place un raisonnement mathématique pour prouver que le cycle des quintes est infini.

De quinte en quinte...



D'après l'intervalle de quinte de Pythagore, calculer les rapports de fréquence des différentes notes de la gamme

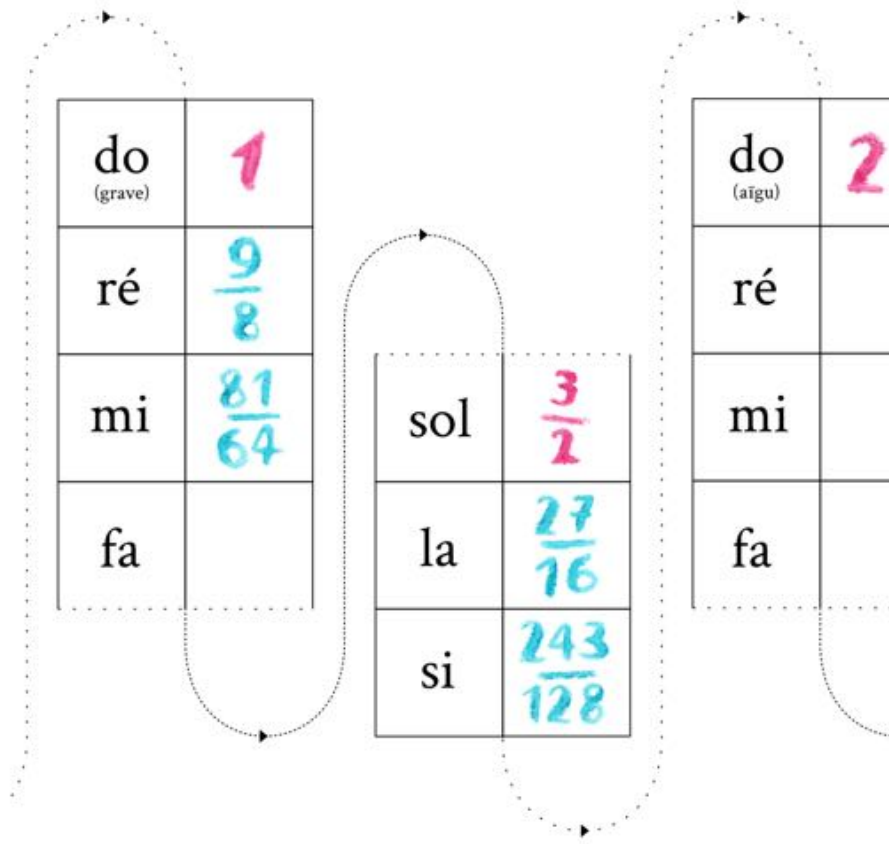
Le cycle des quintes et le tempérament pythagorien



Calculer des puissances et des quotients en lien avec le **cycle des quintes**.

Mettre en place un raisonnement mathématique pour prouver que le cycle des quintes est infini.

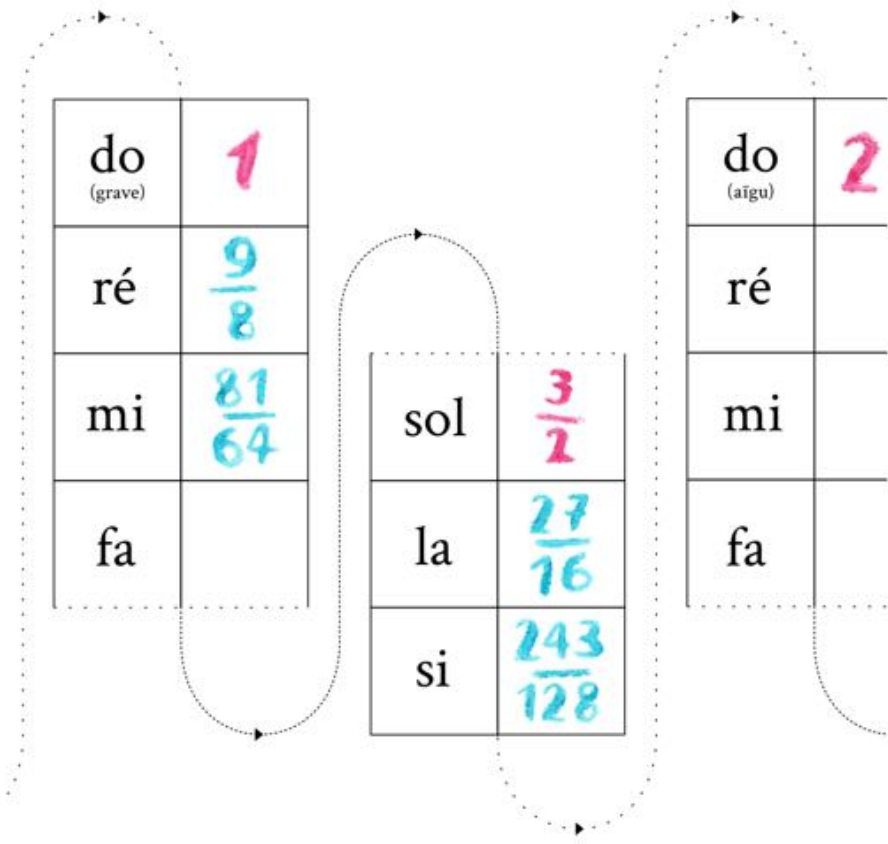
Le cycle des quintes et le tempérament pythagorien



Calculer des puissances et des quotients en lien avec le **cycle des quintes**.

Mettre en place un raisonnement mathématique pour prouver que le cycle des quintes est infini.

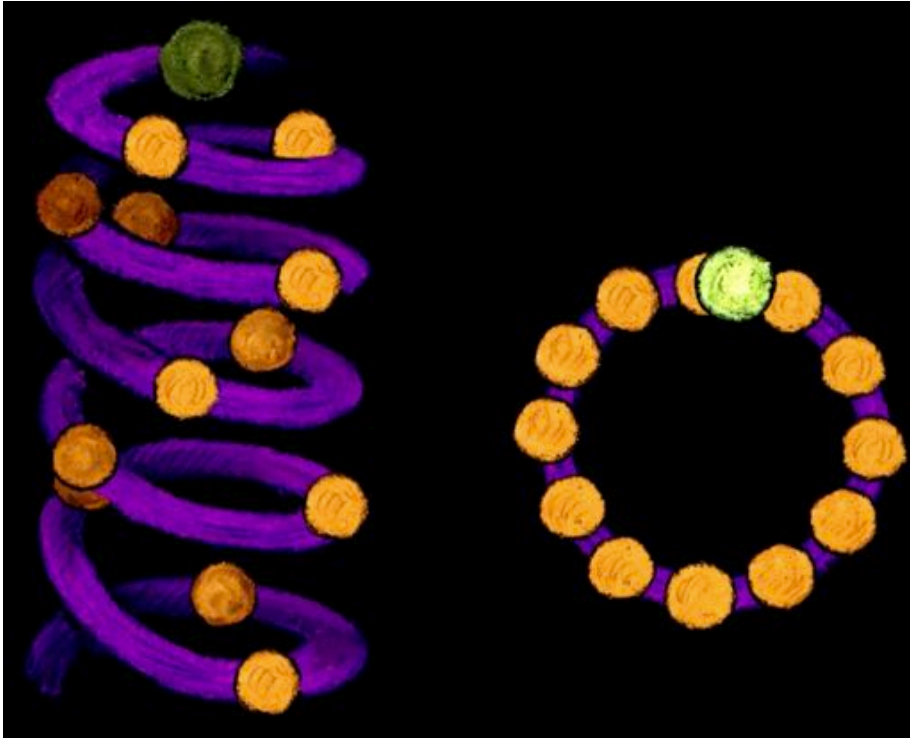
Le cycle des quintes et le tempérament pythagorien



Calculer des puissances et des quotients en lien avec le **cycle des quintes**.

Mettre en place un raisonnement mathématique pour prouver que le cycle des quintes est infini.

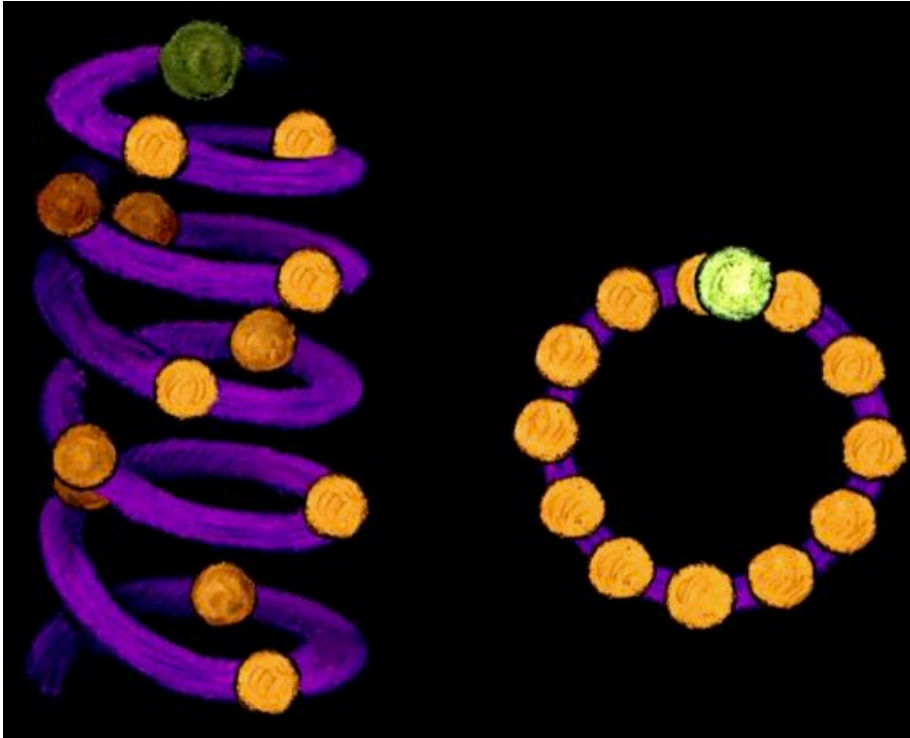
De quinte en quinte... à l'infini !



Calculer des puissances et des quotients en lien avec le **cycle des quintes**.

Mettre en place un raisonnement mathématique pour prouver que le cycle des quintes est infini.

De quinte en quinte... à l'infini !



La **preuve par l'absurde** : supposons qu'un multiple de la quinte est égal à un multiple de l'octave et montrons que cela conduit à une contradiction.

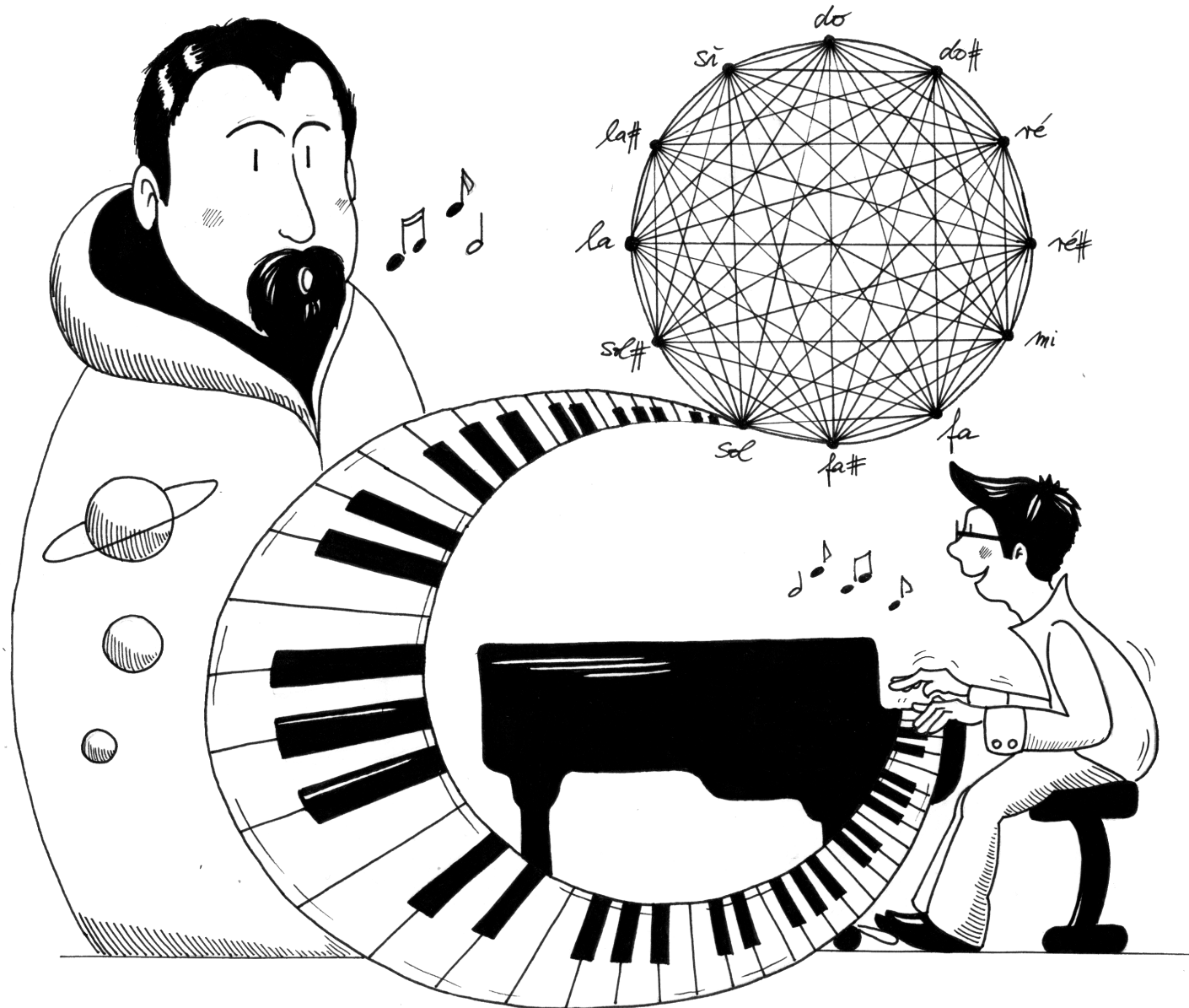
Calculer des puissances et des quotients en lien avec le **cycle des quintes**.

