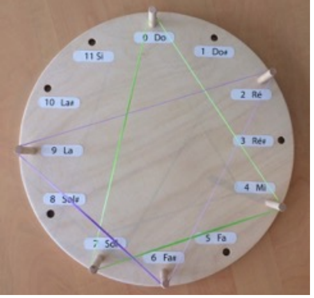


Les maths dans la musique…
…la musique des maths !

IG — IA-IPR
Lycée Fustel de Coulanges
28 septembre 2023

Moreno Andreatta

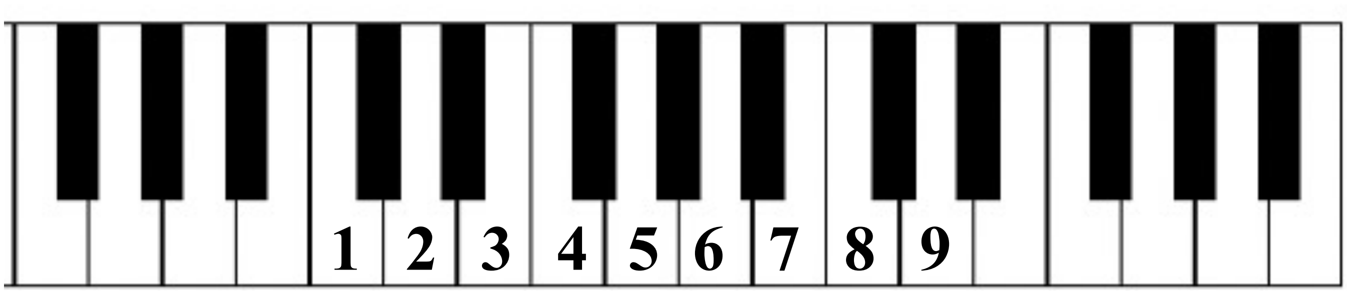
CNRS / IRMA / Université de Strasbourg
CNRS / IRCAM / Sorbonne Université
www.morenoandreatta.com

IRMA Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université de Strasbourg
cnrs
ircam Centre Pompidou
SORBONNE UNIVERSITÉ

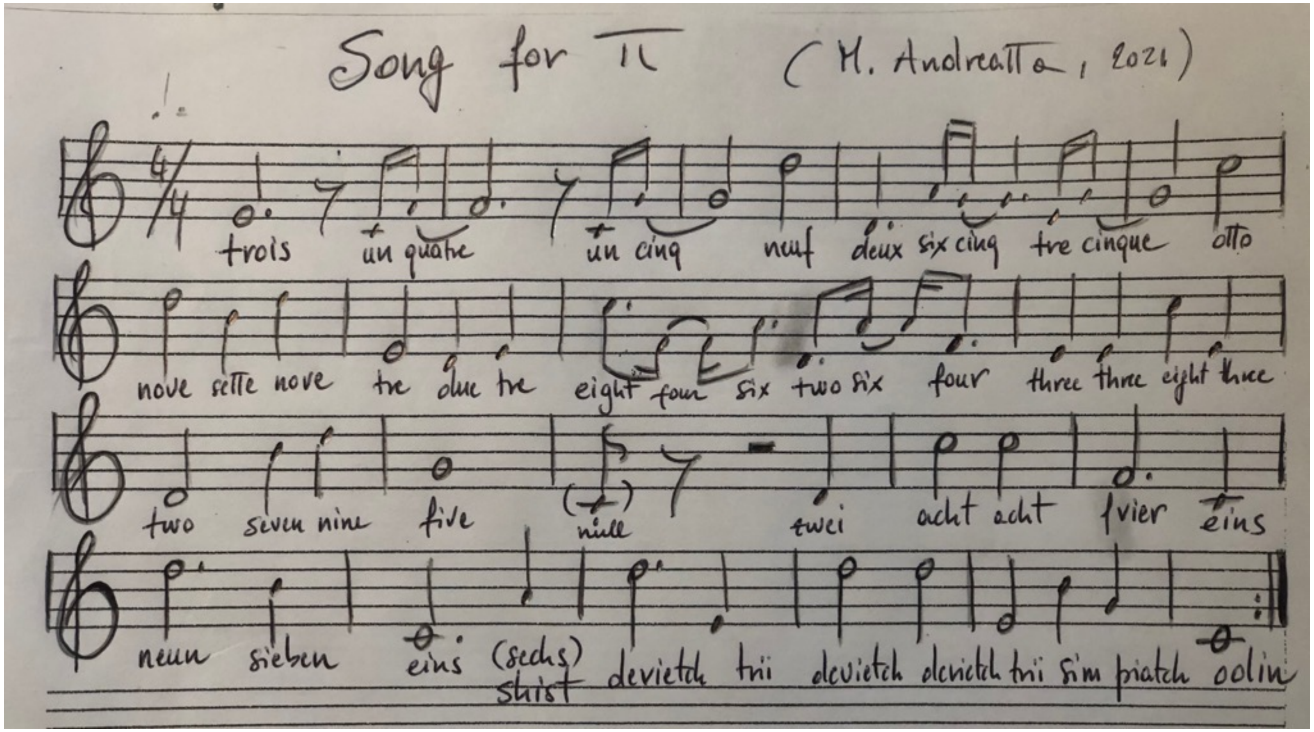
Y a-t-il une musique dans π ?

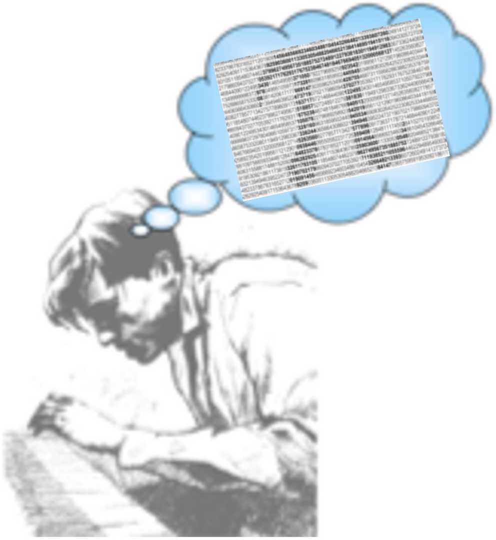
3,1415926535897932384626433832795028841971693993751...

A Song for π



3,14159265358979323846264338327950288419716939937510...





La musique entre, maths, physique et info

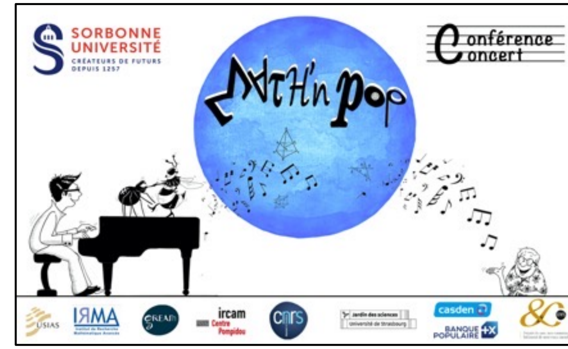
« Mathémusique » dans le programme de l'Education Nationale

L'être humain perçoit le monde à l'aide de **signaux** dont certains sont de nature sonore. De l'Antiquité jusqu'à nos jours, il a combiné les sons de manière harmonieuse pour en faire un art, la musique, qui entretient des liens privilégiés avec **les mathématiques**. L'**informatique** permet aujourd'hui de numériser les sons et la musique. La compréhension des mécanismes auditifs s'inscrit dans une perspective d'éducation à la santé.


MATHÉMATIQUES,
DESSINEZ-MOI
LA MUSIQUE

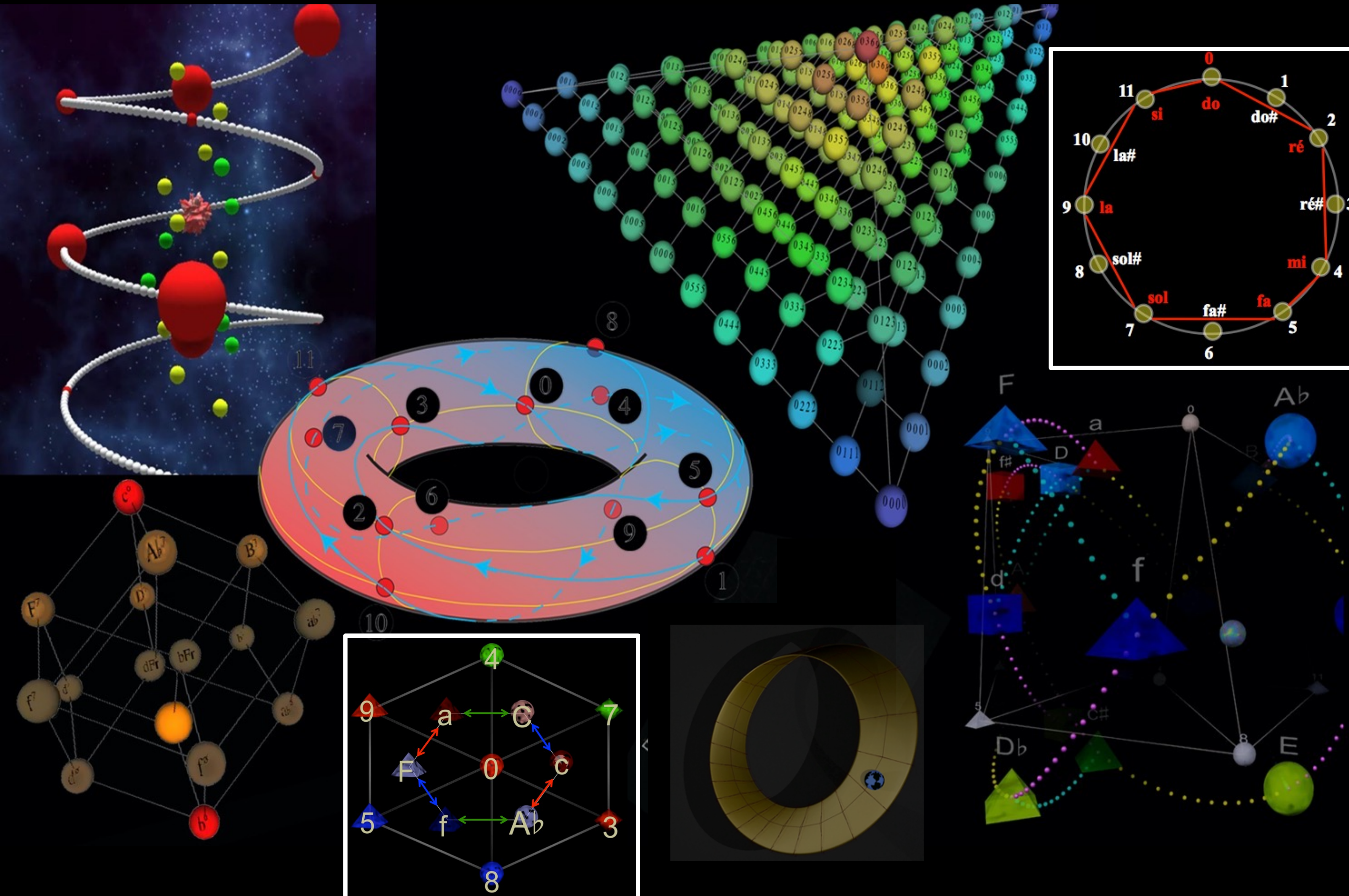

Rakuten
M-AUDIO

Ateliers, conférences-concert et spectacle « Math'n Pop »

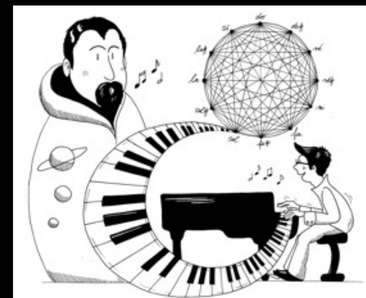


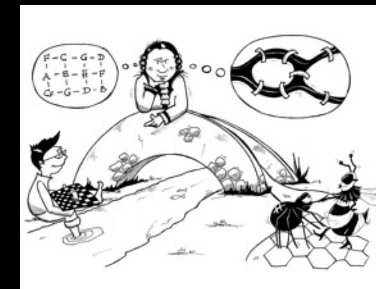
- Math'n Pop @ Bischwiller (Festival Alsasciences, 12 mai 2019)
- Math'n Pop @ Sorbonne (Ouverture de l'année des maths, 3 octobre 2019)
- Math'n Pop @ ISC (Festival ARTEX, 11 octobre 2019)
- Ateliers & Math'n Pop @ Amiens (6 mars 2020)
- Ateliers @ Mulhouse (Lycée Schweitzer, 6 octobre 2020)
- Ateliers @ Illkirch (Lycée Le Corbusier, 9 octobre 2020)
- Ateliers @ Paris (Lycée Arago, 7-8 octobre 2021)
- Ateliers @ Thann (Lycée Kestner, 9 novembre 2021)
- Ateliers & Math'n Pop @ Saint Brieuc (18 novembre 2021)
- Ateliers @ Colmar (22 novembre 2021)
- Atelier (PAF) & Math'n Pop @ Lyon (19 mai 2022)
- Ateliers & conférence-concert « collective » @ Hagueneau (10 mars 2023)

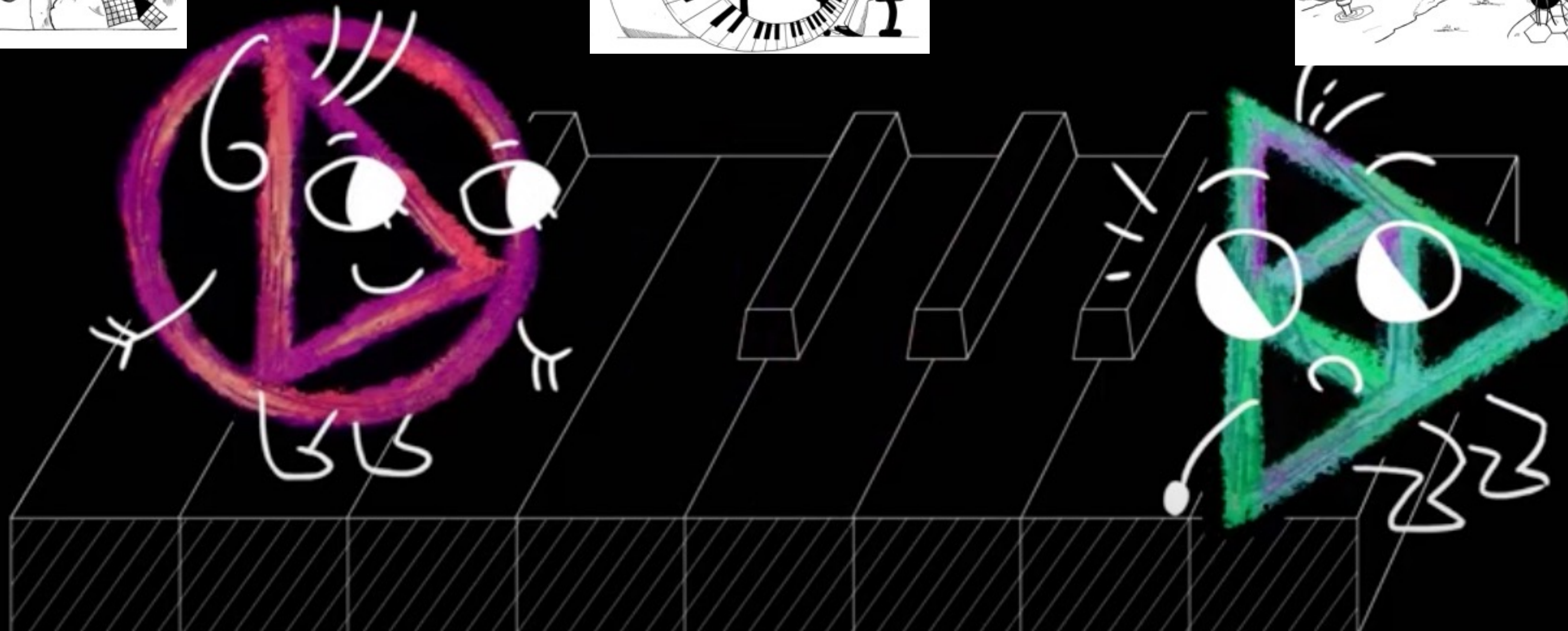
La galaxie des modèles géométriques en musique



La rencontre entre Mme le Cercle et M le Triangle





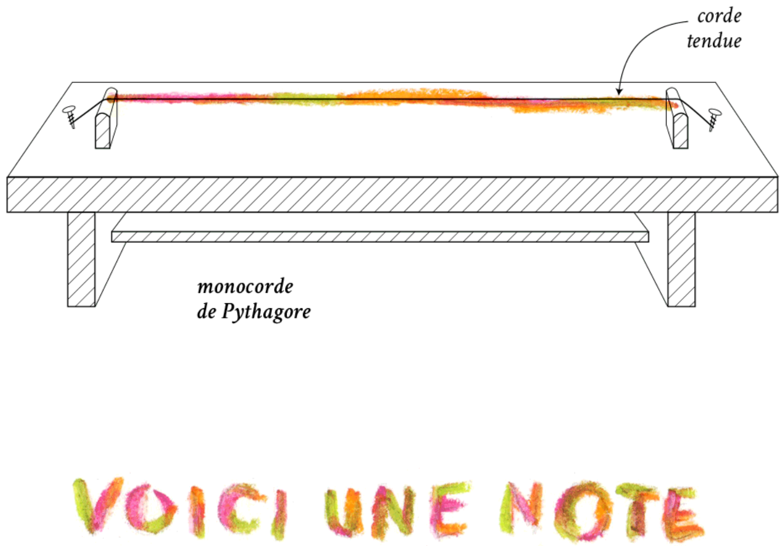


Musique et mathématiques - Histoire d'une rencontre

➔ https://video.math.cnrs.fr/musique-et-mathematiques/

Pythagore et le monocorde

Les intervalles selon le monocorde

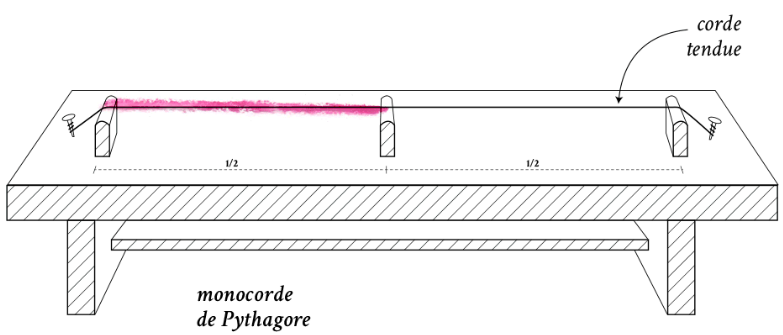


Le monocorde est un instrument contenant une unique corde tendue et une caisse de résonance.

Plus cette corde est courte, plus le son obtenu en la pinçant est aigu, car la **fréquence du son est inversement proportionnelle à la longueur de la corde**.

Ainsi, si le rapport de longueur de la corde est égal à 1 (comme ici), son rapport de fréquence sera égal à 1/1 donc 1 !

Les intervalles selon le monocorde



Longueur de la corde	Rapport de fréquence	Intervalle correspondant
1/2	2	OCTAVE

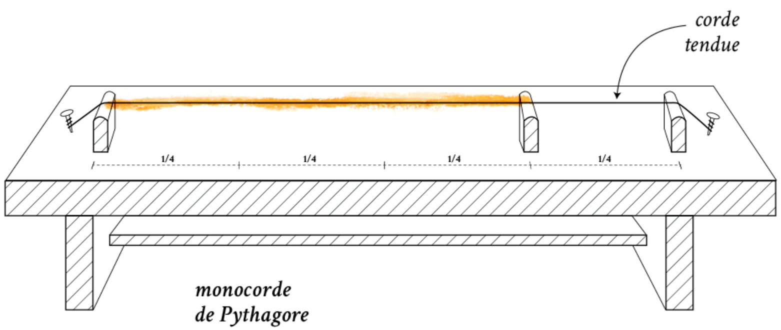
Le monocorde est un instrument contenant une unique corde tendue et une caisse de résonance.

Plus cette corde est courte, plus le son obtenu en la pinçant est aigu, car la **fréquence du son est inversement proportionnelle à la longueur de la corde.**

Ainsi, si le rapport de longueur de la corde est égal à 1 (comme ici), son rapport de fréquence sera égal à 1/1 donc 1 !

