Master I.C.A.

Master I.C.A.

Spécialité A.S.T.

Art
Sciences
Technologies

Traitement interactif de l'image et du son

Méthodes mathématiques et informatiques pour la création musicale :

aspects théoriques et ramifications cognitives

Carlos Agon, Moreno Andreatta et Jean Bresson

Equipe Représentations Musicales

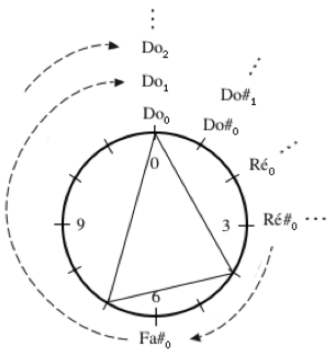
ircam Centre Pompidou

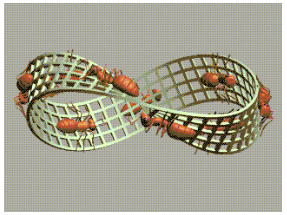
IRCAM/CNRS UMR 9912

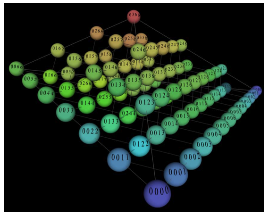
cnrs

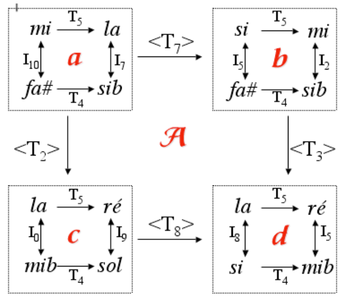
Plan du cours (2/2, 3/2)

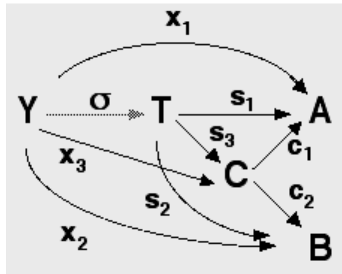
1.) Informatique musicale et langages de programmation pour la musique (C. Agon)
2.) Composition assistée par ordinateur et modèles de synthèse (J. Bresson)
3.) Modèles algébriques en musique. Pavages en composition : la construction des canons rythmiques mosaïques (M. Andreatta)

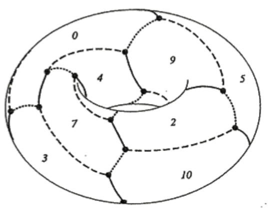


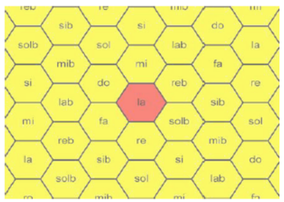


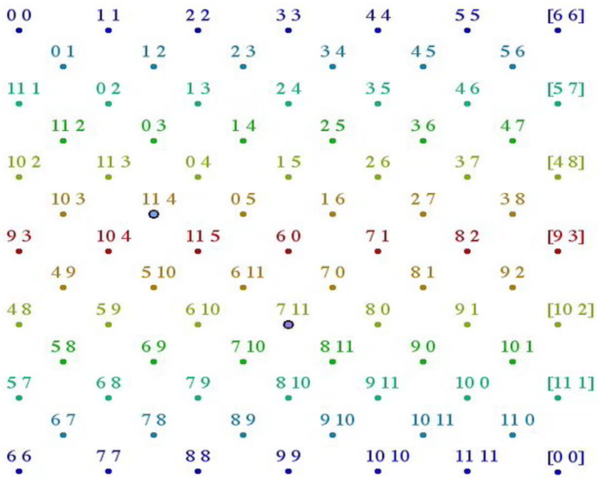


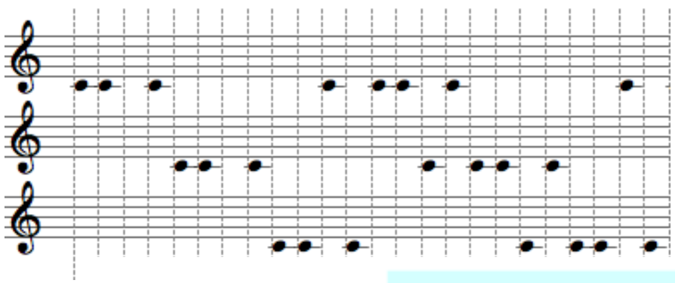


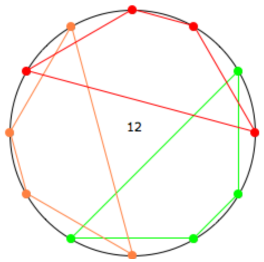












$$Df(x)=f(x)-f(x-1).$$

f = 7 11 10 11 7 2 7 11 10 11 7 2 7 11...

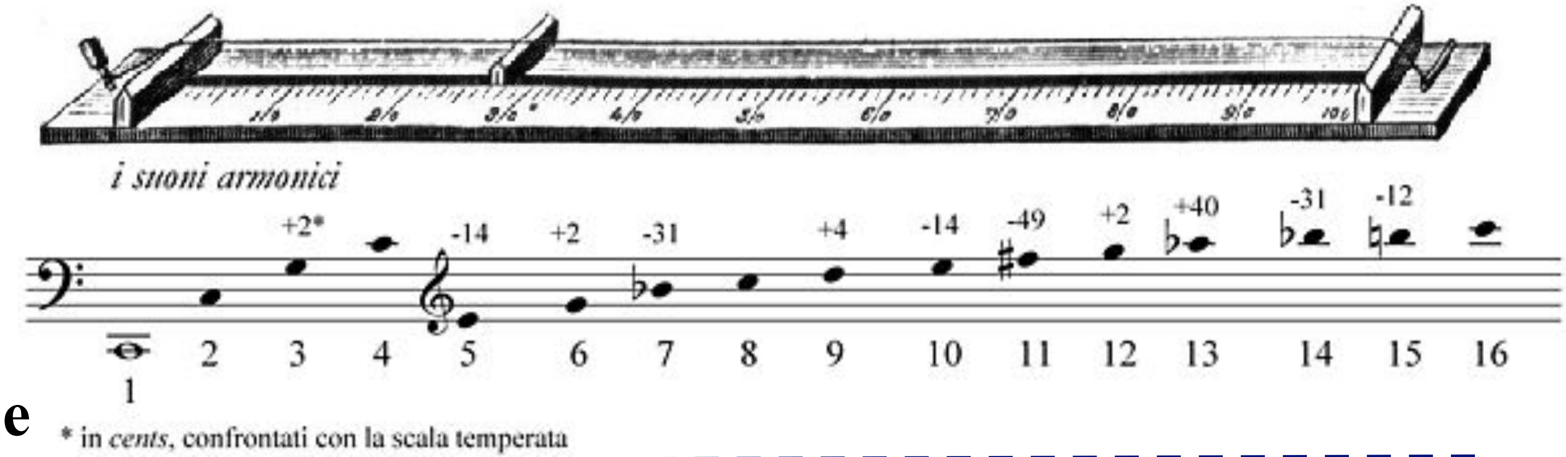
Df = 4 11 1 8 7 5 4 11 1 8 7 5 4 11...

$D^2 f$ = 7 2 7 11 10 11 7 2 7 11 10 11...

$D^3 f$ = 7 5 4 11 1 8 7 5 4 11 1 8...

$D^k f$ = ...

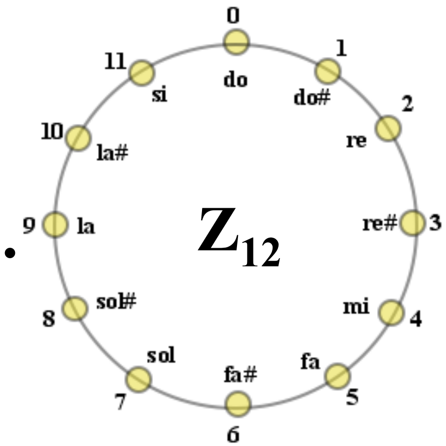
De Pythagore… à la théorie des groupes

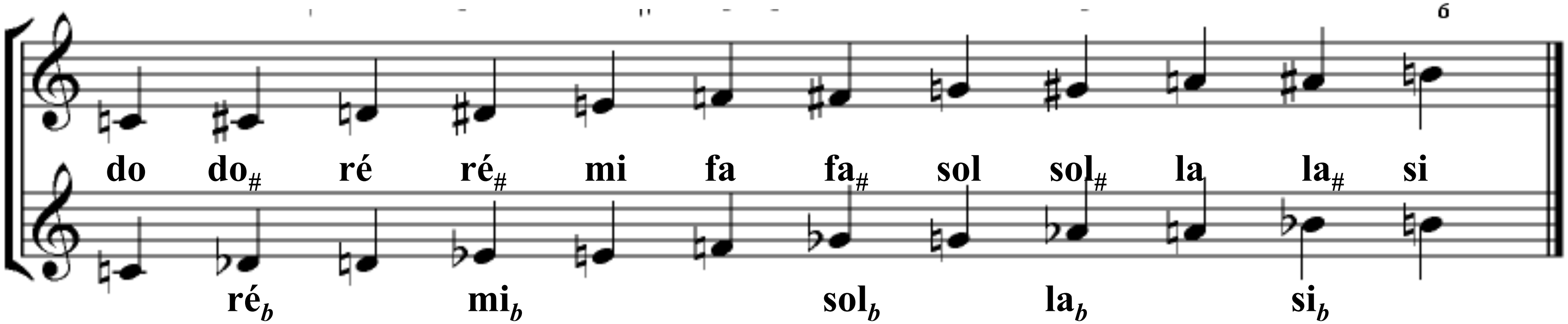


Physique

Mathématiques

…  …

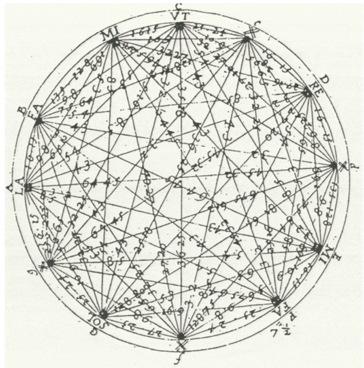




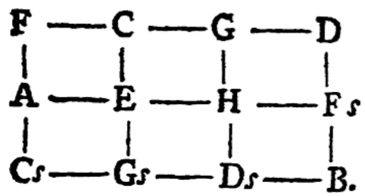
Un court survol historique

MUSIQUE	MATHS
500 av. J. C. Relation hauteur/longueur corde. La musique est source d'inspiration pour la théorie des nombres et la géométrie.	Nombres naturels et rationnels
300 a.J. Invention (théorique) de la gamme chromatique tempérée égale par Atistoxène de Tarente) et **prémonition de la théorie des groupes**. Isomorphismes entre les logarithmes (intervalles musicaux) et les exponentiels (longueur d'une corde)	*Aucune relation.*
1000 Invention de la représentation bidimensionnelle des hauteurs	*Aucune correspondance*
1500 *Aucune reprise des concepts précédents*	Nombres négatifs. Construction des rationnels
1600 *Aucune relation*	Nombres réels et les logarithmes
Marin Mersenne (1588-1648) : combinatoire musicale	Calcul des probabilités
1700 La fugue comme un automate abstrait. Manipulation inconsciente du groupe de Klein	Nombres complexes (Euler, Gauss), les quaternions (Hamilton), continuité (Cauchy), structure de groupe (Galois, Abel)
Leonhard Euler : *Speculum Musicum* (1773)	Théorie des graphes
1900 Libération de la prison de la tonalité (Loquin, Hauer, Schoenberg)	Nombres infinis et transfinis (Cantor). Axiomatique de Peano. Théorie de la mesure (Lebesgue, Borel)
1920 Formalisation radicale des macrostructures à travers le système sériel (Schoenberg)	*Aucun développement de la théorie des nombres.*
Ernst Krenek (1900-1991) : les axiomes dans le système dodécaphonique	*David Hilbert, Les fondements de la géométrie (1899)*

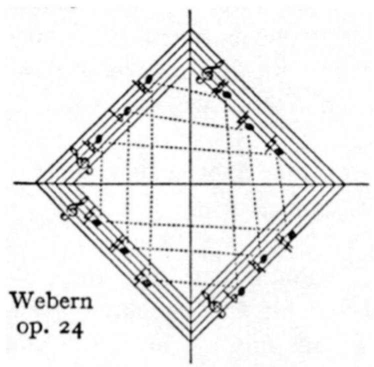
Iannis Xenakis, *Musique. Architecture*, Tournai, Casterman, 1971, 176 p. (New, revised edition: Tournai, Casterman, 1976, 238 p.)

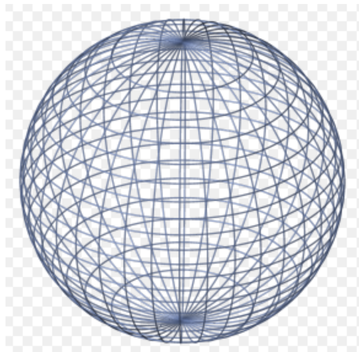


Mersenne, Harmonicorum Libri XII, 1648



Euler : *Speculum musicum*, 1773

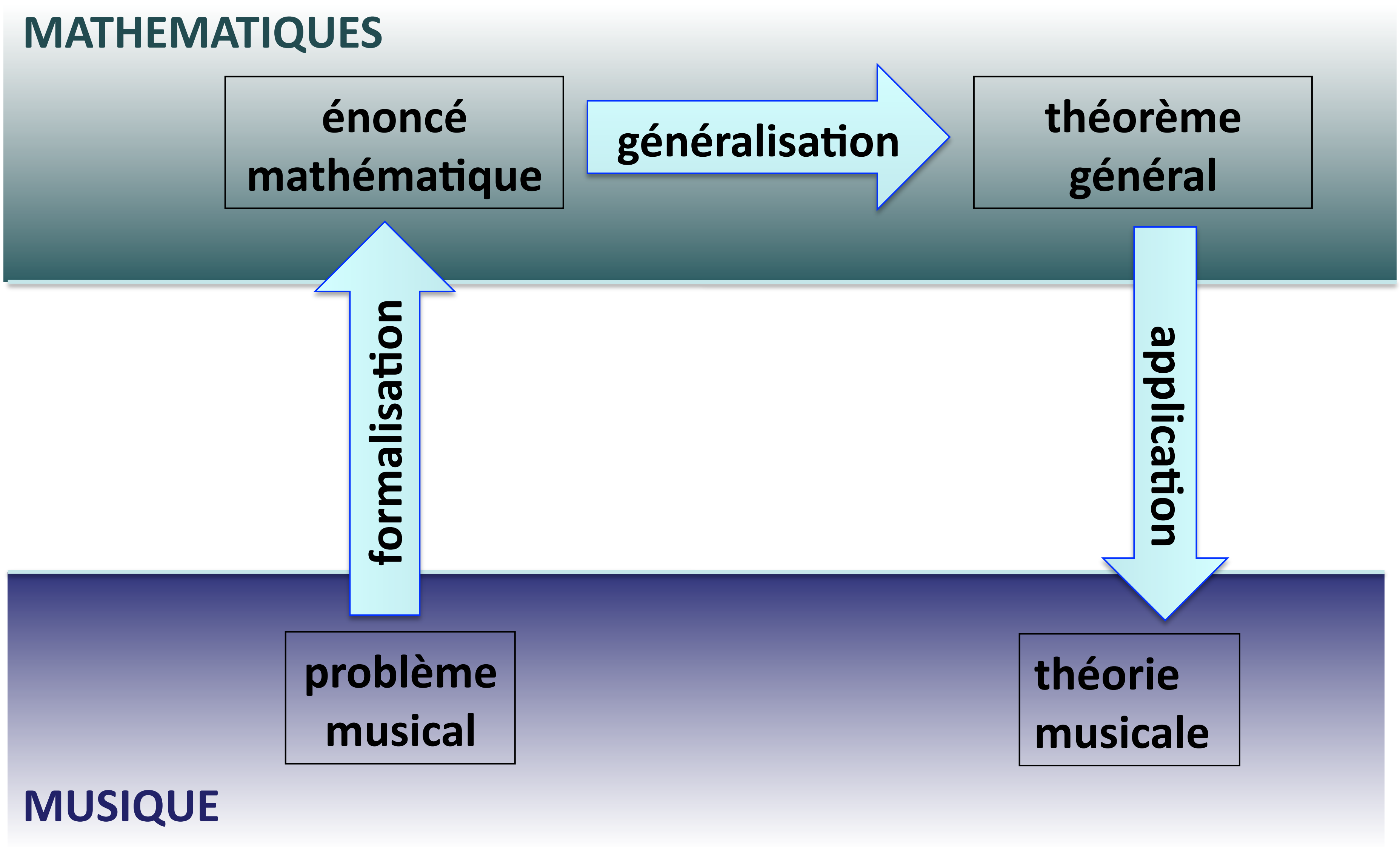




Mathématiques/Musique…une histoire récente!

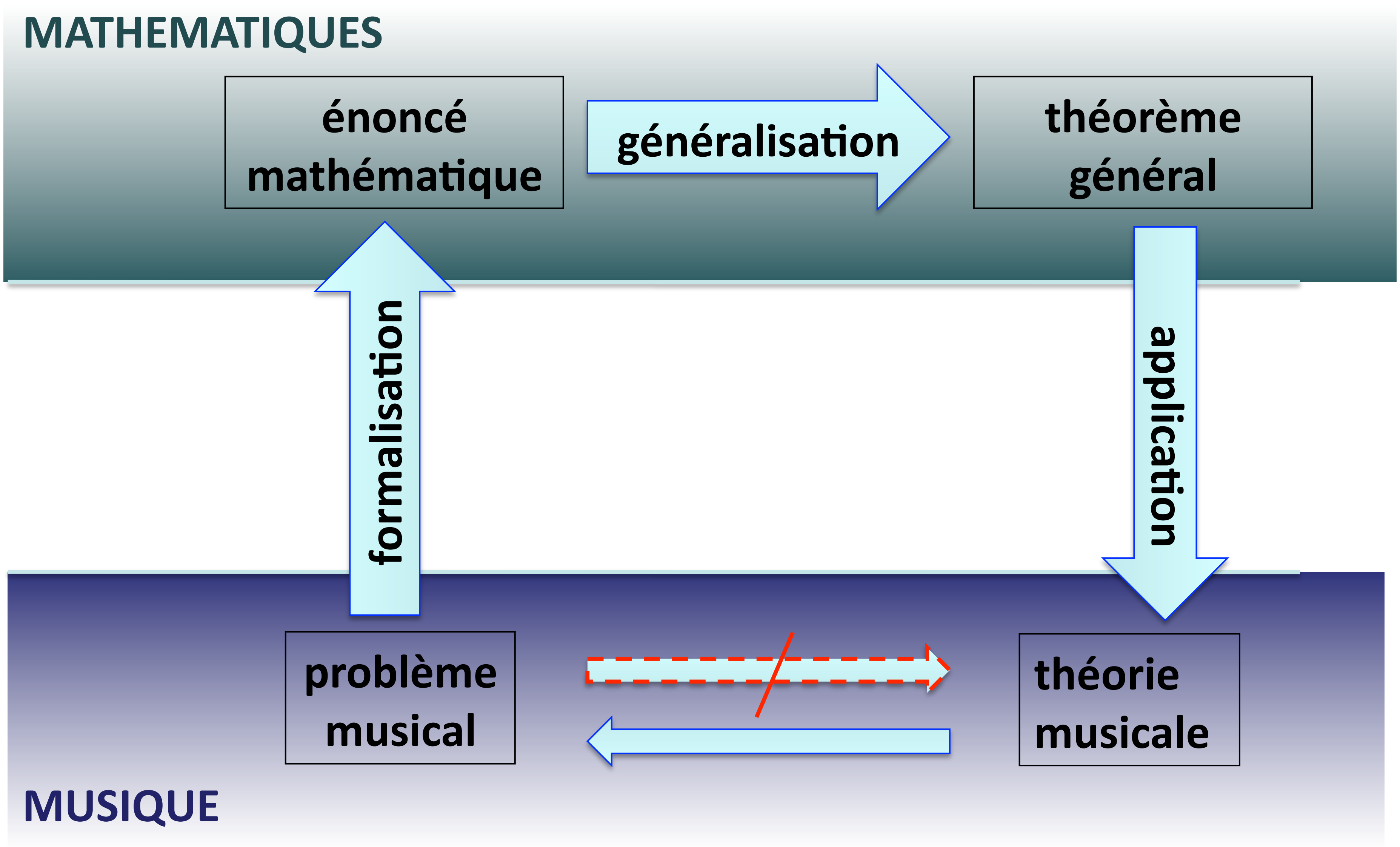
- **1999 : 4e Forum Diderot (Paris, Vienne, Lisbonne), *Mathematics and Music* (G. Assayag, H.G. Feichtinger, J.F. Rodrigues, Springer, 2001)**
- **2000-2001 : Séminaire *MaMuPhi, Penser la musique avec les mathématiques ?* (Assayag, Mazzola, Nicolas éds., Coll. « M/S », Ircam/Delatour, 2006)**
- **2000-2003 : International Seminar on *MaMuTh* (*Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory* (Mazzola, Noll, Luis-Puebla eds, epOs, 2004)**
- **2003 : *The Topos of Music* (G. Mazzola et al.)**
- **2003: *Music and Mathematics. From Pythagoras to Fractals* (J. Fauvel et al.)**
- **2001 - 2011 : Séminaire *MaMuX* de l'Ircam**
- **2004 - 2011 : Séminaire *mamuphi* (Ens/Ircam)**
- **2006 : *Mathematical Theory of Music* (F. Jedrzejewski), Coll. « M/S »**
- **2007 : *La vérité du beau dans la musique* (G Mazzola), Coll. « Musique/Sciences »**
- **2007 : Journal of Mathematics and Music (Taylor & Francis) et MCM 2007**
- **2007: *Music. A Mathematical Offering* (Dave Benson), CUP**
- **2008: *Music Theory and Mathematics* (Jack Douthett et al.), URP**
- **2009 : *Computational Music Science Series* (Springer)**
- **2009 : MCM 2009 (Yale) et Proceedings chez Springer**
- **2010 : Mathematics Subject Classification : 00A65 Mathematics and music**
- **2011 : Conférence de la SMCM (Ircam, 15-17 juin 2011)**