Mettre en place un raisonnement mathématique pour **prouver que le cycle des quintes est infini**.

Du piano au cercle

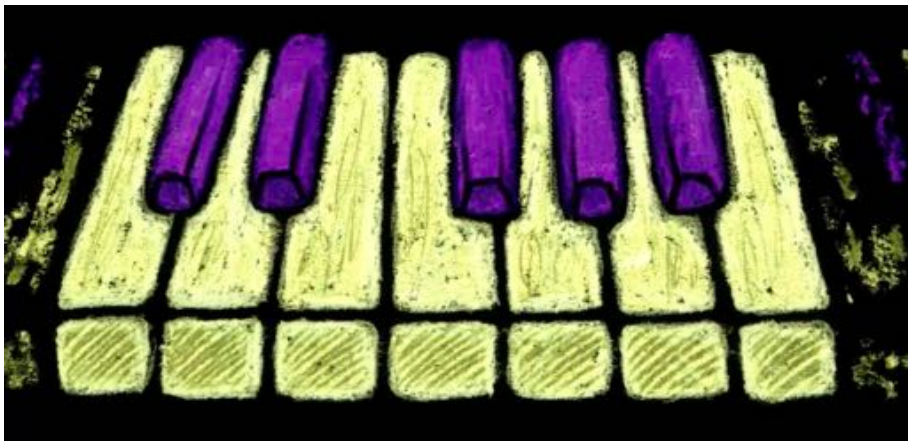


Mersenne et l'invention de la combinatoire



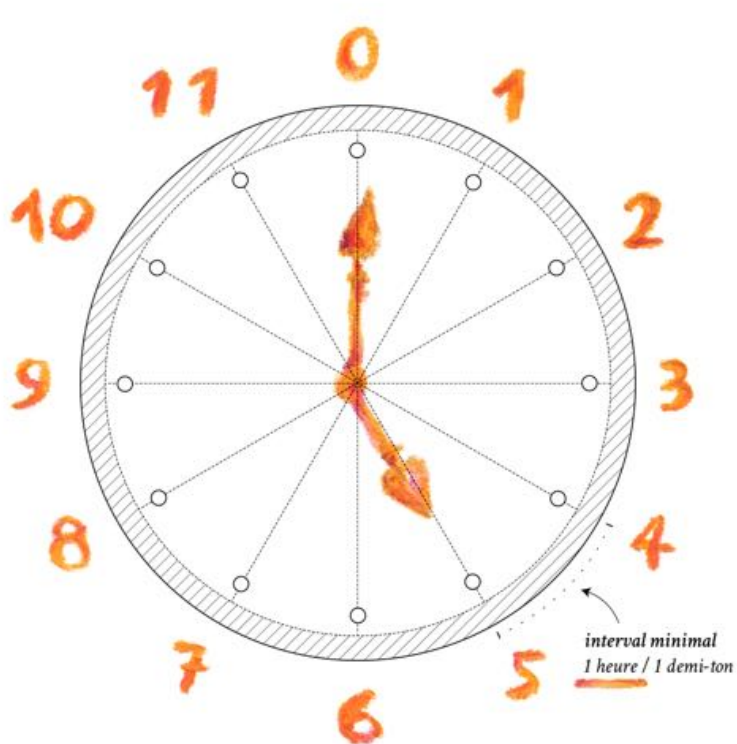
Que ce que cela vous évoque ?

Le cadran d'horloge musical et les accords



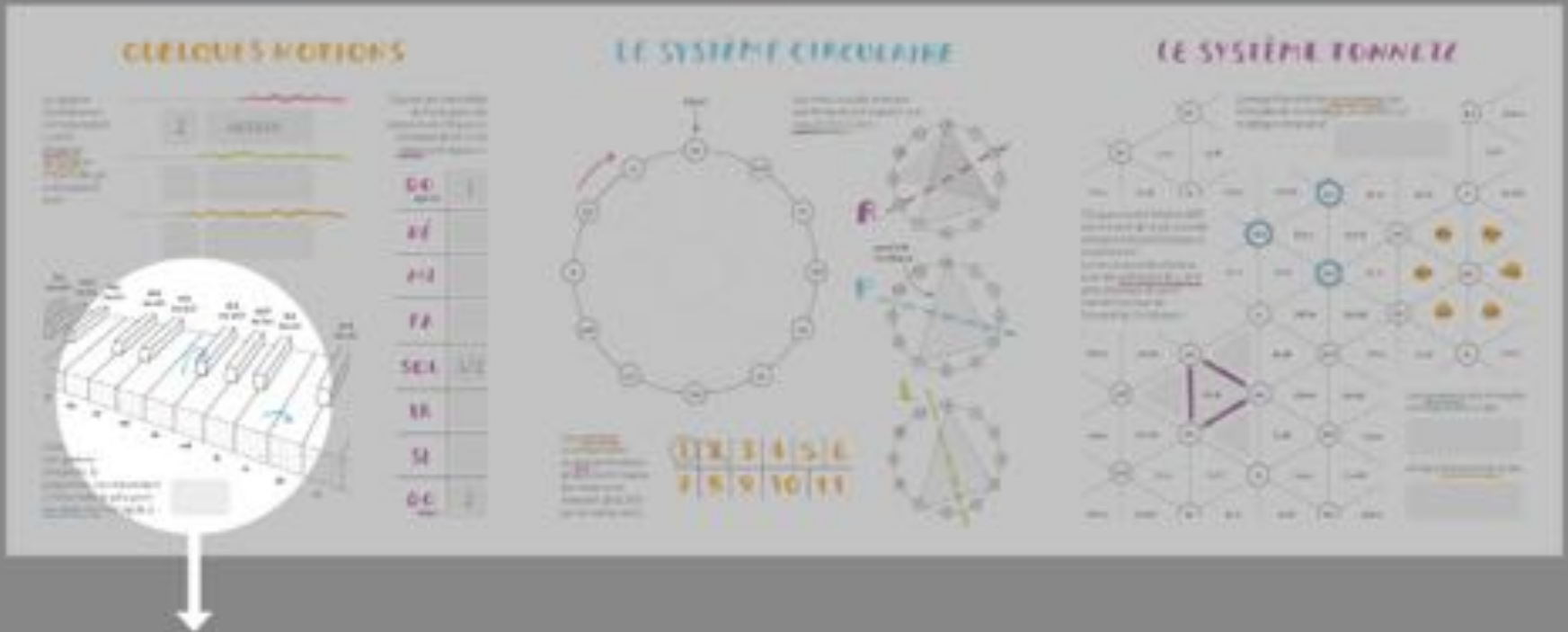
Un accord est un polygone inscrit dans le cercle

L'accord de ré **majeur** correspond par exemple au triangle dessinée dans cette animation.



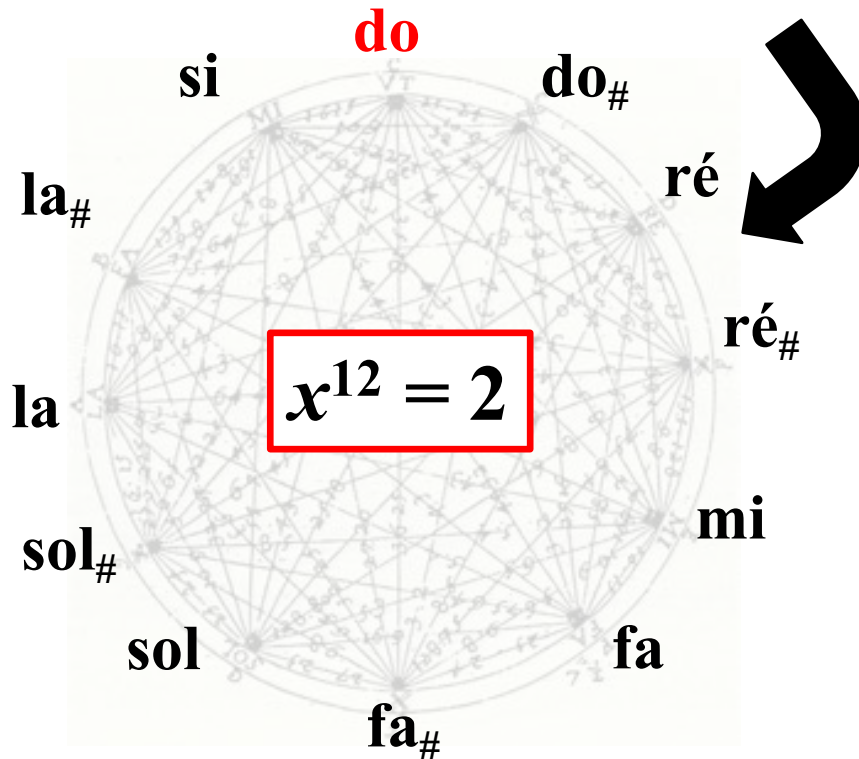
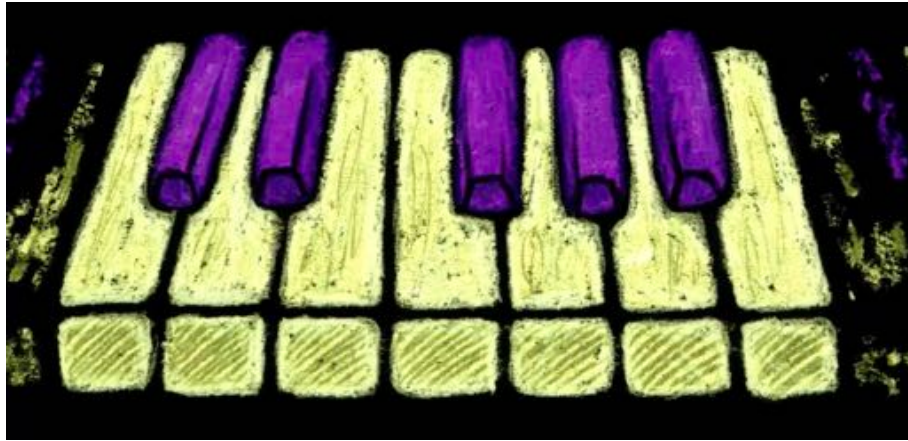
A quoi correspond le demi-ton tempéré ?

Nombres irrationnels et tempérament égal



Calculer le nombre irrationnel qui correspond au demi-ton tempéré du piano

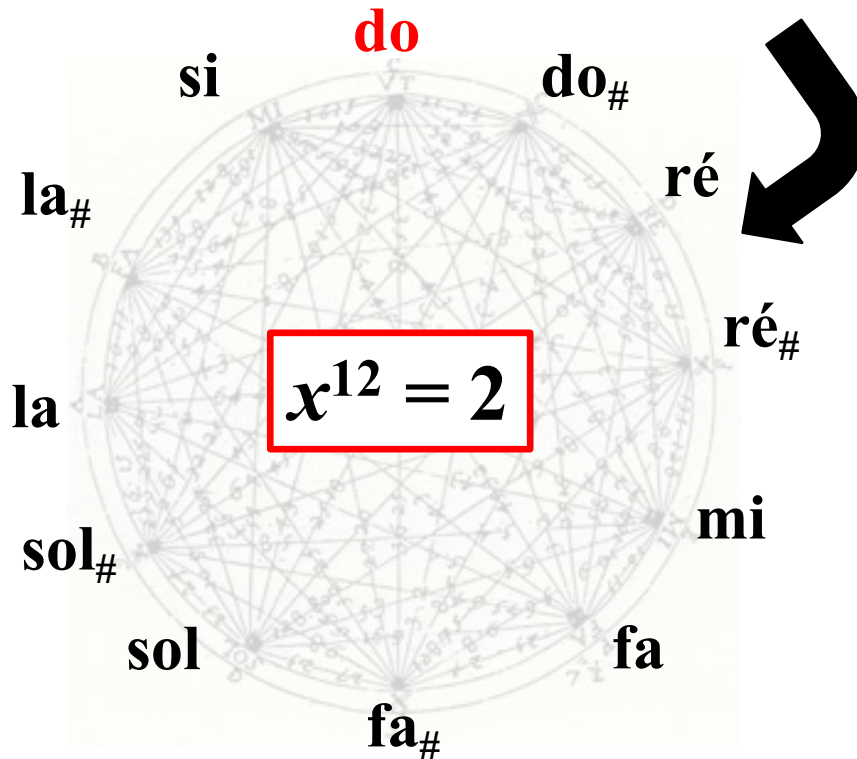
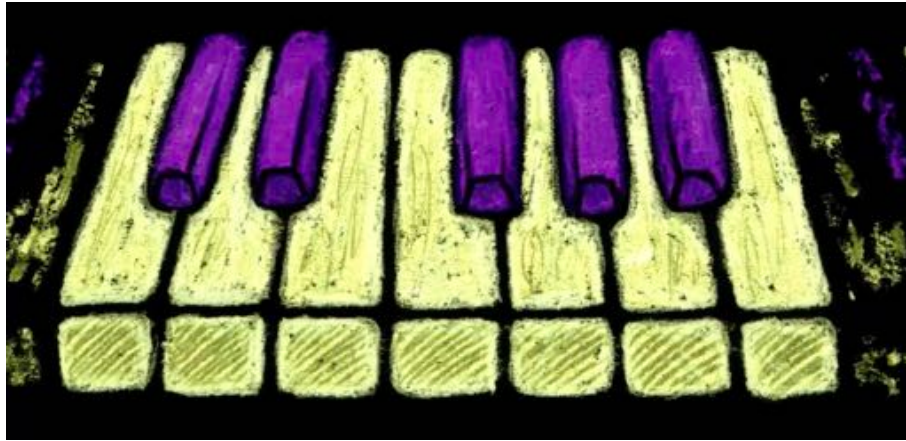
Le tempérament égal : un compromis « combinatoire »



La connaissance des nombres irrationnels a permis, au XVII^e siècle, de construire des **gammes à intervalles égaux**.