Si le rapport de longueur de la corde est égal à 1/2, son rapport de fréquence sera égal à 1/(1/2) donc 2, ce qu'on appelle l'intervalle d'**octave**

Les intervalles selon le monocorde



Longueur de la corde	Rapport de fréquence	Intervalle correspondant
3/4	4/3	QUARTE

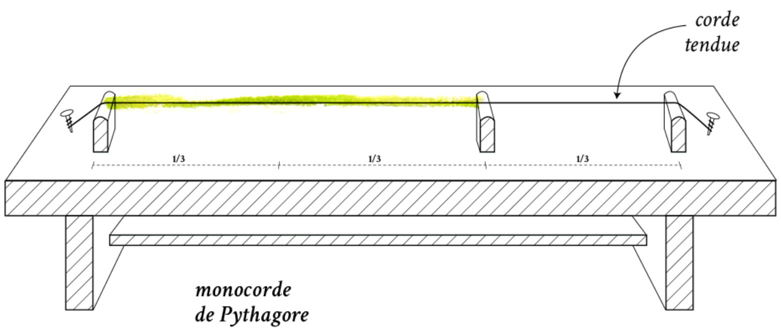
Le monocorde est un instrument contenant une unique corde tendue et une caisse de résonance.

Plus cette corde est courte, plus le son obtenu en la pinçant est aigu, car la **fréquence du son est inversement proportionnelle à la longueur de la corde.**

Ainsi, si le rapport de longueur de la corde est égal à 1 (comme ici), son rapport de fréquence sera égal à 1/1 donc 1 !

Si le rapport de longueur de la corde est égal à 3/4, son rapport de fréquence sera égal à 1/(3/4) donc 4/3, ce qu'on appelle l'intervalle de **quarte.**

Les intervalles selon le monocorde



Longueur de la corde	Rapport de fréquence	Intervalle correspondant
2/3	3/2	QUINTE

Le monocorde est un instrument contenant une unique corde tendue et une caisse de résonance.

Plus cette corde est courte, plus le son obtenu en la pinçant est aigu, car la **fréquence du son est inversement proportionnelle à la longueur de la corde.**

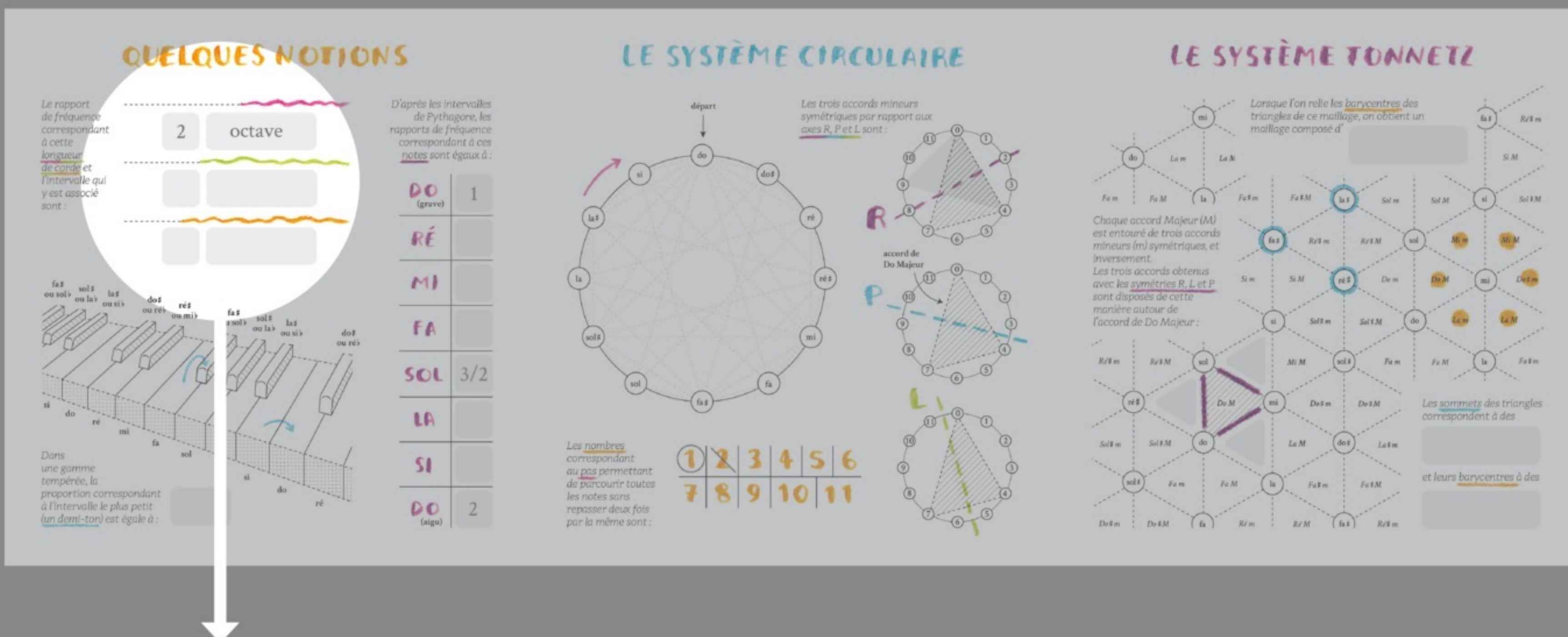
Ainsi, si le rapport de longueur de la corde est égal à 1 (comme ici), son rapport de fréquence sera égal à 1/1 donc 1 !

Si le rapport de longueur de la corde est égal à 2/3, son rapport de fréquence sera égal à 1/(2/3) donc 3/2, ce qu'on appelle l'intervalle de **quinte.**

Travaux pratiques sur les intervalles

Flyer disponible à l'adresse :

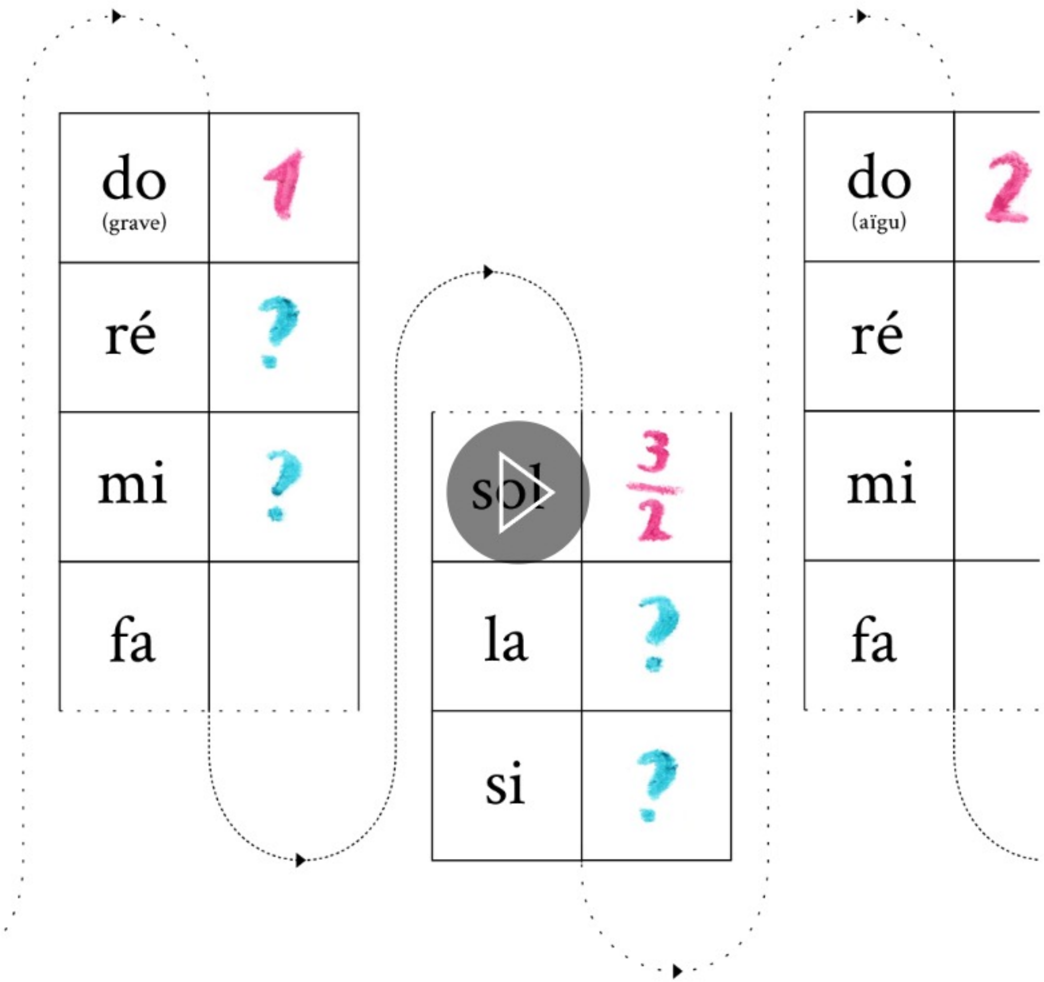
http://repmus.ircam.fr/_media/moreno/depliant_atelier_impression.pdf



Après avoir mesuré la longueur des segments de corde colorés par rapport à la longueur totale de la corde, en déduire le rapport de fréquence qui y correspond

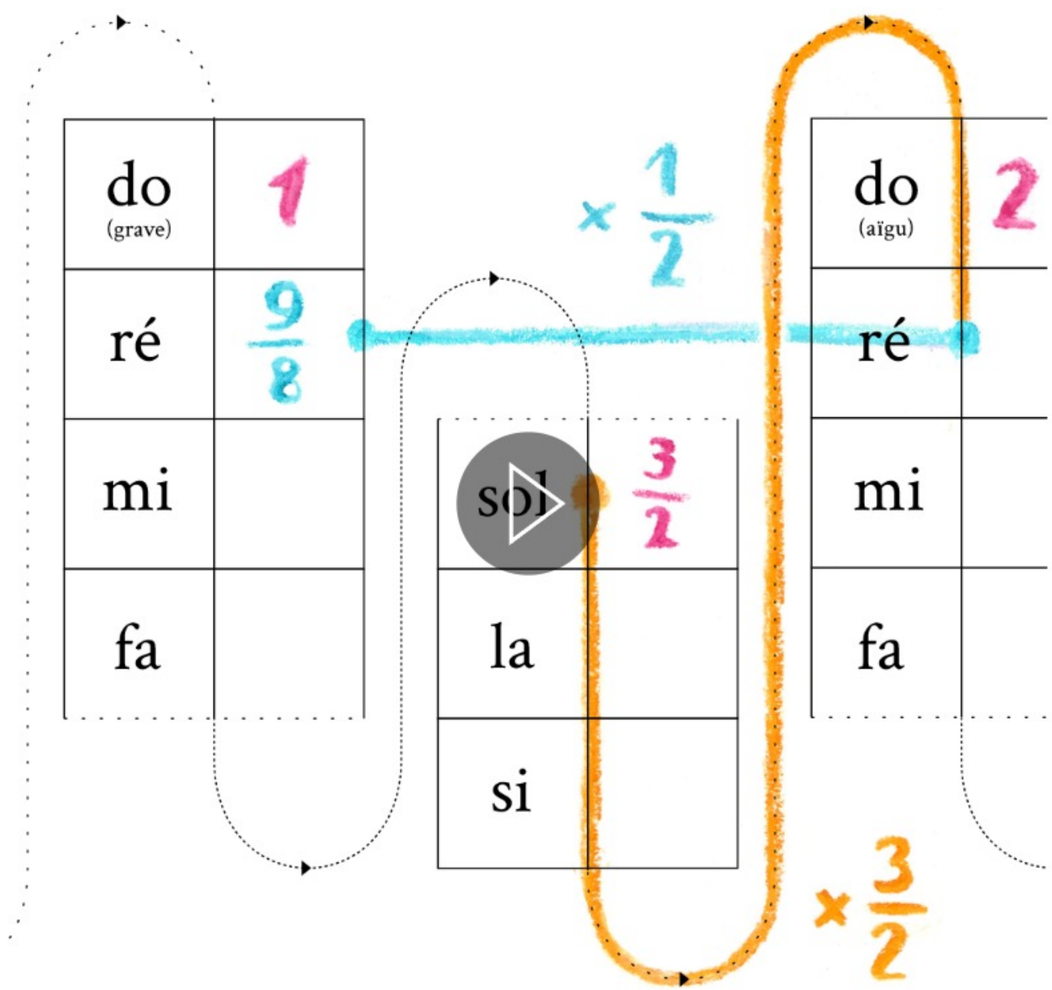
Comment construire une gamme à partir de la quinte (juste) ?

De quinte en quinte…



Calculer des puissances et des quotients en lien avec le **cycle des quintes**. Mettre en place un raisonnement mathématique pour prouver que le cycle des quintes est infini.

De quinte en quinte…



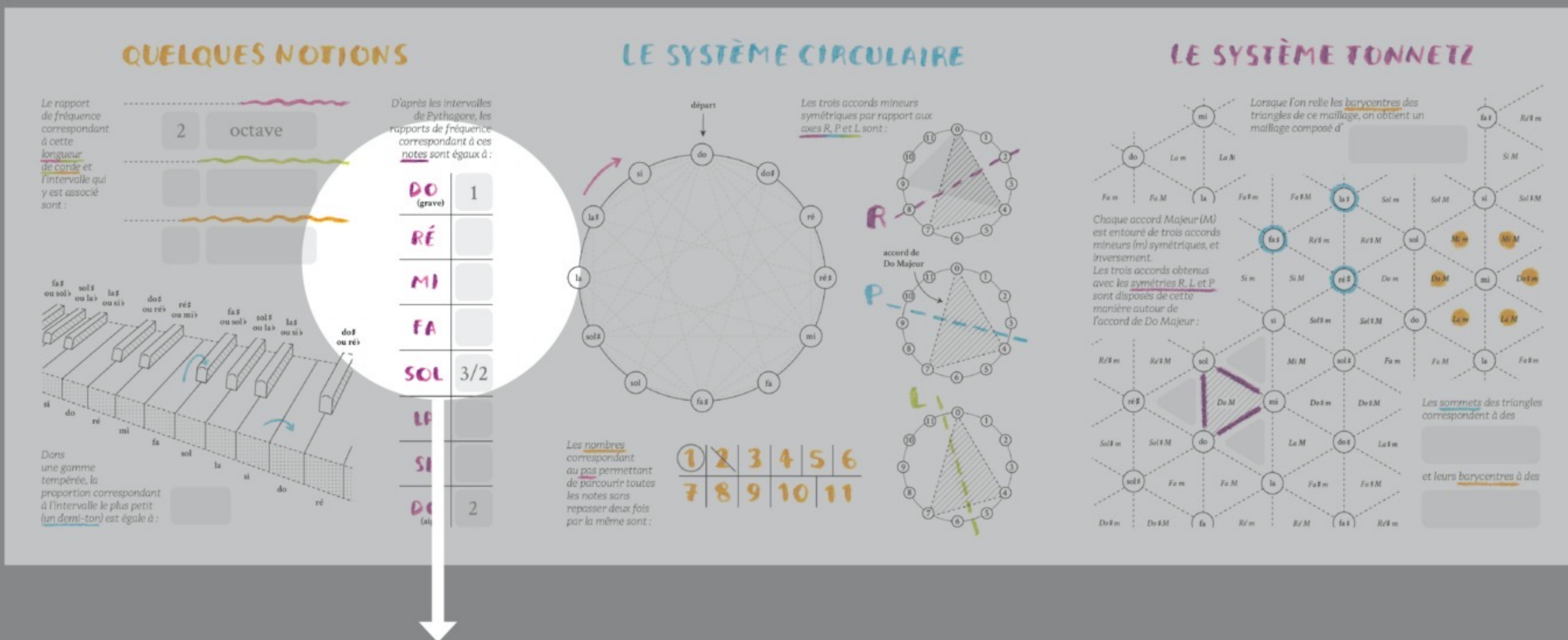
Calculer des puissances et des quotients en lien avec le **cycle des quintes**.

Mettre en place un raisonnement mathématique pour **prouver que le cycle des quintes est infini.**

Travaux pratiques sur la gamme pythagoricienne

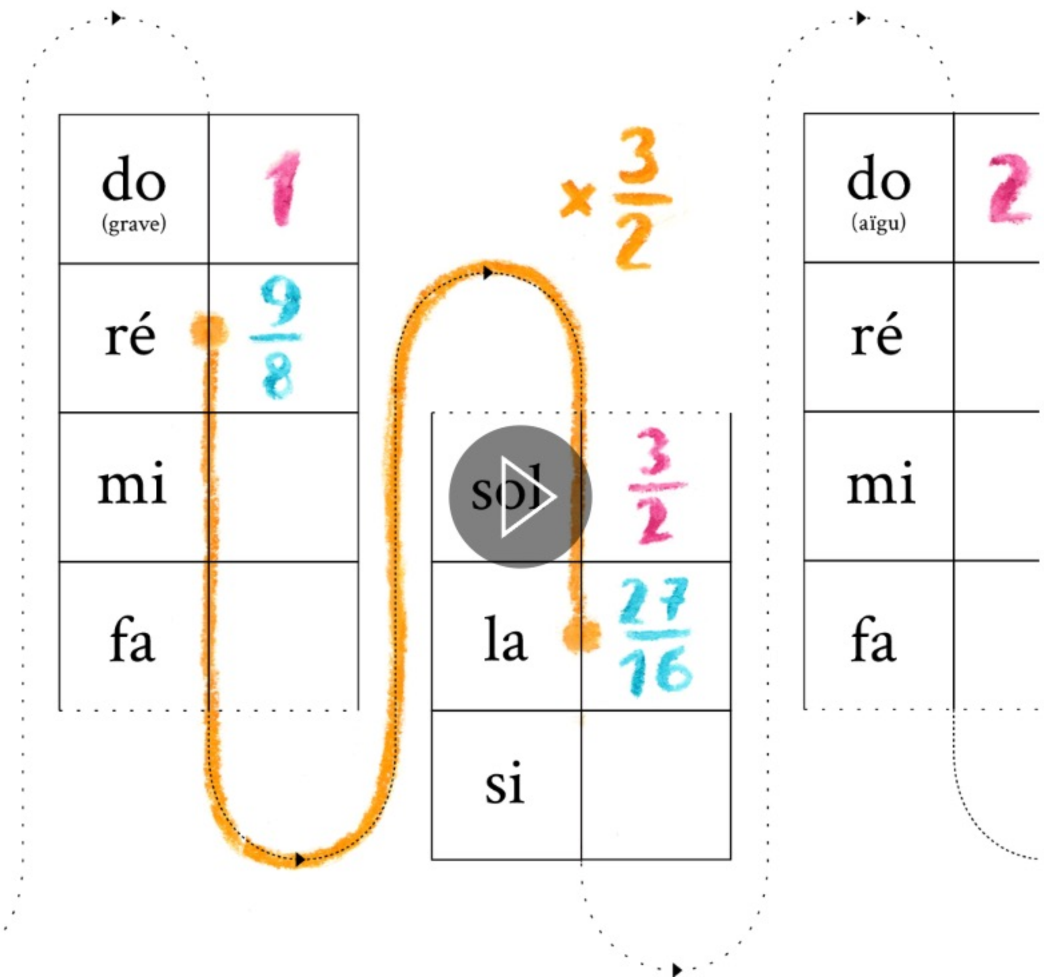
Flyer disponible à l’adresse :

http://repmus.ircam.fr/_media/moreno/depliant_atelier_impression.pdf



D’après l’intervalle de quinte de Pythagore, calculer les rapports de fréquence des différentes notes de la gamme

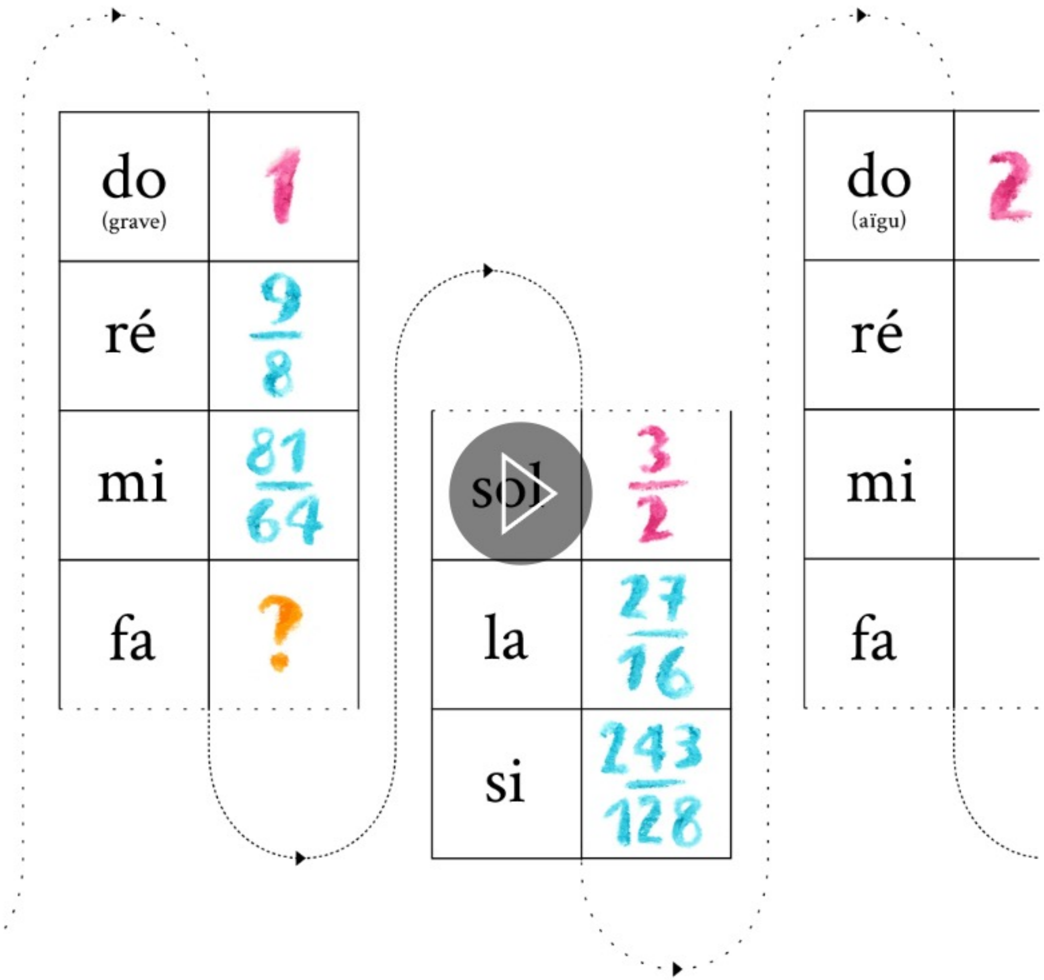
Le cycle des quintes et la gamme pythagoricienne



Calculer des puissances et des quotients en lien avec le **cycle des quintes**.