Double mouvement d’une dynamique mathémusicale

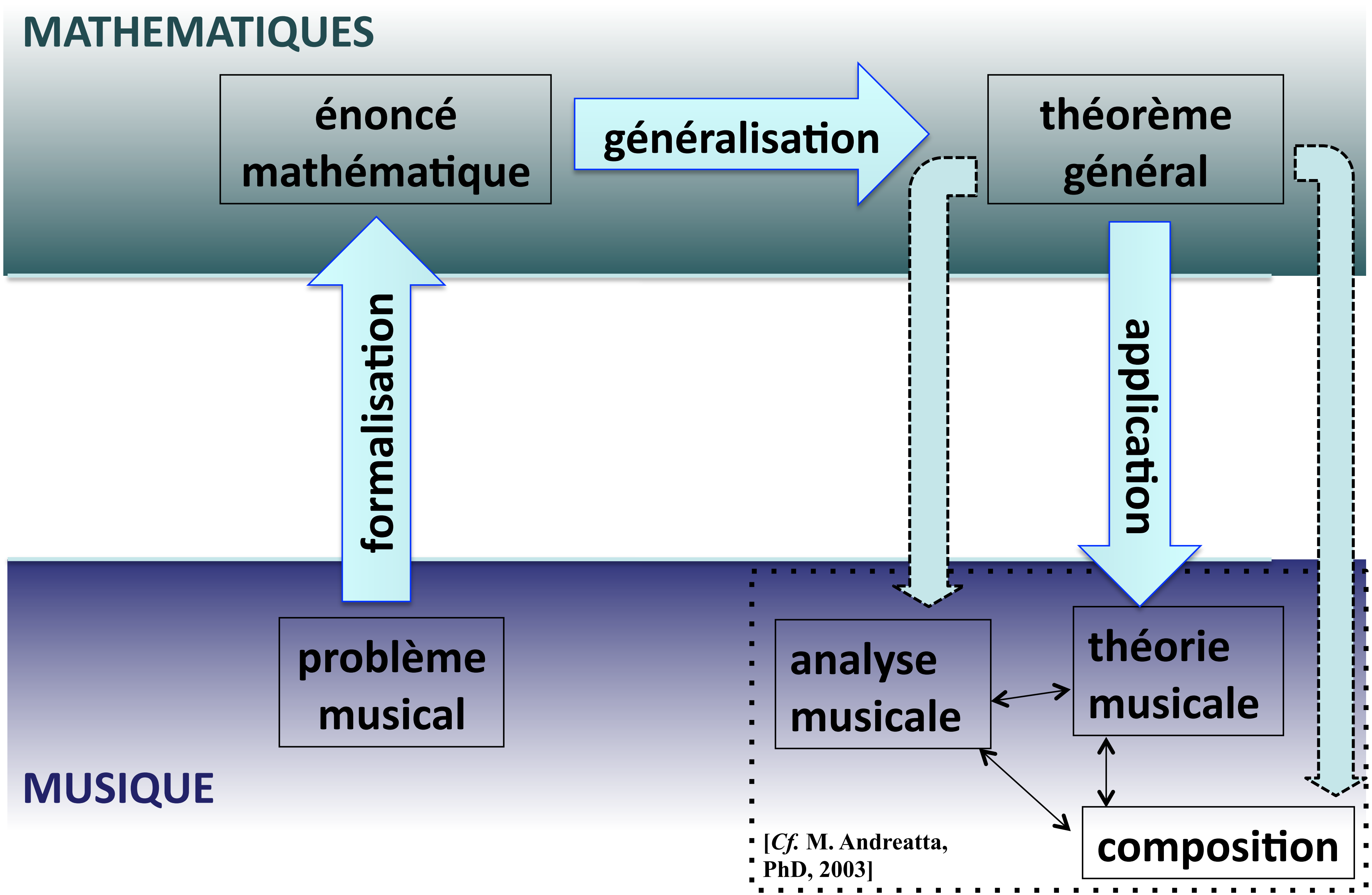


[*Cf.* M. Andreatta : *Mathematica est exercitium musicae*, HDR, octobre 2010]

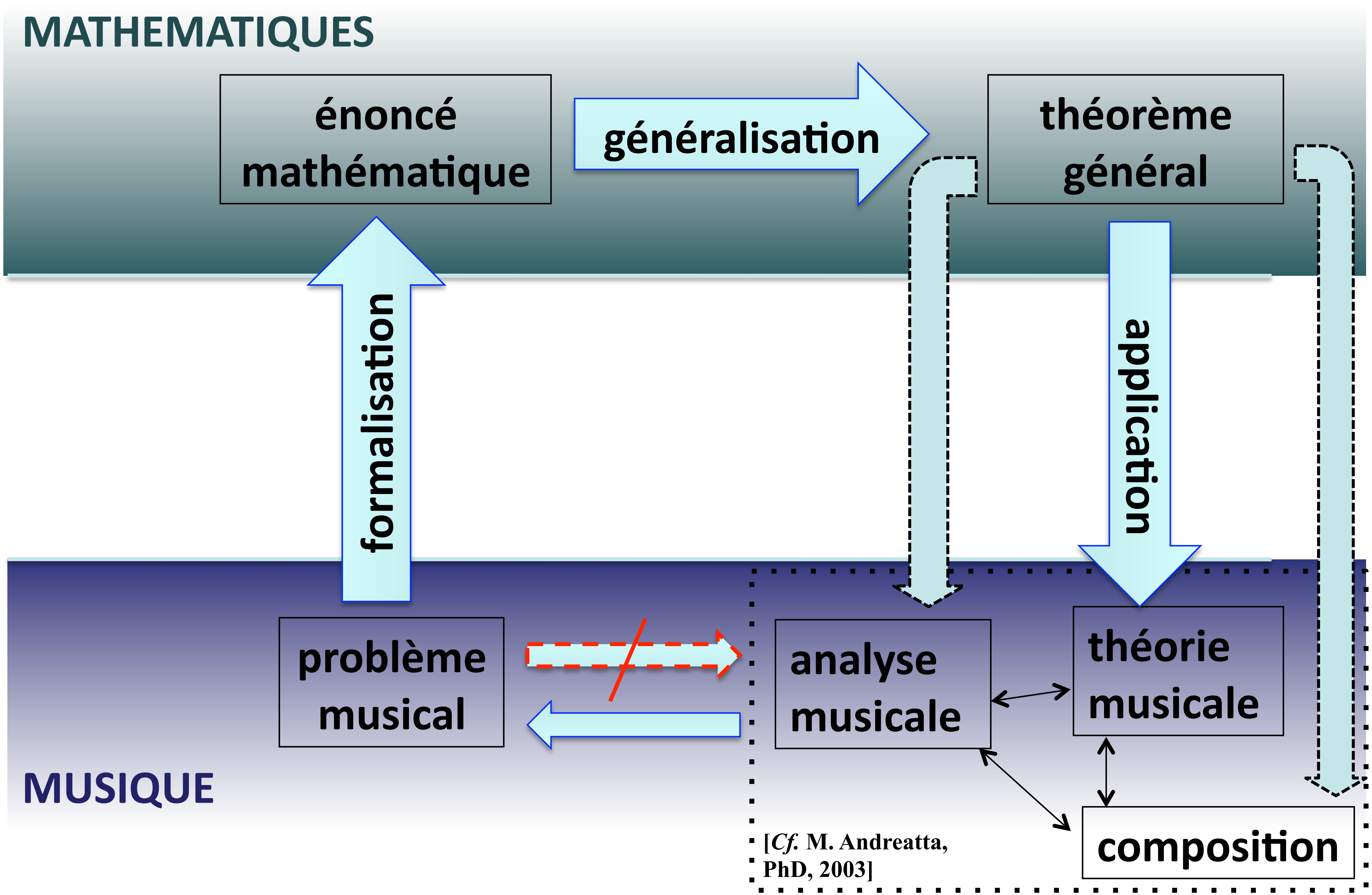
Double mouvement d’une dynamique mathémusicale



Double mouvement d'une dynamique mathémusicale



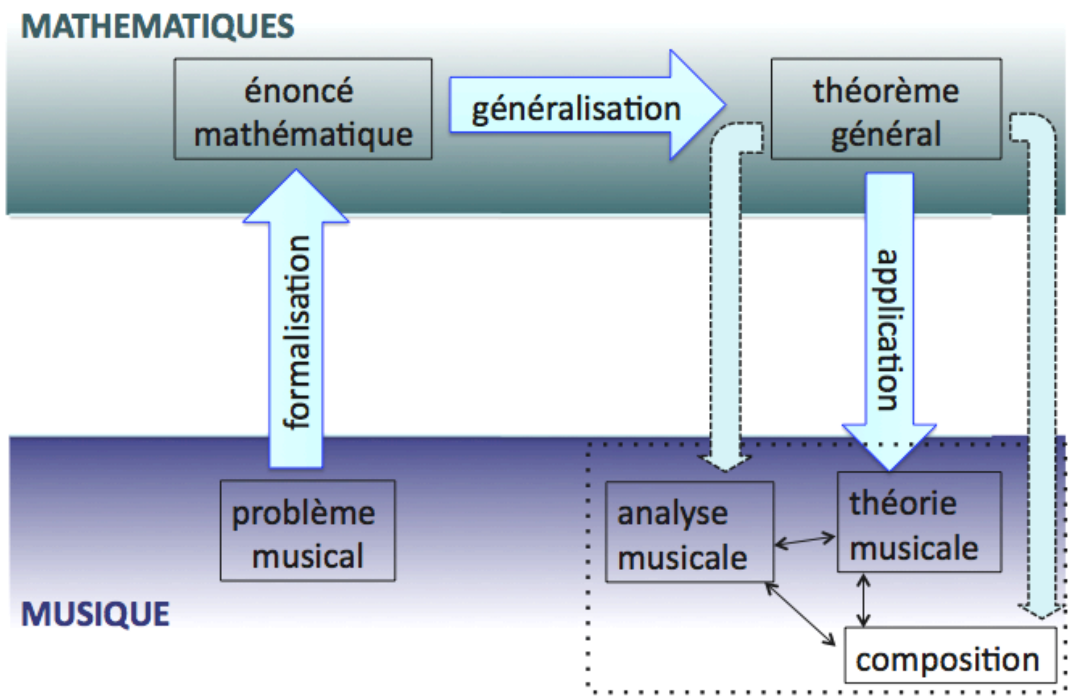
Double mouvement d'une dynamique mathémusicale



Un survol sur six problèmes mathémusicaux

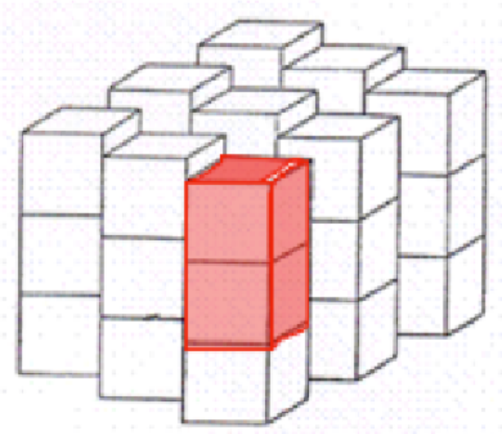
[*Cf.* M. Andreatta : *Mathematica est exercitium musicae*, HDR, octobre 2010]

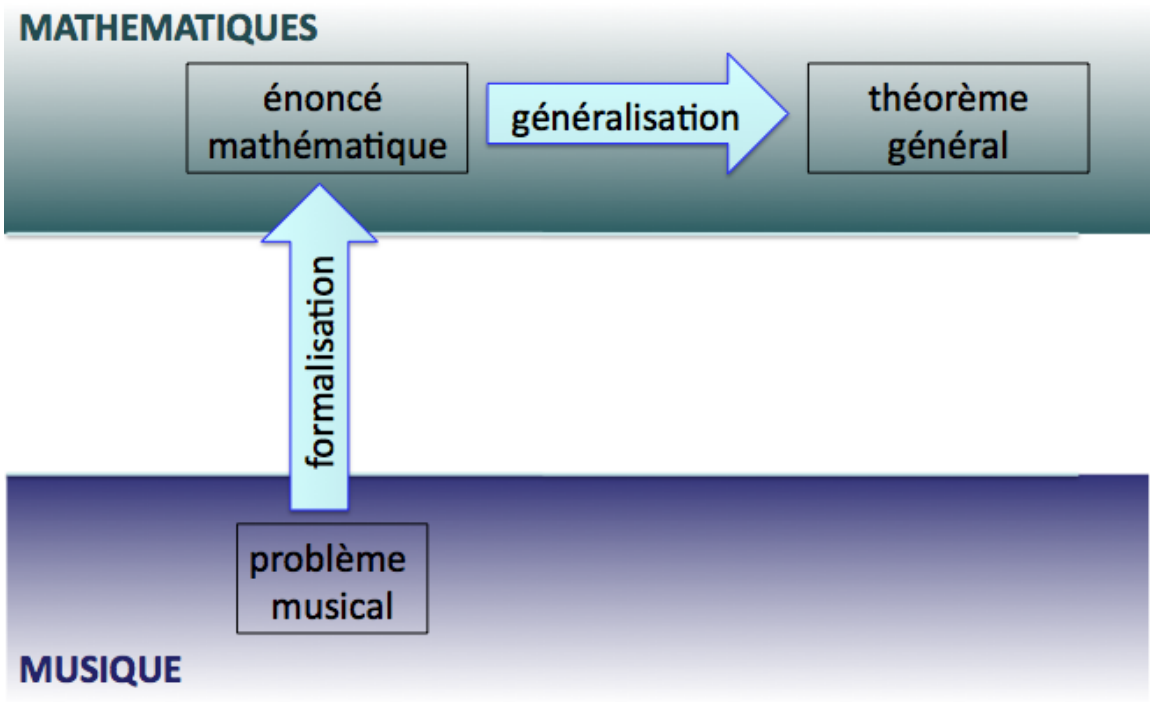
1. La construction des canons rythmiques mosaïques
2. Suites périodiques et calcul de différences finies
3. La *Set Theory* et la théorie transformationnelle
4. Les théories diatoniques et les *ME-sets*
5. La théorie des block-designs en composition algorithmique
6. La relation *Z* et la théorie des ensembles homométriques



1. La construction des canons rythmiques mosaïques


• Conjecture de Minkowski
• Solution de Hajos

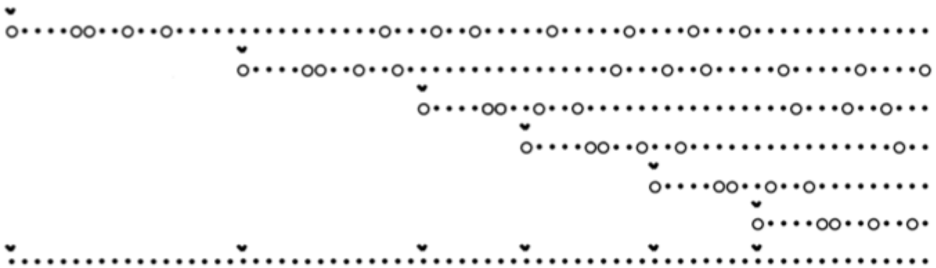




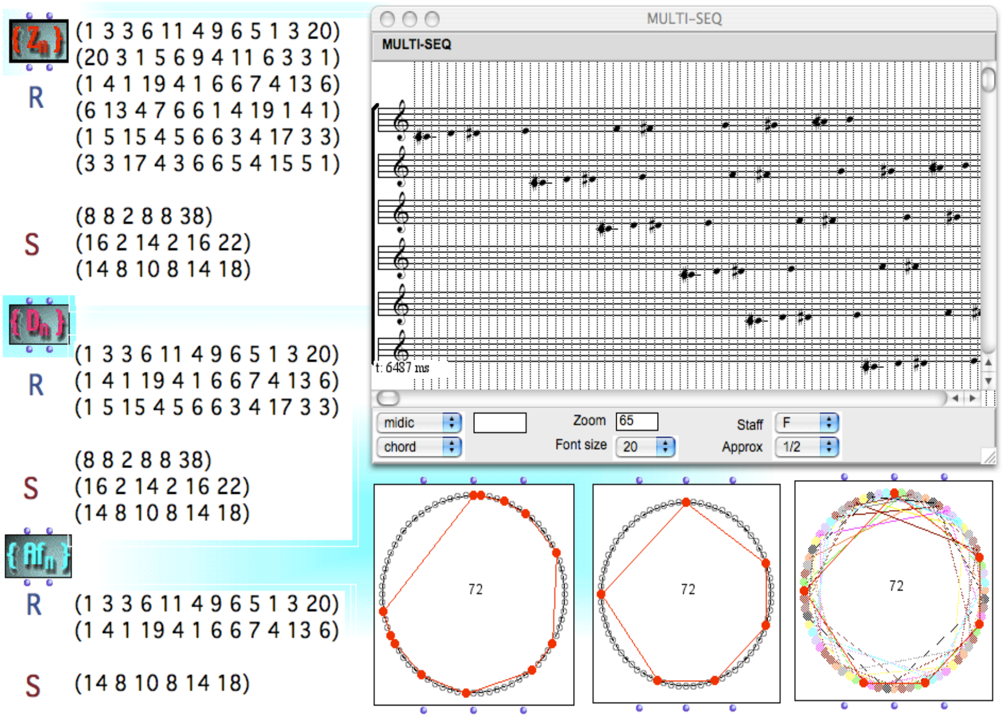
temps

1996

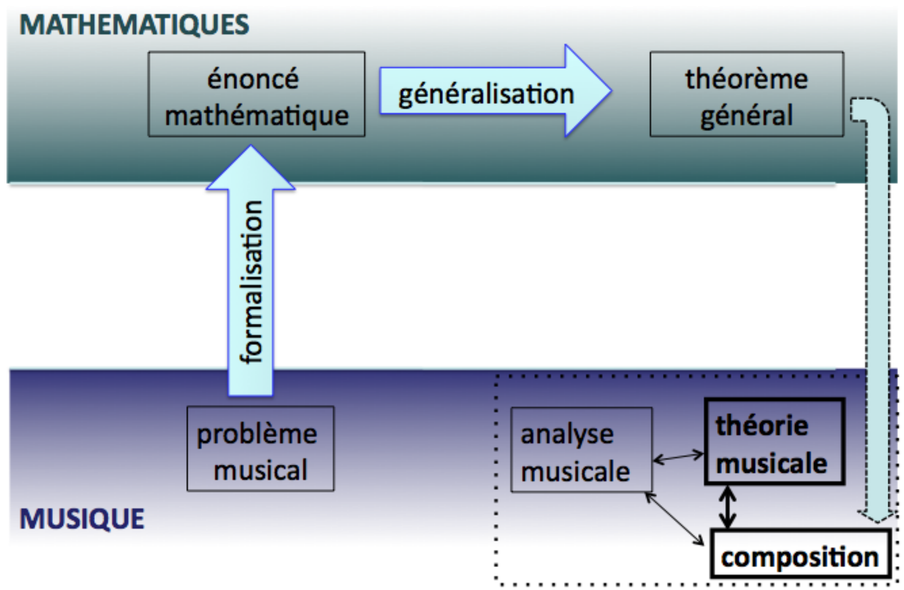
Perspectives of New Music



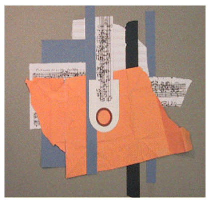
1. La construction des canons rythmiques mosaïques



- Modèle computationnel
- Applications compositionnelles

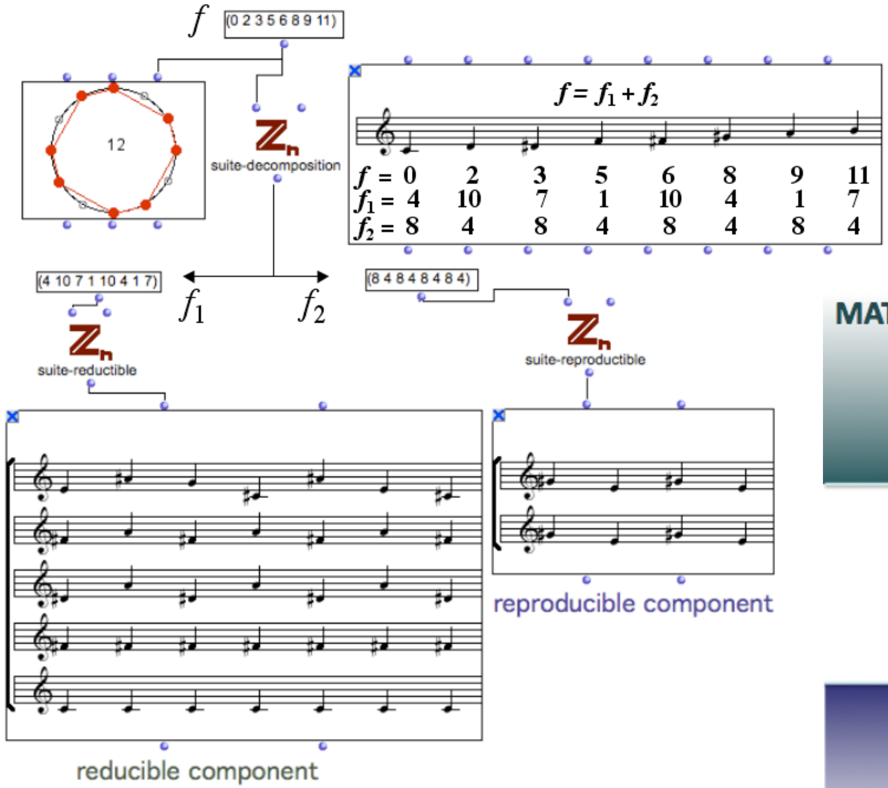


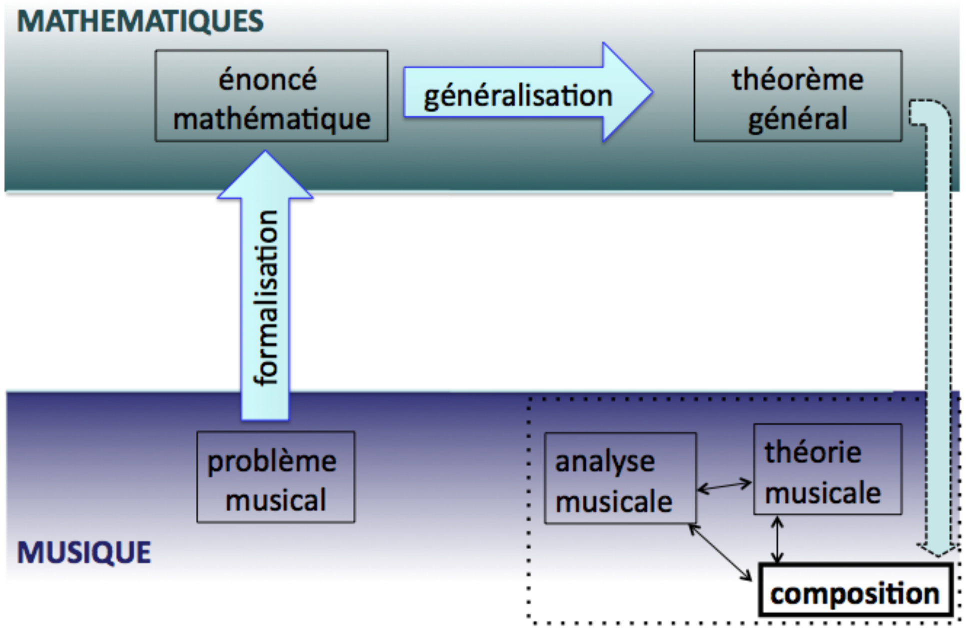
1999



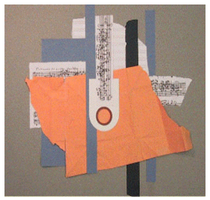
2. Suites périodiques et calcul de différences finies