L'introduction des gammes « au **tempérament égal** » permet de comprendre en quoi la découverte des nombres irrationnels a des applications en dehors du champ mathématique.

Le tempérament égal : un compromis « combinatoire »

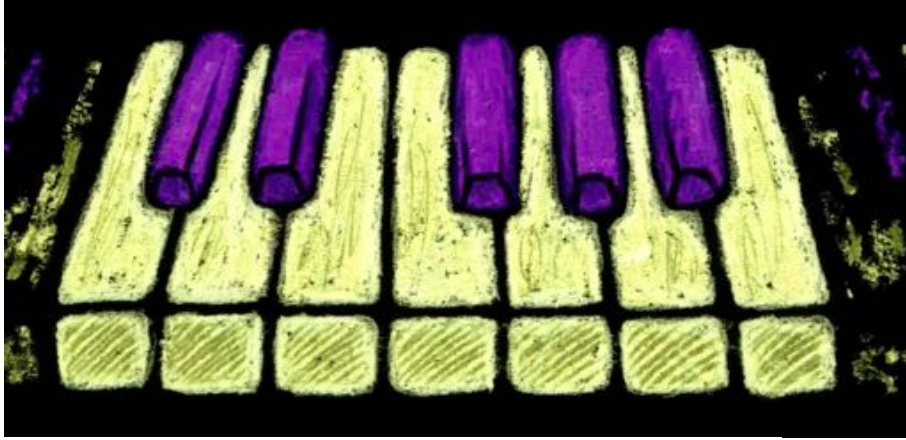


La connaissance des nombres irrationnels a permis, au XVII^e siècle, de construire des **gammes à intervalles égaux**.

L'introduction des gammes « au **tempérament égal** » permet de comprendre en quoi la découverte des nombres irrationnels a des applications en dehors du champ mathématique.

Utiliser la racine douzième de 2 pour partager l'octave en douze intervalles égaux.

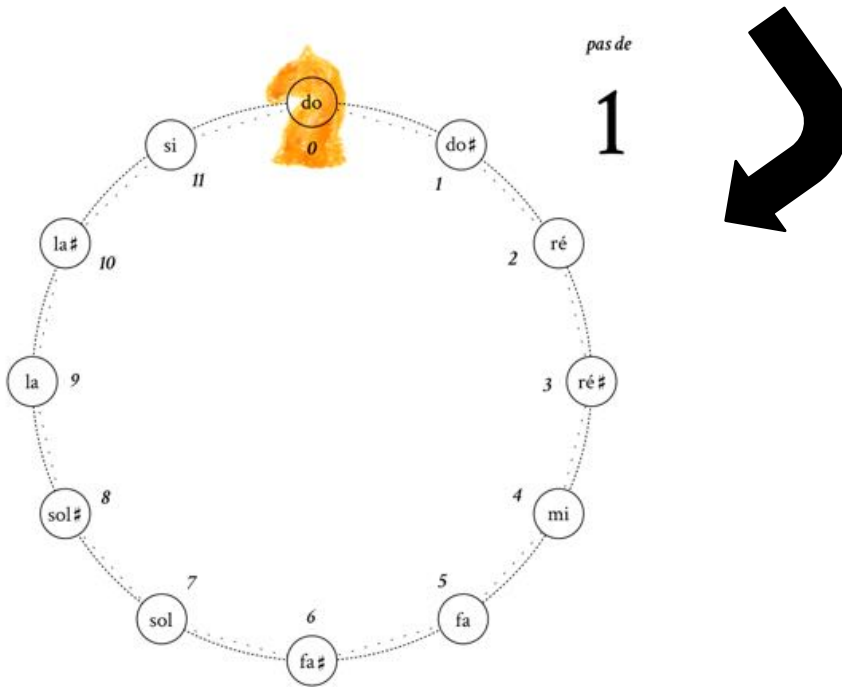
Intervalles générateurs du tempérament égal



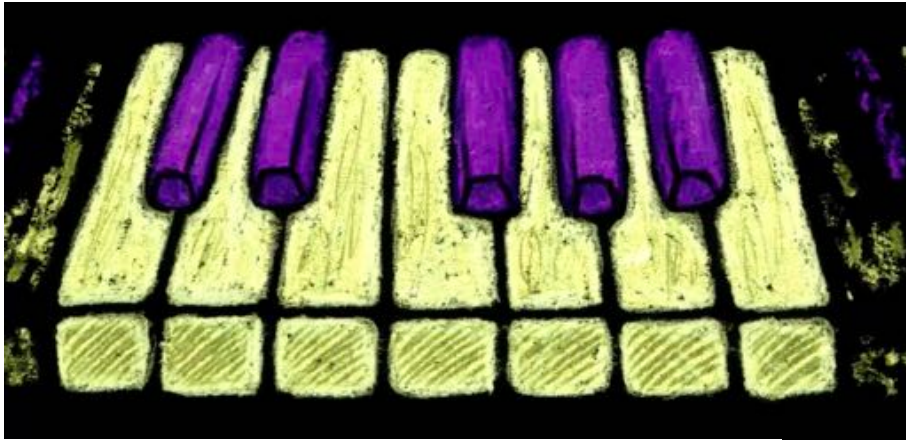
Avec quel pas peut-on engendrer toutes les notes de la gamme tempérée ?

Sans doute ça marche avec le demi-ton donc à pas de 1 car cet intervalle x correspond précisément à la racine douzième de 2 et :

$$x^{12} = 2$$

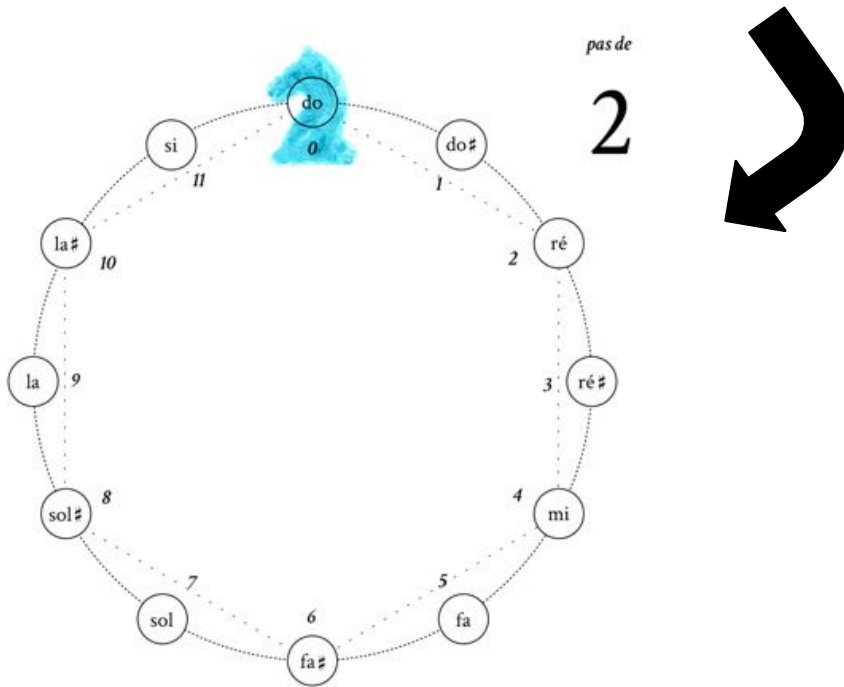


Intervalles générateurs du tempérament égal

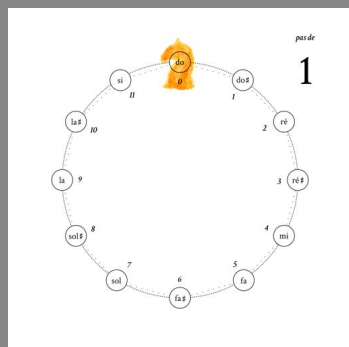


Avec quel pas peut-on engendrer toutes les notes de la gamme tempérée ?

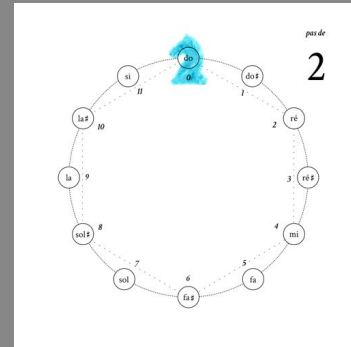
Avec l'intervalle de **ton** ça ne marche pas car au bout de 6 répétitions on retombe sur l'octave et donc on boucle sans pouvoir engendrer les autres notes de la gamme.



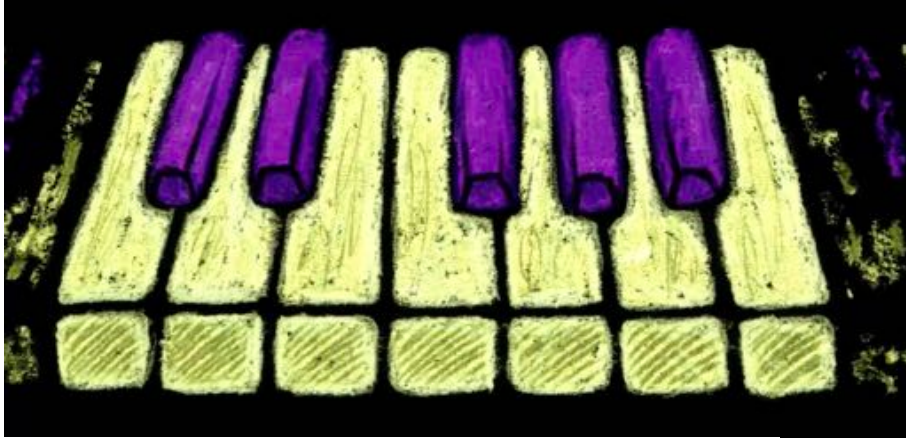
Intervalles générateurs du tempérament égal



En utilisant le cercle dessiné sur le dépliant, trouvez quels nombres permettent au cavalier de parcourir toutes les notes et revenir au point de départ



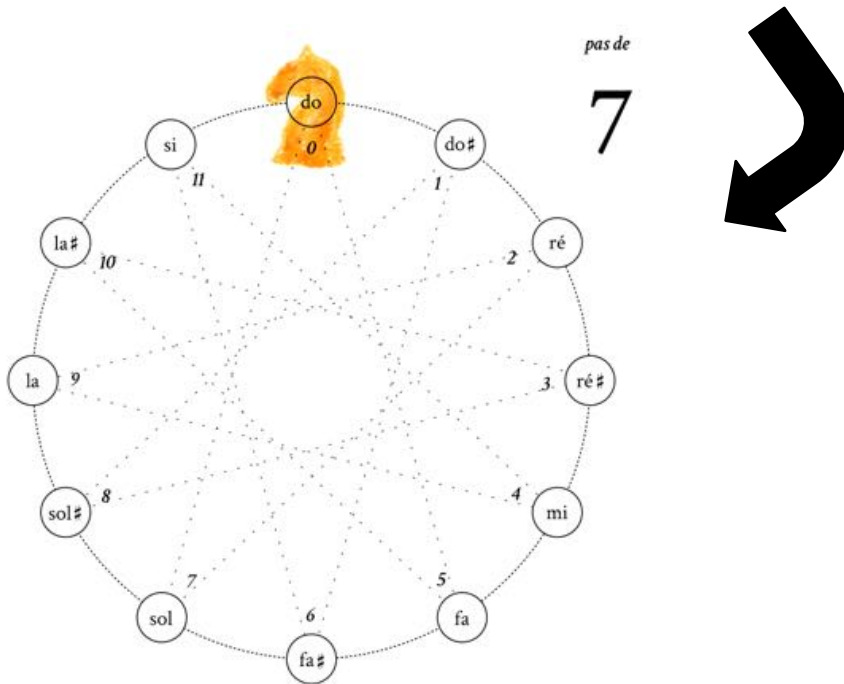
Intervalles générateurs du tempérament égal



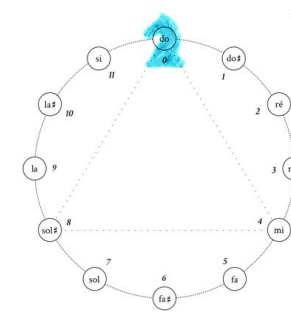
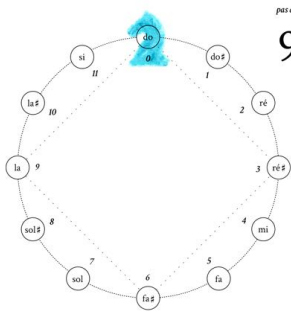
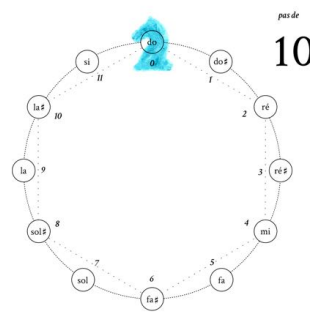
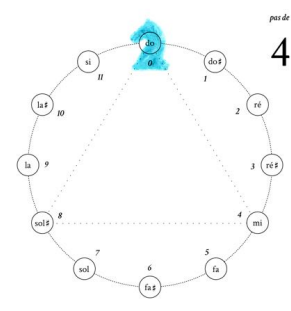
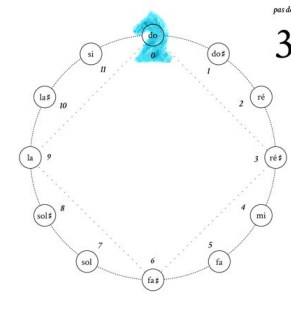
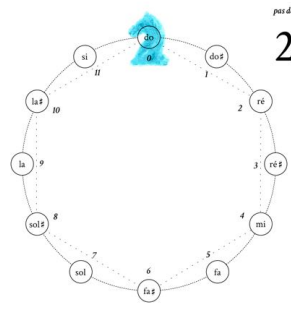
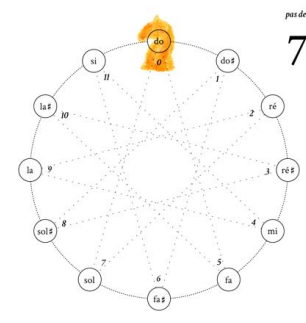
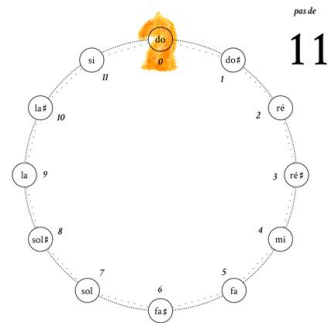
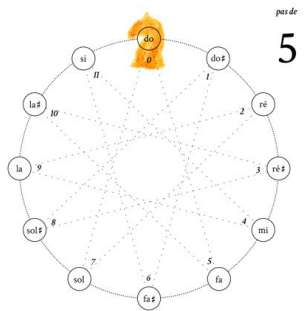
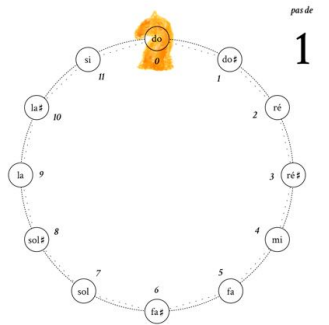
Avec quel pas peut-on engendrer toutes les notes de la gamme tempérée ?