Mettre en place un <u>raisonnement mathématique</u> pour **prouver que le cycle des quintes est infini.**

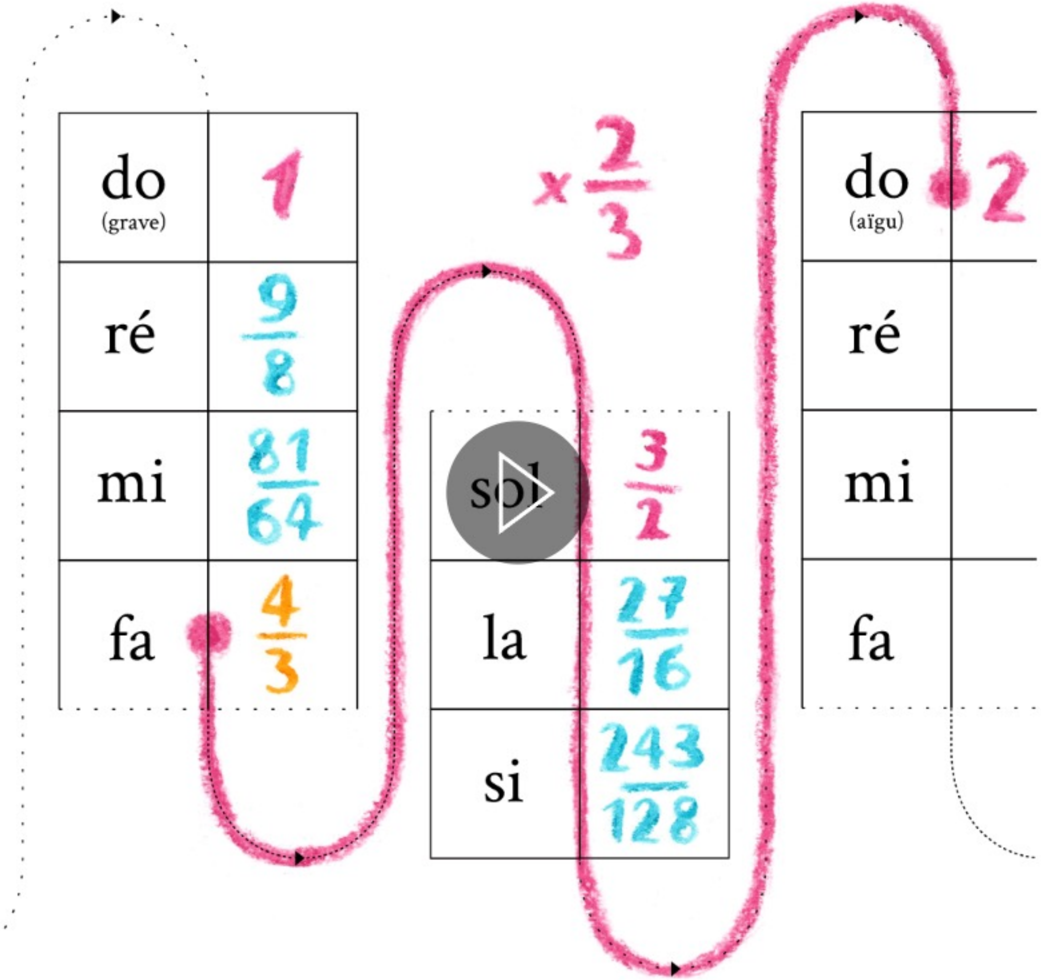
Le cycle des quintes et la gamme pythagoricienne



Calculer des puissances et des quotients en lien avec le **cycle des quintes**.

Mettre en place un raisonnement mathématique pour **prouver que le cycle des quintes est infini.**

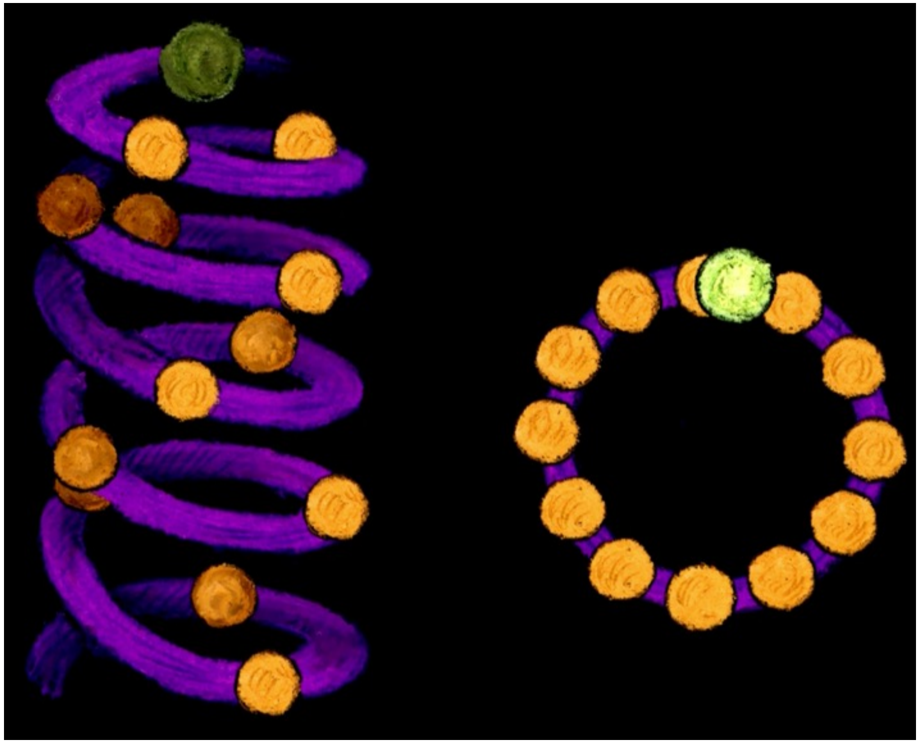
Le cycle des quintes et la gamme pythagoricienne



Calculer des puissances et des quotients en lien avec le **cycle des quintes**.

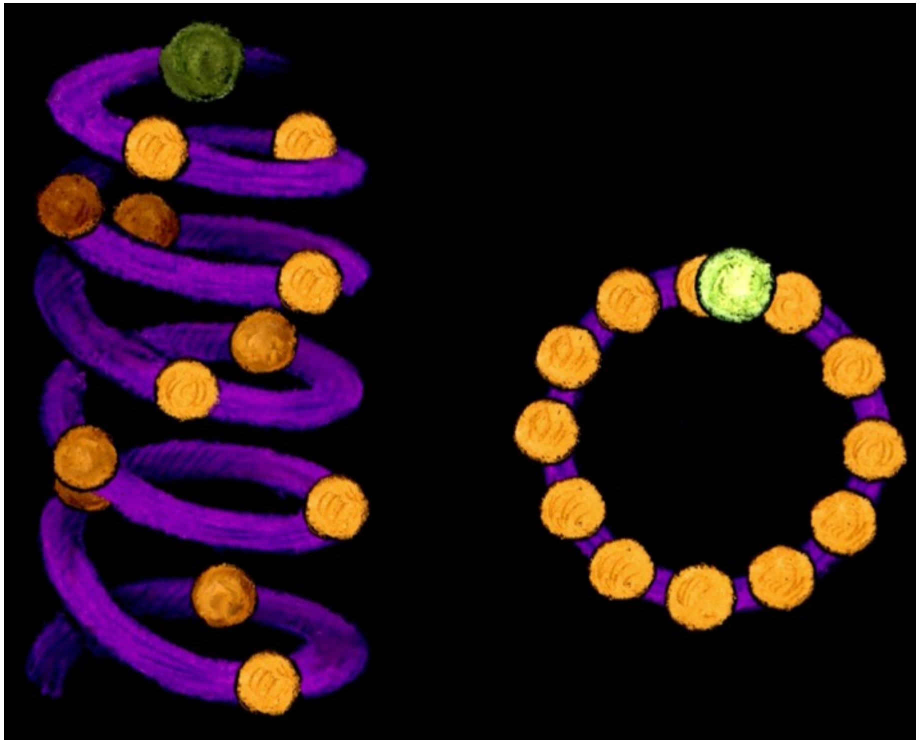
Mettre en place un raisonnement mathématique pour **prouver que le cycle des quintes est infini.**

De quinte en quinte… à l'infini !



Calculer des puissances et des quotients en lien avec le **cycle des quintes**. Mettre en place un <u>raisonnement mathématique</u> pour **prouver que le cycle des quintes est infini.**

De quinte en quinte… à l’infini !

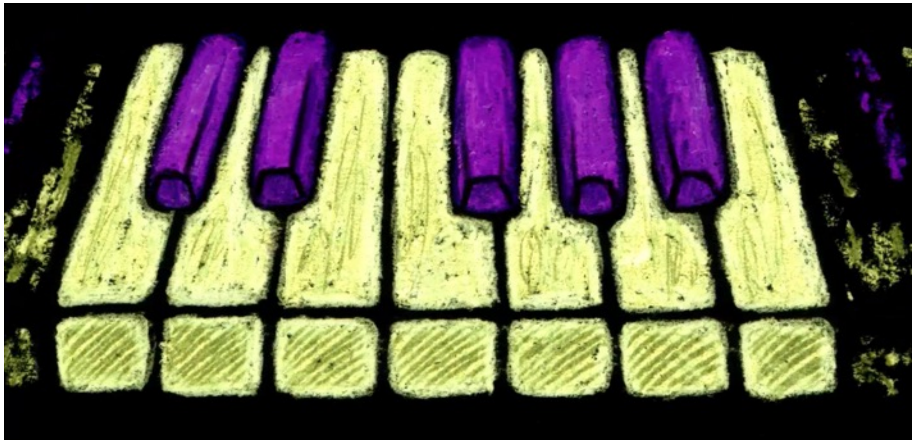


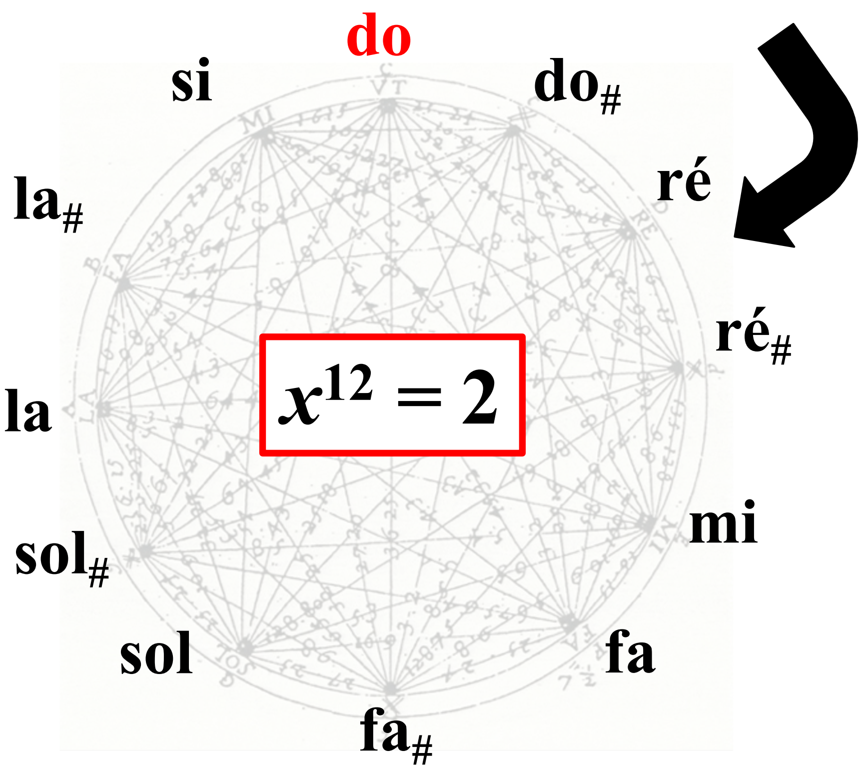
La **preuve par l’absurde** : supposons qu’un multiple de la quinte est égal à un multiple de l’octave et montrons que cela conduit à une contradiction.

Calculer des puissances et des quotients en lien avec le **cycle des quintes**.
Mettre en place un <u>raisonnement mathématique</u> pour **prouver que le cycle des quintes est infini.**

De la spirale au cercle chromatique

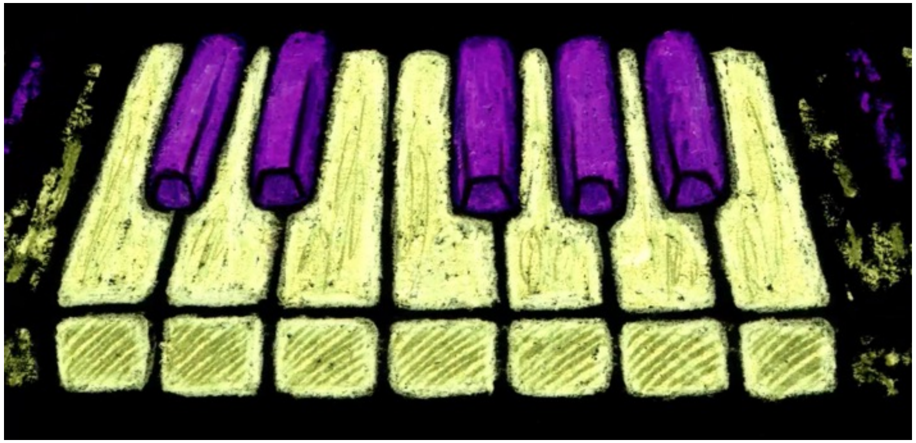
Le tempérament égal : un compromis « combinatoire »

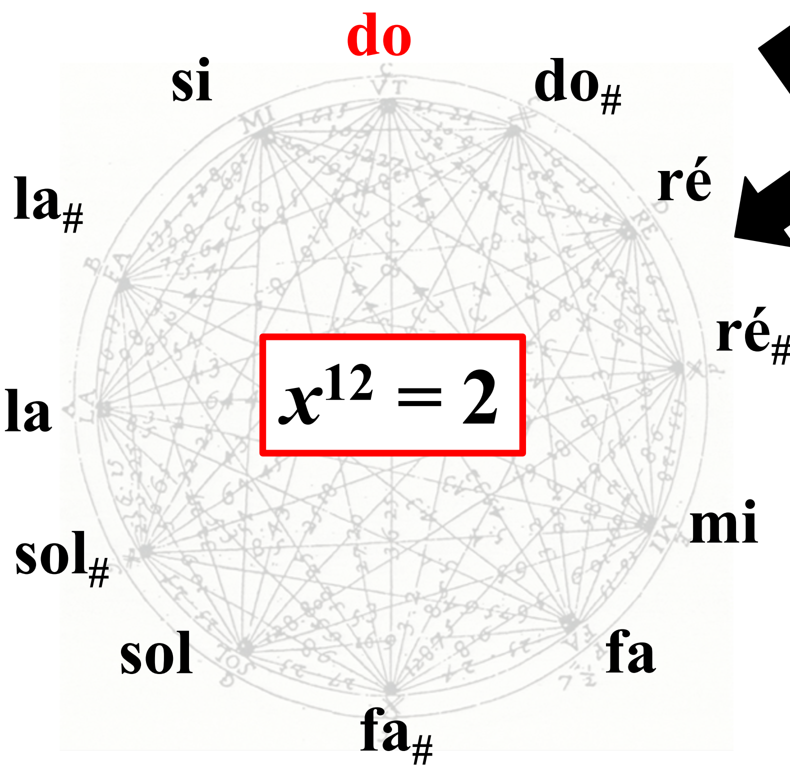




La connaissance des nombres irrationnels a permis, au XVIIe siècle, de construire des **gammes à intervalles égaux**. L'introduction des gammes « au **tempérament égal** » permet de comprendre en quoi la découverte des nombres irrationnels a des applications en dehors du champ mathématique.

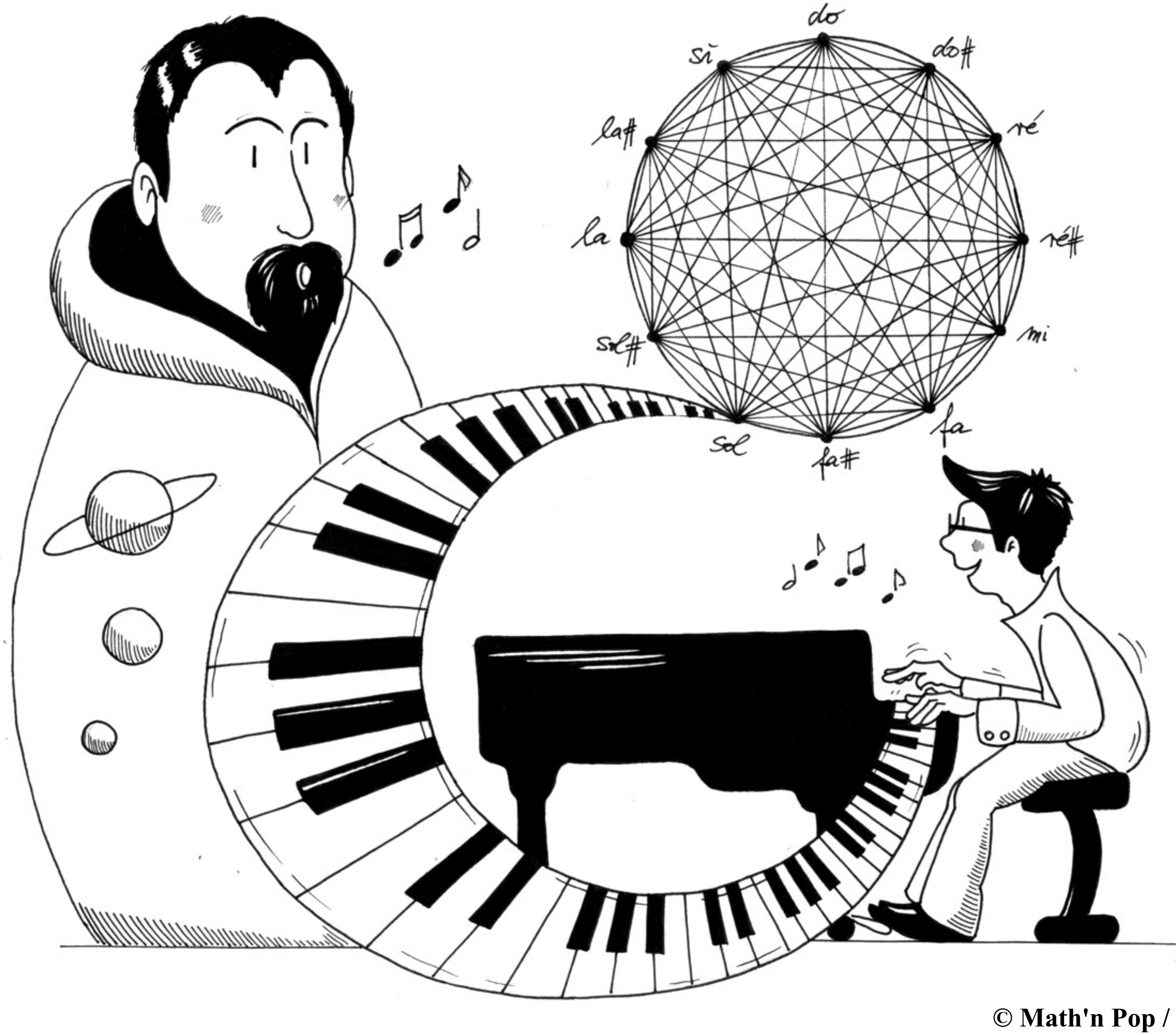
Le tempérament égal : un compromis « combinatoire »