- **Théorème de décomposition**
- **Lemme de Fitting**





2001



$Df(x)=f(x)-f(x-1).$

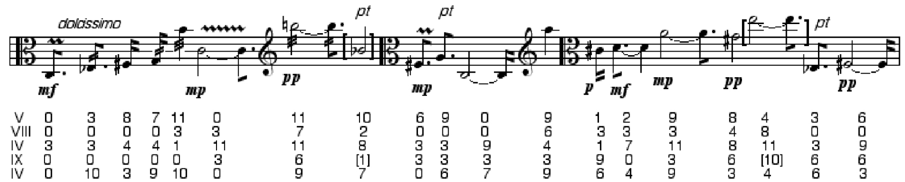
7 11 10 11 7 2 7 11 10 11 7 2 7 11…

4 11 1 8 7 5 4 11 1 8 7 5 4 11…

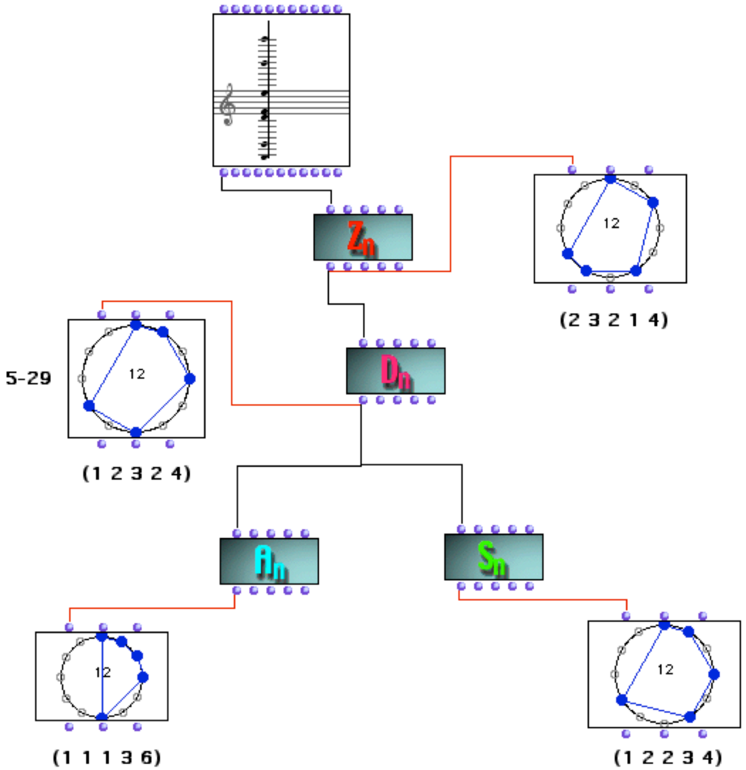
7 2 7 11 10 11 7 2 7 11 10 11…

7 5 4 11 1 8 7 5 4 11 1 8…

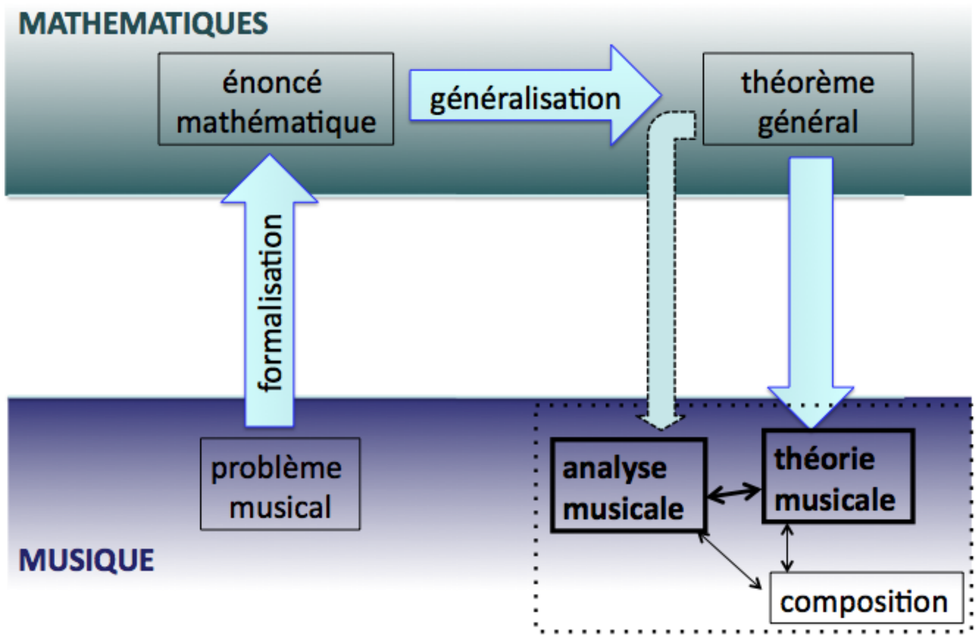
……



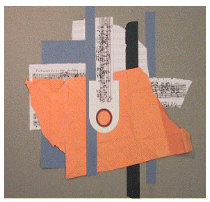
3. La *Set Theory* et la théorie transformationnelle

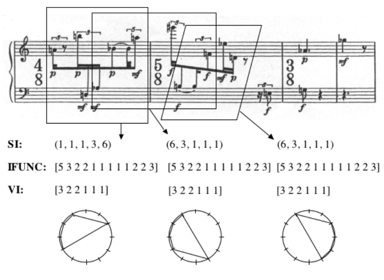


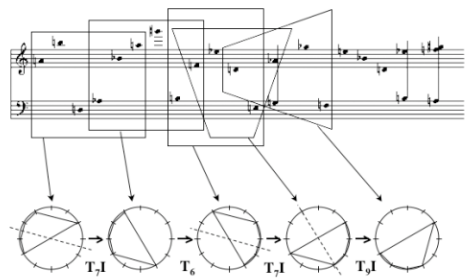
- Classification paradigmatique
- Analyse computationnelle
- Projet MISA



2003

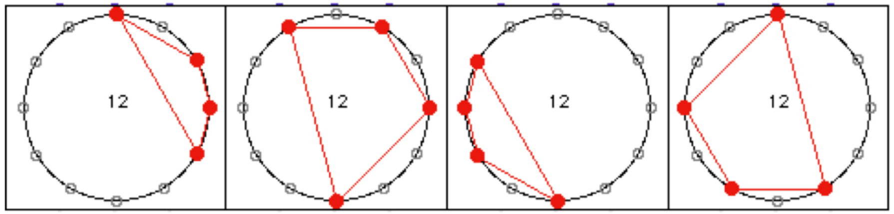




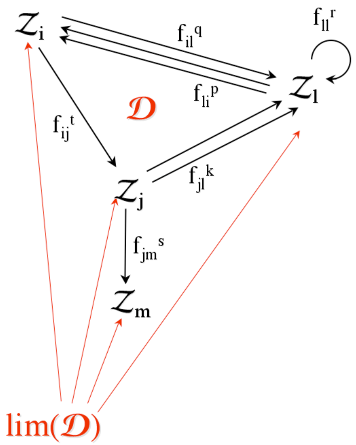


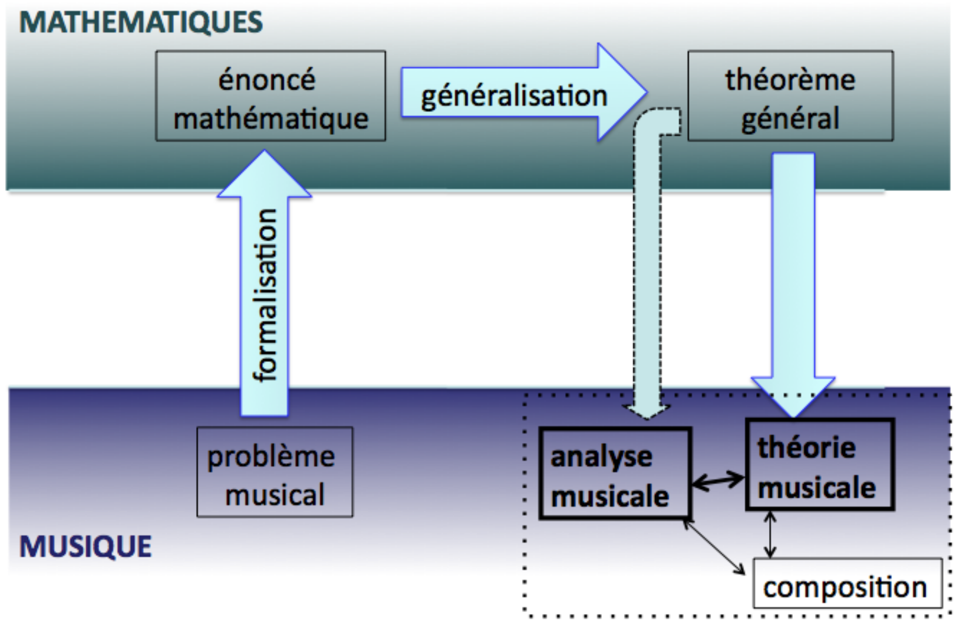
3. La *Set Theory* et la théorie transformationnelle

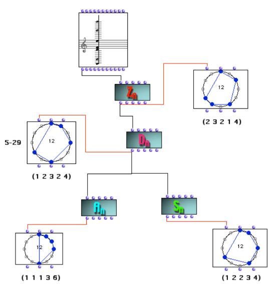
$$\begin{tikzcd}
do \arrow[r, "T_3"] \arrow[d, leftrightarrow, "I_2"] & mi_b \arrow[d, "T_7M_7"'] & mi_b \arrow[r, "T_3"] \arrow[d, leftrightarrow, "I_2"] & sol_b \arrow[d, "T_7M_7"'] & sol_b \arrow[r, "T_3"] \arrow[d, leftrightarrow, "I_2"] & la \arrow[d, "T_7M_7"'] & la \arrow[r, "T_3"] \arrow[d, leftrightarrow, "I_2"] & do \arrow[d, "T_7M_7"'] \\
ré \arrow[r, "T_2"'] & mi & si \arrow[r, "T_2"'] & ré_b & la_b \arrow[r, "T_2"'] & si_b & fa \arrow[r, "T_2"'] & sol
\end{tikzcd}$$

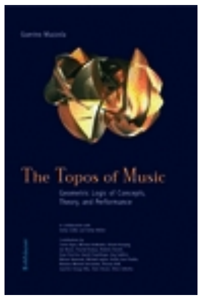


- **Formalisation catégorielle**
- **Isographies fortes dans un *K*-net**

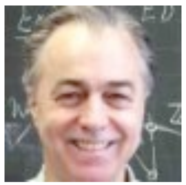


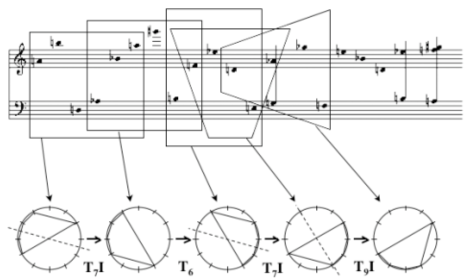


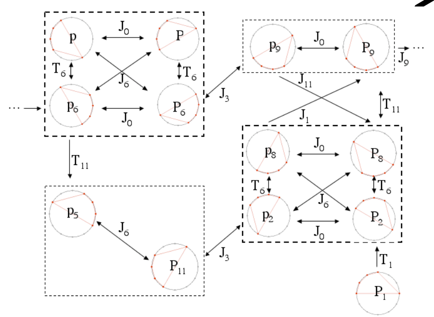




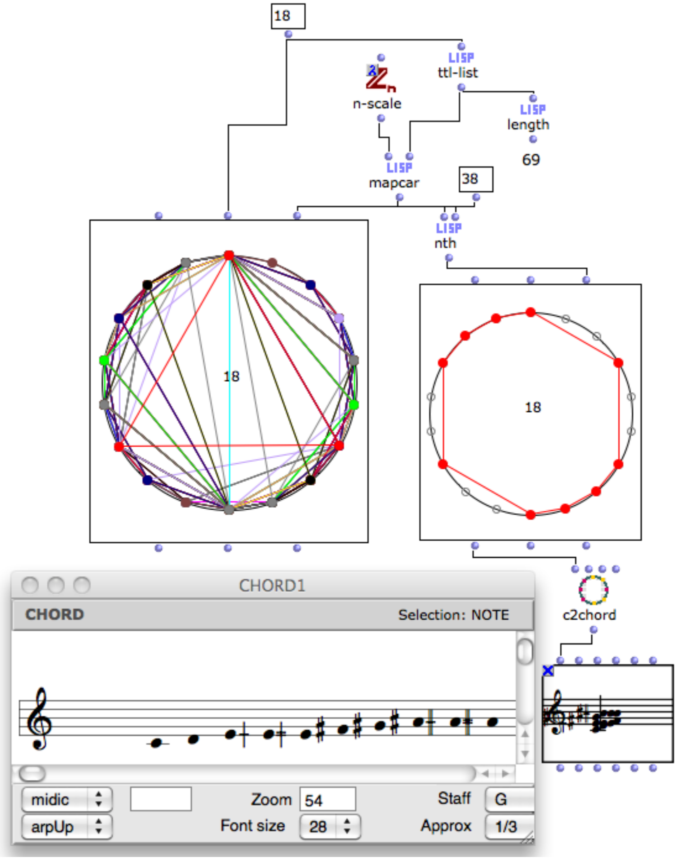
2006



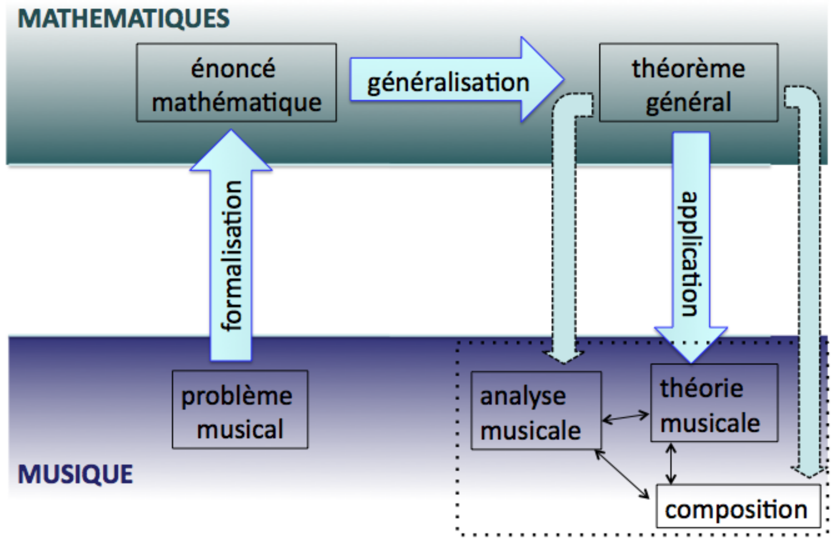


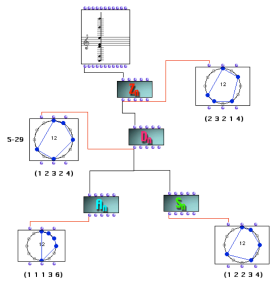


3. La *Set Theory* et la théorie transformationnelle

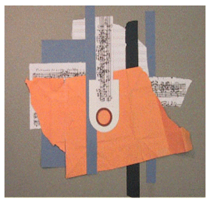


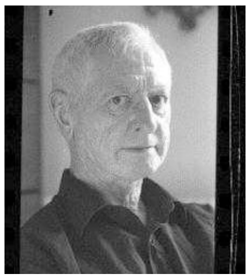
- Classification paradigmatique des structures microtonales
- Calcul des modes de Messiaen



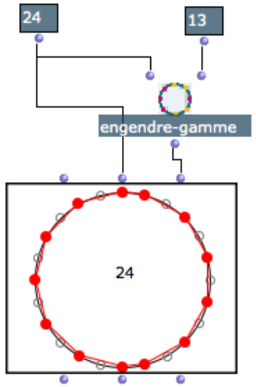


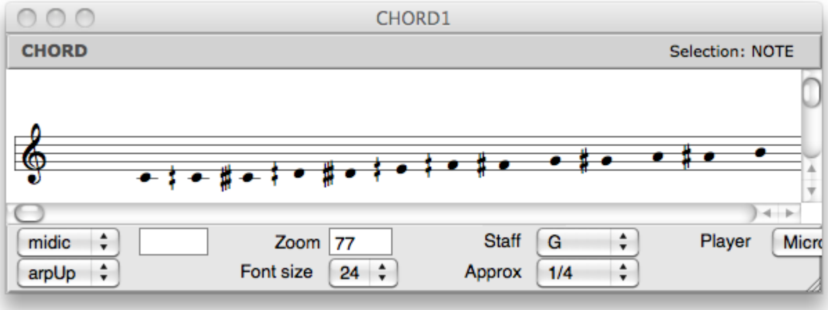
2006





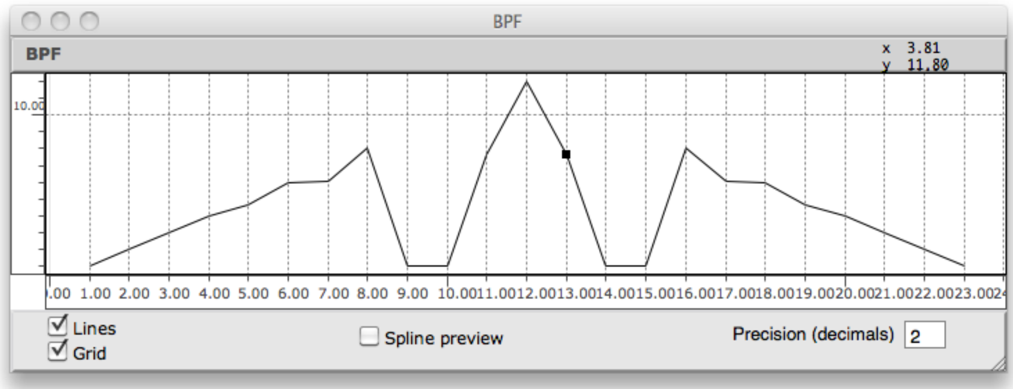
4. Les théories diatoniques et les *ME-sets*

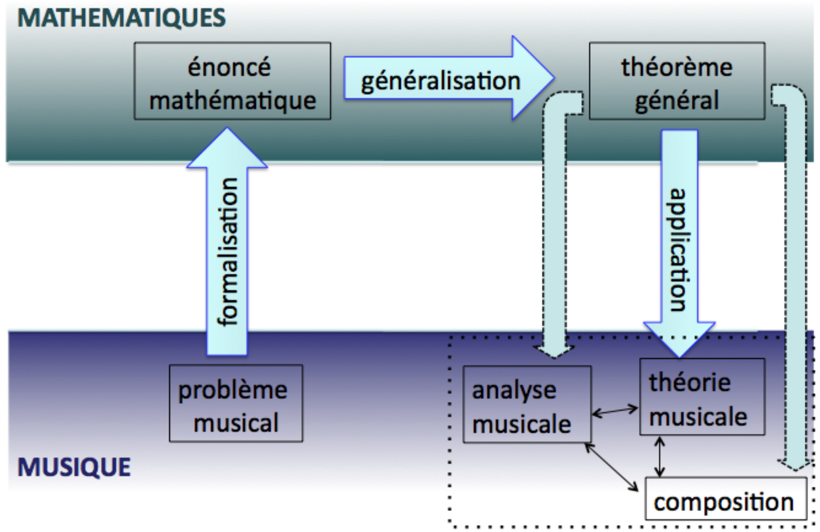


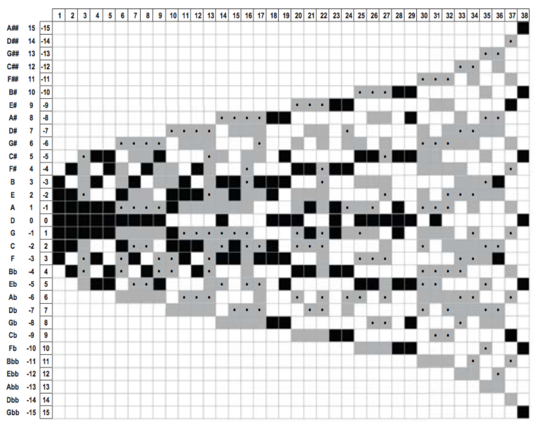


$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k\in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

- DFT
- Cloche diatonique
- Classification non-paradigmatique

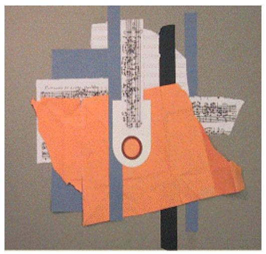






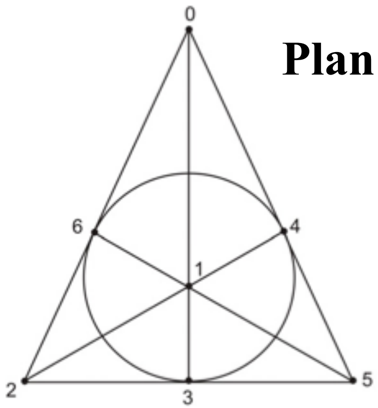
2008

conservatoire de lausanne

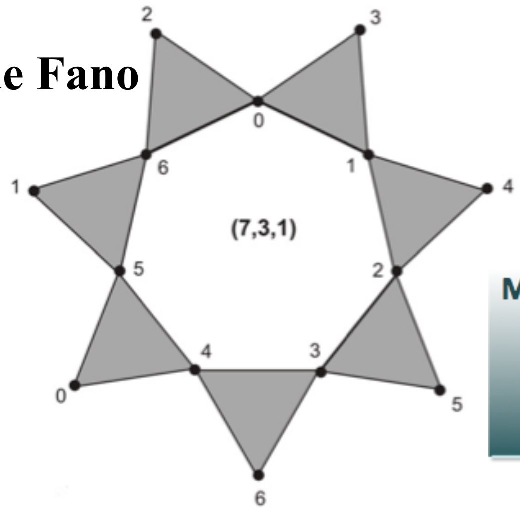


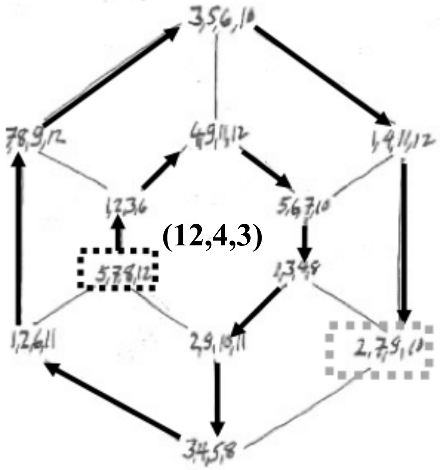
5. Block-designs et composition algorithmique