Ca marche avec l'intervalle de **quinte** car la spirale des quinte se renferme dans un cercle pour le tempérament égal.

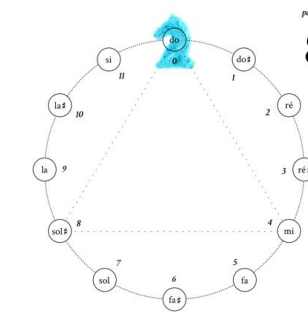
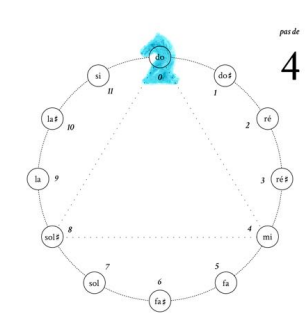
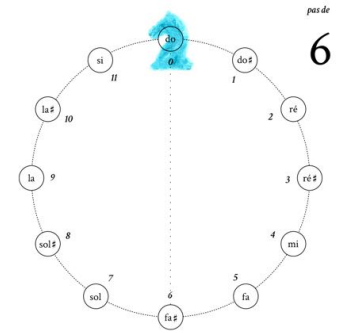
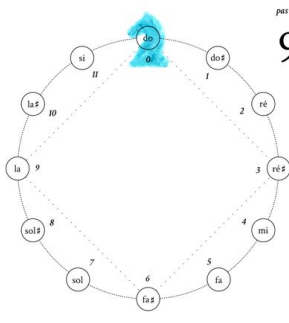
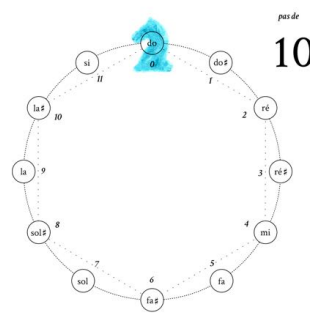
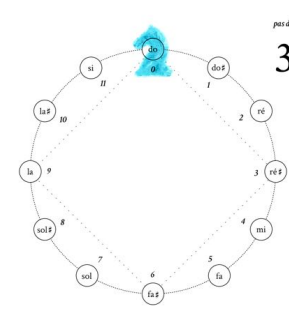
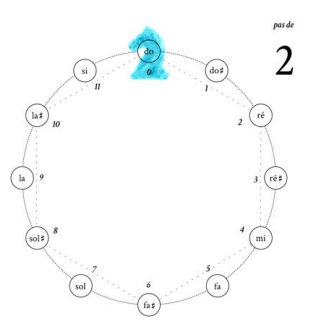
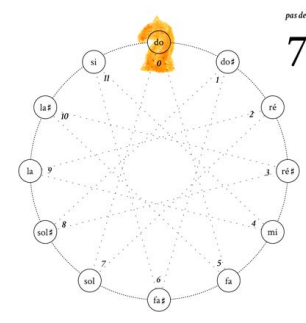
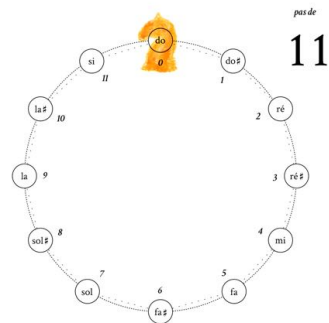
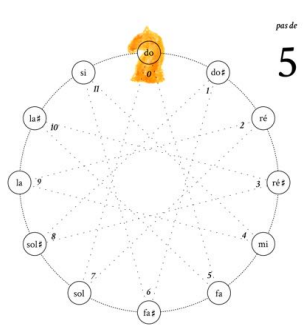
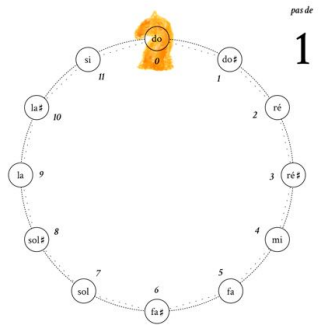
Et les autres intervalles ?



Intervalles générateurs du tempérament égal

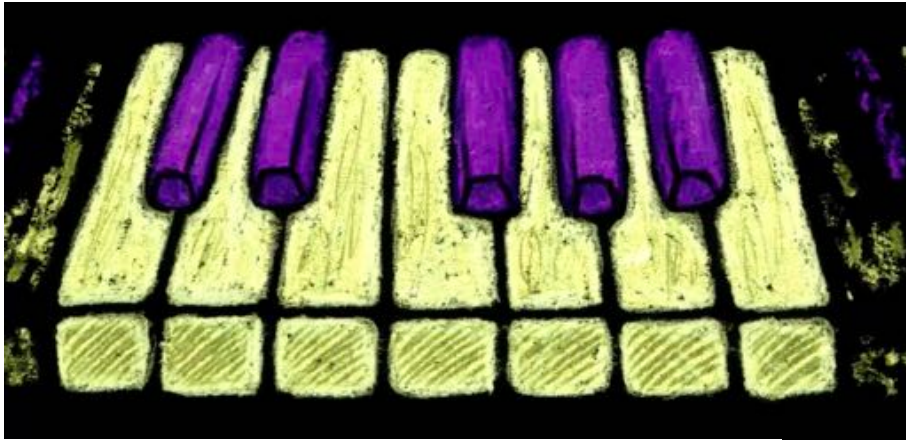


Intervalles générateurs du tempérament égal



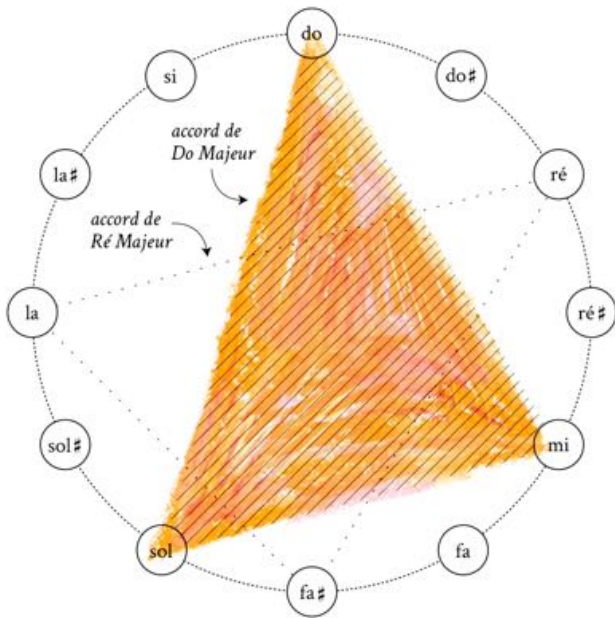
**Comment transformer les accords dans le
cercle ?**

Les transpositions musicales sont des rotations

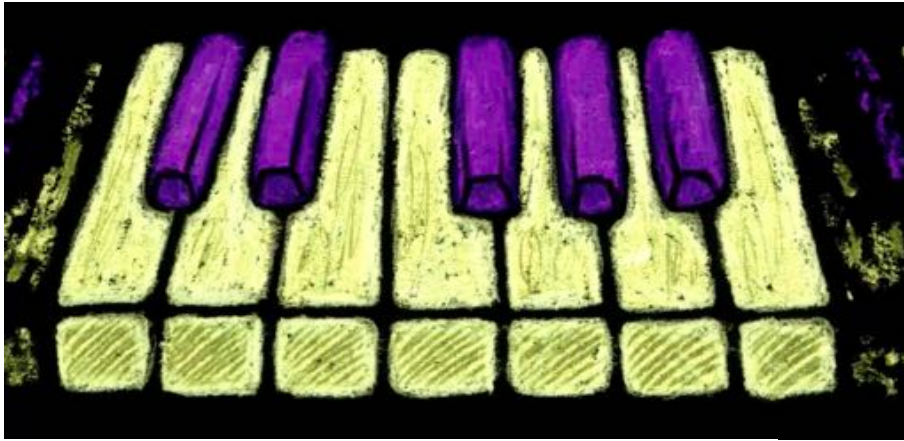
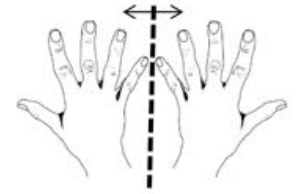


Un accord est un polygone inscrit dans le cercle

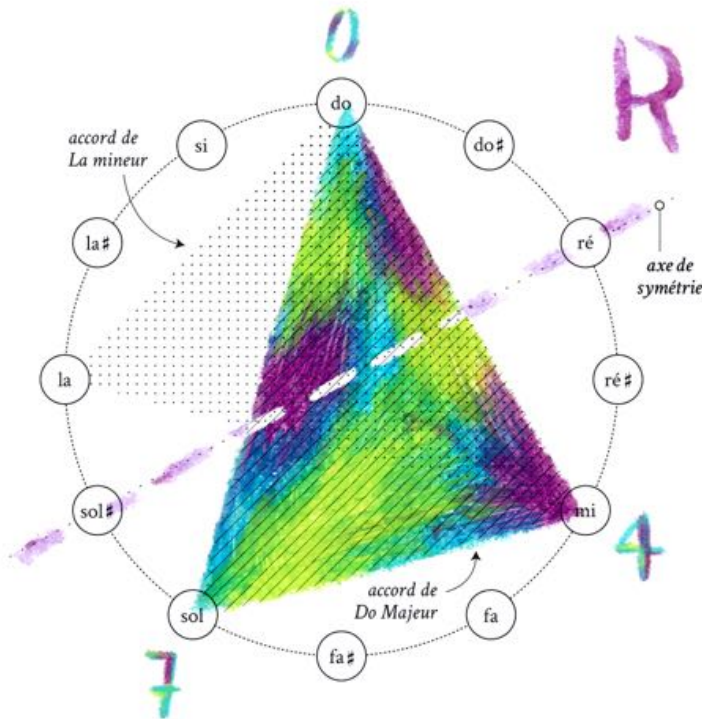
L'accord de **ré majeur** correspond par exemple au triangle dessinée dans cette animation et obtenu à partir de l'accord de **do majeur** en le transposant d'un ton.



Un accord majeur et ses symétries



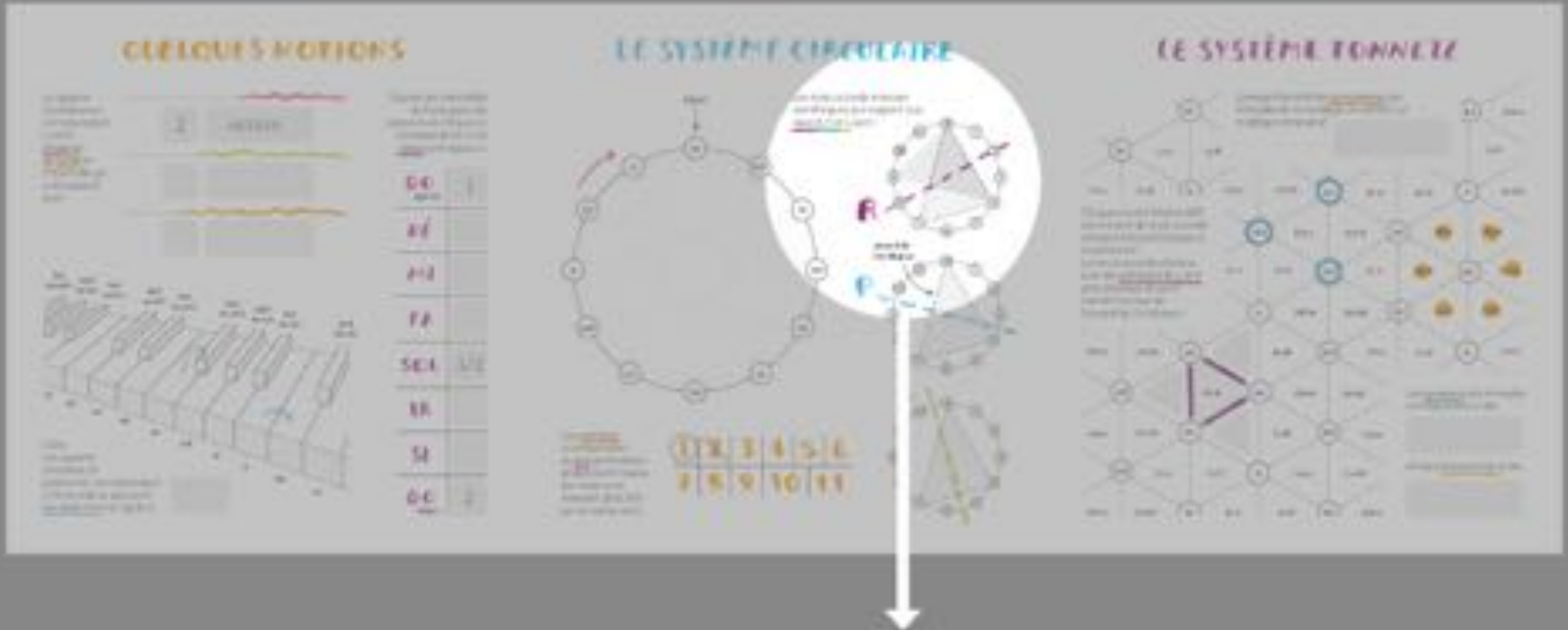
Un accord est un polygone inscrit dans le cercle



L'accord de **ré majeur** correspond par exemple au triangle dessinée dans cette animation et obtenu à partir de l'accord de **do majeur** en le transposant d'un ton.