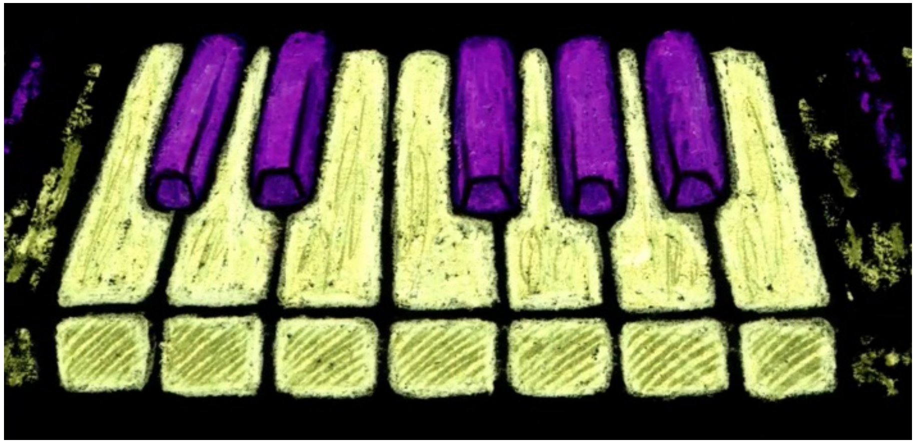


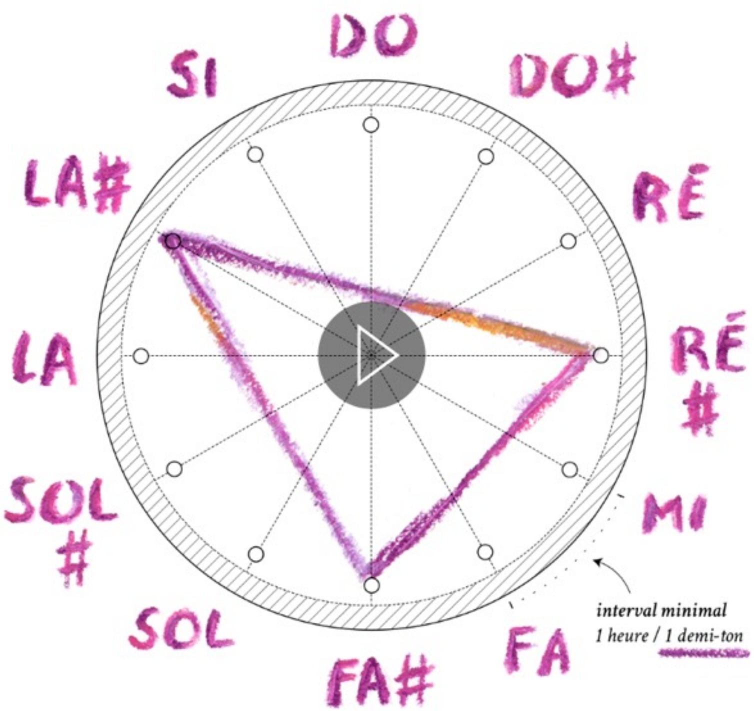
La connaissance des nombres irrationnels a permis, au XVII^{e} siècle, de construire des **gammes à intervalles égaux**. L'introduction des gammes « au **tempérament égal** » permet de comprendre en quoi la découverte des nombres irrationnels a des applications en dehors du champ mathématique. **Utiliser la racine douzième de 2 pour partager l'octave en douze intervalles égaux.**

Mersenne et l'invention de la combinatoire

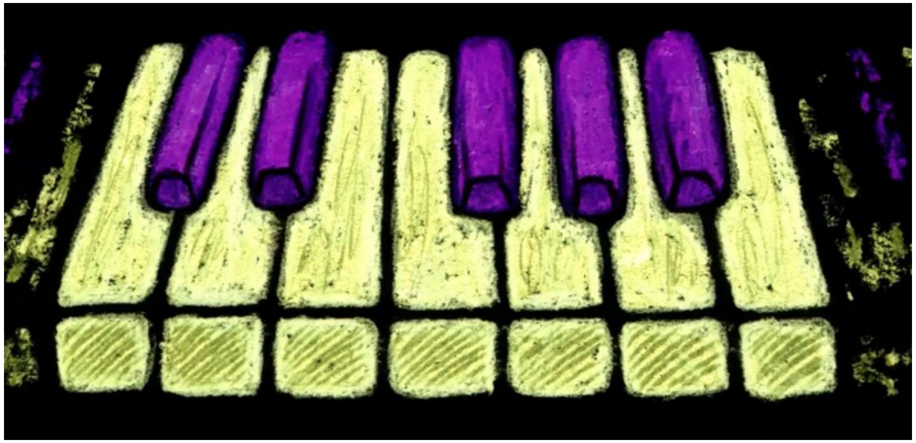


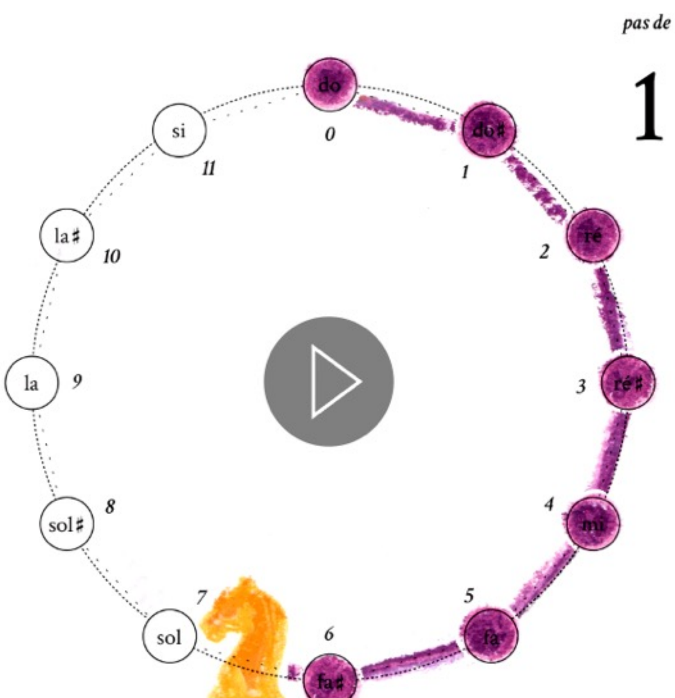
Le cadran d'horloge musical et les accords





Intervalles générateurs du tempérament égal



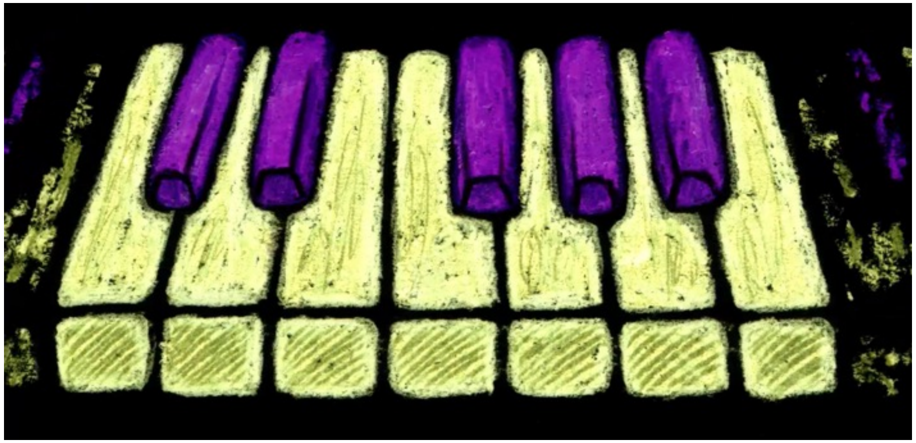


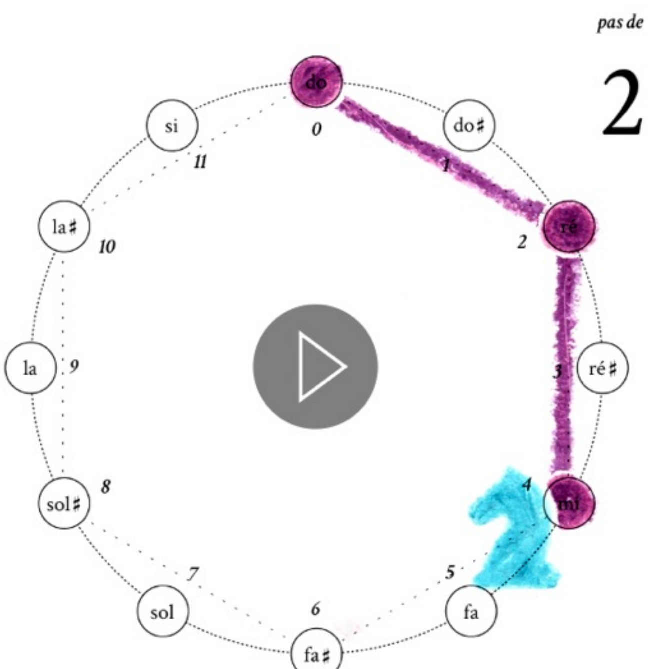
Avec quel pas peut-on engendrer toutes les notes de la gamme tempérée ?

Sans doute ça marche avec le demi-ton donc à pas de 1 car cet intervalle $\boldsymbol{x}$ correspond précisément à la racine douzième de 2 et :

$$\boxed{\boldsymbol{x^{12} = 2}}$$

Intervalles générateurs du tempérament égal





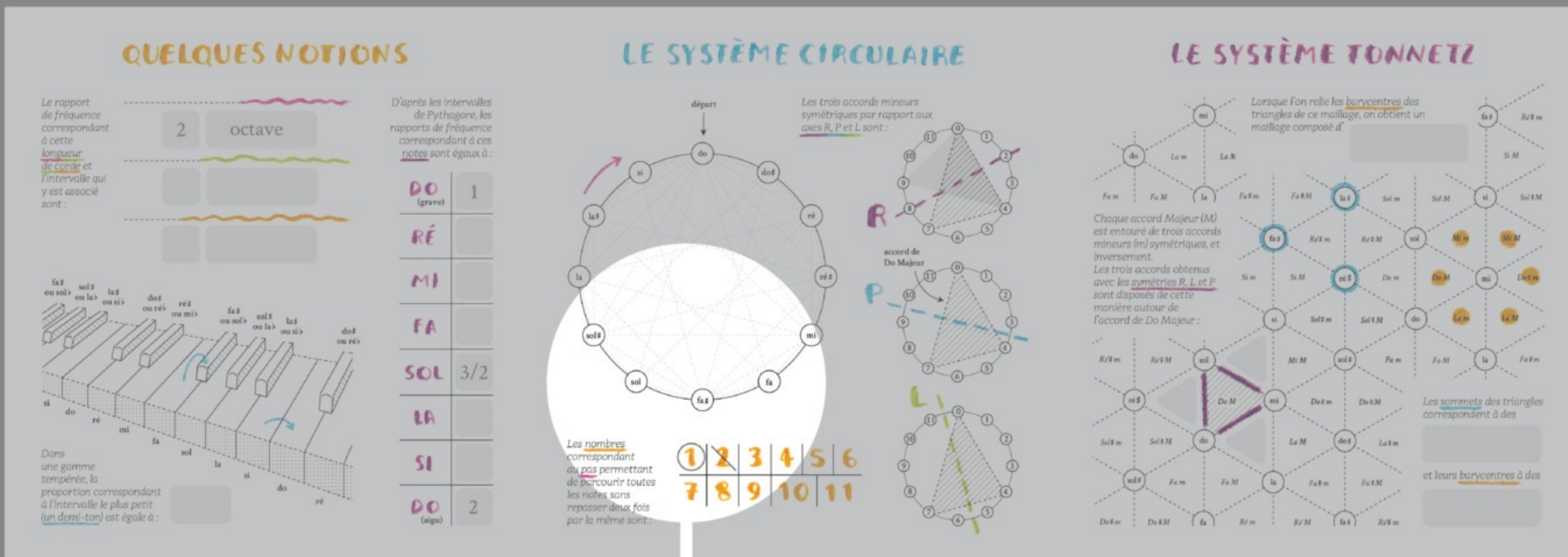
Avec quel pas peut-on engendrer toutes les notes de la gamme tempérée ?

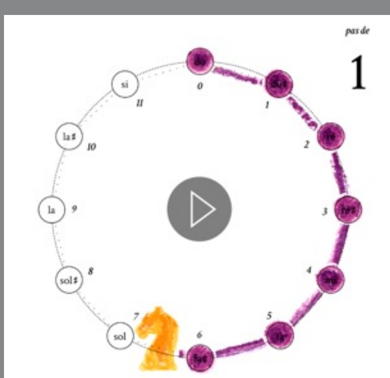
Avec l'intervalle de **ton** ça ne marche pas car au bout de 6 répétitions on retombe sur l'octave et donc on boucle sans pouvoir engendrer les autres notes de la gamme.

Intervalles générateurs du tempérament égal

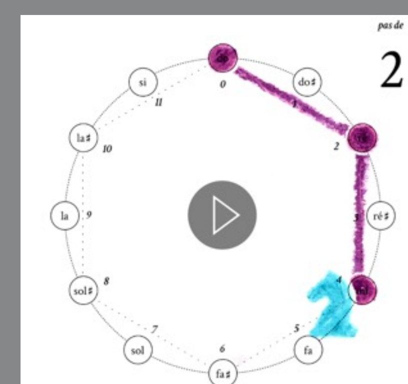
Flyer disponible à l'adresse :

http://repmus.ircam.fr/_media/moreno/depliant_atelier_impression.pdf

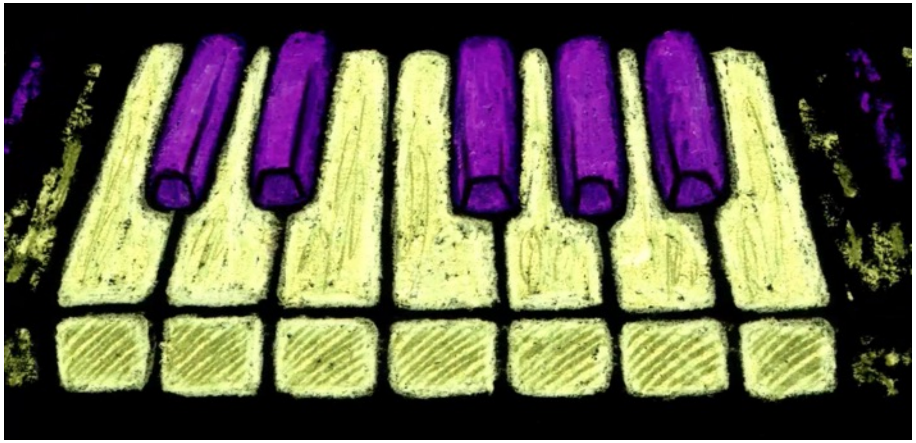


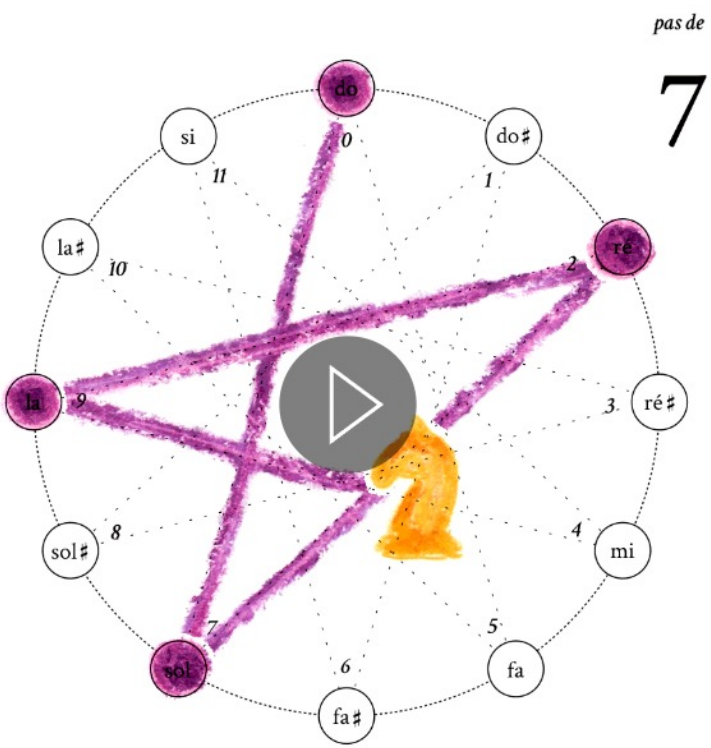


En utilisant le cercle dessiné sur le dépliant, trouvez quels nombres permettent au cavalier de parcourir toutes les notes et revenir au point de départ



Intervalles générateurs du tempérament égal



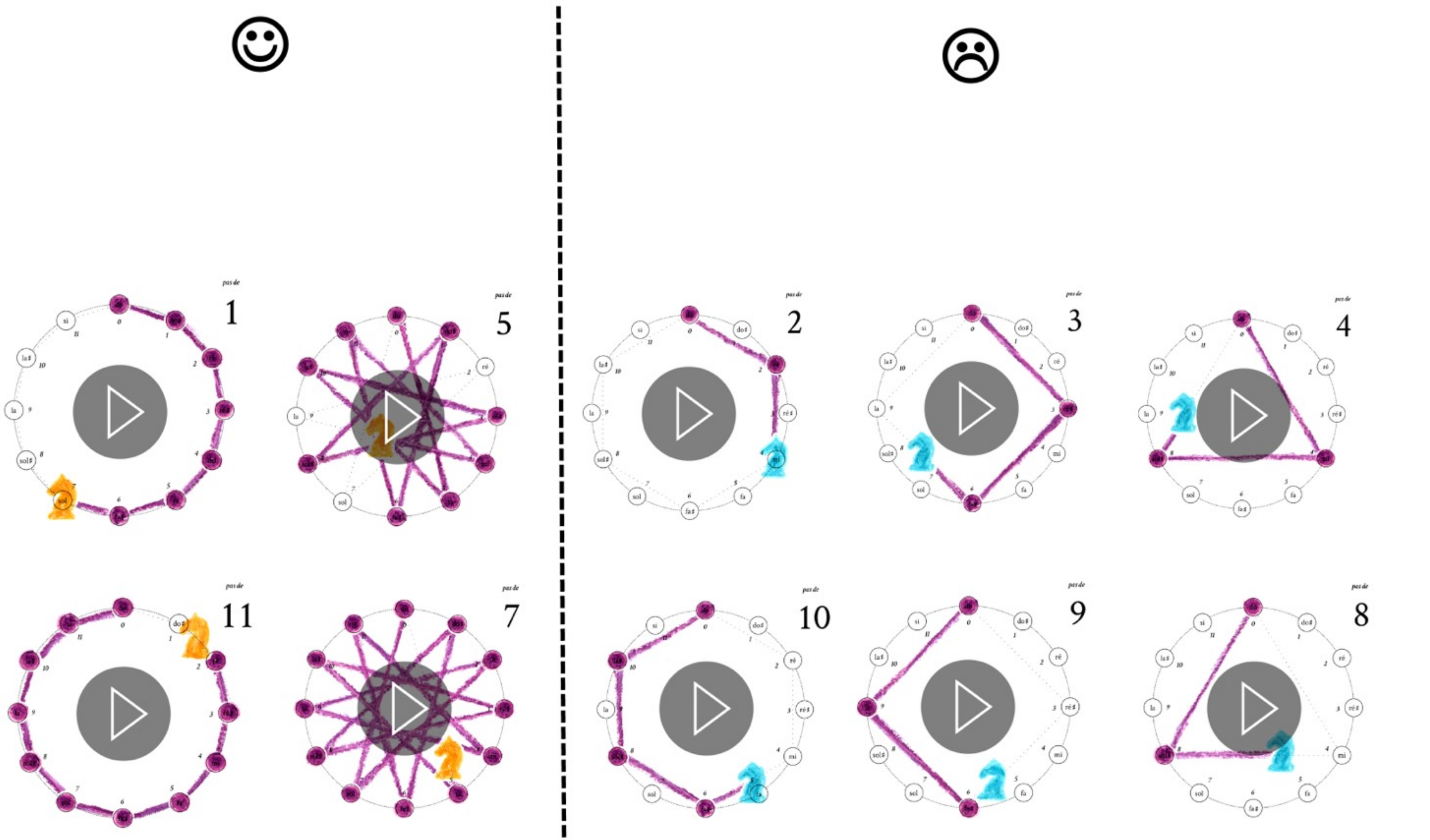


Avec quel pas peut-on engendrer toutes les notes de la gamme tempérée ?