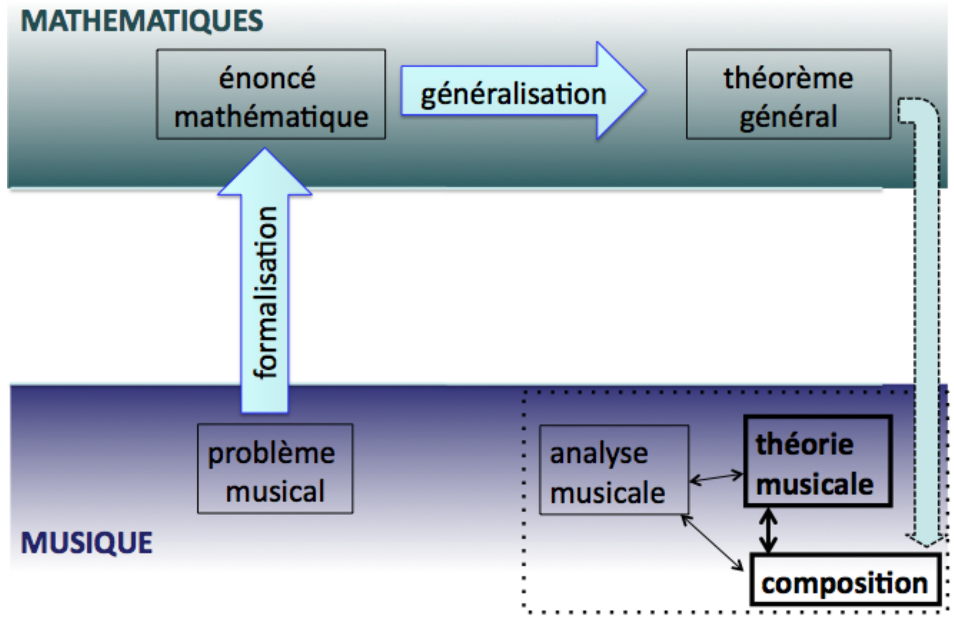
- Représentations géométriques
- Chemins et cycles hamiltoniens

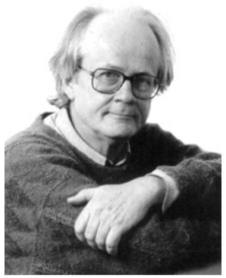


Plan de Fano

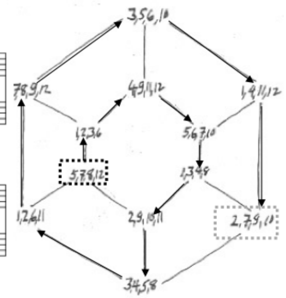






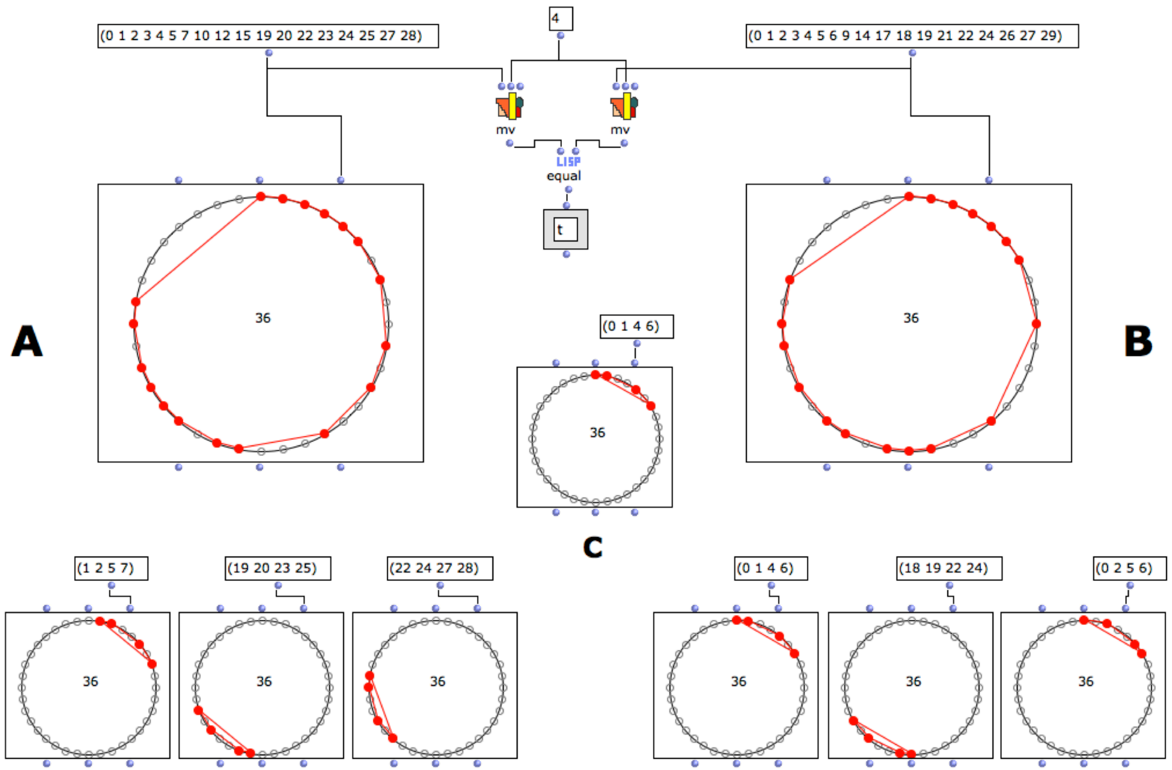


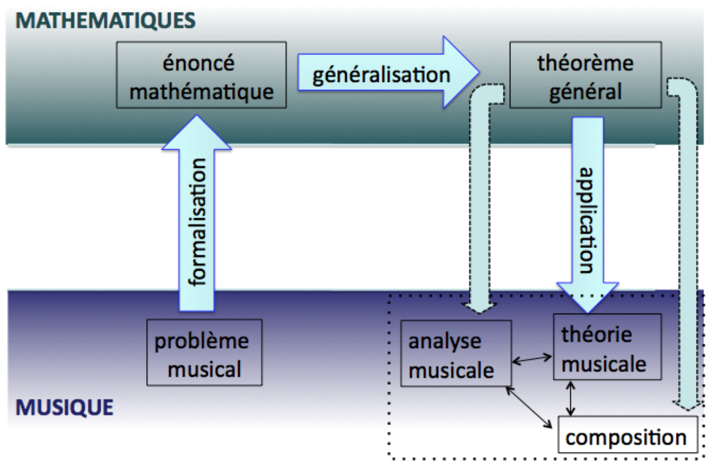
2009



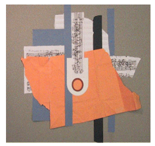
6. La relation Z et la théorie de l'homométrie

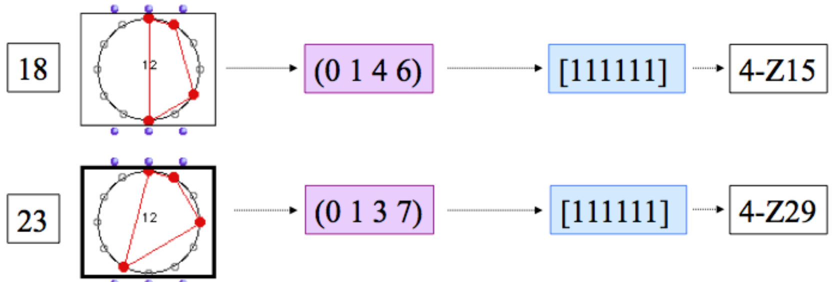
- **Reconstruction de la phase**
- **Relation Z^k**
- **Modèle computationnel**





2010

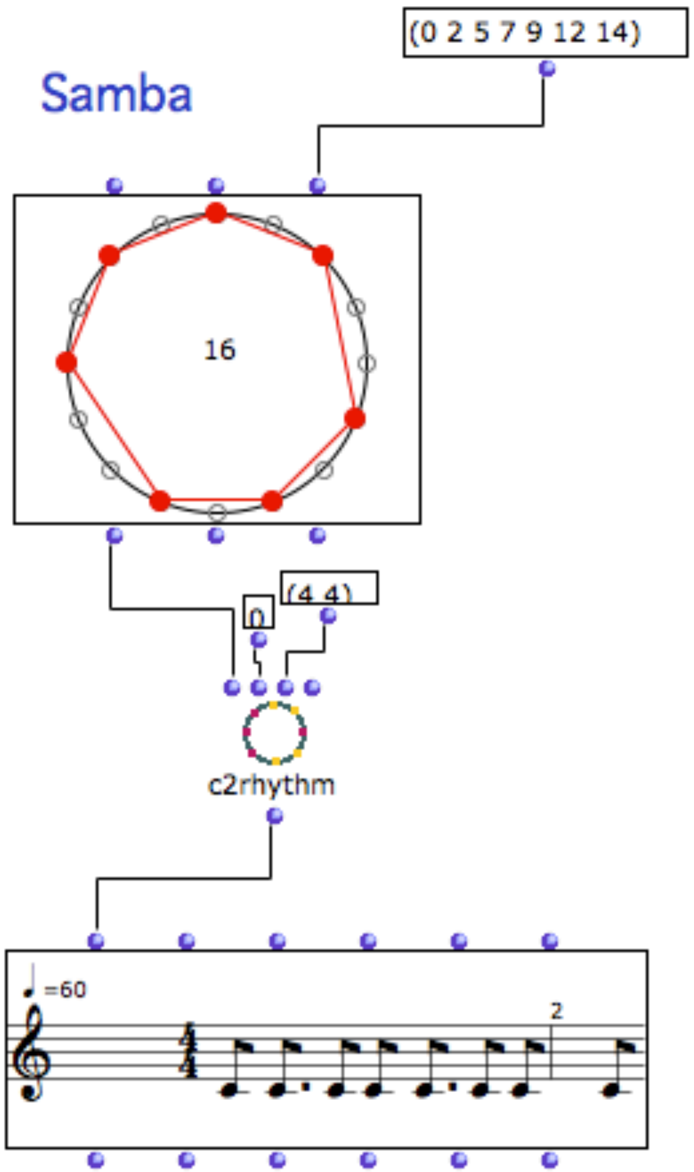


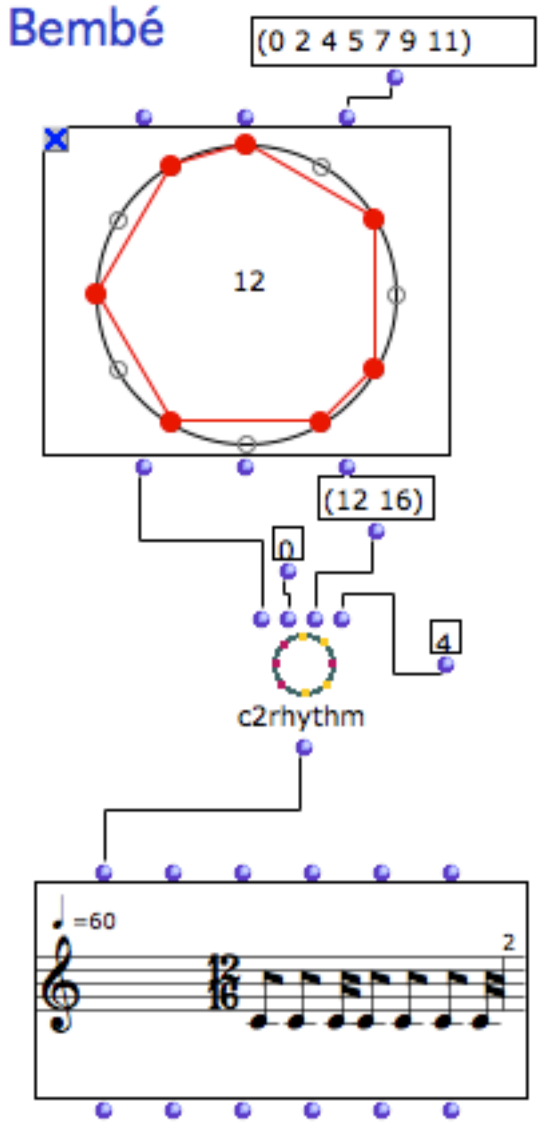


Le problème du pavage en musique

Les canons rythmiques mosaïques :
de Minkowski à Fuglede…
…en passant par Messiaen

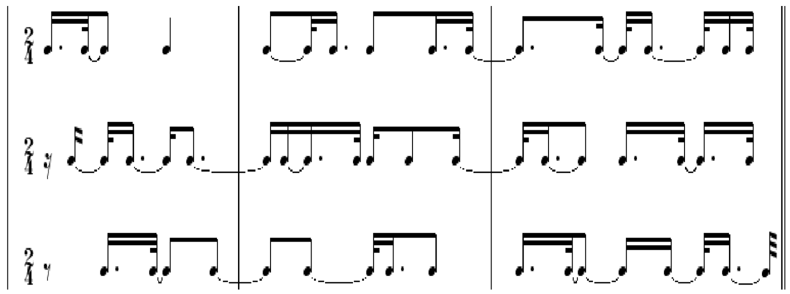
Théorie du rythme périodique



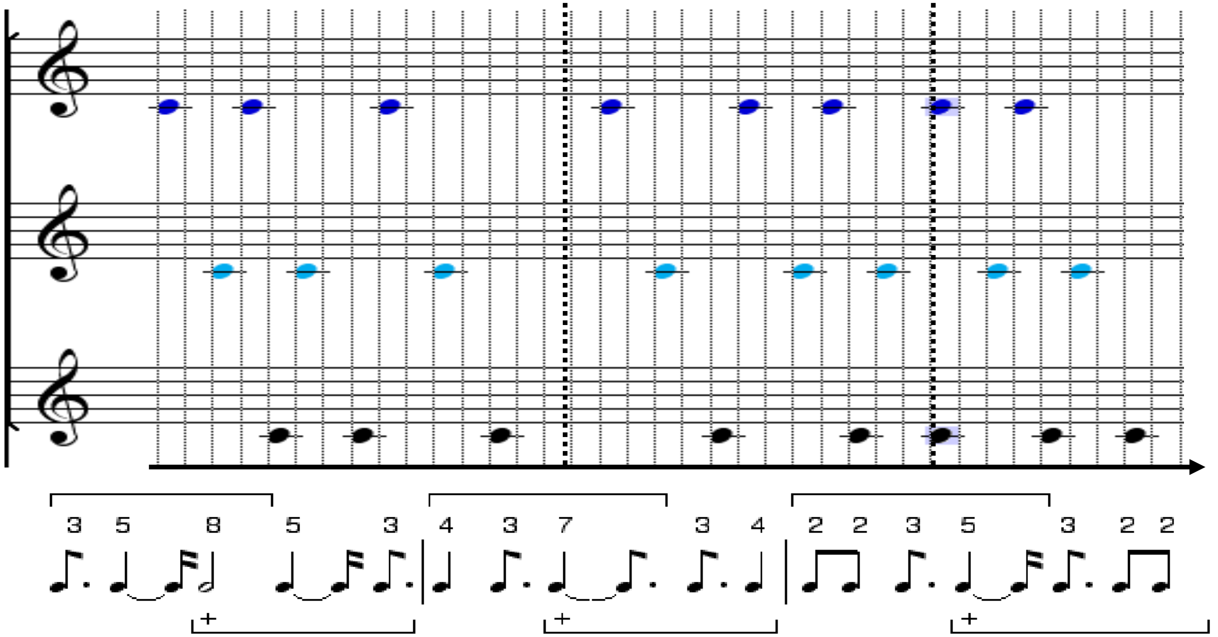


Canons rythmiques et pavage de l'espace

Harawi (1945)



Visions de l'Amen (1943)



Modèle rythmique

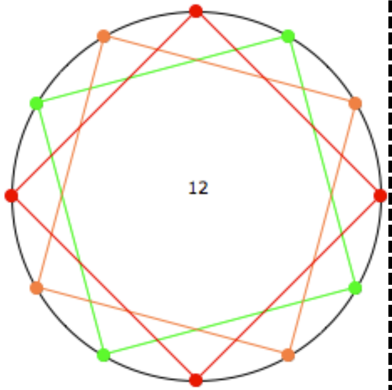
« …il résulte de tout cela que les différentes sonorités se mélangent ou s'opposent de manières très diverses, jamais au même moment ni au même endroit […]. C'est du désordre organisé »

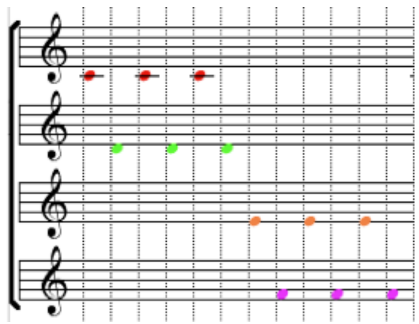
O. Messiaen : *Traité de Rythme, de Couleur et d'Ornithologie,* tome 2, Alphonse Leduc, Paris, 1992