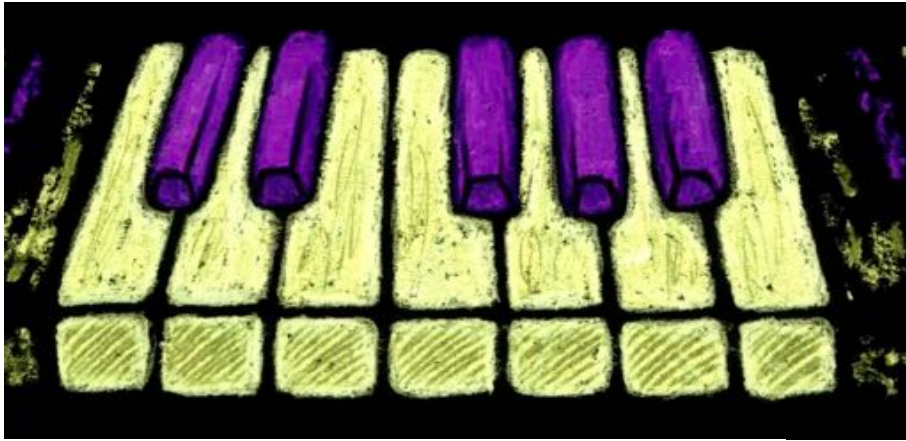
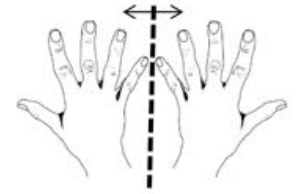
L'accord mineur est le symétrique de l'accord majeur ! Celui-ci s'appelle par exemple le **relatif** (d'où la lettre **R**)

Un accord majeur et ses symétries



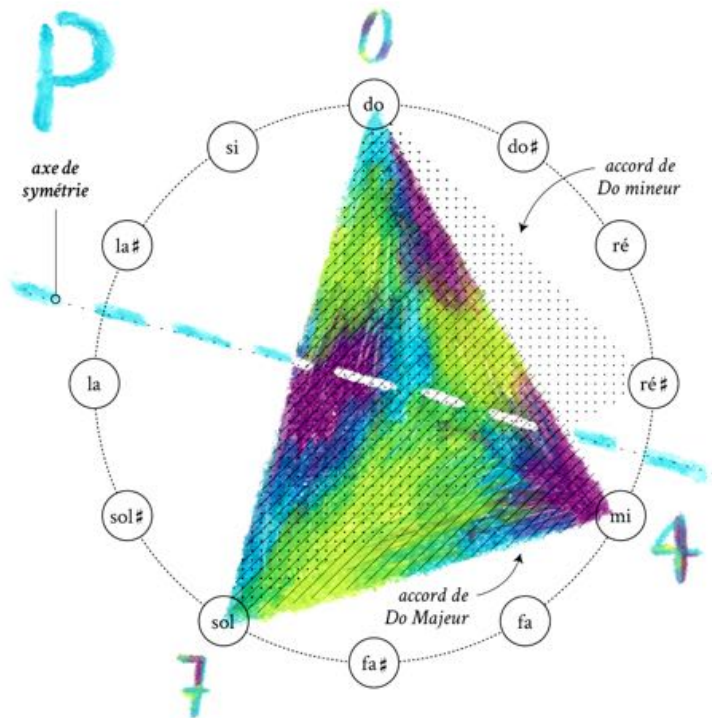
Dessinez les accords mineurs symétriques de l'accord de do majeur par rapport aux axes P et L indiqués en figure ?

Un accord majeur et ses symétries



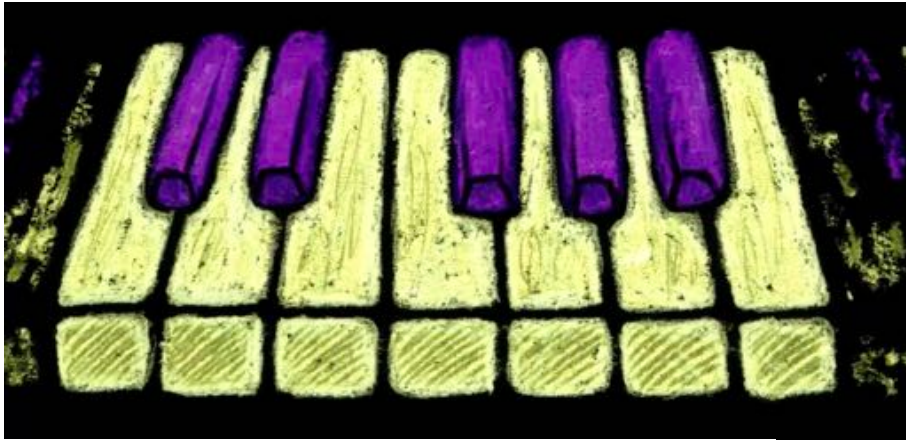
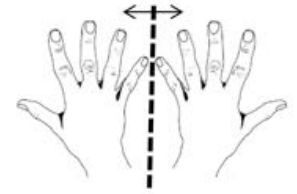
Un accord est un polygone inscrit dans le cercle

L'accord de **ré majeur** correspond par exemple au triangle dessinée dans cette animation et obtenu à partir de l'accord de **do majeur** en le transposant d'un ton.

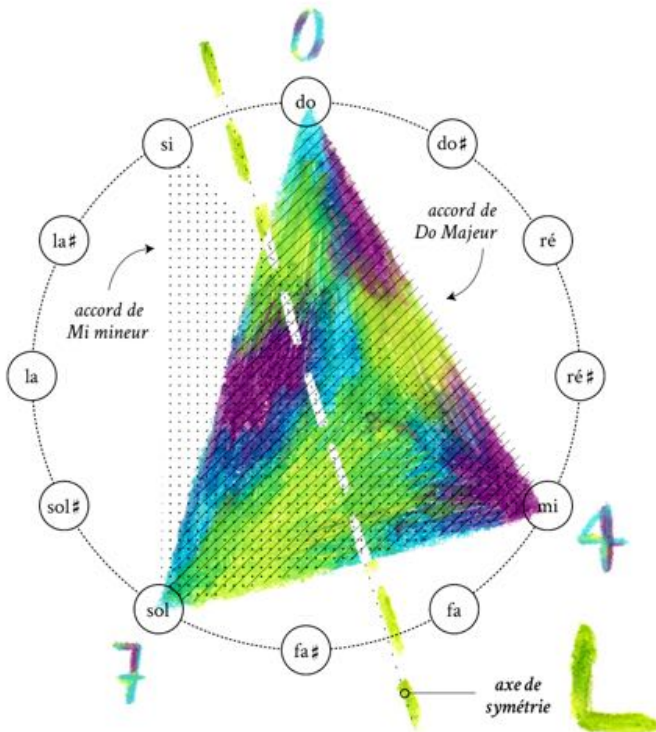


L'accord **mineur** est le symétrique de l'accord majeur ! Celui-ci s'appelle en revanche le **parallèle** (d'où la lettre **P**)

Un accord majeur et ses symétries



Un accord est un polygone inscrit dans le cercle



L'accord de **ré majeur** correspond par exemple au triangle dessinée dans cette animation et obtenu à partir de l'accord de **do majeur** en le transposant d'un ton.

L'accord mineur est le symétrique de l'accord majeur ! Celui-ci a un nom compliqué et on l'indiquera avec **L**.

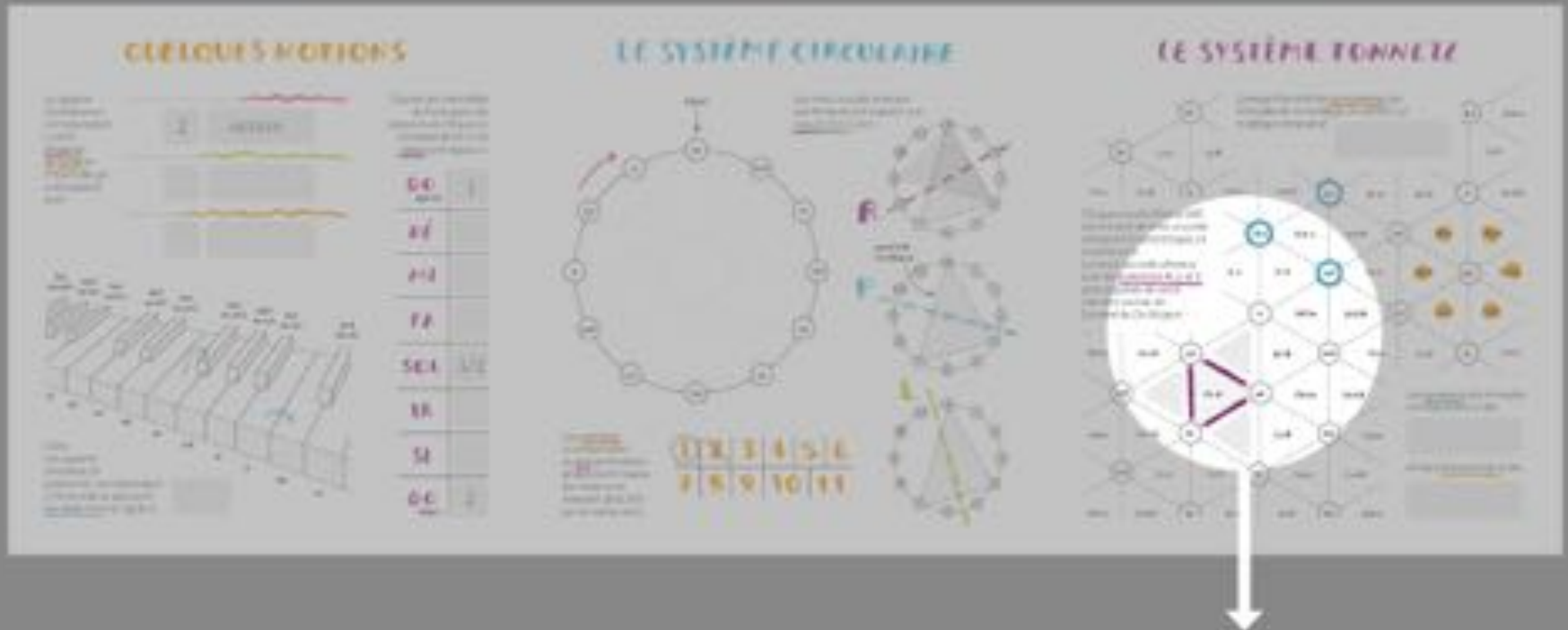
Comment visualiser les symétries dans le plan ?

Euler et le problème du cavalier des échecs



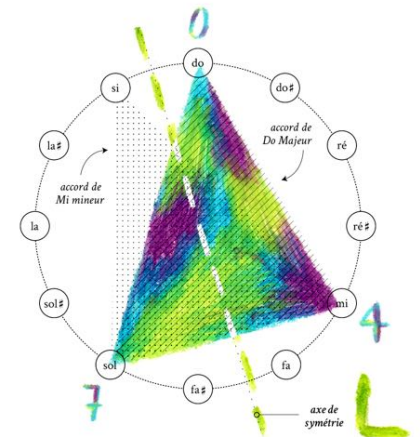
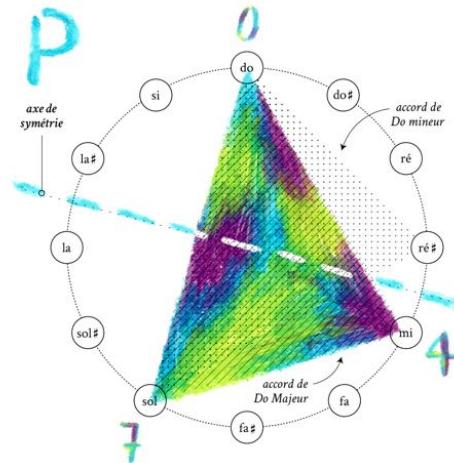
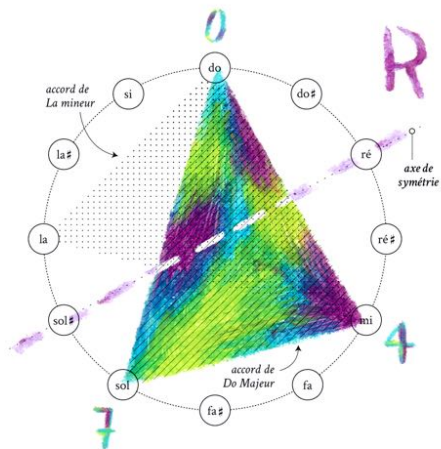
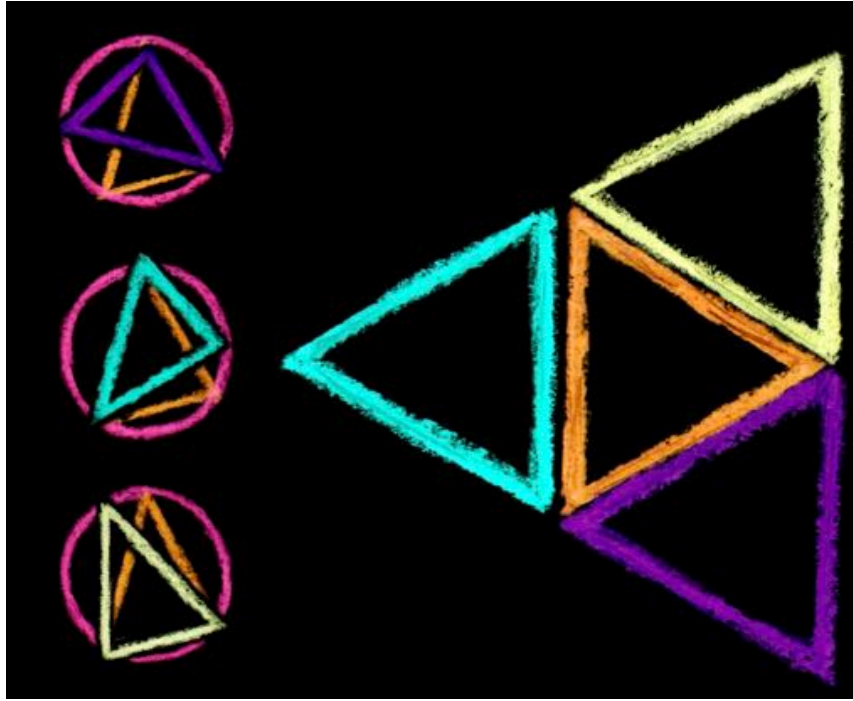