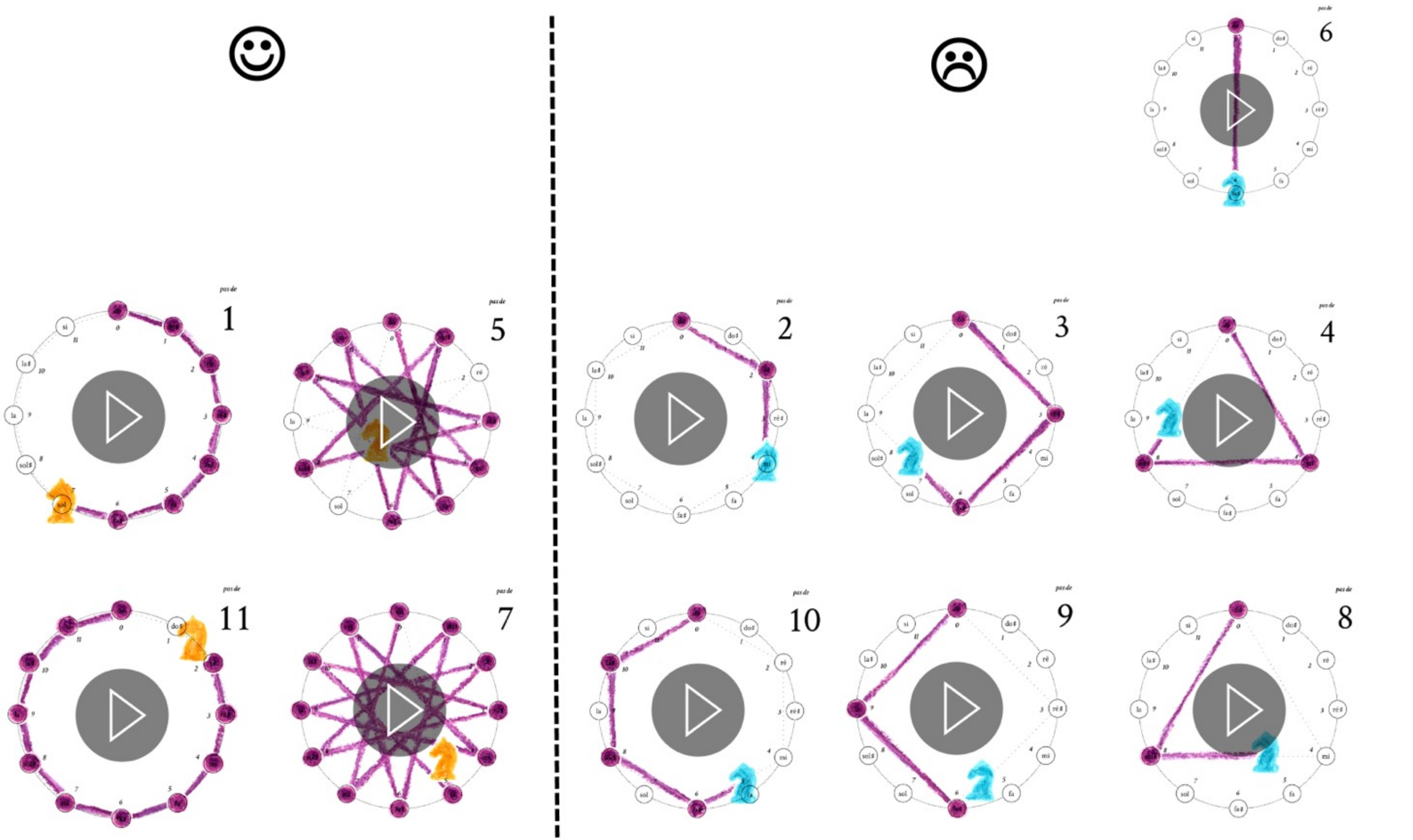
Ca marche avec l'intervalle de **quinte** car la spirale des quinte se renferme dans un cercle pour le tempérament égal.

Et les autres intervalles ?

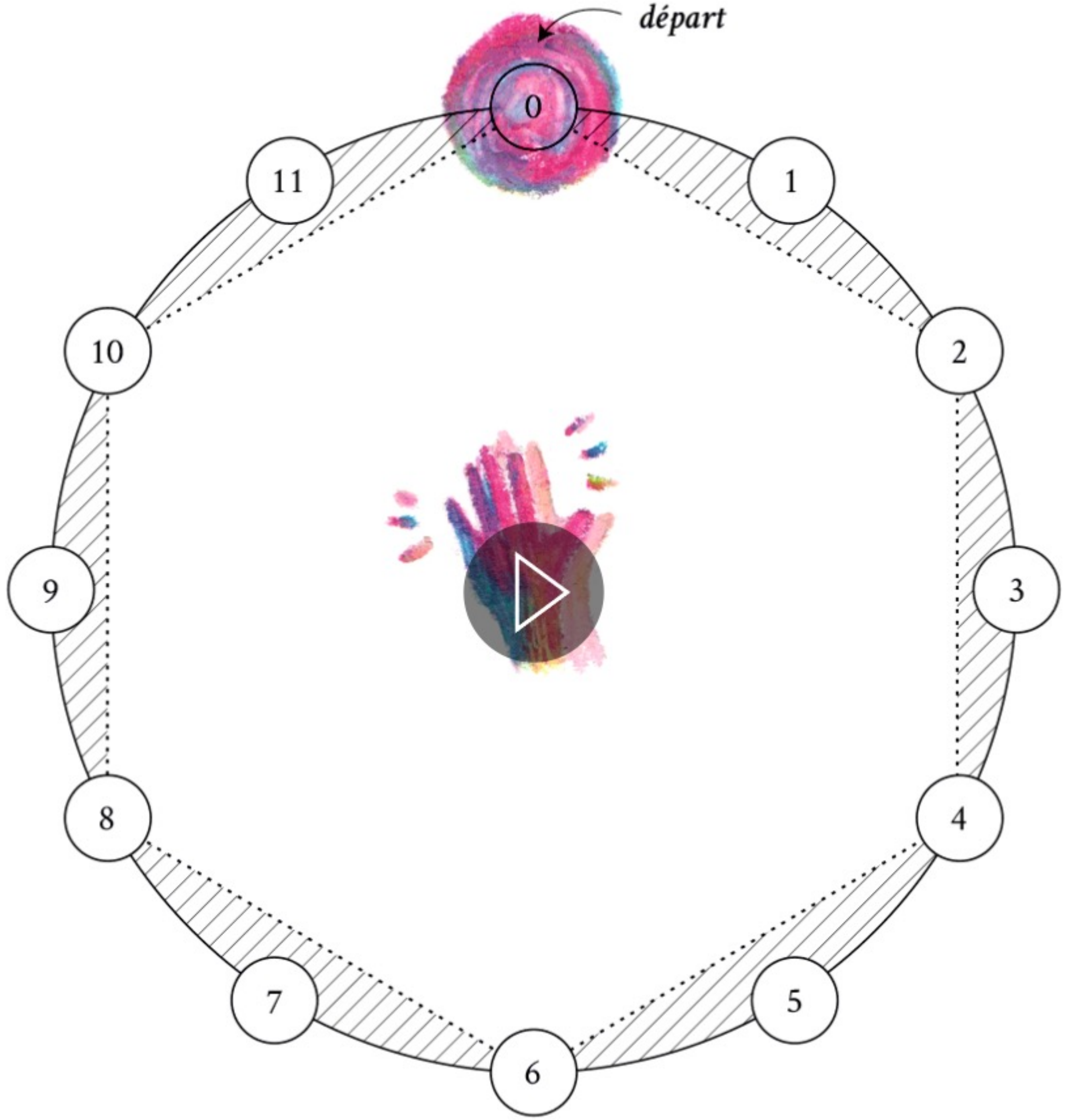
Intervalles générateurs du tempérament égal



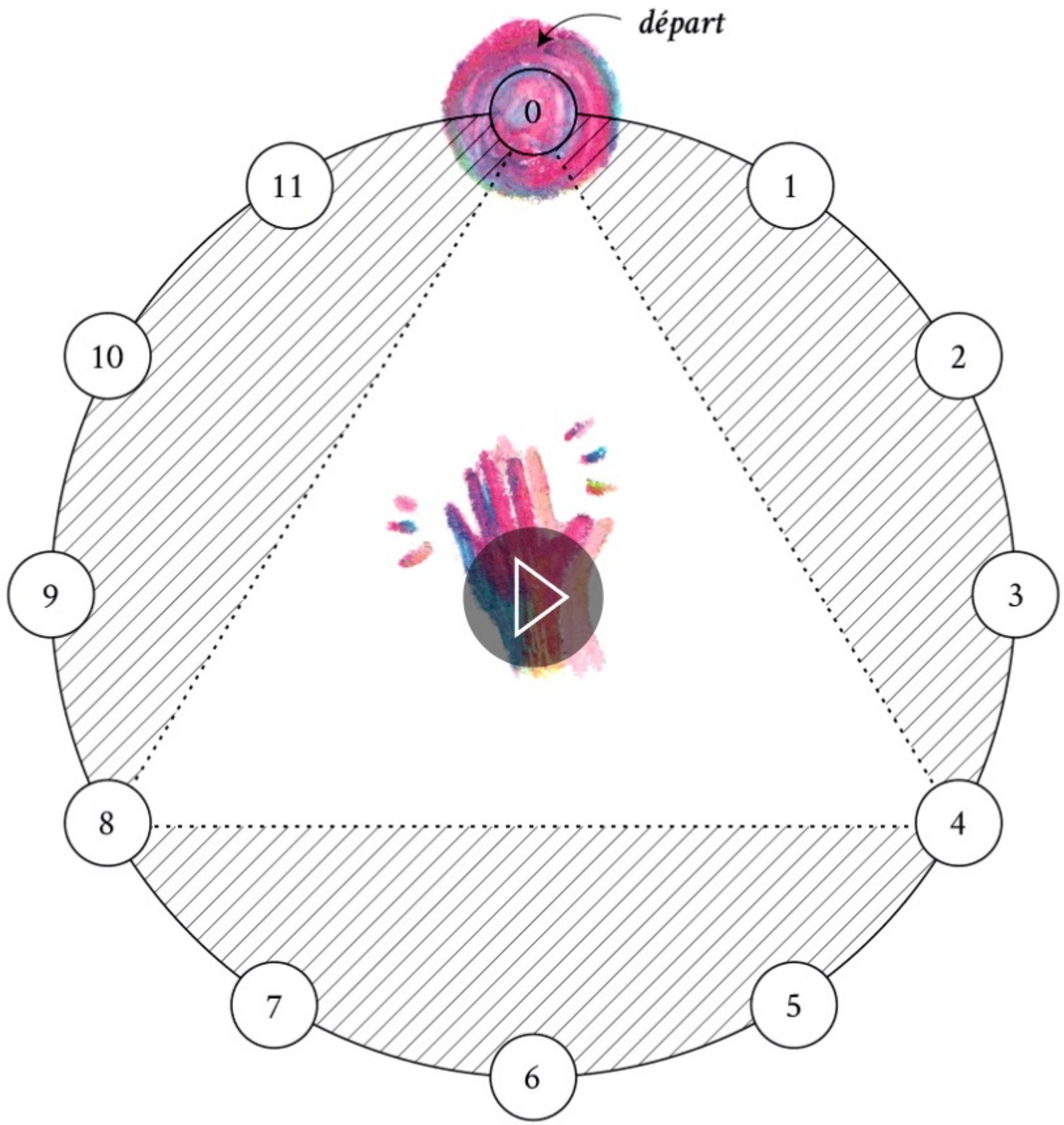
Intervalles générateurs du tempérament égal