Quatre types de canons rythmiques mosaïques

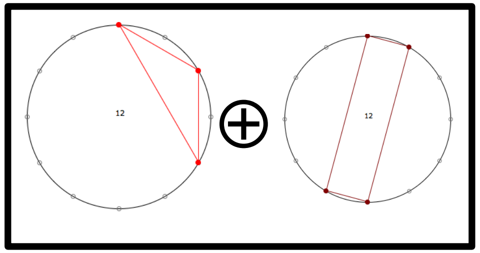
$A<Z_n$

$B<Z_n$



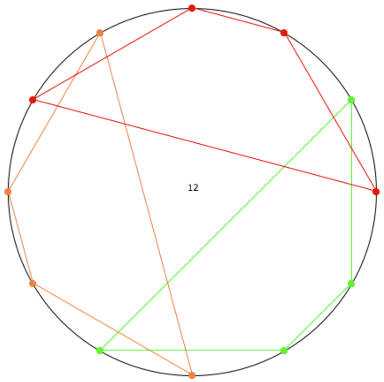


$Z_n = A \oplus B$



$A \subset Z_n$

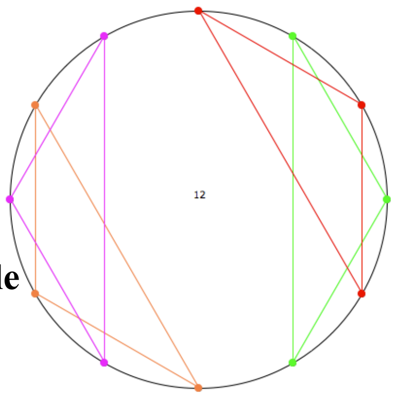
$B<Z_n$



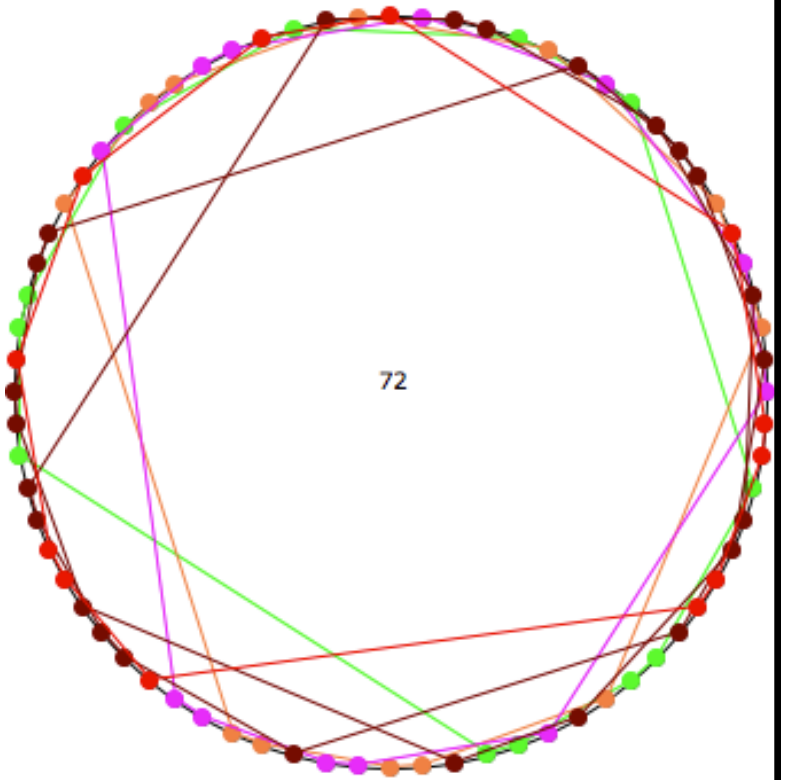
$A \subset Z_n$

$B \subset Z_n$

sous-ensemble périodique



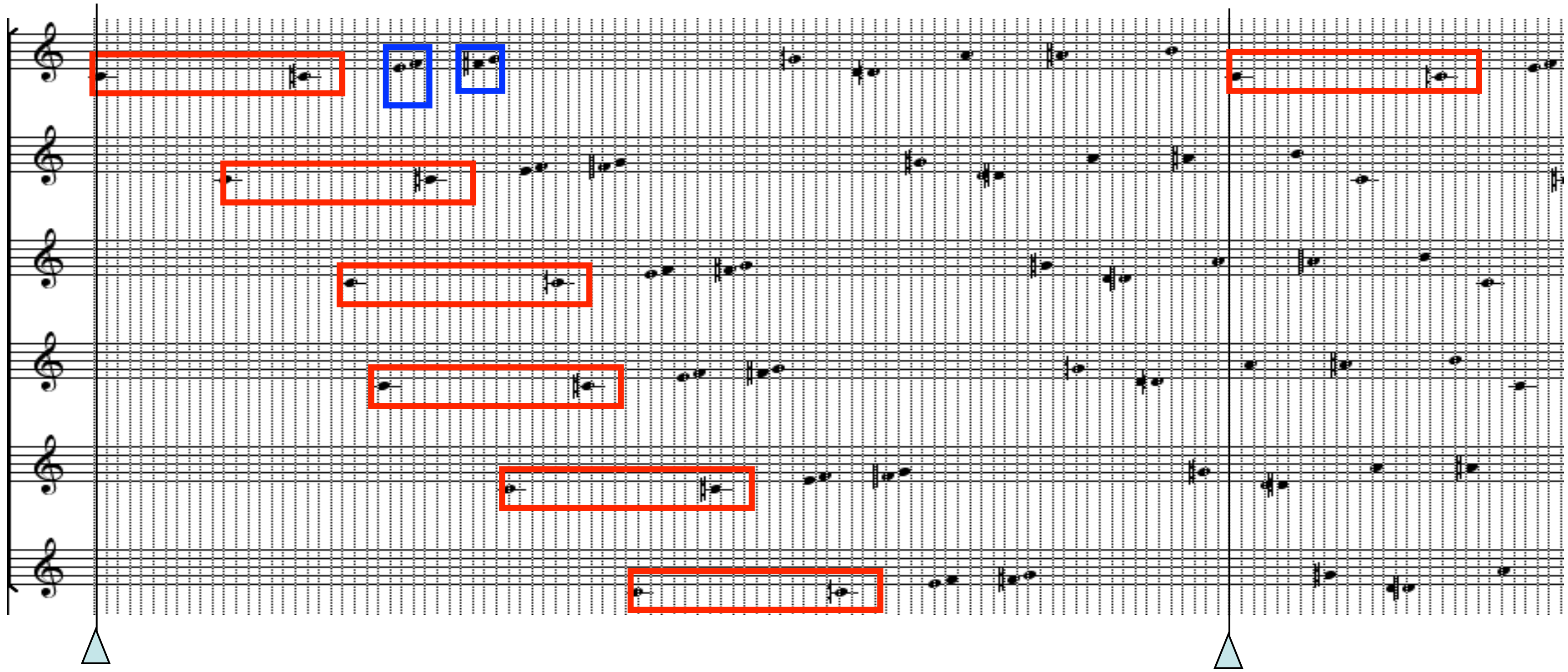
Canon de Vuza

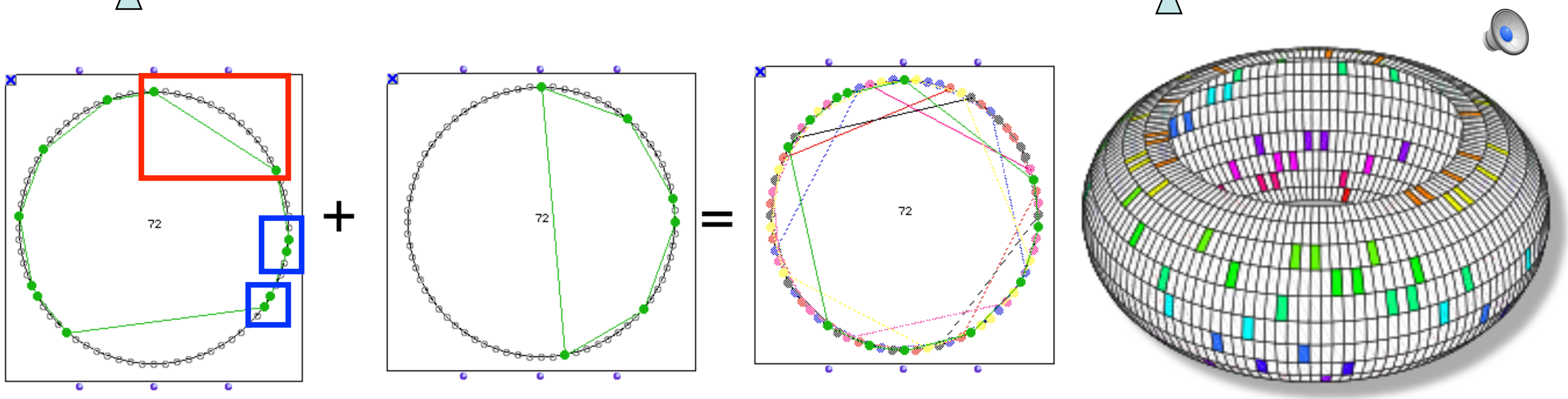


$A, B \subset Z_n$

sous-ensembles non-périodiques

Vuza Canons : canons mosaïques sans périodicité interne

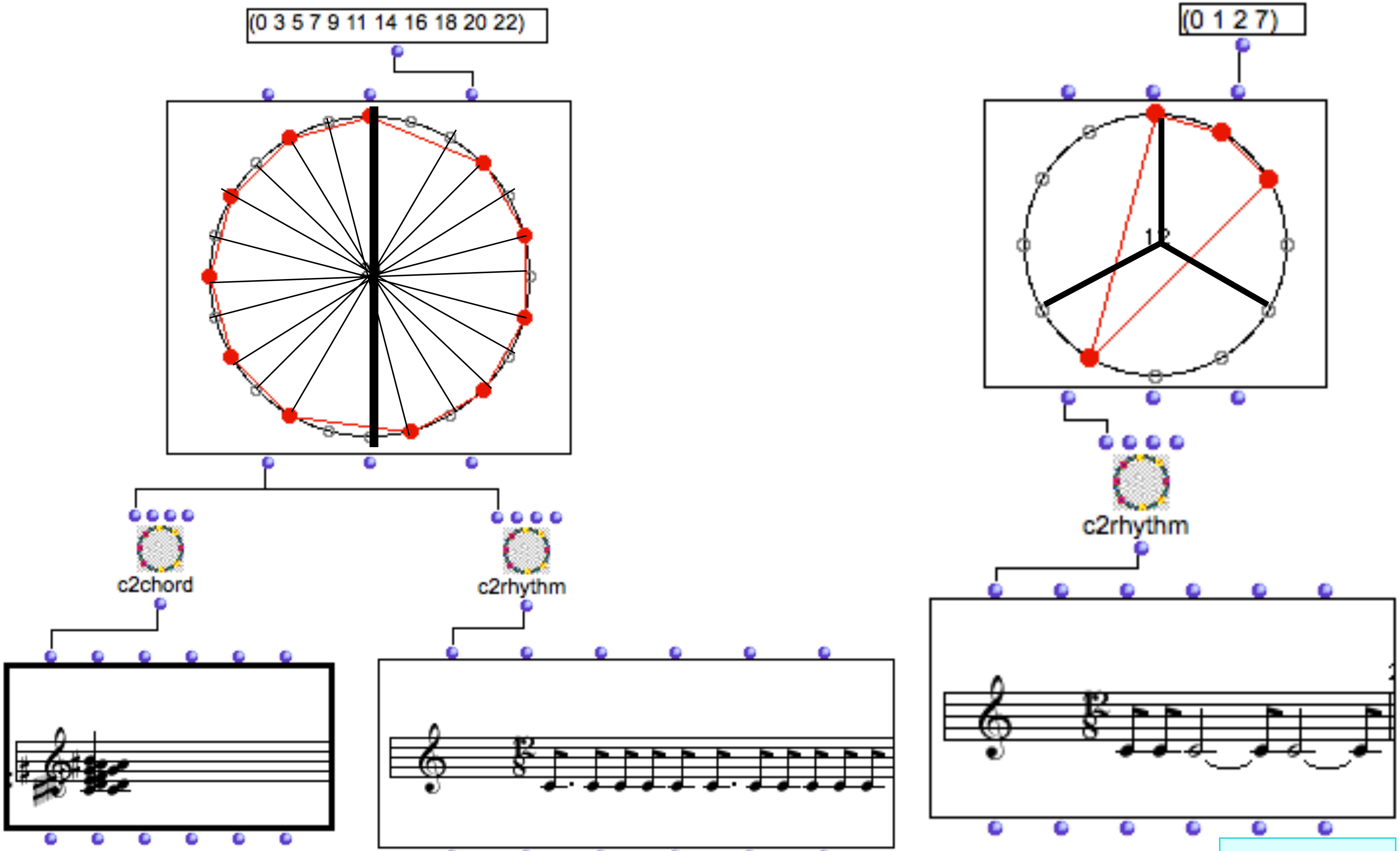




Propriété d’imparité rythmique et ses généralisations

(Simha Arom & Marc Chemillier)

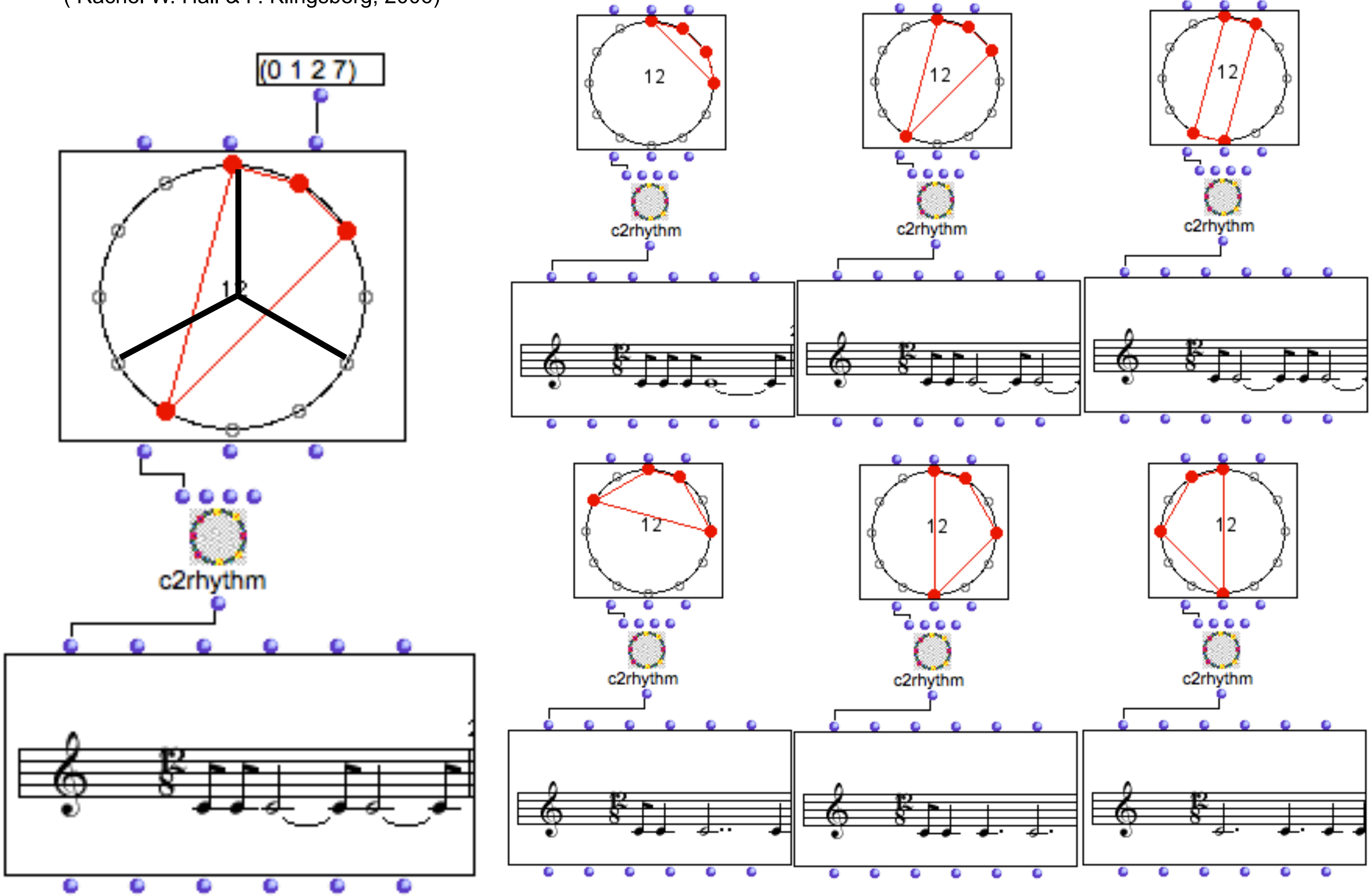
(R. W. Hall & P. Klingsberg, Asymmetric rhythms and tiling canons. American Mathematical Monthly 113 (2006), no.10, 887-896)



=> *OpenMusic*

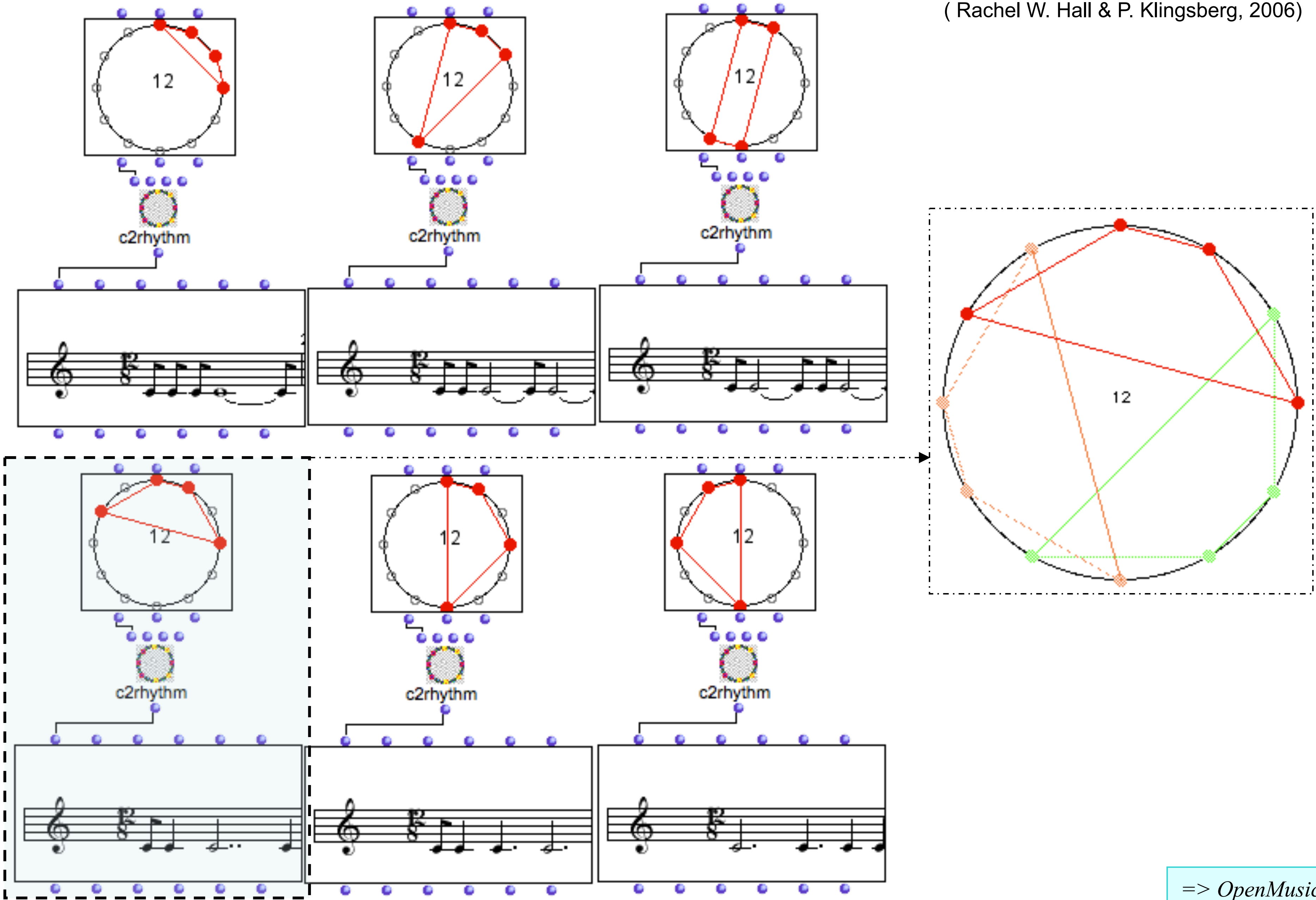
Rythmes 3-asymétriques

(Rachel W. Hall & P. Klingsberg, 2006)



Rythmes 3-asymétriques et pavages

(Rachel W. Hall & P. Klingsberg, 2006)



=> *OpenMusic*

Rythmes 4-asymétriques et séries tous-intervalles

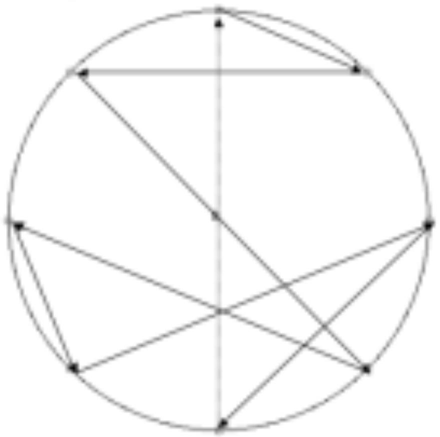
Thorvald Ötterstrom, *A Theory of Modulation*, Chicago UP, 1935

ACENTRAL

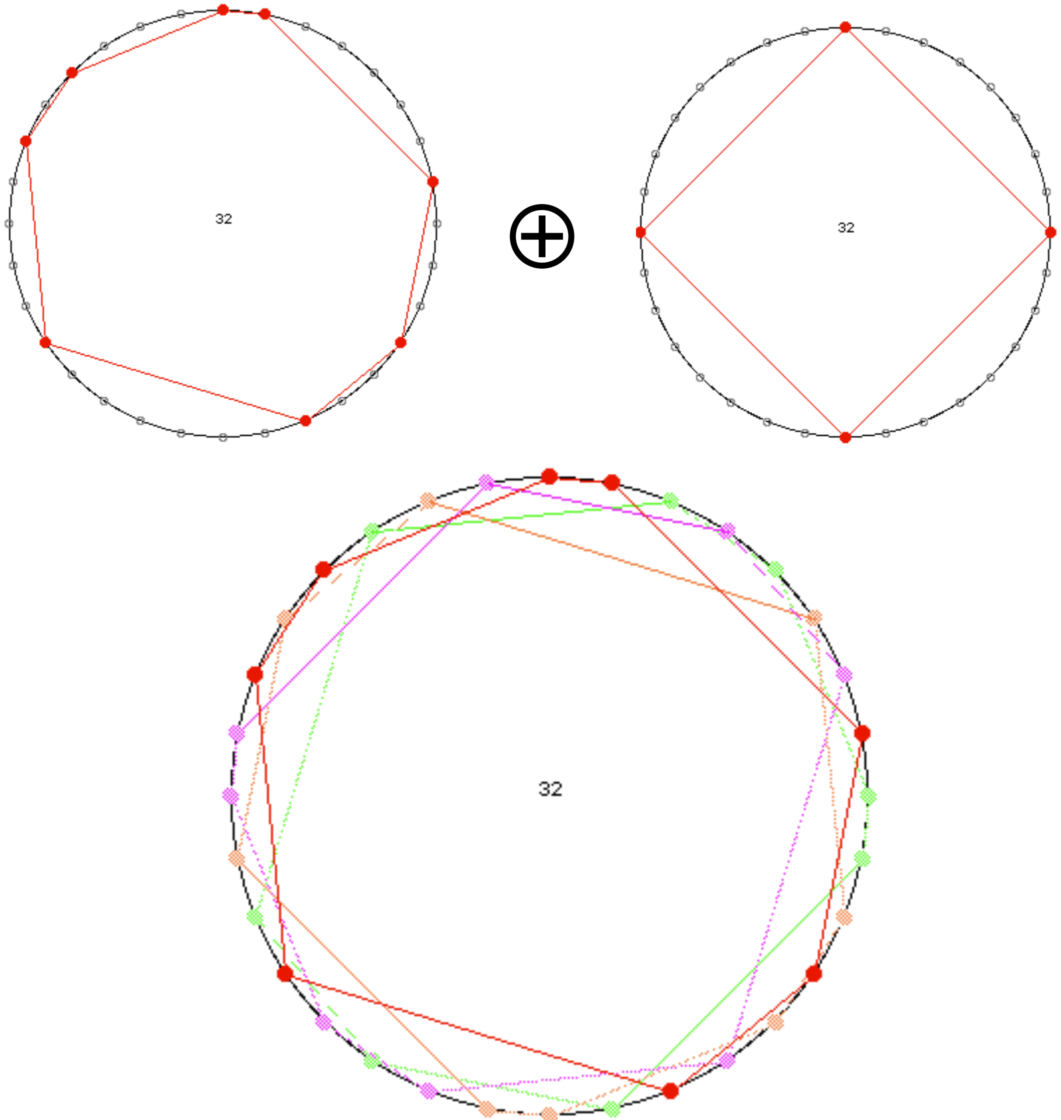
1643752
3241576
7245136
6542137

CENTRAL

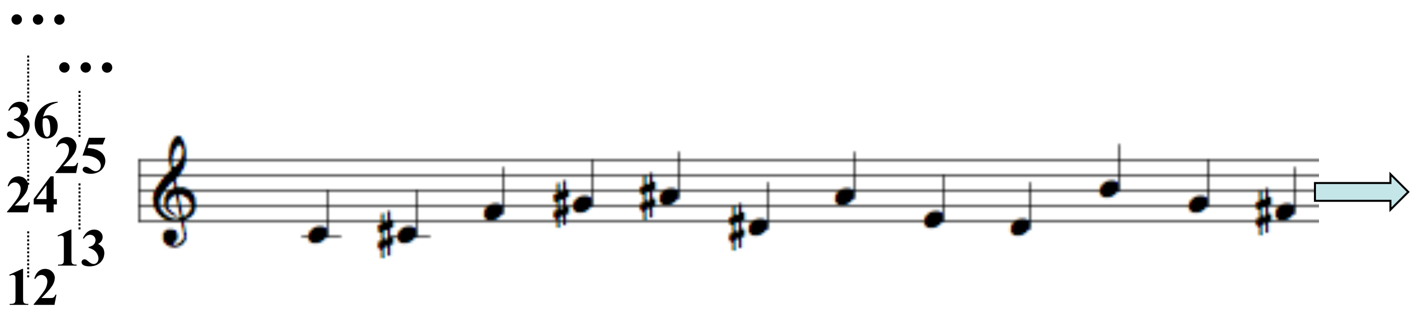
$k_s = 1$: 312654897
318456297
813456792

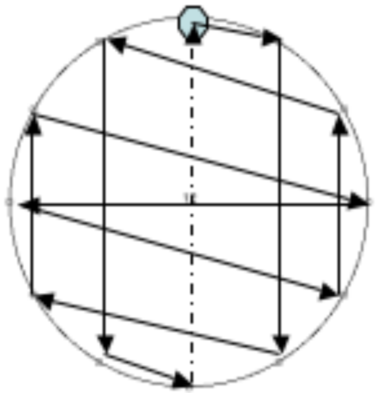


(1,6,4,3,7,5,2)