Le système Tonnetz et ses symétries



Retrouvez où se placent les accords mineurs symétriques de l'accord majeur dans le Tonnetz

Le système Tonnetz et ses symétries

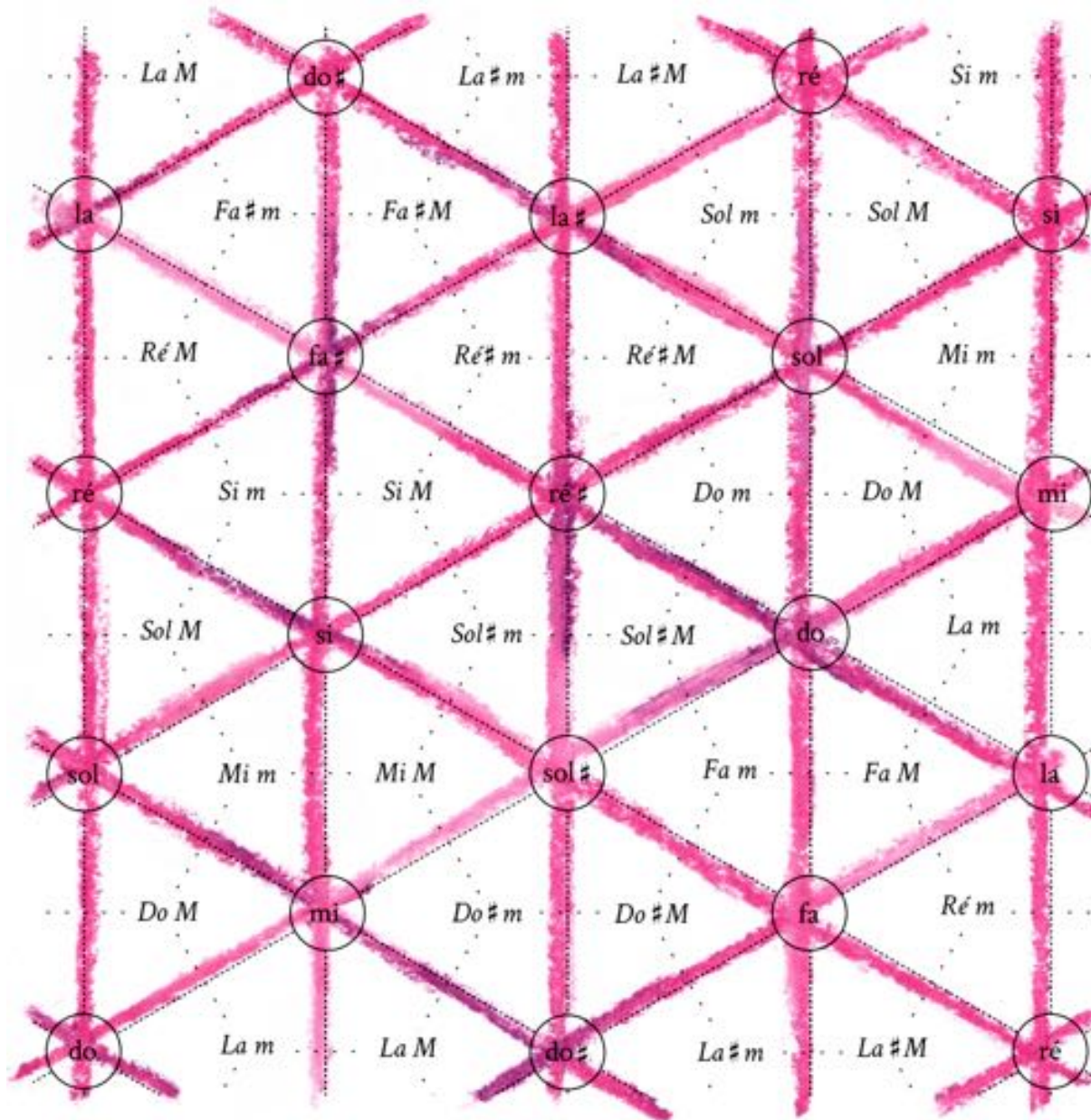


Les deux facettes du système Tonnetz

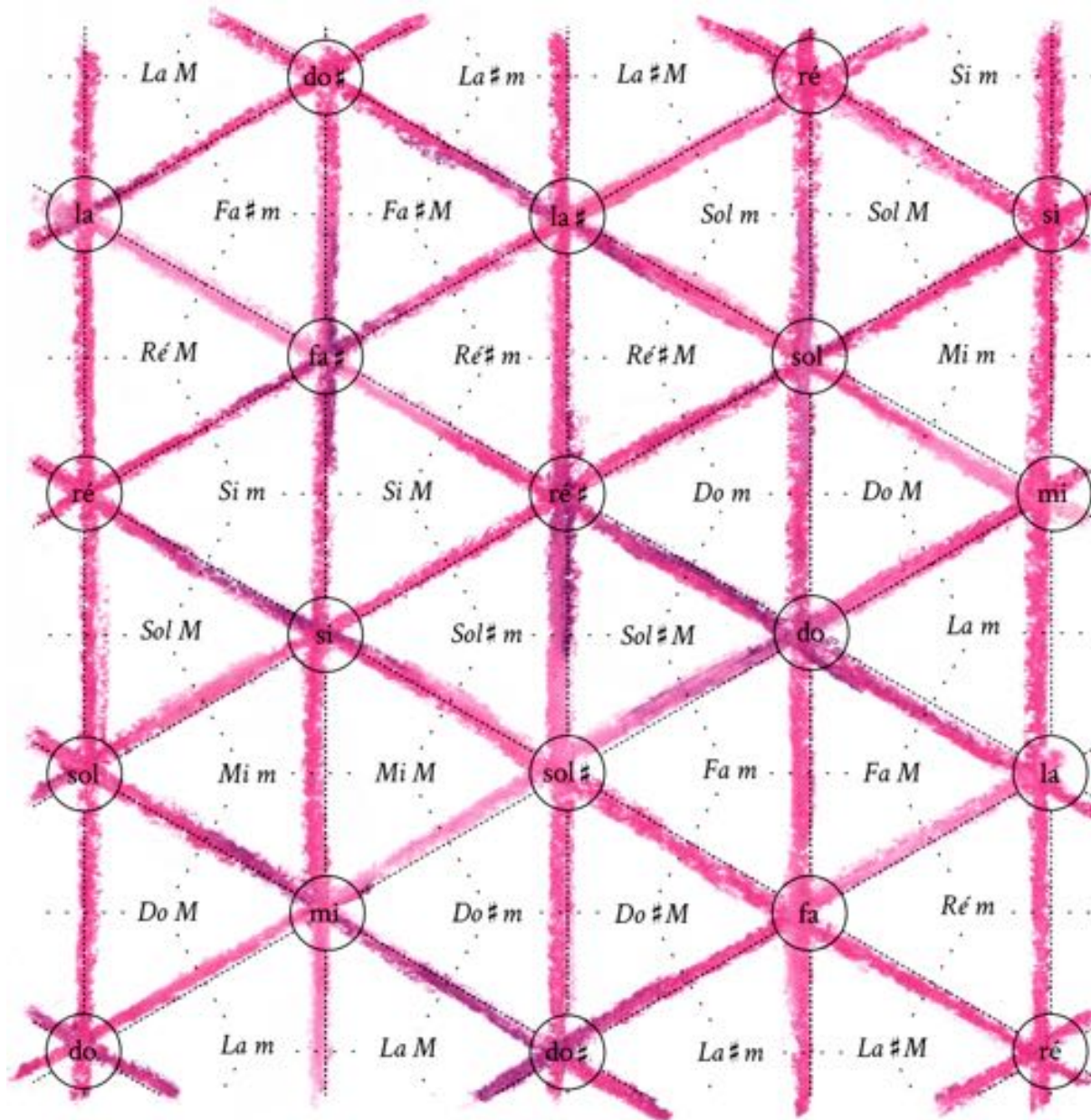


Complétez le texte

Les deux facettes du système Tonnetz



Les deux facettes du système Tonnetz

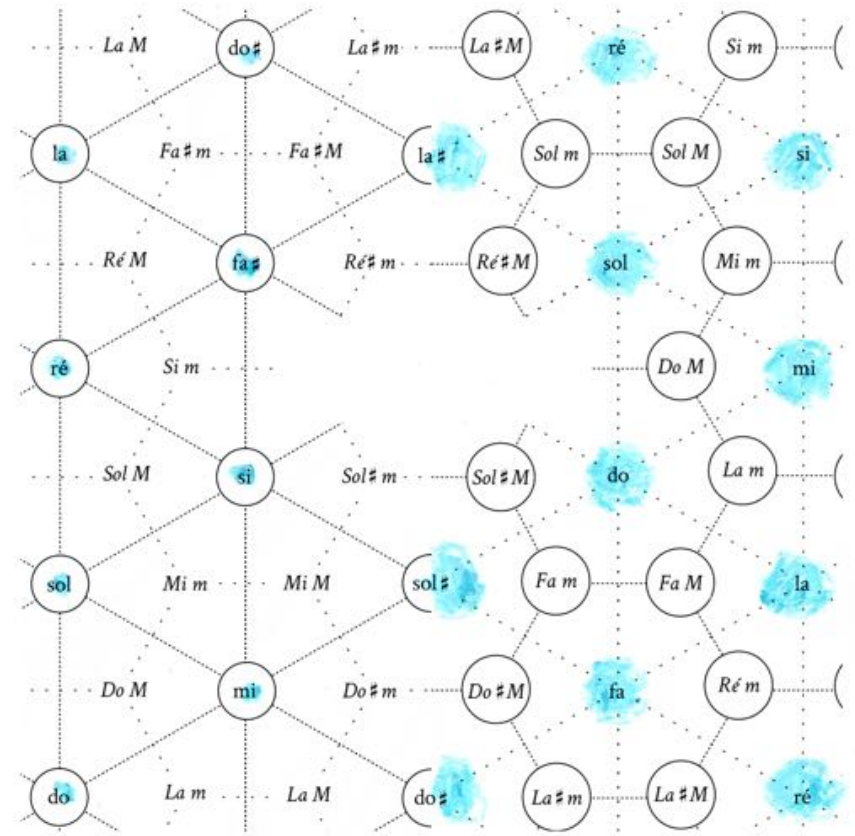
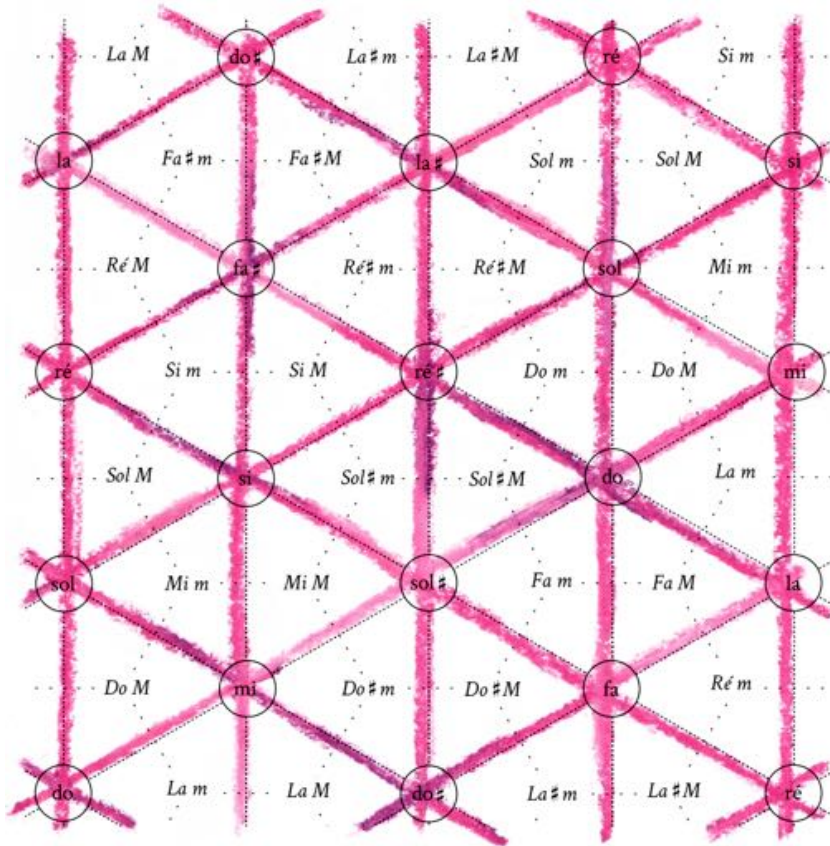