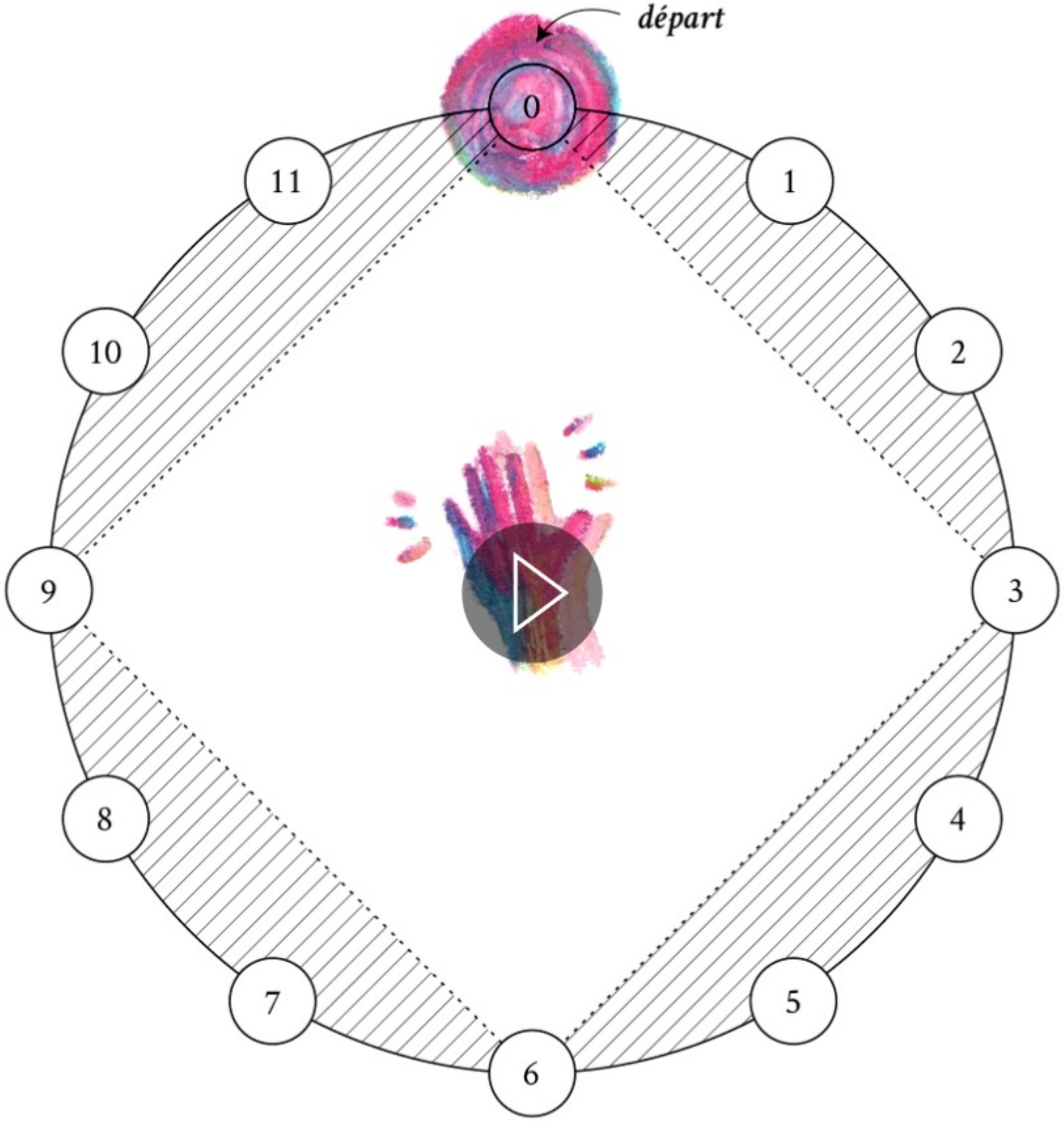
La représentation circulaire du rythme



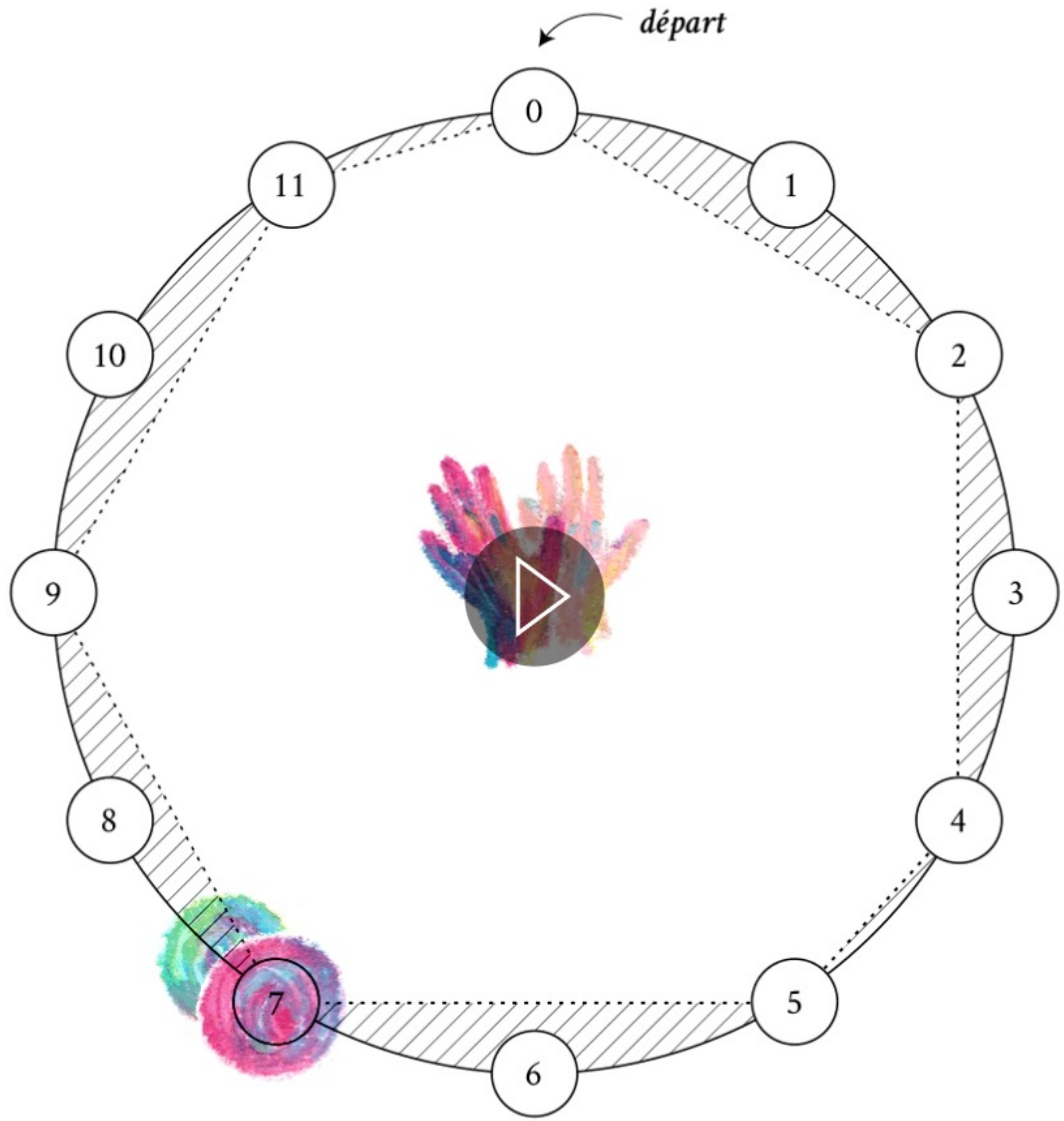
La représentation circulaire du rythme

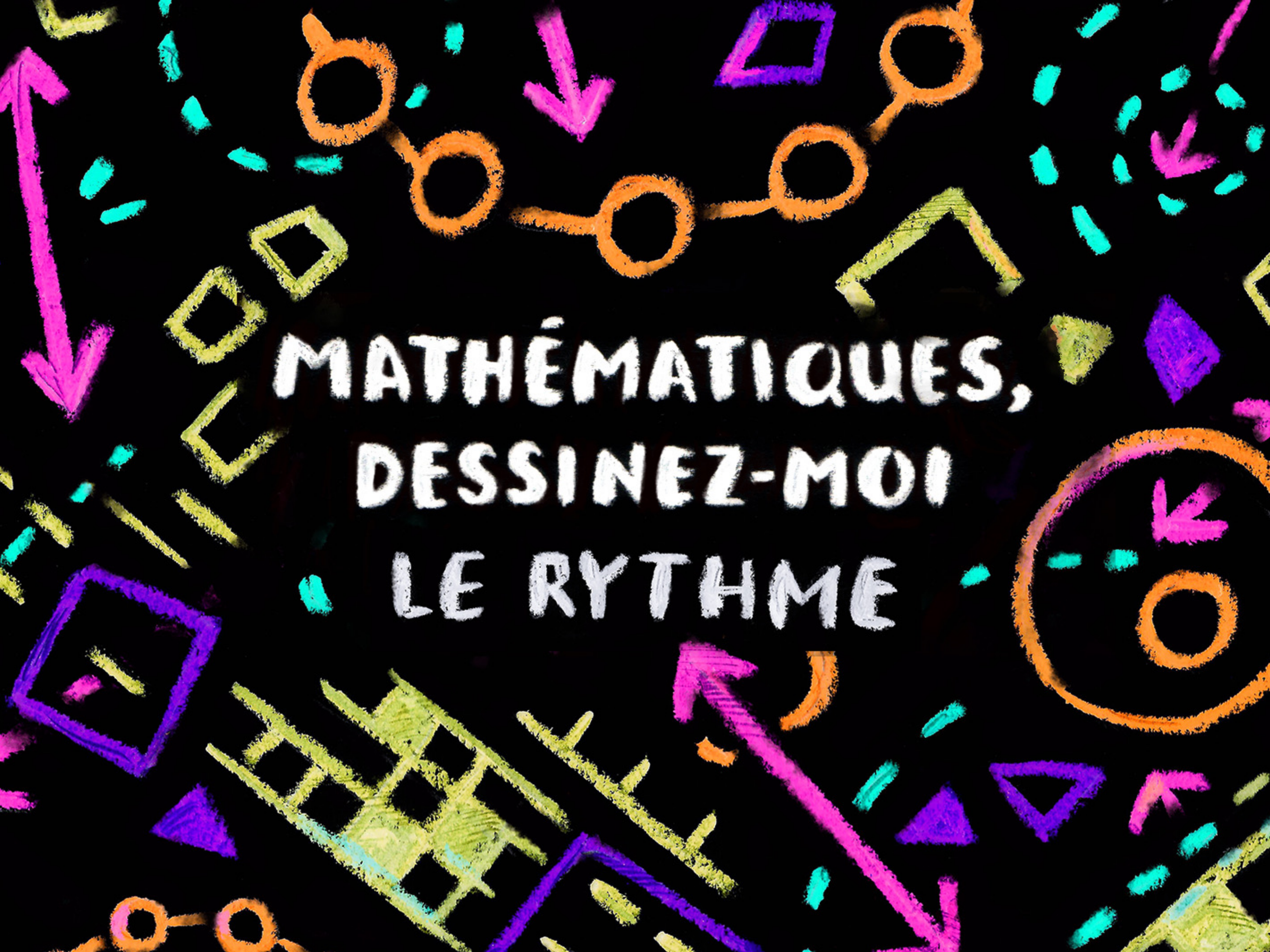


La représentation circulaire du rythme



La représentation circulaire du rythme

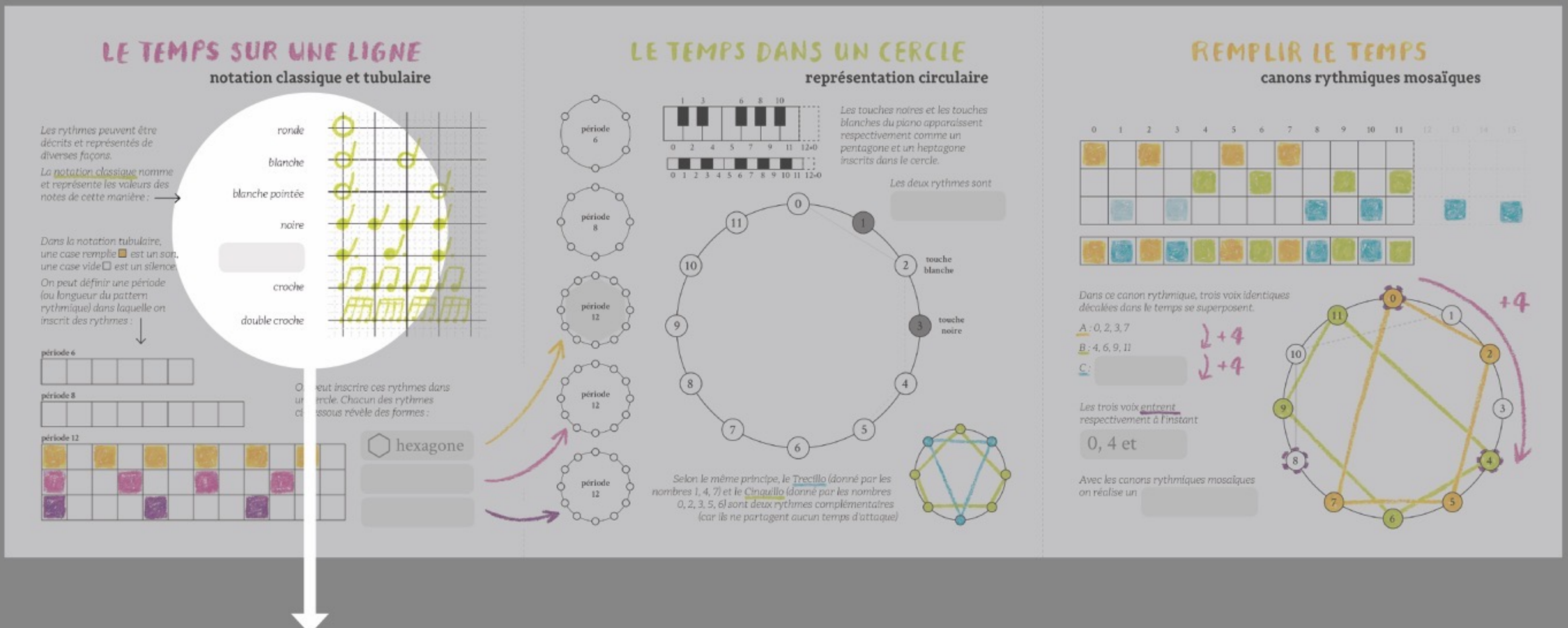



MATHÉMATIQUES,
DESSINEZ-MOI
LE RYTHME

Travaux pratiques sur la notation classique

Flyer disponible à l'adresse :

http://repmus.ircam.fr/_media/moreno/depliant-rythme_impression.pdf

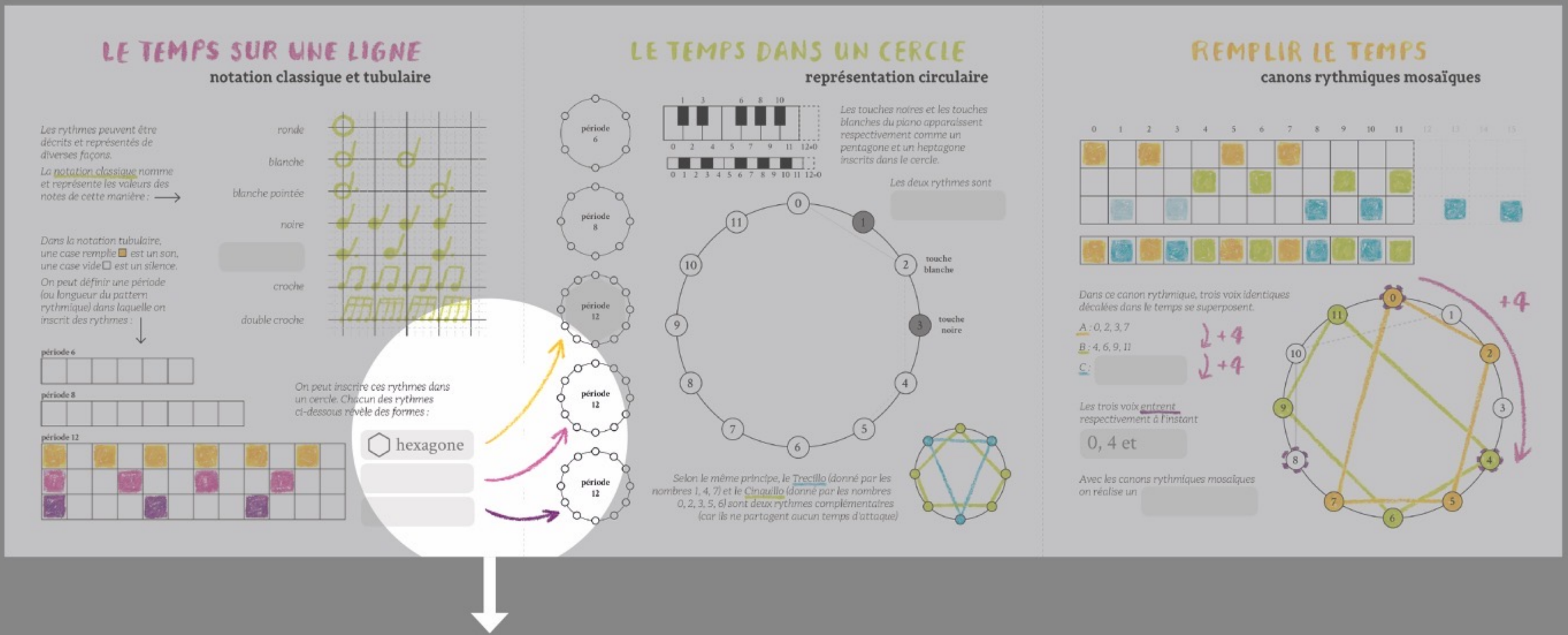


Comment on appelle la durée entre une noire et une blanche ?

De la notation tubulaire à la représentation circulaire

Flyer disponible à l’adresse :

http://repmus.ircam.fr/_media/moreno/depliant-rythme_impression.pdf

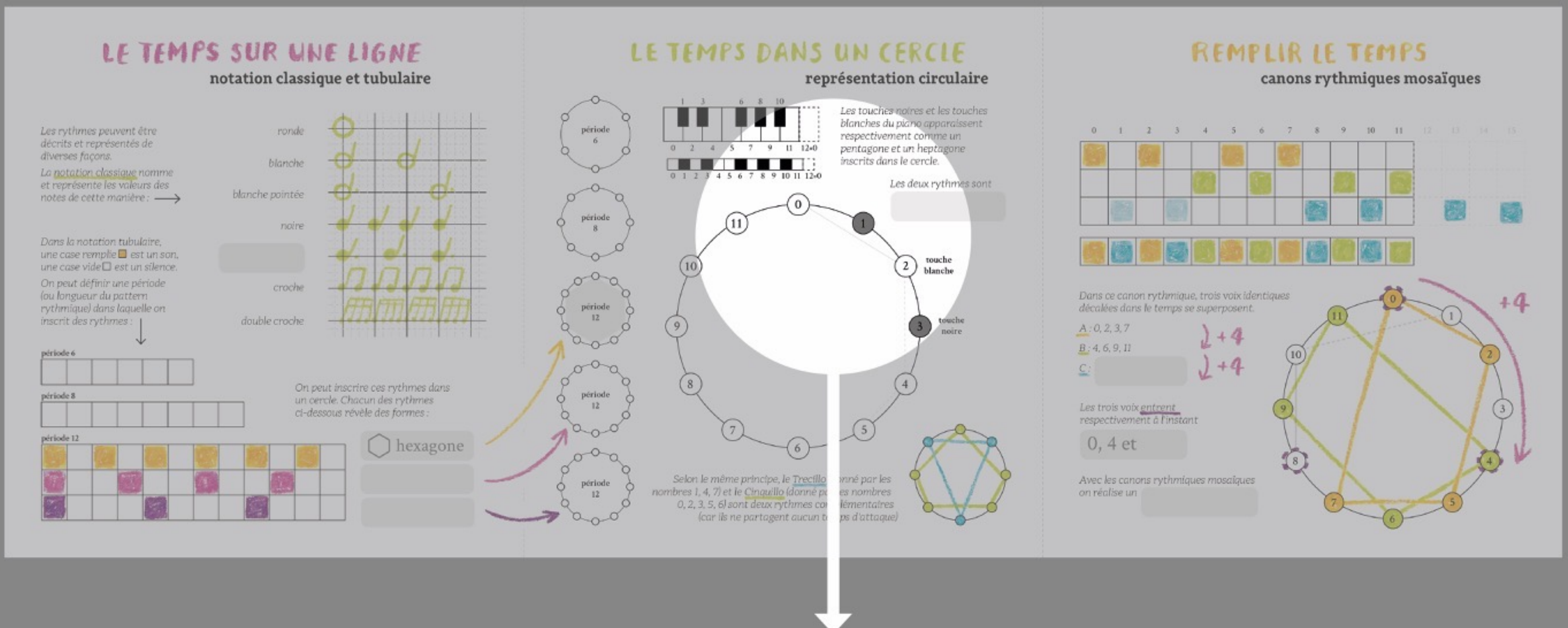


Dessinez dans les trois cercles les rythmes correspondants à la représentation tubulaire

La représentation circulaire du rythme

Flyer disponible à l’adresse :

http://repmus.ircam.fr/_media/moreno/depliant-rythme_impression.pdf

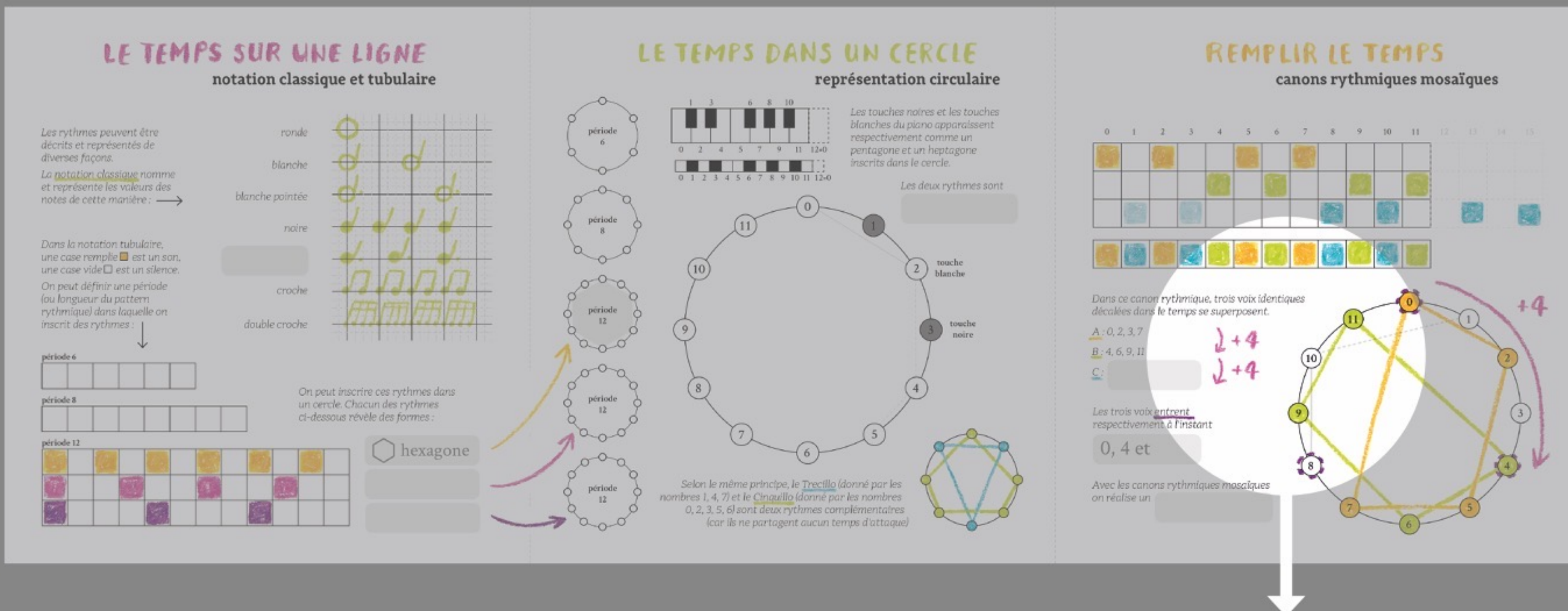


Comment appelle-t-on deux rythmes qui n’ont pas de points d’attaque en commun ?

Les pavages rythmiques ou l’art de remplir le temps

Flyer disponible à l’adresse :

http://repmus.ircam.fr/_media/moreno/depliant-rythme_impression.pdf



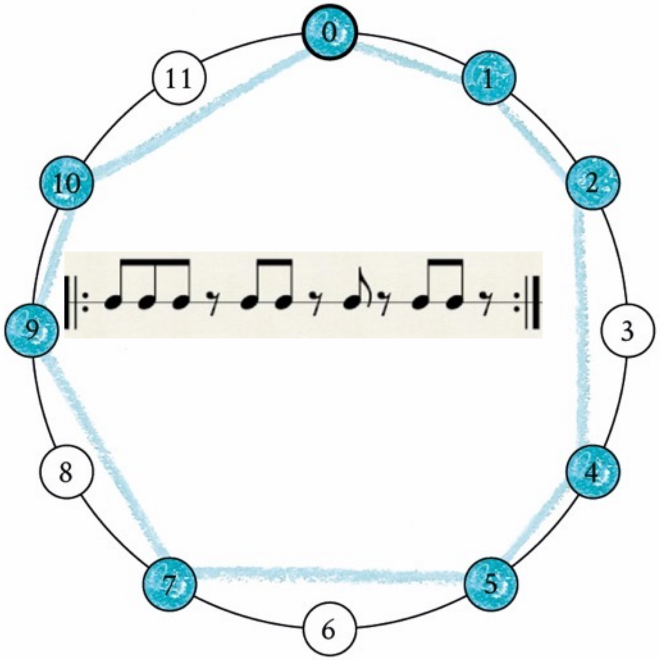
Calculer les valeurs du pattern en bleu

Mise en pratique : *Clapping Music* de Steve Reich

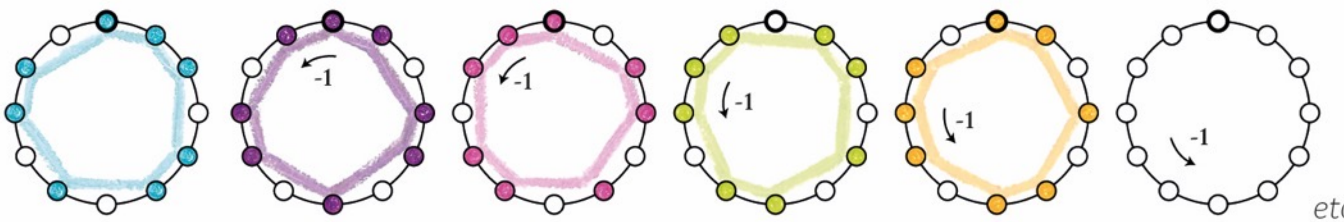
Flyer disponible à l'adresse :

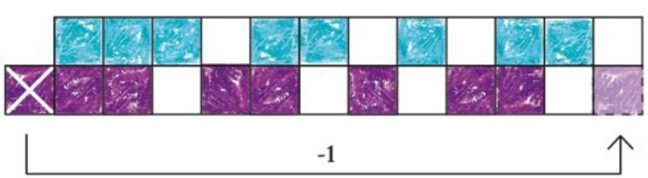
http://repmus.ircam.fr/_media/moreno/depliant-rythme_impression.pdf

Dessiner le sixième pattern rythmique, et ainsi de suite…

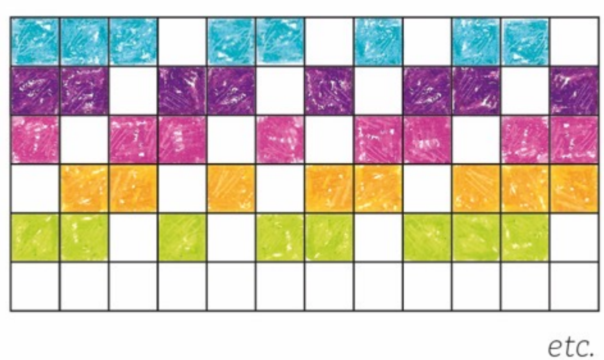


Conférence-concert au Lycée Schuman d'Haguenau (10 mars 2023)





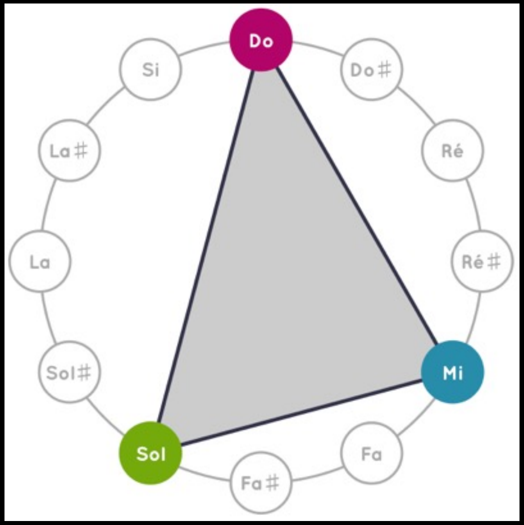
À vous de jouer. Bonne chance !