Canons rythmiques mosaïques et séries tous-intervalles

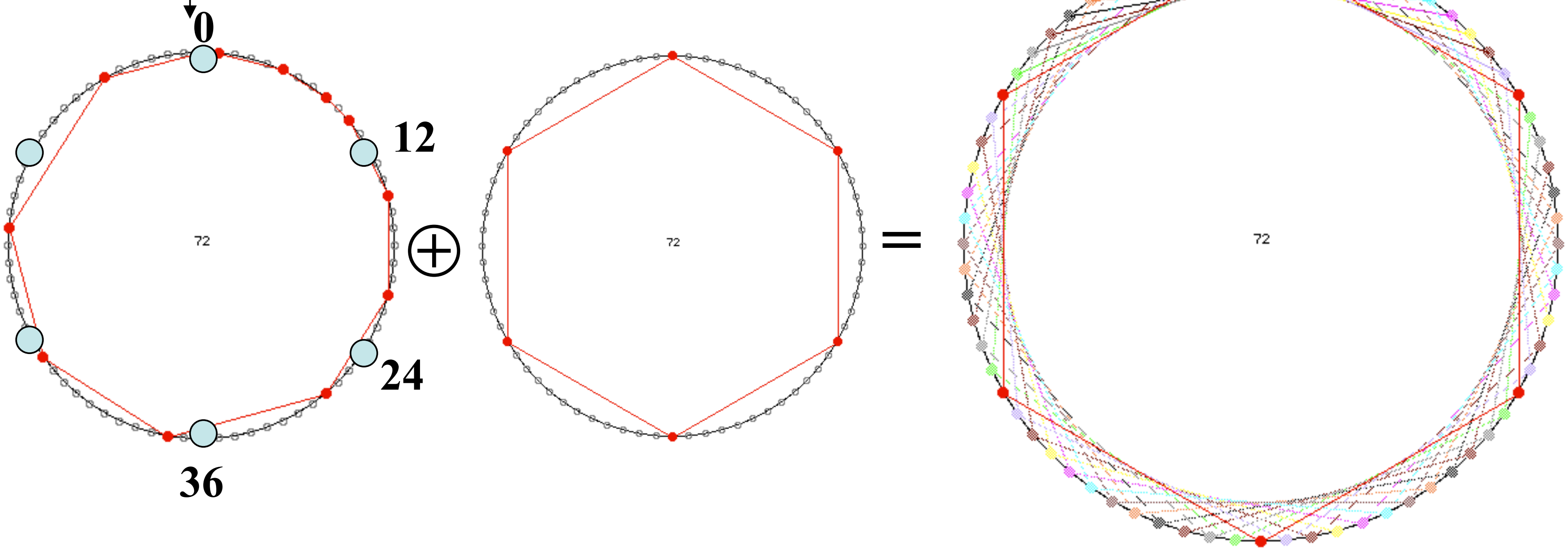




S={0, 1, 3, 6, 7, 9, 8, 10, 11, 2, 4, 5)

S^*=(1,4,3,2,5,6,7,10,9,8,11)

mod 72



Séries dodécaphoniques et rythmes k-asymétriques

…
…
25
24
13
12

S={0, 1, 3, 6, 7, 9, 8, 10, 11, 2, 4, 5)

S^*=(1,2,3,1,2,11,2,1,3,2,1,45) ←

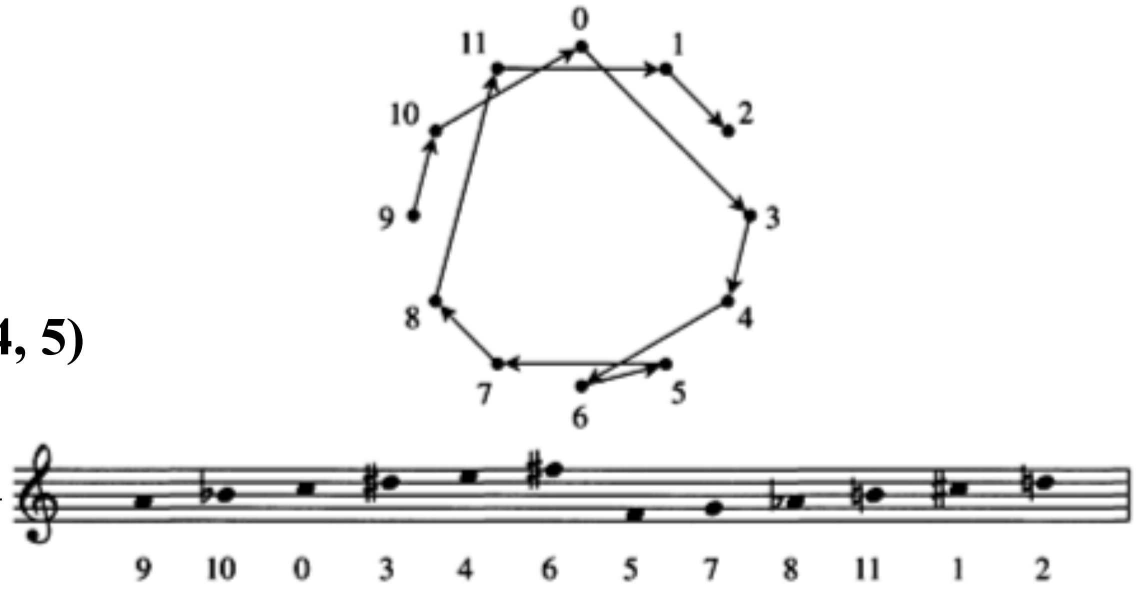
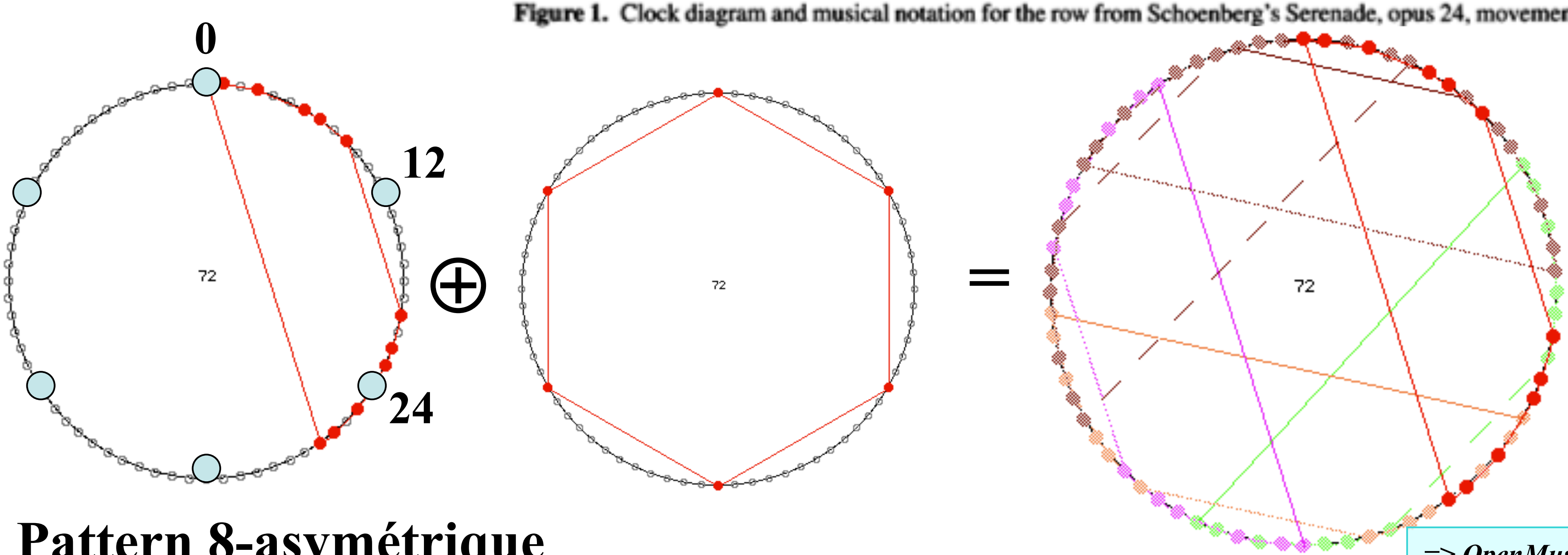


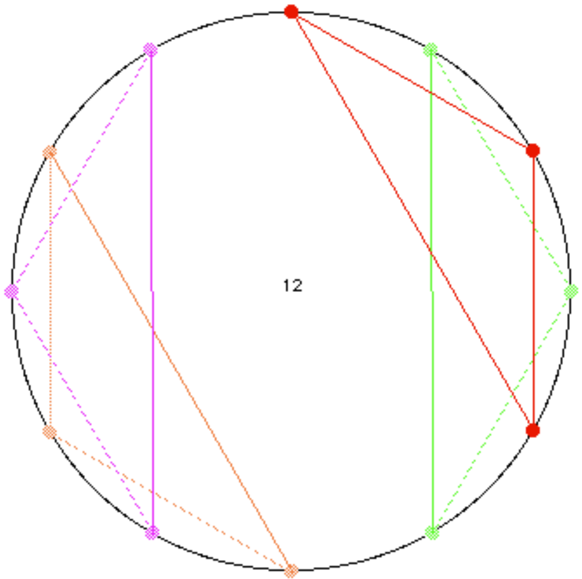
Figure 1. Clock diagram and musical notation for the row from Schoenberg's Serenade, opus 24, movement 5.

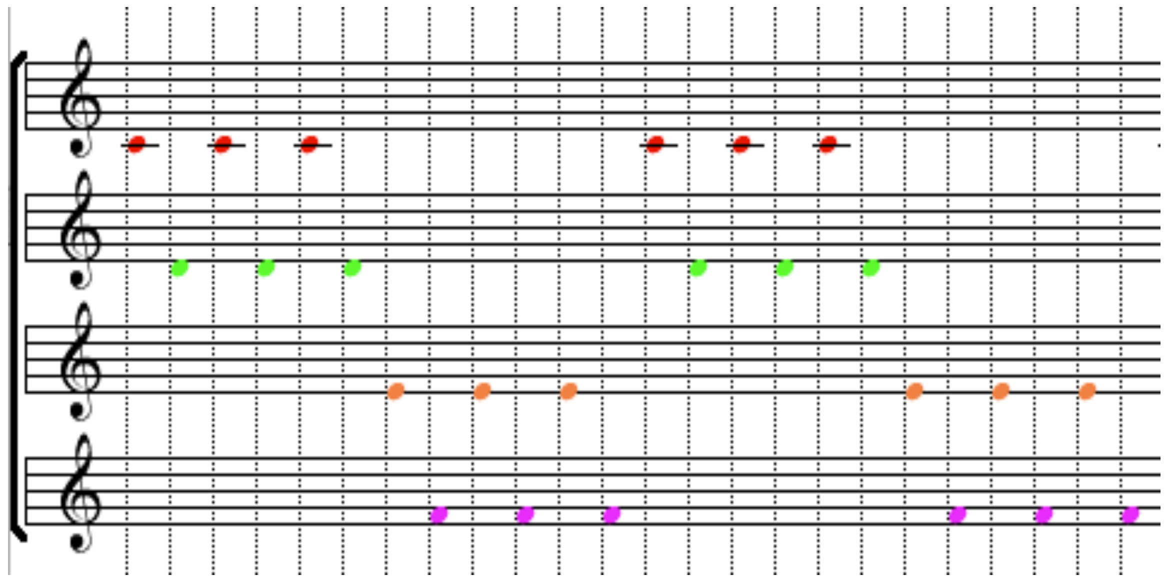


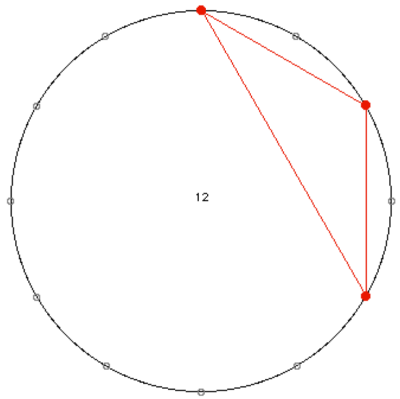
Pattern 8-asymétrique

=> *OpenMusic*

Canons mosaïques avec symétrie transpositionnelle



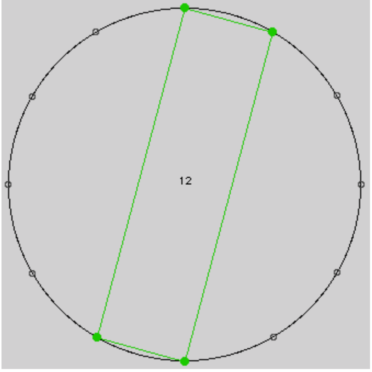




$\mathbf{Z}_{12} = A \oplus B$

$A = \{0,2,4\}$

$B = \{0,1,6,7\}$



Les canons rythmiques mosaïques comme un problème « mathémusical »

- Les canons rythmiques selon Olivier Messiaen (*Traité*, 2ème Tome)
- Le modèle des canons RCMC de Dan Tudor Vuza (*Perspectives of New Music*, 1991-1993)
- Le modèle computationnel des canons de Vuza et premier catalogue des solutions (Agon&Andreatta, 1999)
- Applications compositionnelles (Fabien Levy, Georges Bloch, …, Mauro Lanza)
- Enumération et classification des canons de Vuza (Fripertinger, Amiot, Noll, Andreatta, Jedrzejewski, …)
- Le modèle des canons augmentés par Thomas Noll
- Les canons parfaits de Tom Johnson
- Le modèles des canons cyclotomiques (Amiot, Agon, Andreatta)
- L'environnement *MathTools* en *OpenMusic* (Version 5.0 et successives, Agon&Andreatta)

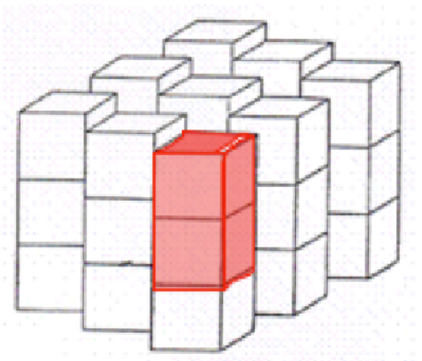
Pavage de l'espace par des cubes unité

- La Conjecture de Minkowski (1896/1907) et ses versions « faibles » (Keller, Furtwängler)
- La solution algébrique de G. Hajos (1942)
- La classification des groupes de Hajos (Hajos, de Bruijn, Sands, …)
- *Problèmes ouvert* :
  - La conjecture semi-périodique de Hajos (1950)
  - Conjecture de Keller pour n=7

Pavage de la ligne et du plan R^2

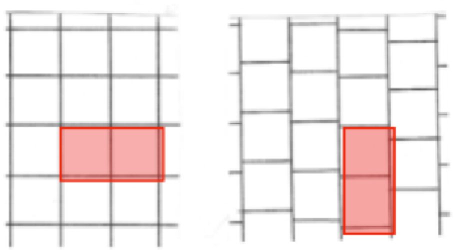
- Conjecture spectrale (Fuglede, Tijdeman, Lagarias, Laba, Coven-Meyerowitz, Kolountzakis…)
- Lien avec le pavage du cercle (Hajos 1949)
- Lien entre la conjecture spectrale et les canons de Vuza (Amiot, 2010)
- *Problèmes ouverts* :
  - les conditions de Coven-Meyerowitz sont-elles nécessaire et suffisantes ?
  - Conjecture spectrale en dimension n=1 et n=2.

De la Conjecture de Minkowski aux groupes de Hajos



Conjecture de Minkowski (1896/1907)

Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension n-1.



(Cf. S. Stein, S. Szabó : *Algebra and Tiling*, 1994)

Théorème de Hajós (1942)

Soit G un groupe abélien fini et soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n éléments de G. Si l'on suppose que le groupe admet comme factorisation la somme directe des sous-ensembles $A_1 \ldots A_n$

$$A_1 = \{1, a_1, \ldots, a_1^{m_1-1}\}, A_2 = \{1, a_2, \ldots, a_2^{m_2-1}\}, \ldots, A_n = \{1, a_n, \ldots, a_n^{m_n-1}\}$$

avec $m_i > 0$ pour tout i=1, 2, …, n, alors un des A_i est un groupe

Groupes de Hajos (good groups)

Rédei 1947 (p, p)

Hajós 1950 Z

Z/nZ avec $n = p^\alpha$

De Brujin 1953 (p^α, q)

(p, q, r)

Sands 1957 (p^2, q^2)

(p^2, q, r)

(p, q, r, s)

Sands 1959 $(2^2, 2^2)$

$(3^2, 3)$

$(2^n, 2)$

Sands 1962 $(p, 3, 3)$

$(p, 2^2, 2)$

$(p, 2, 2, 2, 2)$

$(p^2, 2, 2, 2)$

$(p^3, 2, 2)$

$(p, q, 2, 2)$

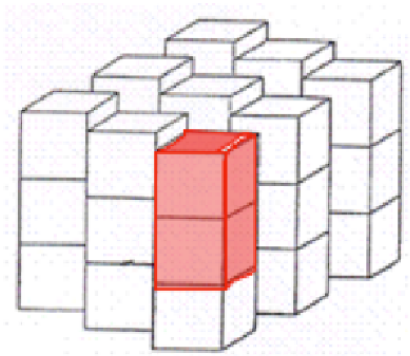
Sands 1964 Q

Z+Z/pZ

Q+Z/pZ

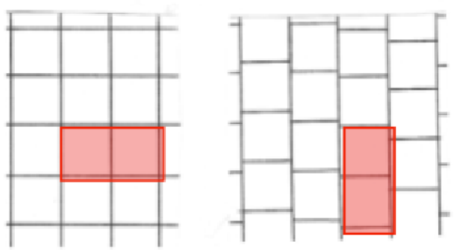
Conjecture de Minkowski et formalisation algébrique

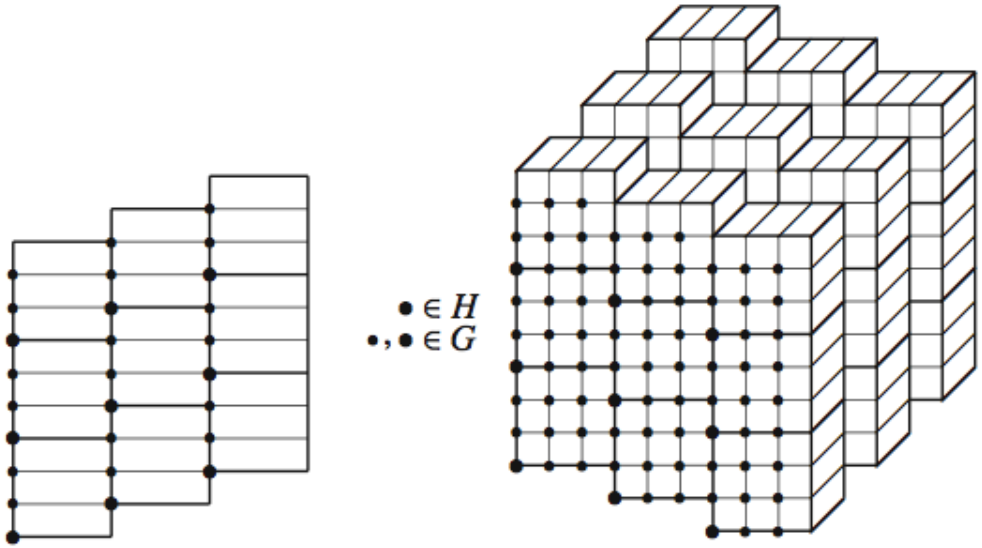
G. Fidanza, *Canoni ritmici a mosaico*, tesi di laurea, 2006/2007



Conjecture de Minkowski (1896/1907)

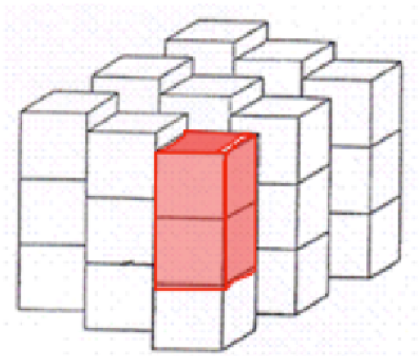
Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension n-1.



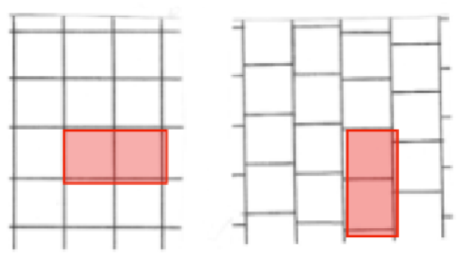


- H = réseau formé des sommets de coordonnées inférieures (à valeurs dans **Q** sans perte de généralité, Hajos 1938)
- G = sommets de coordonnées inférieures qui divisent chaque cube dans un nombre fini de tranches
- $H<G$
- $\exists\{a_1, \ldots, a_n\}$ basa de G telle que $m_i a_i = e_i$ $\forall$i=1,…,n où m_i est le nombre de tranches dans lequel chaque cube est divisé tout au long de la i-ème coordonnée
- On construit le quotient G/H et pour chaque i on considère l'ensemble $A_i = \{0, a_i, 2a_i, \ldots, (m_i-1)a_i\}$
- $G/H = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$

Quelques versions faibles de la conjecture de Minkowski



Conjecture de Minkowski (1896/1907)
Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension n-1.



- *Les quatre conditions de la Conjecture de Minkowski*
  - [1] Les cubes sont tous obtenus par translation
  - [2] Les vecteurs de translations forment un réseau [lattice]
  - [3] Les parties internes des cubes sont disjointes
  - [4] Tout point de l'espace qui n'est pas dans le bord d'un cube est contenu exactement dans un cube

- *Conjecture de Keller* (1930) = *Minkowski* – [2]
  - ➔Vraie pour $n \leq 6$ (Perron, 1940)
  - ➔ Fausse pour $n \geq 10$ (Lagarias et Shor, 1992)
  - ➔ Fausse pour $n=8$ et $n=9$ (Mackey, 2000)
  - ➔ Ouverte pour $n=7$

- *Conjecture de Furtwangler* = *Minkowski* – [3 et 4] + nouvelle condition :
  - [4'] Tout point de l'espace qui n'est pas dans le bord de chaque cube est contenu dans exactement k cubes
  - ➔ La conjecture est vraie ssi $n \leq 3$ (Hajos 1941)

- *Conjecture semi-périodique de Hajos* (1950) : toute factorisation d'un groupe $G = A+B$ *est semipériodique* i.e. $B=B_1, \ldots, B_m$ *et s'il existe un sousgroupe* $G'=\{g_1, \ldots, g_m\}$ telle que $A+B_i=g_i+A+B_1$.