Les deux facettes du système Tonnetz

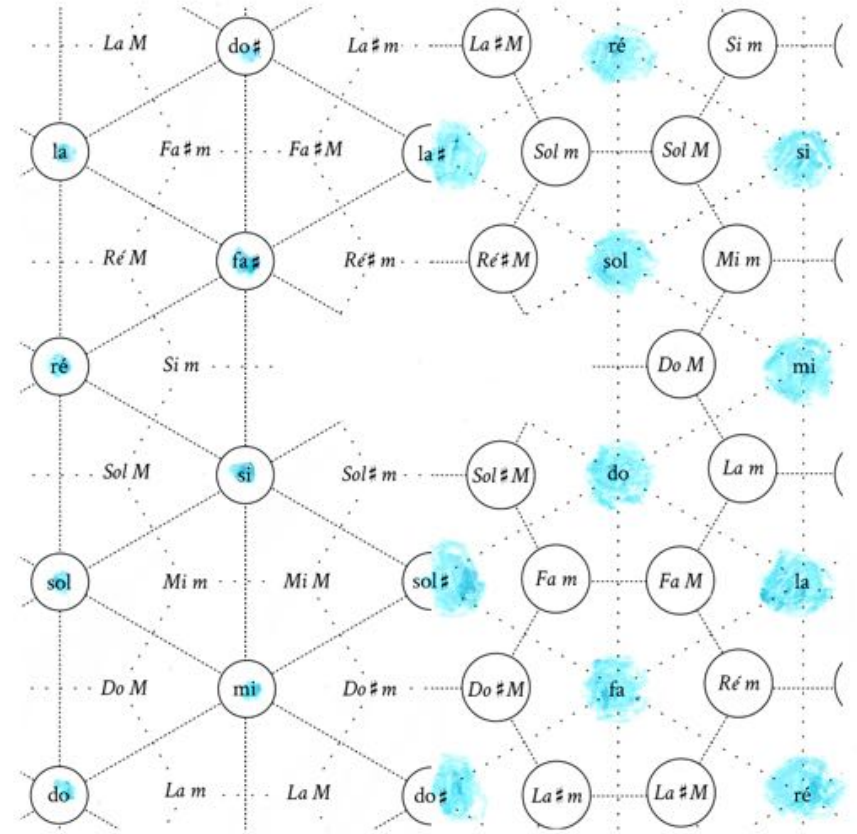
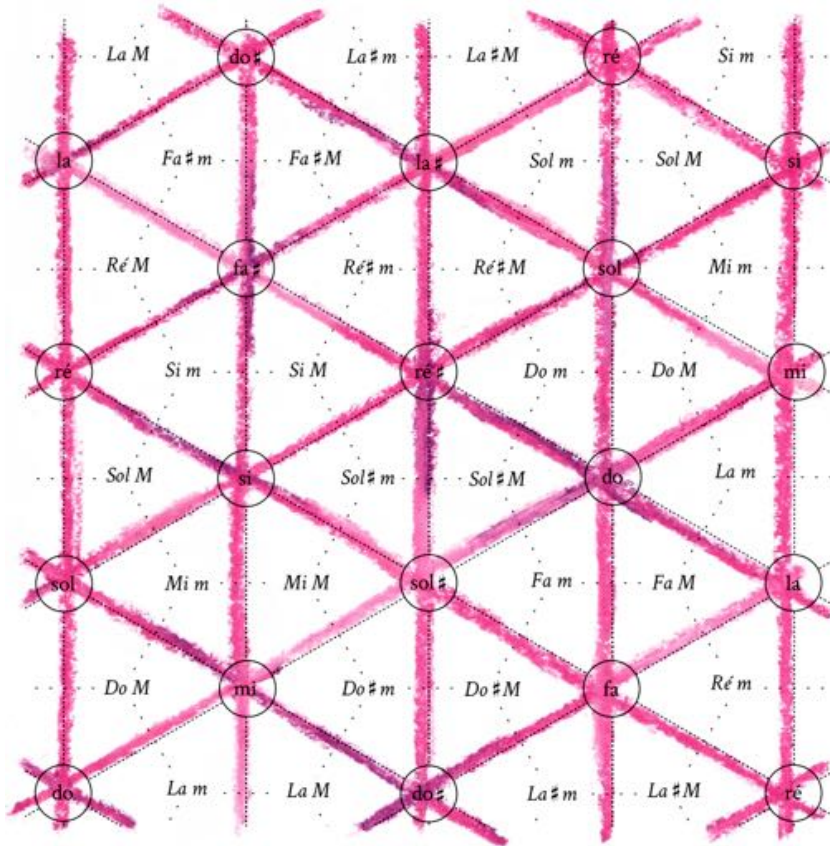


Complétez le texte

Les deux facettes du système Tonnetz



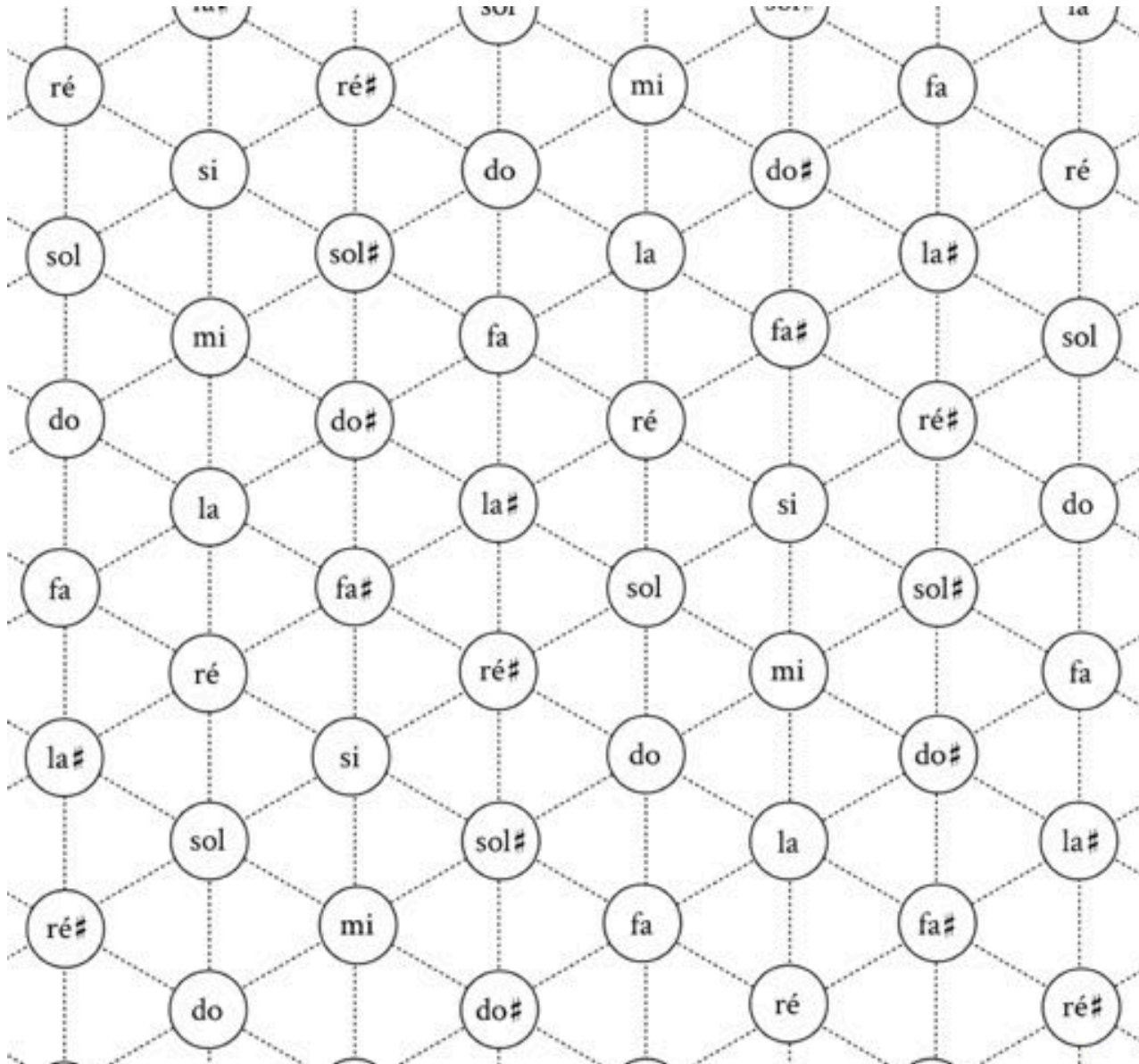
Les deux facettes du système Tonnetz



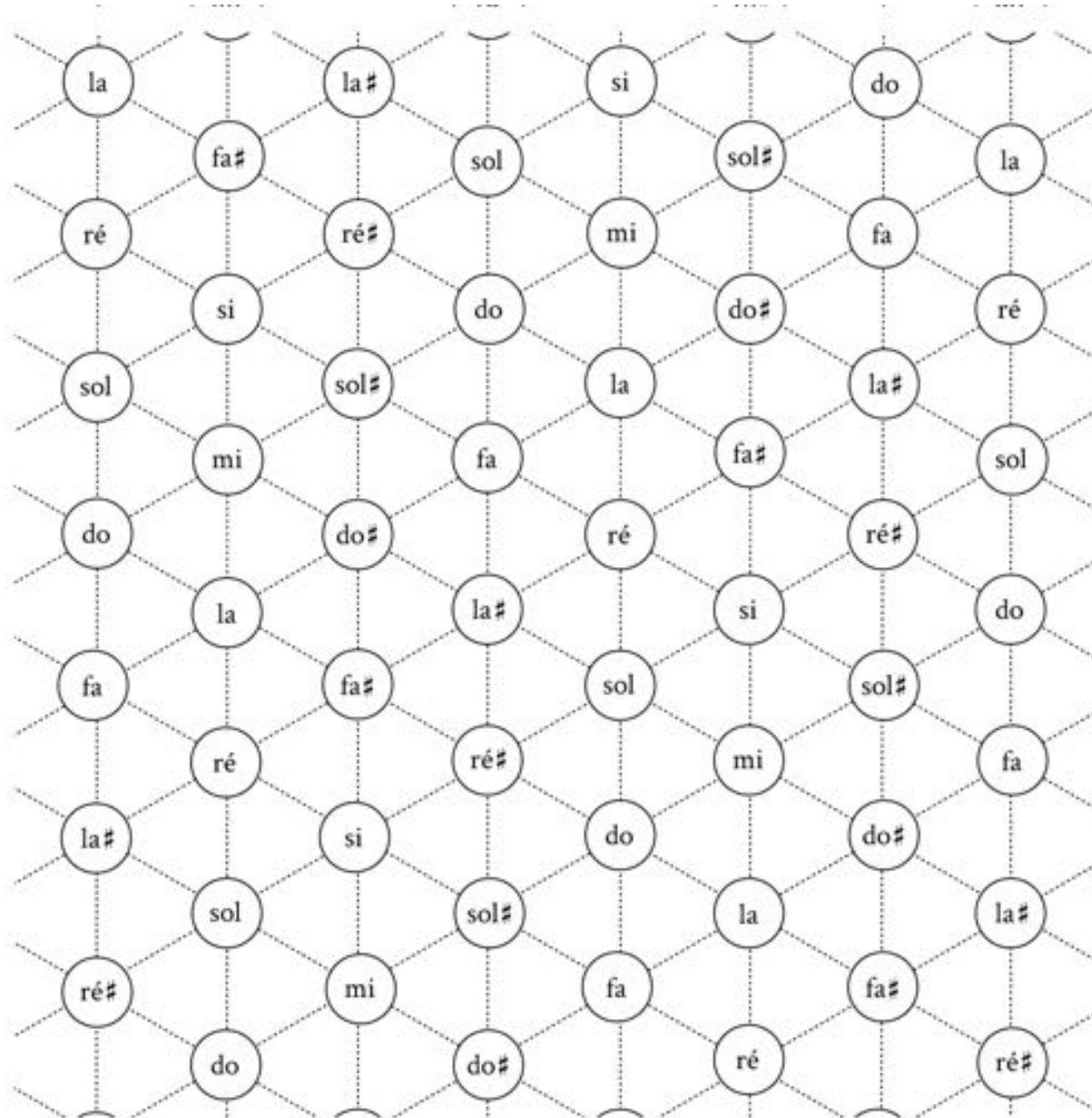
DUALITÉ

Le Tonnetz dans l'espace

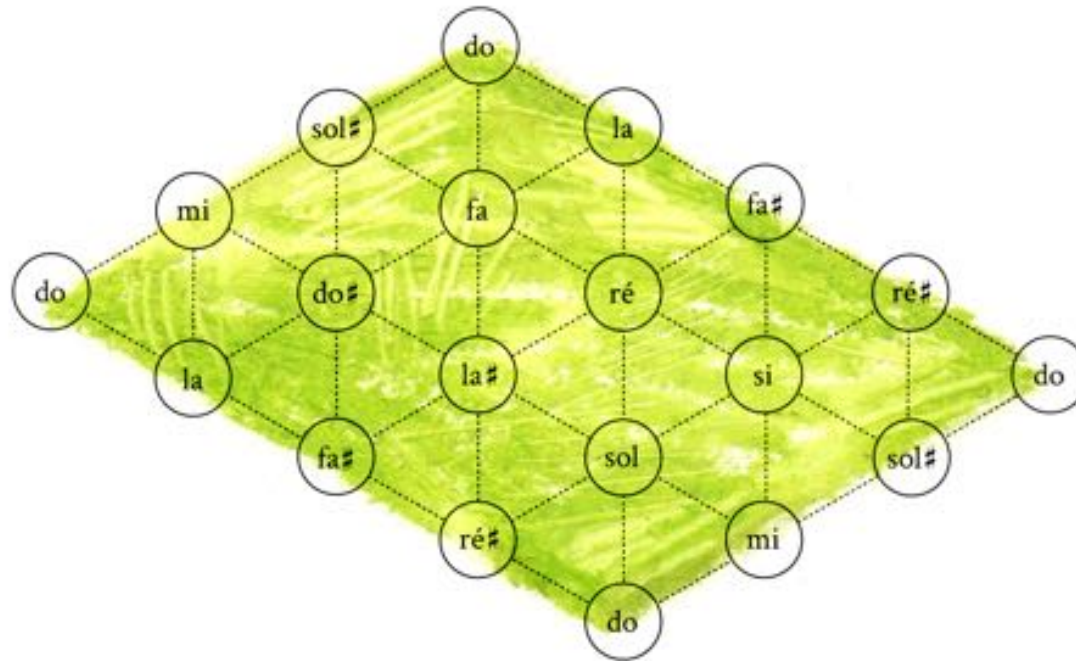
Quelle est la forme géométrique du Tonnetz ?