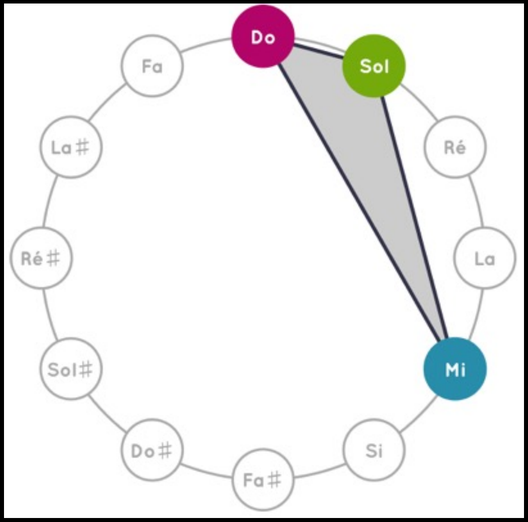


Le cadran d’horloge et les accords

DEMO

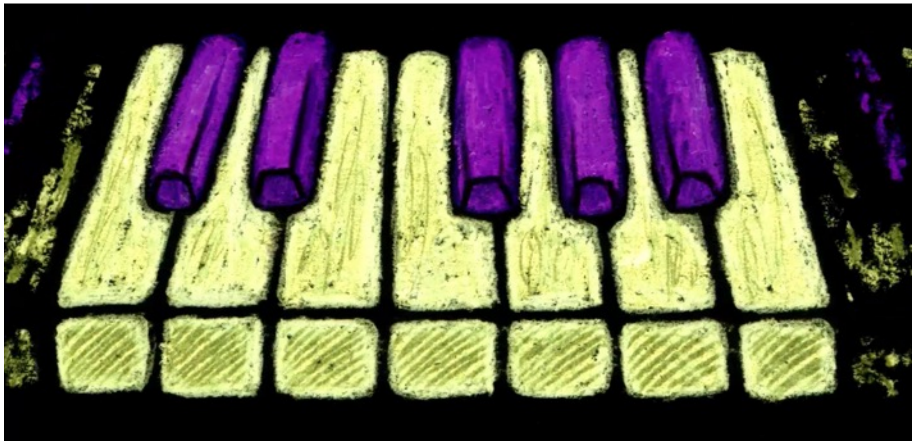
www.morenoandreatta.com/software/

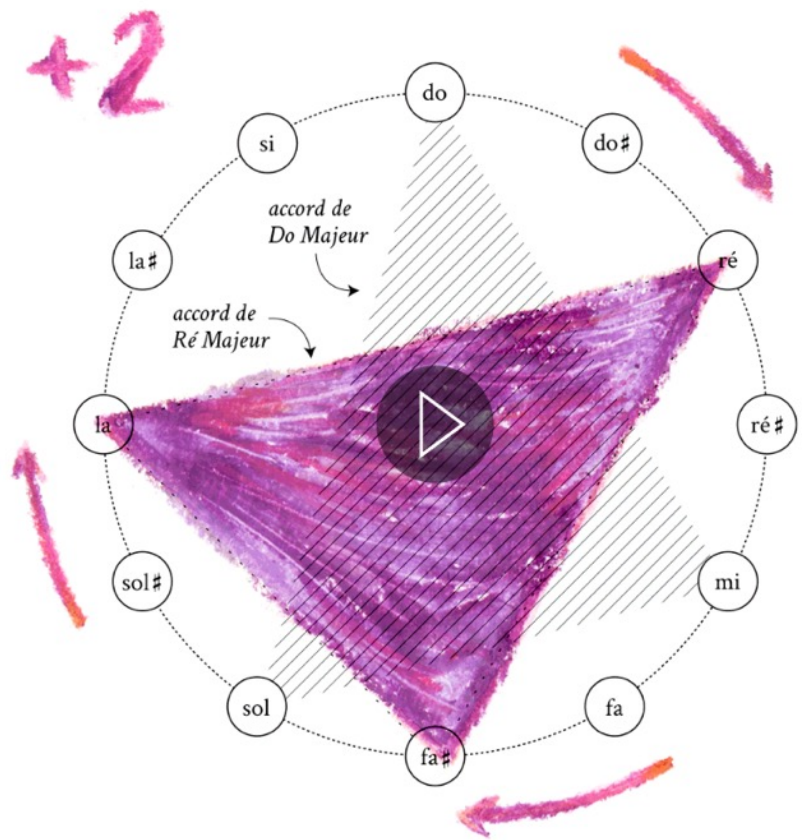




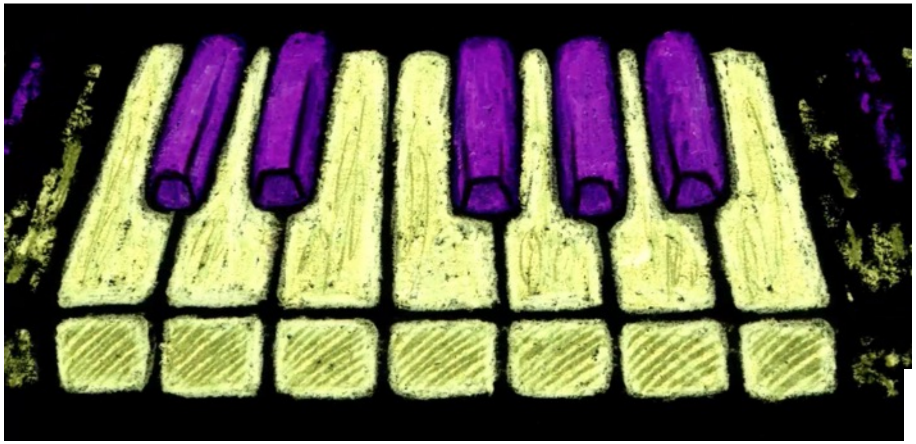
Comment transformer les accords dans le cercle ?

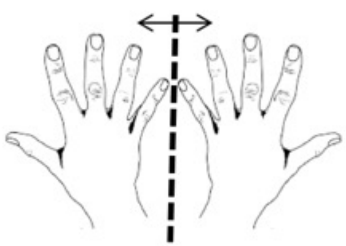
Les transpositions musicales sont des rotations

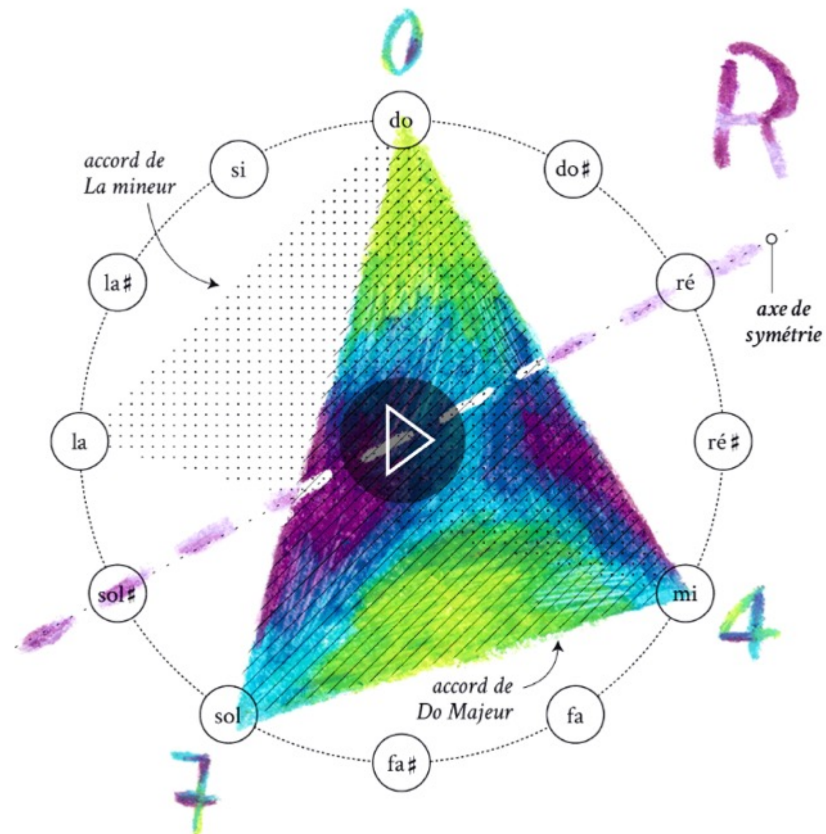




Quelle est la relation entre accords majeurs et mineurs ?



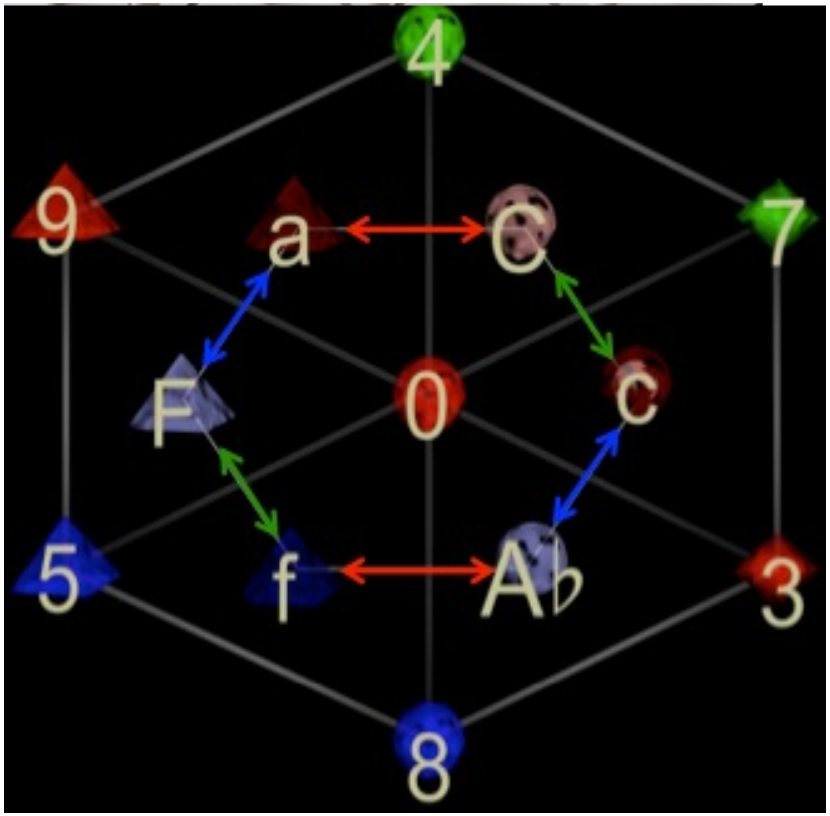


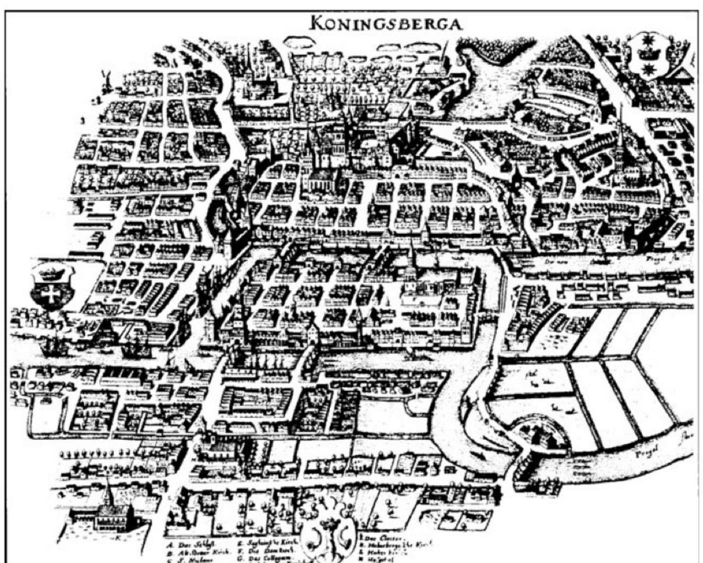


Comment visualiser les symétries dans le plan ?

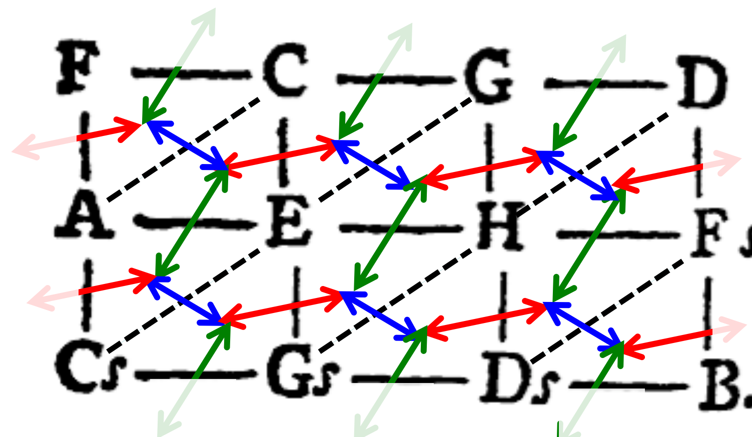
Euler, les ponts et les échecs

Le *Tonnetz* (ou nid musical d'abeilles)



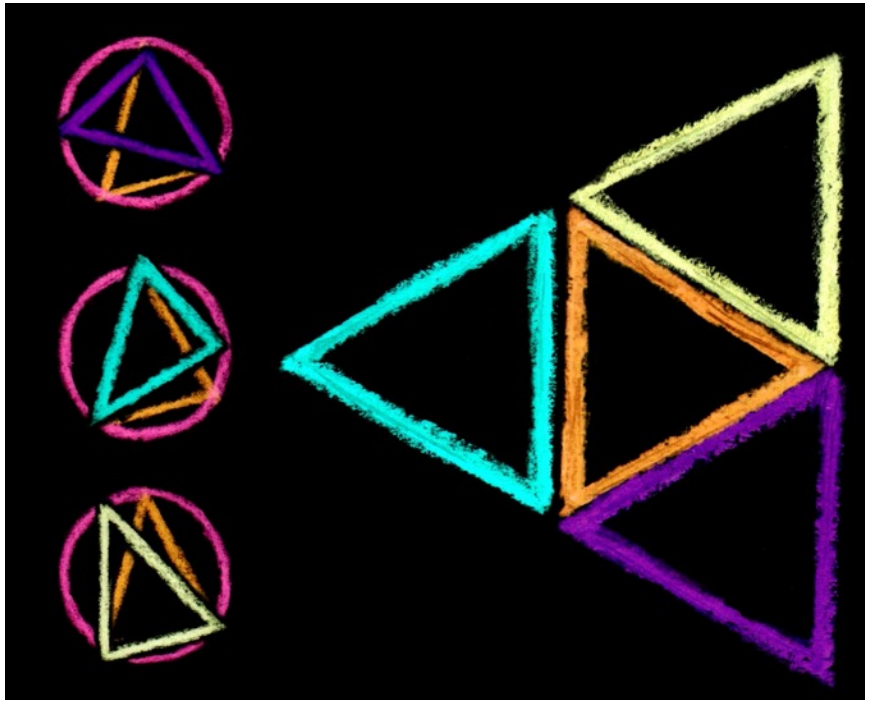


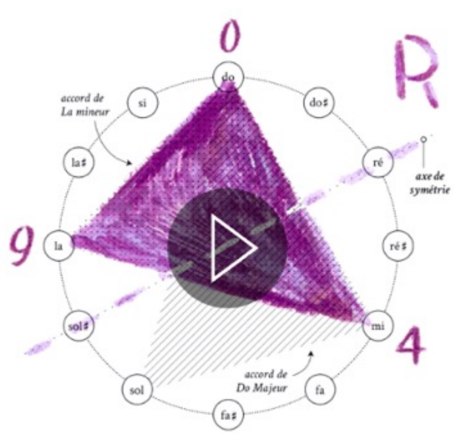
Leonhard Euler

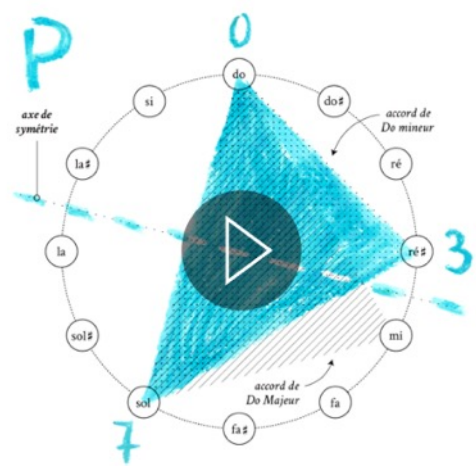


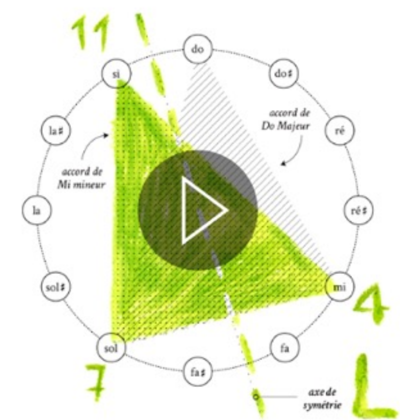
Speculum Musicum (1773)