Quelle est la forme géométrique du Tonnetz ?



Quelle est la forme géométrique du Tonnetz ?



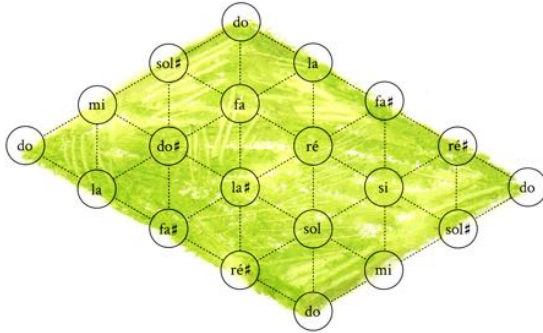
Quelle est la forme géométrique du Tonnetz ?



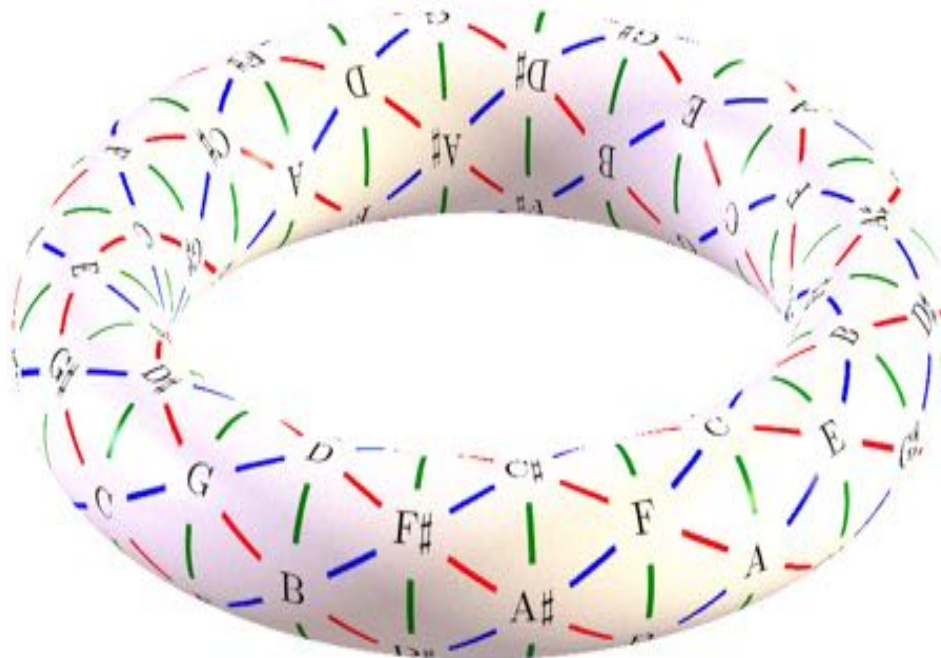
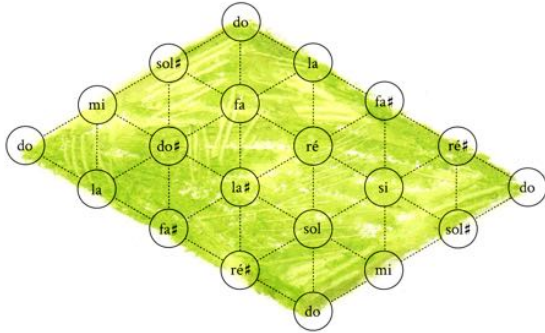
Quelle est la forme géométrique du Tonnetz ?



Quelle est la forme géométrique du Tonnetz ?

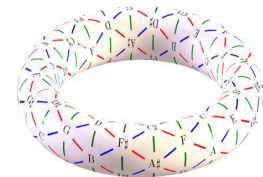


Quelle est la forme géométrique du Tonnetz ?



Pour finir en musique...

Une chanson qui se balade en zig-zag dans le tore



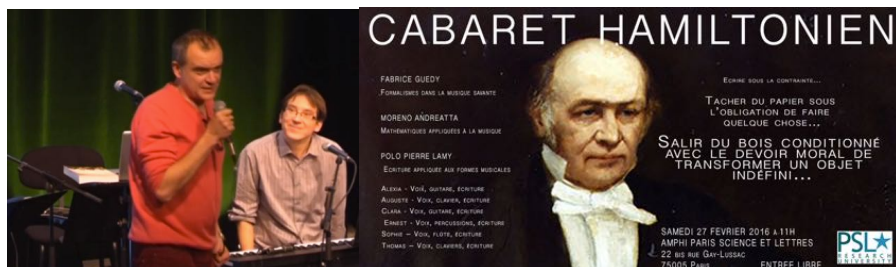
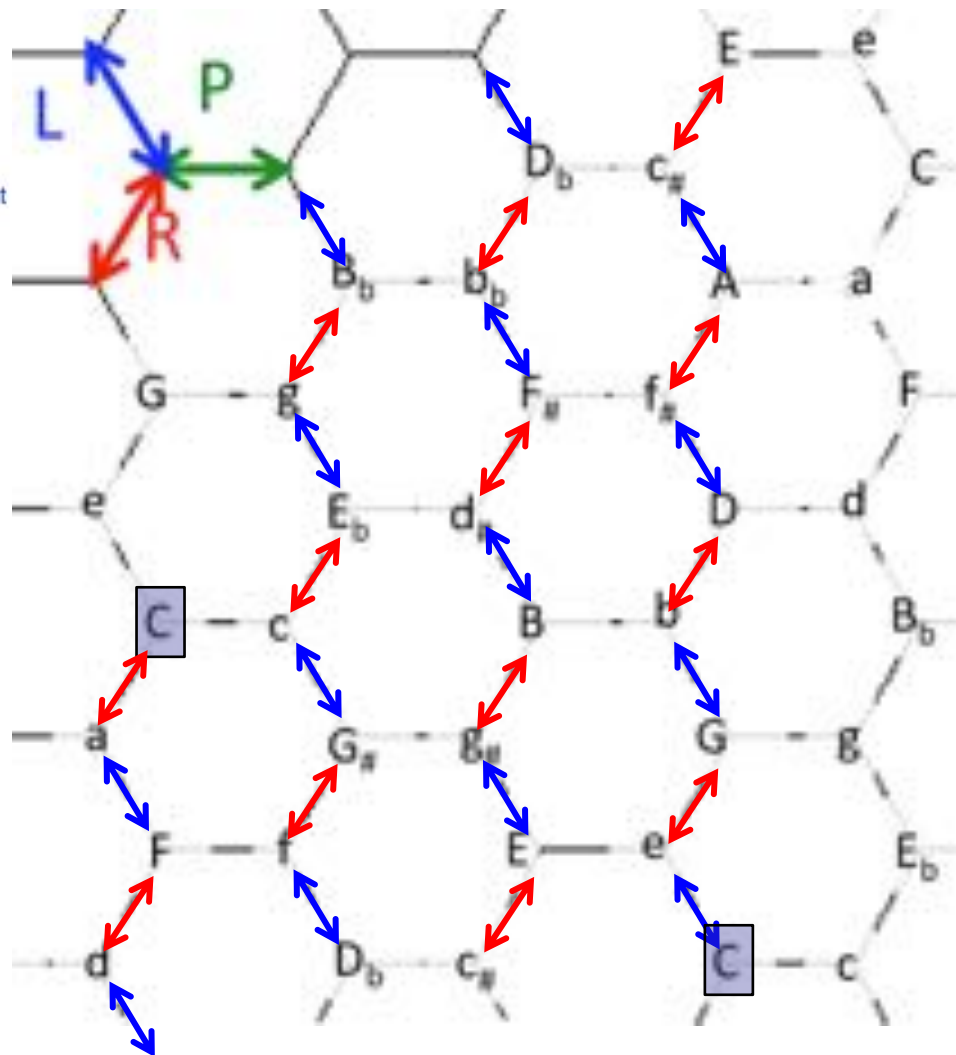
Le Blé en Herbe



(Polo/Moreno/Dieu)

Plonger comme un enfant, cheveux au vent
Sous l'océan du blé en herbe
Marée d'épis couleur d'amande
Qui tendent à caresser le ciel
Algues tendres de mille plages
Frôlant le ventre des nuages
Cheveux de pluie, dos de poissons
Qui frissonnent à l'unisson
Suivre le bord des continents
Dans l'océan du blé en herbe
Pêcher le corail du pavot
Dans le sang des coquelicots

Croiser matin dans l'herbe folle
Deux tourterelles qui s'envolent
Suivre les jeux des hirondelles
Sur le paysage éternel
Nager comme un enfant, cheveux au vent
Sous l'océan
Du blé en herbe
Marée de fruits au goût amer
Acide et salée comme la mer
Vers l'îlot d'un petit village
Vers un château d'eau sur la plage
Quand tout s'éteint avant l'orage
Quand se lève le vent du large
Sur le blé vert

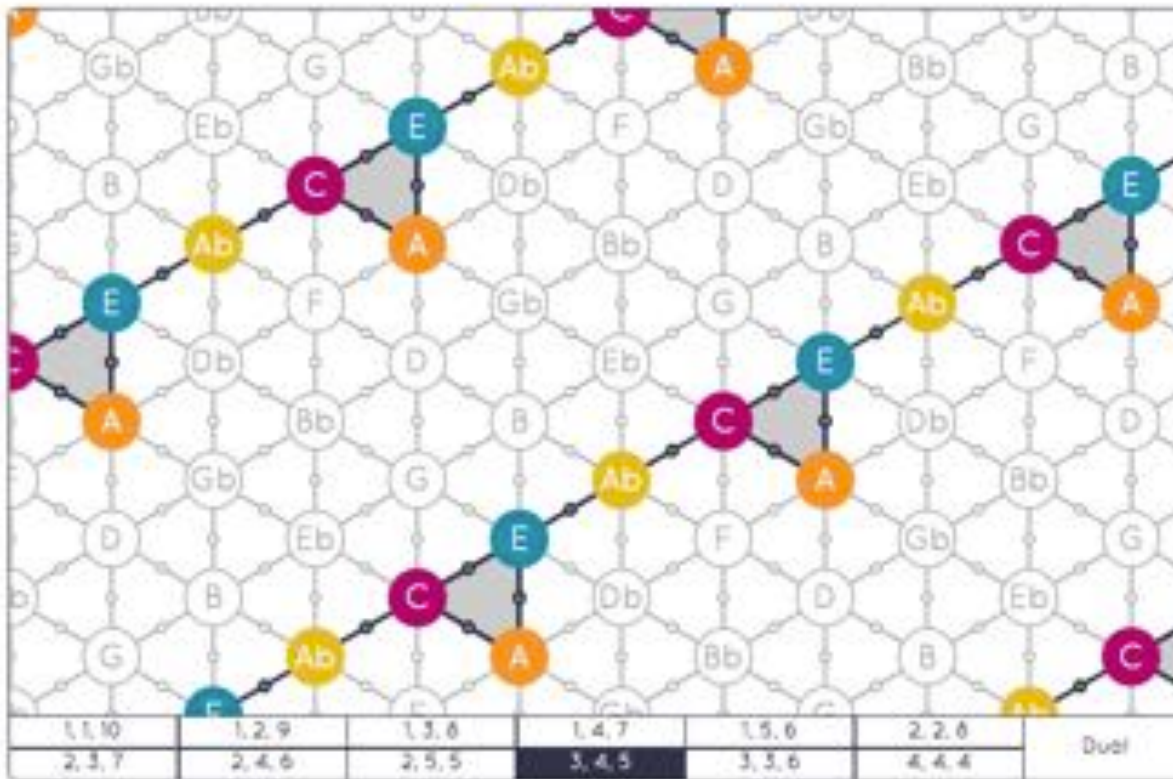


Pour essayer par vous-mêmes

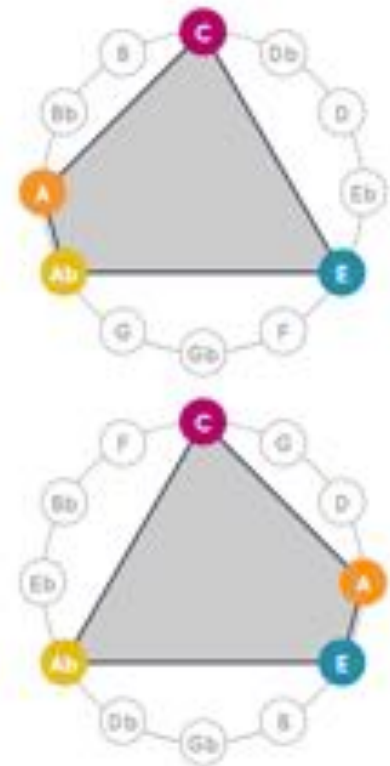
THE TONNETZ

ONE KEY - MANY REPRESENTATIONS

➔ DEMO



Load Midi File Play Start Recording Rotate 180° Translate



➔ <https://guichaoua.gitlab.io/web-hexachord/>

**MATHÉMATIQUES,
DESSINEZ-MOI
LA MUSIQUE**

Contact : andreatta@math.unistra.fr
www.morenoandreatta.com

Des questions ?