Le système Tonnetz et ses symétries

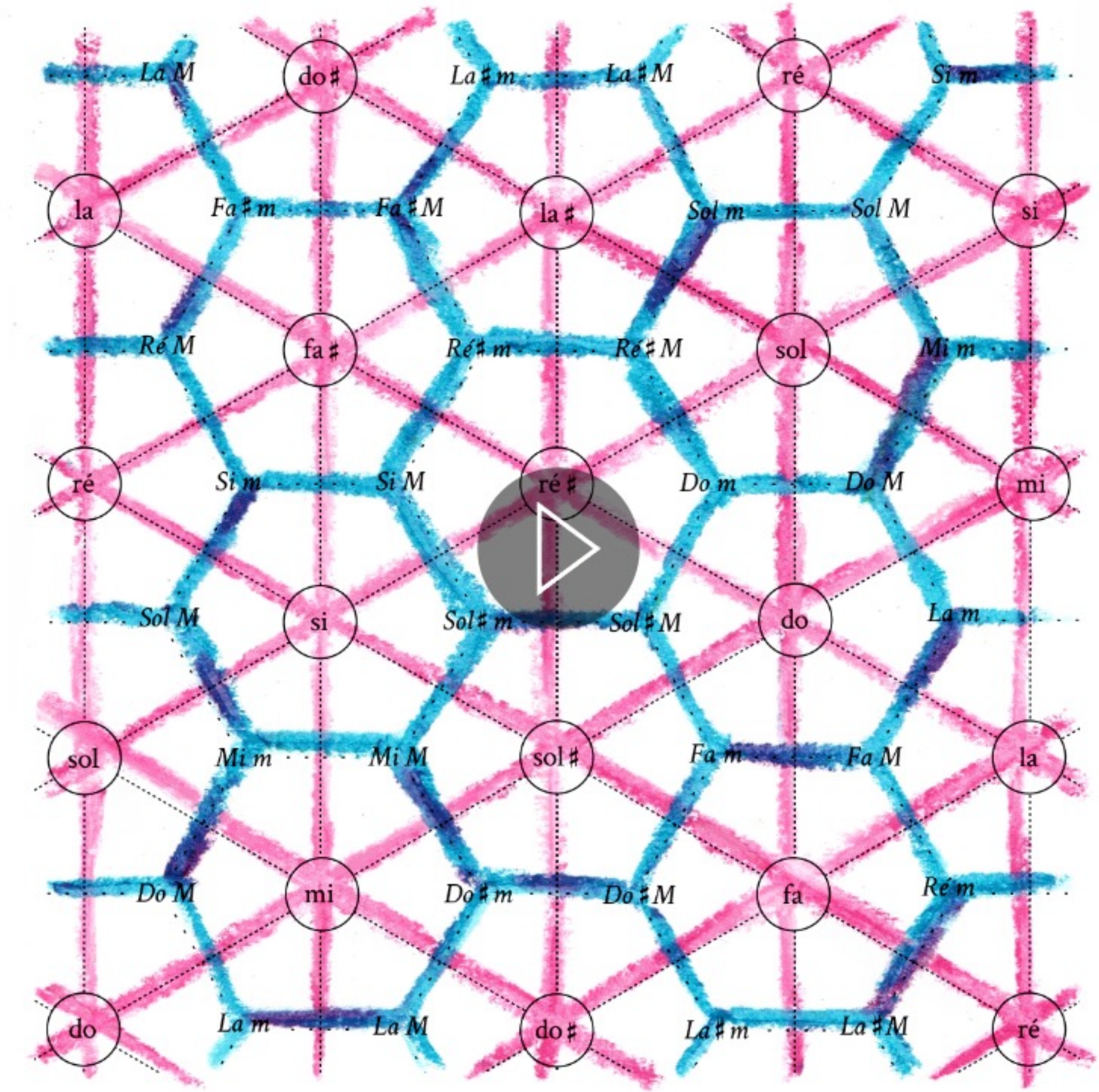


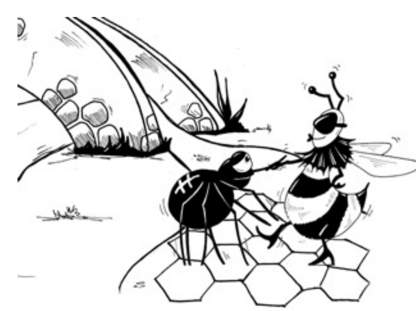






Les deux facettes du système Tonnetz

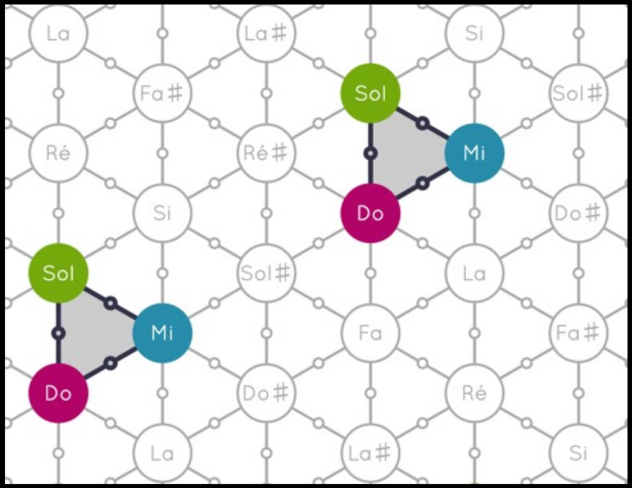


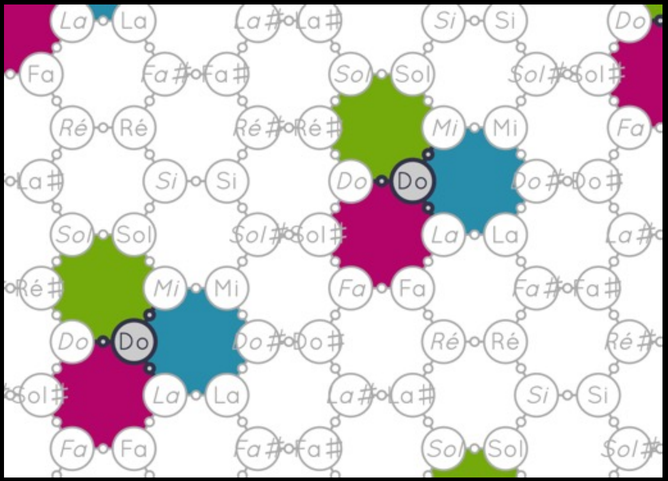


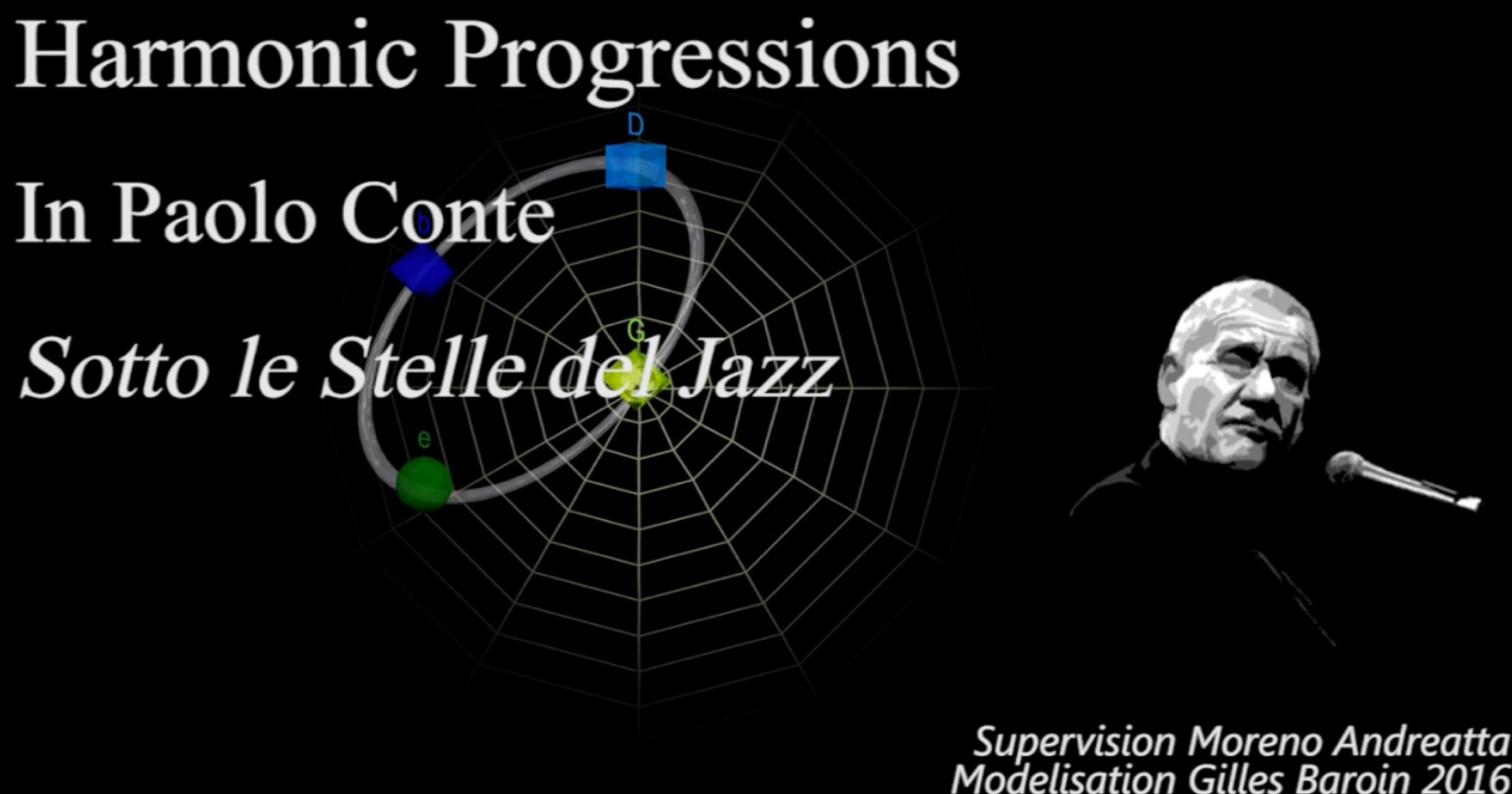
Le Tonnetz et son dual

DEMO

www.morenoandreatta.com/software/





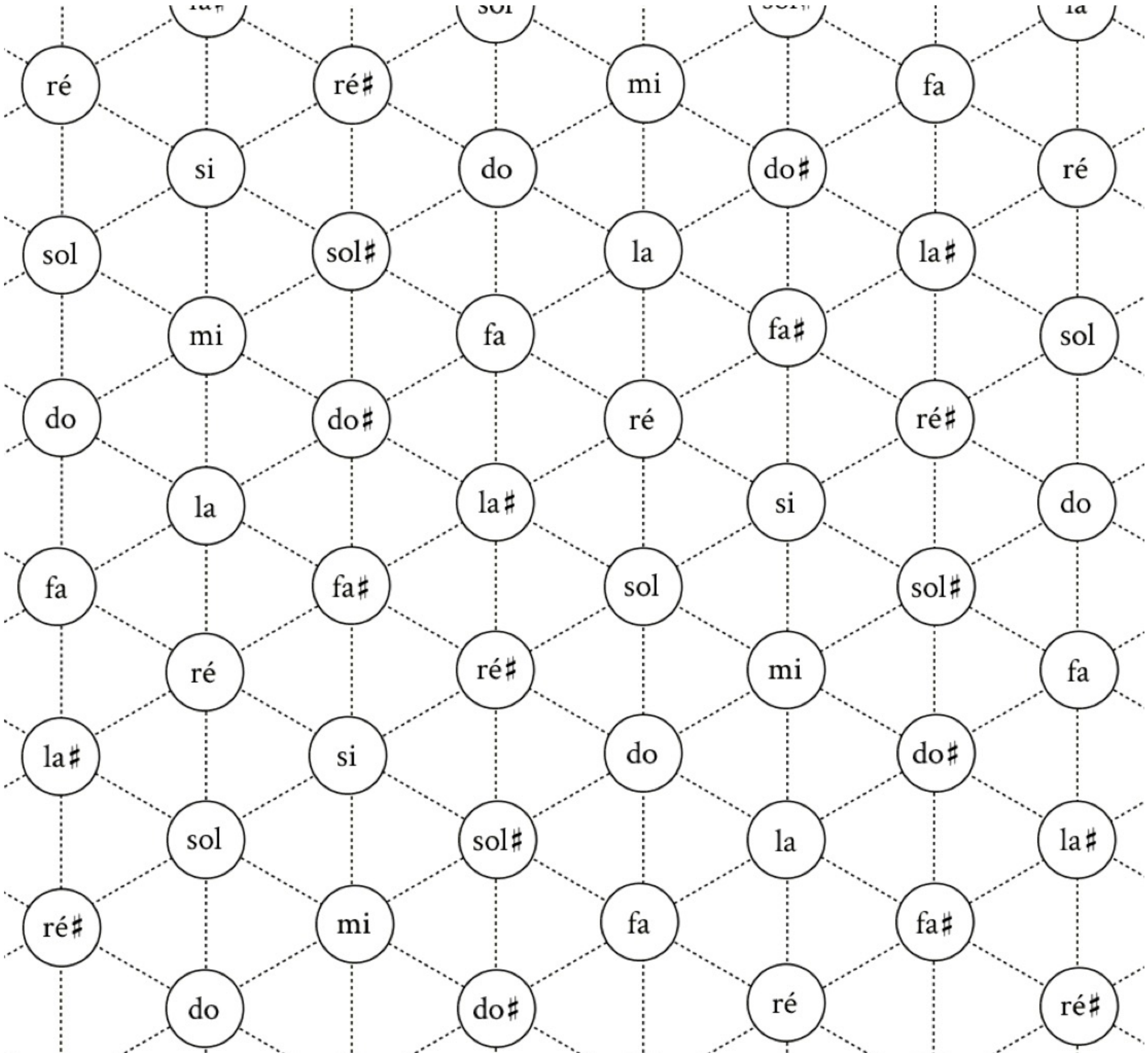


Vidéo disponible à l’adresse :

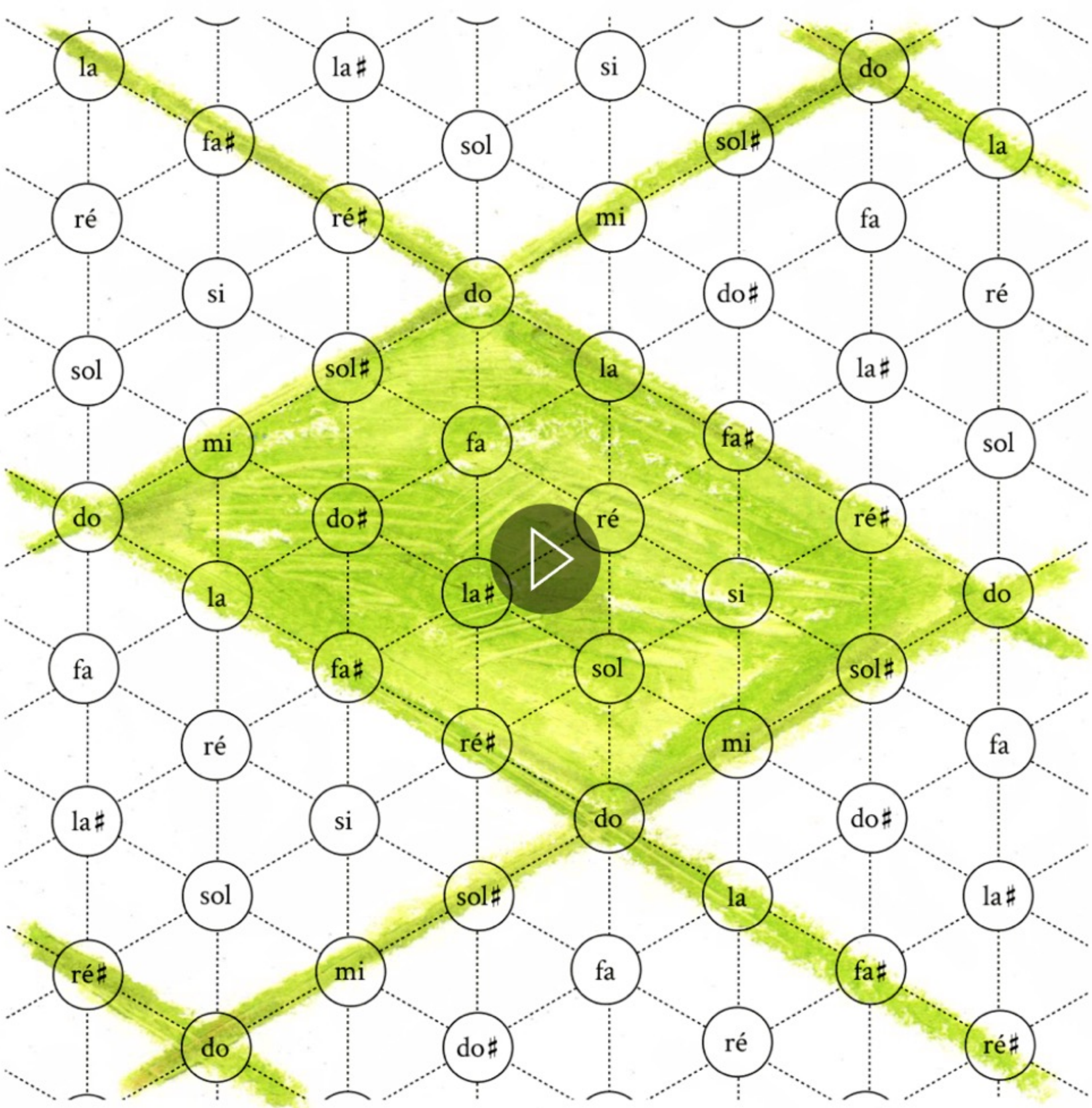
➔ https://www.youtube.com/watch?v=KzzUmiEQAzk&ab_channel=MatheMusic4D

Le Tonnetz dans l’espace

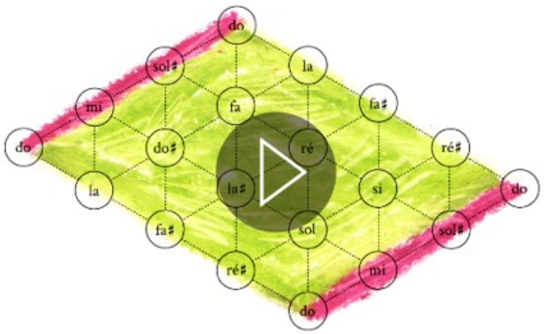
Quelle est la forme géométrique du Tonnetz ?

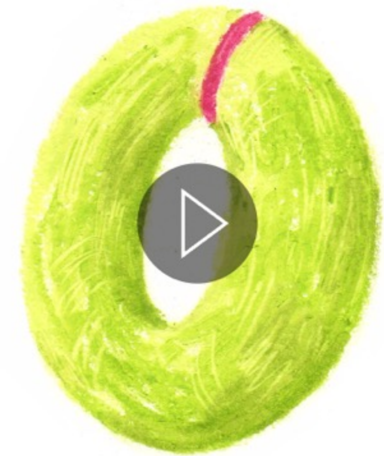


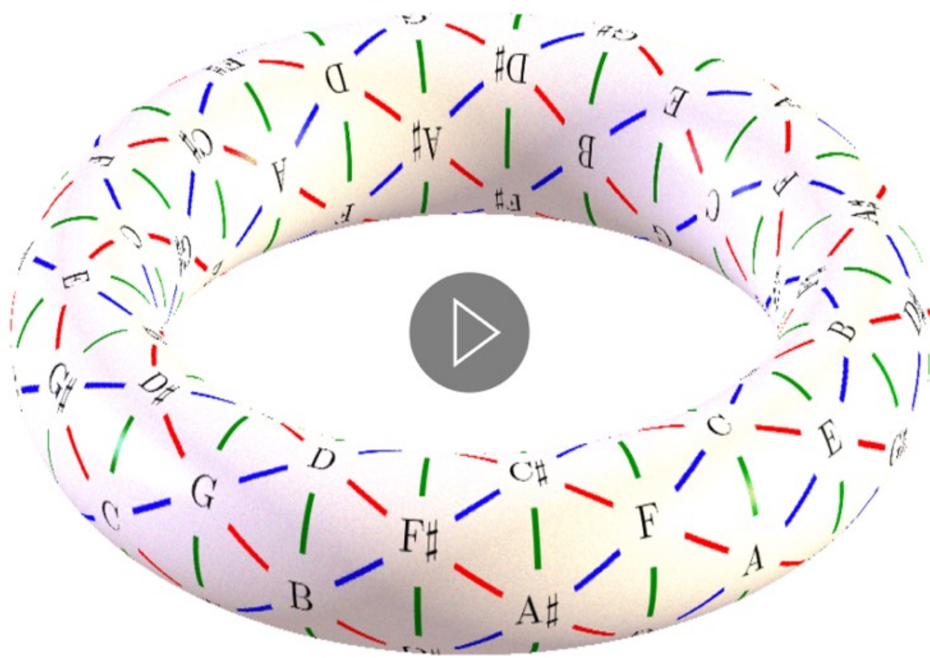
Quelle est la forme géométrique du Tonnetz ?

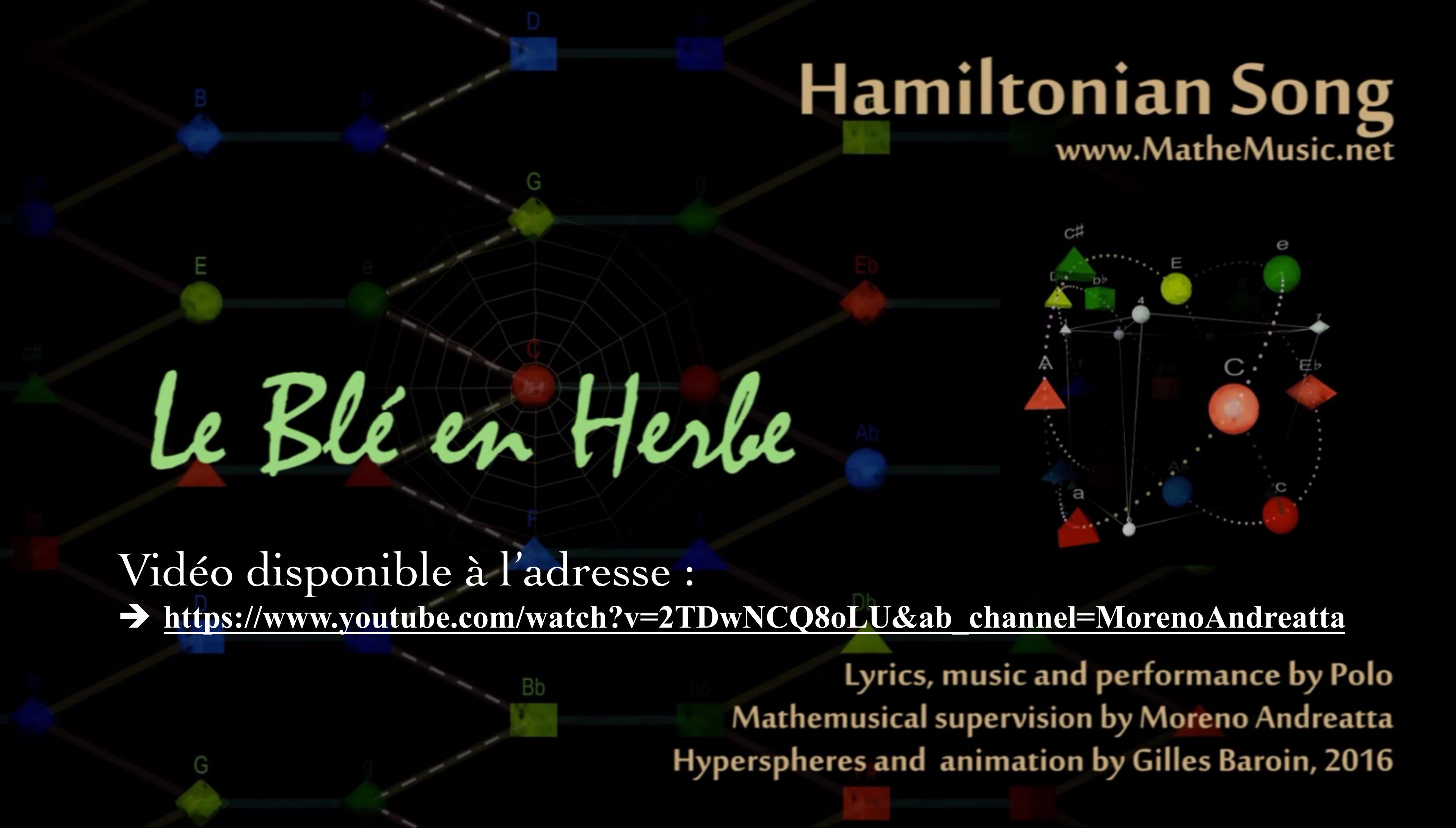


Quelle est la forme géométrique du Tonnetz ?



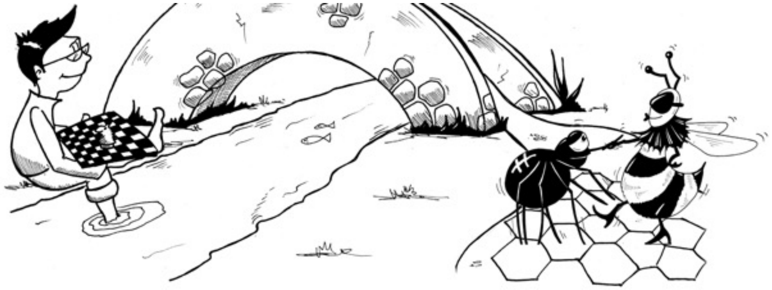






Vidéo disponible à l'adresse :

➔ https://www.youtube.com/watch?v=2TDwNCQ8oLU&ab_channel=MorenoAndreatta



Polo Lamy

Gilles Baroin


Math'n Pop
Conférence Concert
www.mathnpop.com/
Merci et…
… à bientôt avec la conférence-concert Math'n Pop !