Groupes non Hajos et Canons de Vuza

Groupes non-Hajós (bad groups)

72
108 120 144 168 180
200 216 240 252 264 270 280 288
300 312 324 336 360 378 392 396
400 408 432 440 450 456 468 480
500 504 520 528 540 552 560 576 588 594
600 612 616 624 648 672 675 680 684 696
700 702 720 728 744 750 756 760 784 792
800 810 816 828 864 880 882 888…

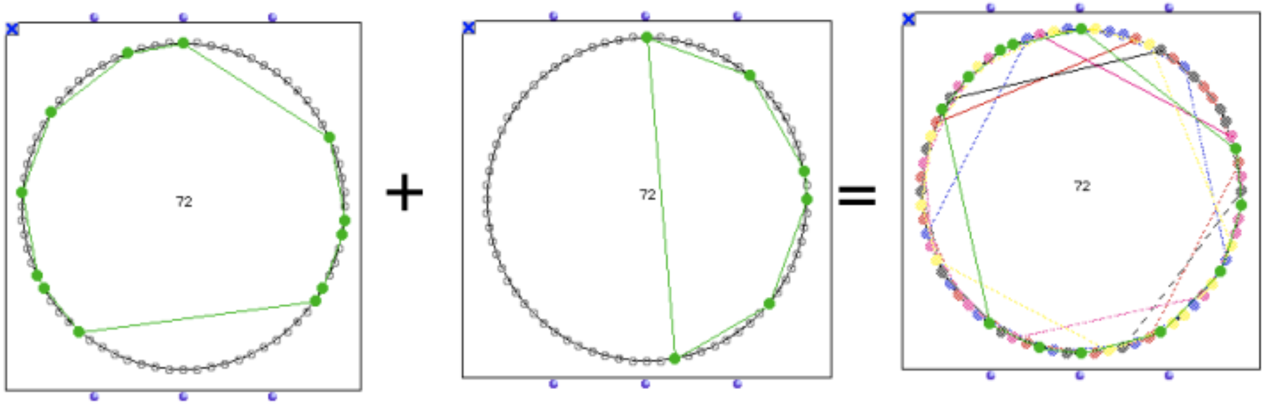
Groupes Hajós (good groups)

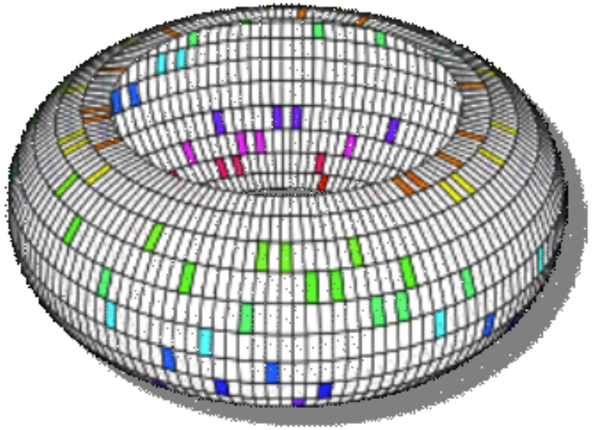
Z/*n*Z avec

$n \in \{p^\alpha, p^\alpha q, pqr, p^2q^2, p^2qr, pqrs\}$

où *p*, *q*, *r*, *s*, sont des nombres premiers distincts

Problème ouvert : Trouver un algorithme qui permet d'obtenir toutes le factorisations d'un groupe cyclique non-Hajos en somme directe de deux sous-ensembles non périodiques (i.e. classifier tous les Canons de Vuza).





Classification paradigmatique des canons de Vuza (n=72)

Résultat : uniquement deux « types » de canons différents (à une *transformation affine* près, i.e.
$f: Z_{72} \rightarrow Z_{72}$ t.q. $f(x)=ax+b$ avec $a \in (Z_{72})^*$ et $b \in Z_{72}$

{Z_n}

R
(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
(20 3 1 5 6 9 4 11 6 3 3 1)
(1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
(6 13 4 7 6 6 1 4 19 1 4 1)
(1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)
(3 3 17 4 3 6 6 5 4 15 5 1)

S
(8 8 2 8 8 38)
(16 2 14 2 16 22)
(14 8 10 8 14 18)

{D_n}

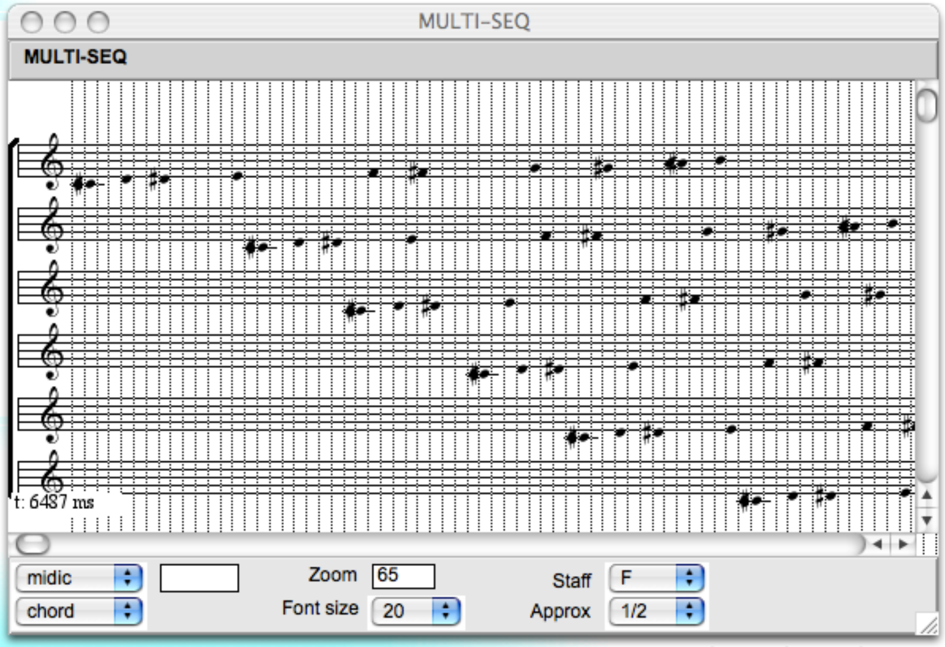
R
(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
(1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
(1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)

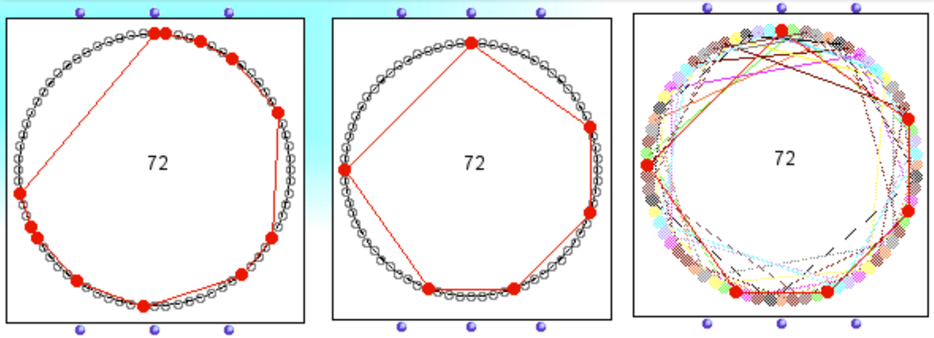
S
(8 8 2 8 8 38)
(16 2 14 2 16 22)
(14 8 10 8 14 18)

{Af_n}

R
(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
(1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)

S
(14 8 10 8 14 18)



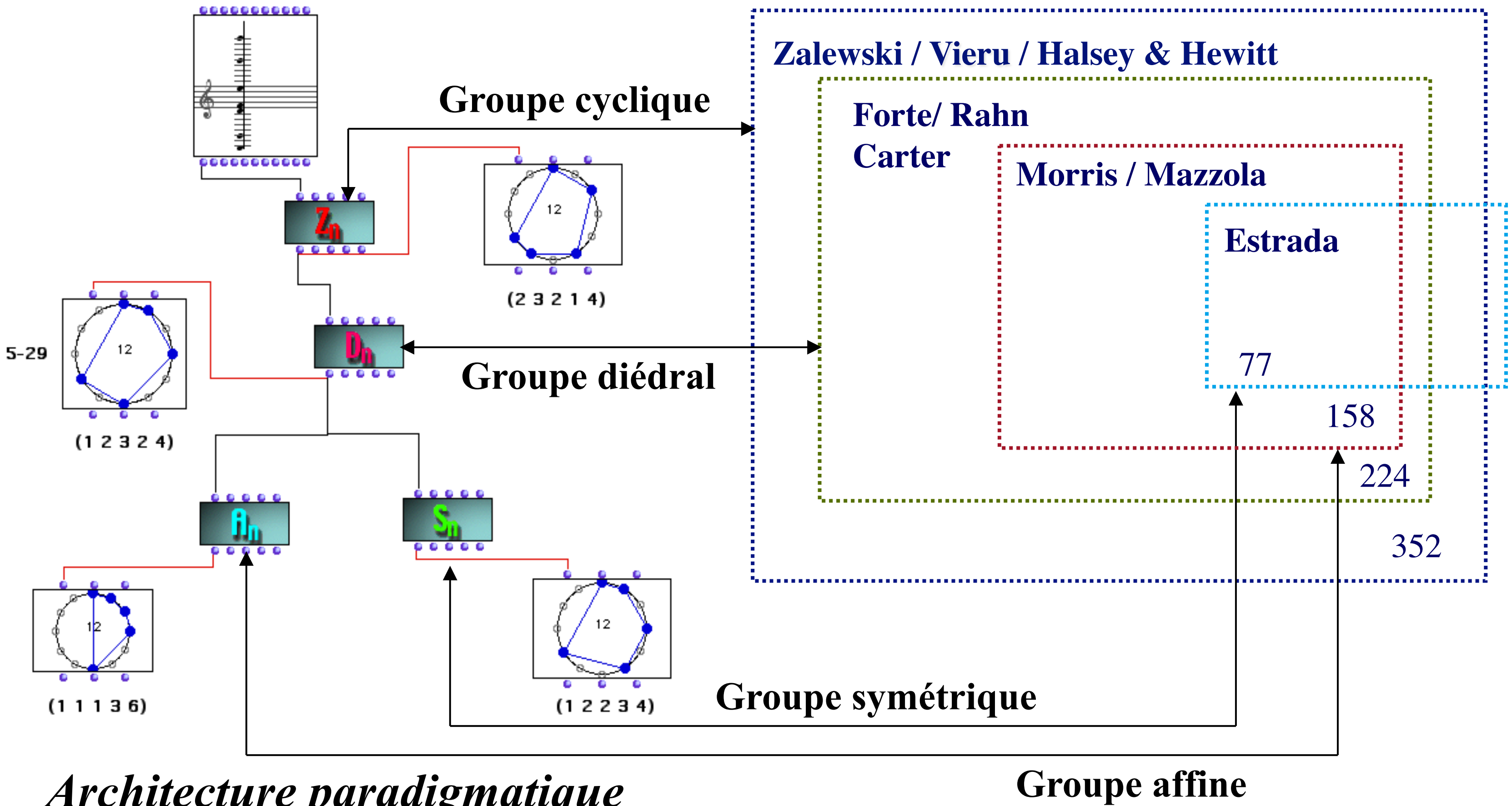


- **R. Tijdeman: "Decomposition of the Integers as a direct sum of two subsets", *Number Theory*, Cambridge University Press, 1995.**

The fundamental Lemma: *R* pave Z_n => *aR* pave Z_n $<a,n>=1$

Classification paradigmatique des structures musicales

$G\backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
C_{12}	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1	
D_{12}	1	6	12	29	38	50	38	29	12	6	1	1	**Set Theory**
$\mathrm{Aff}_1(Z_{12})$	1	5	9	21	25	34	25	21	9	5	1	1	



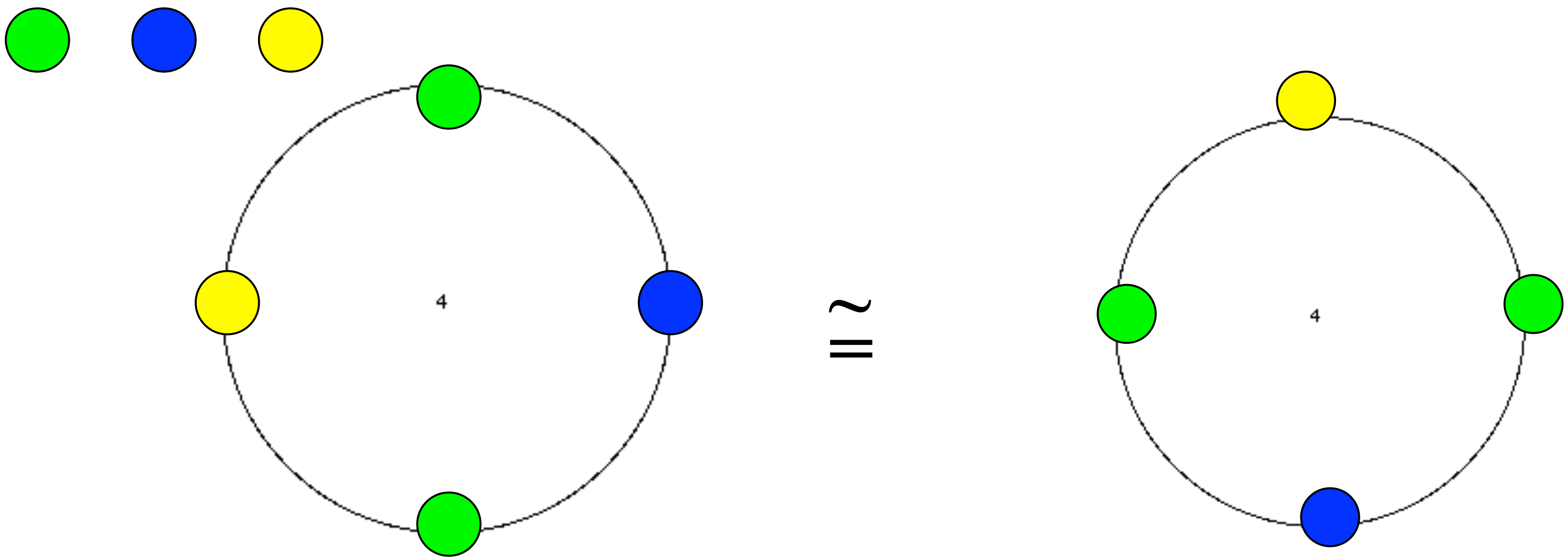
Architecture paradigmatique

Enumeration des orbites par rapport à l’action d’un groupe

Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |X^g|.$$

$$X^g = \{x\in X : gx=x\}$$



?

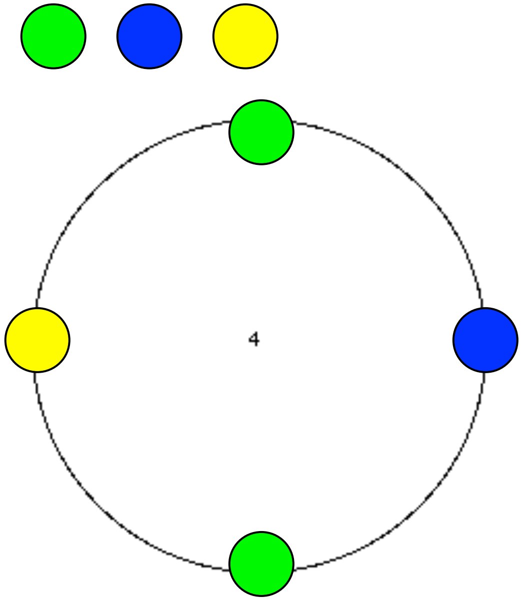
Trouver le nombre de configurations possibles

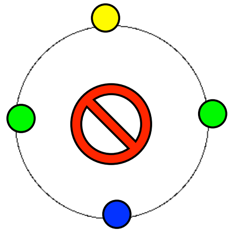
Enumération d'orbites par rapport à l'action d'un groupe

Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |X^g|.$$

$$X^g = \{x\in X : gx=x\}$$





Action de **Z/4Z**

T_0 = identité

T_1 = rotation de 90°

T_2 = rotation de 180°

T_3 = rotation de 270°

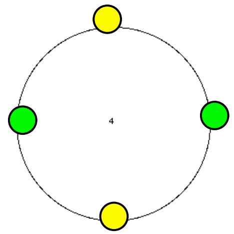
Configurations possibles = 3^4 = 81

T_0 fixe toute configuration => $|X^{T_0}|=81$

T_1 fixe toute configuration monochromes => $|X^{T_1}|=3$

T_3 idem

T_2 fixe toute configuration «double-diamètre » => $|X^{T_1}| = 3^2 = 9$



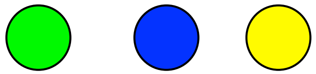
n = 1/4 (81+3+3+9) = 24

Enumération d’orbites par rapport à l’action d’un groupe

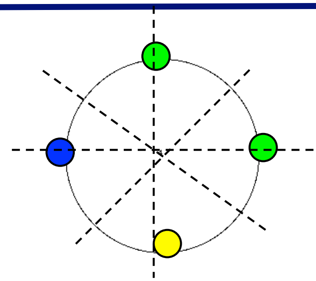
Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|.$$

$$X^g = \{x\in X : gx=x\}$$



Action de $\mathbf{Z_4}$



Transformation	*Action*	*Cycle representation*	*No. of cycles*	*Fixed configs.*	*Cycle type*	*Cycle index*
T_0	$0\to 0,\ 1\to 1,\ 2\to 2,\ 3\to 3$	(0)(1)(2)(3)	4	$3^4 = 81$	1^4	$t_1^{\ 4}$
T_1	$0\to 1\to 2\to 3\to 0$	(0 1 2 3)	1	$3^1 = 3$	4^1	$t_4^{\ 1}$
T_2	$0\to 2\to 0,\ 1\to 3\to 1$	(0 2)(1 3)	2	$3^2 = 9$	2^2	$t_2^{\ 2}$
T_3	$0\to 3\to 2\to 1\to 0$	(0 3 2 1)	1	$3^1 = 3$	4^1	$t_4^{\ 1}$

Julian Hook, « Why are there 29 Tetrachords? A Tutorial on Combinatorics and Enumeration in Music Theory », MTO, 13(4), 2007

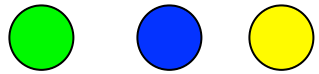
$$n = 1/4\ (81+3+3+9) = 24$$

Enumération d'orbites par rapport à l'action d'un groupe

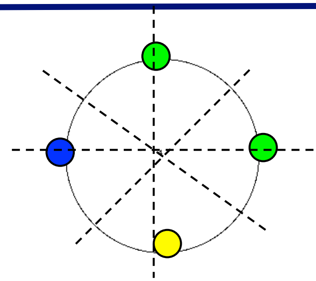
Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |X^g|.$$

$$X^g = \{x \in X : gx = x\}$$



Action de $\mathbf{D_4}$



Transformation	*Action*	*Cycle representation*	*No. of cycles*	*Fixed configs.*	*Cycle type*	*Cycle index*
T_0	$0\to0,\ 1\to1,\ 2\to2,\ 3\to3$	(0)(1)(2)(3)	4	$3^4 = 81$	1^4	$t_1^{\,4}$
T_1	$0\to1\to2\to3\to0$	(0 1 2 3)	1	$3^1 = 3$	4^1	$t_4^{\,1}$
T_2	$0\to2\to0,\ 1\to3\to1$	(0 2)(1 3)	2	$3^2 = 9$	2^2	$t_2^{\,2}$
T_3	$0\to3\to2\to1\to0$	(0 3 2 1)	1	$3^1 = 3$	4^1	$t_4^{\,1}$
I	$0\to0,\ 1\to3\to1,\ 2\to2$	(0)(1 3)(2)	3	$3^3 = 27$	$1^2 2^1$	$t_1^{\,2}t_2^{\,1}$
T_1I	$0\to1\to0,\ 2\to3\to2$	(0 1)(2 3)	2	$3^2 = 9$	2^2	$t_2^{\,2}$
T_2I	$0\to2\to0,\ 1\to1,\ 3\to3$	(0 2)(1)(3)	3	$3^3 = 27$	$1^2 2^1$	$t_1^{\,2}t_2^{\,1}$
T_3I	$0\to3\to0,\ 1\to2\to1$	(0 3)(1 2)	2	$3^2 = 9$	2^2	$t_2^{\,2}$

Julian Hook, « Why are there 29 Tetrachords? A Tutorial on Combinatorics and Enumeration in Music Theory », MTO, 13(4), 2007

$$n = 1/8\ (81+3+3+9+27+9+27+9) = 168/8=21$$

Enumération d'accords par rapport à l'action du groupe dihédrale

Transformation	*Cycle representation*	*No. of cycles*	*Fixed configs.*	*Cycle type*	*Cycle index*
T_0	(0)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(A)(B)	12	$2^{12} = 4096$	1^{12}	$t_1^{\ 12}$
T_1	(0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B)	1	$2^1 = 2$	12^1	$t_{12}^{\ 1}$
T_2	(0 2 4 6 8 A)(1 3 5 7 9 B)	2	$2^2 = 4$	6^2	$t_6^{\ 2}$
T_3	(0 3 6 9)(1 4 7 A)(2 5 8 B)	3	$2^3 = 8$	4^3	$t_4^{\ 3}$
T_4	(0 4 8)(1 5 9)(2 6 A)(3 7 B)	4	$2^4 = 16$	3^4	$t_3^{\ 4}$
T_5	(0 5 A 3 8 1 6 B 4 9 2 7)	1	$2^1 = 2$	12^1	$t_{12}^{\ 1}$
T_6	(0 6)(1 7)(2 8)(3 9)(4 A)(5 B)	6	$2^6 = 64$	2^6	$t_2^{\ 6}$
T_7	(0 7 2 9 4 B 6 1 8 3 A 5)	1	$2^1 = 2$	12^1	$t_{12}^{\ 1}$
T_8	(0 8 4)(1 9 5)(2 A 6)(3 B 7)	4	$2^4 = 16$	3^4	$t_3^{\ 4}$
T_9	(0 9 6 3)(1 A 7 4)(2 B 8 5)	3	$2^3 = 8$	4^3	$t_4^{\ 3}$
T_{10}	(0 A 8 6 4 2)(1 B 9 7 5 3)	2	$2^2 = 4$	6^2	$t_6^{\ 2}$
T_{11}	(0 B A 9 8 7 6 5 4 3 2 1)	1	$2^1 = 2$	12^1	$t_{12}^{\ 1}$
I	(0)(1 B)(2 A)(3 9)(4 8)(5 7)(6)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^{\ 2} t_2^{\ 5}$
T_1I	(0 1)(2 B)(3 A)(4 9)(5 8)(6 7)	6	$2^6 = 64$	2^6	$t_2^{\ 6}$
T_2I	(0 2)(1)(3 B)(4 A)(5 9)(6 8)(7)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^{\ 2} t_2^{\ 5}$
T_3I	(0 3)(1 2)(4 B)(5 A)(6 9)(7 8)	6	$2^6 = 64$	2^6	$t_2^{\ 6}$
T_4I	(0 4)(1 3)(2)(5 B)(6 A)(7 9)(8)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^{\ 2} t_2^{\ 5}$
T_5I	(0 5)(1 4)(2 3)(6 B)(7 A)(8 9)	6	$2^6 = 64$	2^6	$t_2^{\ 6}$
T_6I	(0 6)(1 5)(2 4)(3)(7 B)(8 A)(9)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^{\ 2} t_2^{\ 5}$
T_7I	(0 7)(1 6)(2 5)(3 4)(8 B)(9 A)	6	$2^6 = 64$	2^6	$t_2^{\ 6}$
T_8I	(0 8)(1 7)(2 6)(3 5)(4)(9 B)(A)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^{\ 2} t_2^{\ 5}$
T_9I	(0 9)(1 8)(2 7)(3 6)(4 5)(A B)	6	$2^6 = 64$	2^6	$t_2^{\ 6}$
$T_{10}I$	(0 A)(1 9)(2 8)(3 7)(4 6)(5)(B)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^{\ 2} t_2^{\ 5}$
$T_{11}I$	(0 B)(1 A)(2 9)(3 8)(4 7)(5 6)	6	$2^6 = 64$	2^6	$t_2^{\ 6}$

Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |X^g|.$$

$X^g = \{x \in X : gx = x\}$

Action de $\mathbf{D_{12}}$

(Hook, MTO)

d'accords = 1/12[4096+2+4+8+16+2+64+2+16+8+4+2]=4224/12=352

d'accords = 1/24[4224+1152] = 224

Enumération d'accords et dans un système tempéré

(Reiner, 1985)

Z_n

$$\#\text{ of }k\text{-chords} = \frac{1}{n}\sum_{j|(n,k)} \phi(j)\binom{n/j}{k/j} = \frac{1}{n}\Phi_n(k),$$

D_n

$$\#\text{ of }k\text{-chords} = \begin{cases} \frac{1}{2n}\left[\Phi_n(k) + n\binom{(n-1)/2}{[k/2]}\right], & \text{if } n \text{ is odd,} \\ \frac{1}{2n}\left[\Phi_n(k) + n\binom{n/2}{k/2}\right], & \text{if } n \text{ is even and } k \text{ is even,} \\ \frac{1}{2n}\left[\Phi_n(k) + n\binom{(n/2)-1}{[k/2]}\right], & \text{if } n \text{ is even and } k \text{ is odd.} \end{cases}$$

D_n

$k =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
number	1	1	6	12	29	38	50	38	29	12	6	1	1

- D. Halsey & E. Hewitt: « Eine gruppentheoretische Methode in der Musik-theorie », *Jahresber. Der Dt. Math.-Vereinigung*, 80, 1978.
- D. Reiner: «Enumeration in Music Theory», *Amer. Math. Month*. 92:51-54, 1985
- H. Fripertinger: «Enumeration in Musical Theory», *Beiträge zur Elektr. Musik*,1,1992
- R.C. Read: « Combinatorial problems in the theory of music », *Discrete Math.*, 1997
- H. Fripertinger: « Enumeration of mosaics », *Discrete Math.*, 1999
- H. Fripertinger: « Enumeration of non-isomorphic canons », *Tatra Mt. Math. Publ.*, 2001
- M. Broué : « Les tonalités musicales vues par un mathématicien », *Le temps des savoirs, Revue de l'Institut Universitaire de France,* 2002
- David J. Hunter & Paul T. von Hippel : « How Rare Is Symmetry in Musical 12-Tone Rows? », *The American Mathematical Monthly*, Vol. 110, No. 2., Feb., 2003
- H. Fripertinger: « Tiling problems in music theory », in *Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory* (Mazzola, Noll, Puebla ed., Epos, 2004)
- Rachel W. Hall & P. Klingsberg: « Asymmetric Rhythms, Tiling Canons, and Burnside's Lemma », *Bridge Proceedings*, 2004
- …

Pavage de la ligne et conjecture spectrale

Un domaine de R^n est spéctral <=> A pave R^n par translation

Conjecture de Fuglede (1974) :
« Commuting Self-Adjoint Partial Differential Operators and a Group Theoretic Problem », ***J. Func. Anal.*** **16, 101-121, 1974.**

(Conjecture fausse en dimension ***n*≥3 ouverte en dimension 1 et 2)**

DEFINITION 6 *A subset A of some vector space (say* $\mathbb{R}^n$*) is spectral iff it admits a Hilbert base of exponentials, i.e. if any map* $f \in L^2(A)$ *can be written*

$$f(x) = \sum f_k \exp(2i\pi\lambda_k.x)$$

for some fixed family of vectors $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *where the maps* $e_k : x \mapsto \exp(2i\pi\lambda_k.x)$ *are mutually orthogonal (i.e.* $\int_A \overline{e_k} e_j = 0$ *whenever* $k \neq j$*).*

WOLFRAM RESEARCH

mathworld.wolfram.com

Fuglede's Conjecture

CONTRIBUTE TO THIS ENTRY

Conjecture de Fuglede et canons rythmiques mosaïques

WOLFRAMRESEARCH mathworld.wolfram.com

Fuglede's Conjecture

CONTRIBUTE TO THIS ENTRY

Portions of this entry contributed by Emmanuel Amiot

Fuglede (1974) conjectured that a domain Ω admits an operator spectrum iff it is possible to tile $\mathbb{R}^d$ by a family of translates of Ω. Fuglede proved the conjecture in the special case that the tiling set or the spectrum are lattice subsets of $\mathbb{R}^d$ and Iosevich *et al.* (1999) proved that no smooth symmetric convex body Ω with at least one point of nonvanishing Gaussian curvature can admit an orthogonal basis of exponentials.

Using complex Hadamard matrices of orders 6 and 12, Tao (2003) constructed counterexamples to the conjecture in some small Abelian groups, and lifted these to counterexamples in $\mathbb{R}^5$ or $\mathbb{R}^{11}$.

However, the conjecture has been proved in a great number of special cases (e.g., all convex bodies) and remains an open problem in small dimensions. For example, it has been shown in dimension 1 that a nice algebraic characterization of finite sets tiling $\mathbb{Z}$ indeed implies one side of Fuglede's conjecture (Coven-Meyerowitz 1998). Furthermore, it is sufficient to prove these conditions when the tiling gives a factorization of a non-Hajós cyclic group (Amiot).

Un domaine de R^n est spéctral <=> A pave R^n par translation

- **Fausse pour *n*≥3**
- **Ouverte pour *n*=1 et *n*=2**

Les conjectures de Minkowski/Fuglede et les canons rythmiques

Dans le prolongement de la Conjecture de Minkowsky

- R. Tijdeman: "Decomposition of the Integers as a direct sum of two subsets", *Number Theory*, Cambridge University Press, 1995. The fundamental Lemma: A tiles $\mathbf{Z}_n$ => pA tiles $\mathbf{Z}_n$ when $<p,n>=1$

- E. Coven & A. Meyerowitz: "Tiling the integers with translates of one finite set", *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999
T1 + T2 => tile
Tile => T1

Dans le prolongement de la Conjecture de Fuglede

- I. Laba : "The spectral set conjecture and multiplicative properties of roots of polynomials", *J. Lond Math Soc*, 2002
T1 + T2 => spectral
T2 => spectral
spectral => T1

- E. Amiot : "A propos des canons rythmiques", *Gazette des Mathématiciens*, n°106, Octobre 2005.
if A tiles with period n and $\mathbf{Z}_n$ is Hajos => A has T2 (=> A is spectral)

Si A pave mais il n'est pas spéctral => A est le rythme d'un canon de Vuza

Racines de l'unité et polynomes cyclotomiques

Racines *n*-ièmes de l'unité : $z^n = 1$

n=3 $\longrightarrow$ $\left\{1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$

n=4 $\longrightarrow$ $\{1, +i, -1, -i\}$

Le racines *n*-ièmes de l'unité peuvent s'écrire sous la forme :

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad (k, n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq k < n)$$

Elles sont exactement les racines du polynôme : $P(X) = X^n - 1$

Le racines *n*-ièmes primitives de l'unité : $e^{\frac{2ki\pi}{n}}$ $(n,k)=1$

Elles sont exactement les racines du polynôme cyclotomique :

$$\Phi_n(X) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)} (X - z_k) \longleftrightarrow X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

Pavage de la ligne et polynômes cyclotomiques

$$\Phi_n(X) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)} (X - z_k) \longleftrightarrow X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

$$\Phi_1(X) = X - 1 \longleftrightarrow (-1, 1)$$
$$\Phi_2(X) = 1 + X \longleftrightarrow (1, 1)$$
$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2 \longleftrightarrow (1, 1, 1)$$
$$\Phi_4(X) = 1 + X^2 \longleftrightarrow (1, 0, 1)$$
$$\Phi_5(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 \longleftrightarrow (1, 1, 1, 1, 1)$$
$$\Phi_6(X) = 1 - X + X^2 \longleftrightarrow (1, -1, 1)$$

$$\Delta_n = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{n-1} = \prod_{\substack{d \mid n \\ d \neq 1}} \Phi_d(X)$$

$$\Delta_4 = 1 + X + X^2 + X^3 = \Phi_2(X) \times \Phi_4(X)$$

$$A(x) \times B(x) = (A \oplus B)(x) \equiv 1 + x + \ldots x^{n-1} \pmod{X^n - 1}$$

Bonnes et mauvaises factorisations

$$\Delta_n = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{n-1} = \prod_{\substack{d \mid n \\ d \neq 1}} \Phi_d(X)$$

$$\Phi_2(X) = 1 + X \longleftrightarrow (1, 1)$$

$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2 \longleftrightarrow (1, 1, 1)$$

$$\Phi_4(X) = 1 + X^2 \longleftrightarrow (1, 0, 1)$$

$$\Phi_6(X) = 1 - X + X^2 \longleftrightarrow (1, -1, 1)$$

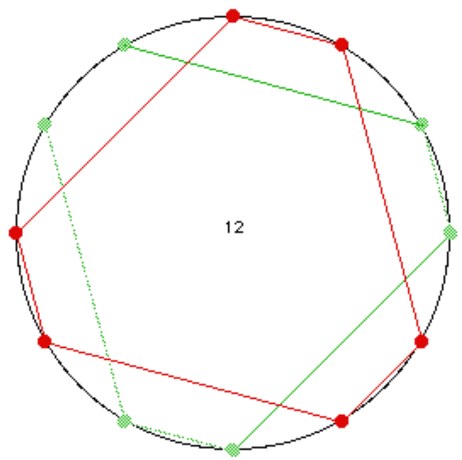
$$\Delta_{12} = 1 + X + \ldots + X^{11} = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_4 \times \Phi_6 \times \Phi_{12}$$

$$A(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12} = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9$$

$$B(X) = \Phi_4 = 1 + X^2$$

$$S = \{0, 2\}$$

$$R = \{0, 1, 4, 5, 8, 9\}$$



$$A^*(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_{12}$$

$$B^*(X) = \Phi_4 \times \Phi_6$$

Cette décomposition ne marche pas

Les conditions de Coven-Meyerowitz

• E. Coven & A. Meyerowitz : “Tiling the integers with translates of one finite set”, *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999

There is no loss of generality in restricting attention to translates of a finite set A of *nonnegative* integers. Then $A(x) = \sum_{a\in A} x^a$ is a polynomial such that $\#A = A(1)$. Let S_A be the set of prime powers s such that the s-th cyclotomic polynomial $\Phi_s(x)$ divides $A(x)$. Consider the following conditions on $A(x)$.

(T1) $A(1) = \prod_{s\in S_A} \Phi_s(1)$.
(T2) If $s_1, \ldots, s_m \in S_A$ are powers of distinct primes, then $\Phi_{s_1 \cdots s_m}(x)$ divides $A(x)$.

Theorem A. *If $A(x)$ satisfies (T1) and (T2), then A tiles the integers.*

Theorem B1. *If A tiles the integers, then $A(x)$ satisfies (T1).*

Theorem B2. *If A tiles the integers and $\#A$ has at most two prime factors, then $A(x)$ satisfies (T2).*

Corollary. *If $\#A$ has at most two prime factors, then A tiles the integers if and only if $A(x)$ satisfies (T1) and (T2).*

Les conditions de Coven-Meyerowitz

(T1) $A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1)$.
(T2) If $s_1, \ldots, s_m \in S_A$ are powers of distinct primes, then $\Phi_{s_1 \cdots s_m}(x)$ divides $A(x)$.

Theorem A. *If $A(x)$ satisfies (T1) and (T2), then* **A** *tiles the integers.*

$$A(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12} = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9$$

$$\Phi_2(X) = 1 + X$$
$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$$

(T1) $A(1) = 6 = \Phi_2(1) \times \Phi_3(1) = 2 \times 3$

(T2) $\Phi_2 \mid A(X)$ et $\Phi_3 \mid A(X) \Rightarrow \Phi_{2\times 3} \mid A(X)$

Theorem B1. *If A tiles the integers, then $A(x)$ satisfies (T1).*

$$A^*(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_{12} = 1 + 2X + 2X^2 - X^3 - X^4 + X^5 + 2X^6 + X^7$$

$$A^*(1) = 7 \neq \Phi_2 \times (1) \times \Phi_3(1) = 6$$

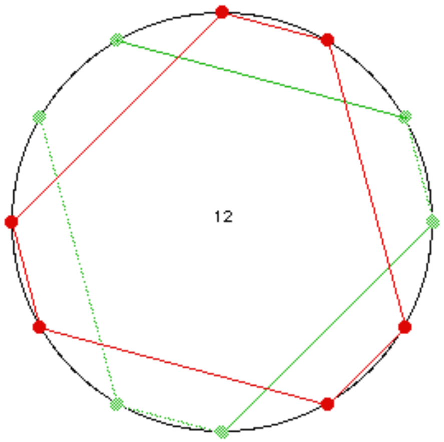
Conjecture de Fuglede et canons rythmiques mosaïques

- E. Coven & A. Meyerowitz: “Tiling the integers with translates of one finite set”, 1999

Deux conditions de C&M :

T1 + T2 => pavage

pavage => T1



$$A(X) = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9 = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12}$$

$$\Phi_2(X) = 1 + X$$

$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$$

$$\text{(T1)}\ A(1) = 6 = \Phi_2(1) \times \Phi_3(1) = 2 \times 3$$

$$\text{(T2)}\ \Phi_2 \mid A(X) \ \text{ et } \Phi_3 \mid A(X) \ \Rightarrow \Phi_{2\times 3} \mid A(X)$$

Canons de Vuza de période *n*

72

108 120 144 168 180

200 216 240 252 264 270 280 288

300 312 324 336 360 378 392 396

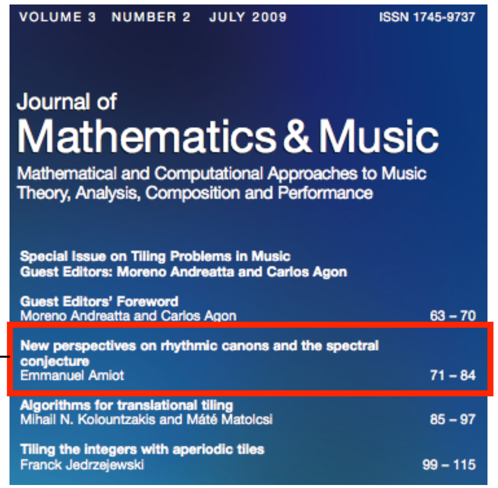
400 408 432 440 450 456 468 480

500 504 520 528 540 552 560 576 588 594

600 612 616 624 648 672 675 680 684 696

700 702 720 728 744 750 756 760 784 792

800 810 816 828 864 880 882 888…



Si *A* pave mais il n’est pas spéctral => *A* est le rythme d’un canon de Vuza

Transformée de Fourier discrète et pavage

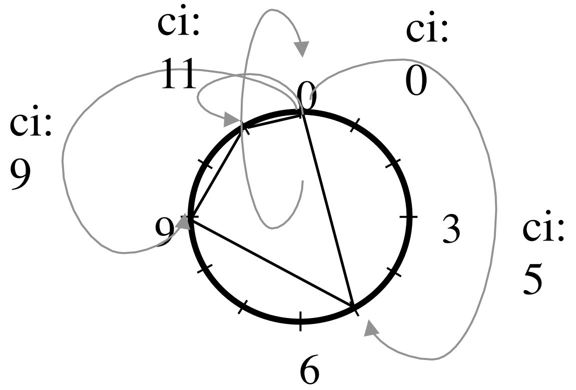
TILING

Let $Z_A = \{ t \in \mathbb{Z}_c, F_A(t)=0 \}$

A tiles $\mathbb{Z}_c$ when equivalently:

- There exists B, $A \oplus B = \mathbb{Z}_c$
- $1_A \star 1_B = 1$
- $F_A \times F_B\ (t) = 1 + e^{-2i\pi t/c} + \dots e^{-2i\pi t(c-1)/c}$ (0 unless t=0)
- $Z_A \cup Z_B = \{1,2 \dots c-1\}$ AND Card A × Card B = c
- $IC_A \star IC_B = IC(\mathbb{Z}_c)=c$ and Card A × Card B = c

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$



$A = \{0, 5, 9, 11\}$
$IC_A(k) = 1\ \forall\ k = 1 \dots 11$

$$IC_A(k) = \mathrm{Card}\{(x,y) \in A \times A \mid x + k = y\}$$

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

E. Amiot, « New Perspectives on Rhythmic Canons and the Spectral Conjecture », *Journal of Mathematics and Music*, 2009.

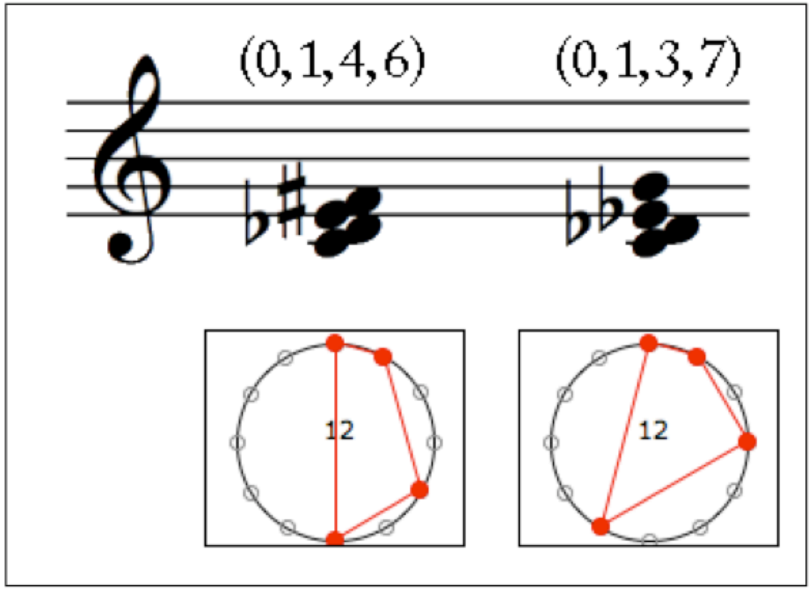
Pavage et Z-relation (homométrie)

- Deux ensembles sont en Z-relations s'ils ont le même module de la DFT

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

$$\mathcal{F}(IC_A) = \mathcal{F}_A \times \mathcal{F}_{-A} = |\mathcal{F}_A|^2$$



➔ **Reconstruction de la phase**

Cf. D. Ghisi, J. Mandereau, E. Amiot, C. Agon, M. Andreatta, "Generalized Z-relation and Homometric Theory", paper in progress, to be submitted to the *Journal of Mathematics and Music*

A musical offering:

Theorem:

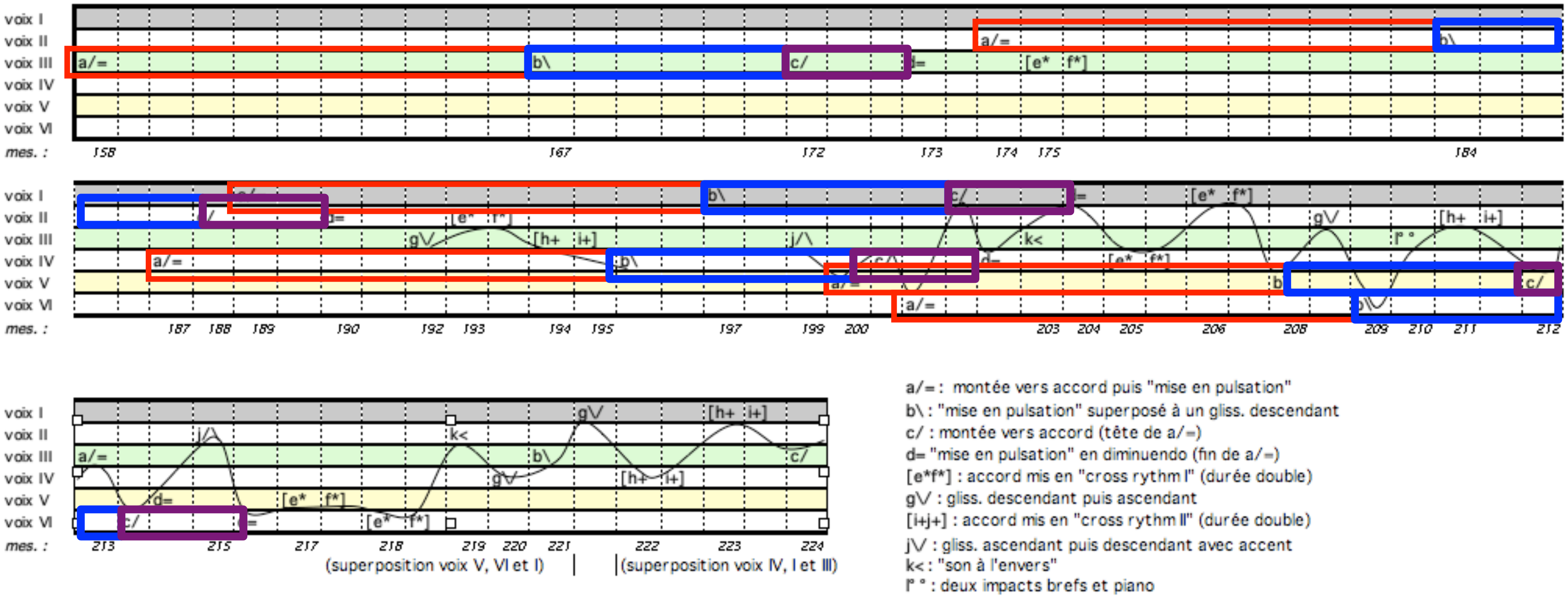
If A tiles with B and A' has the same IC, then A' tiles with B, too.

E. Amiot, « New Perspectives on Rhythmic Canons and the Spectral Conjecture », *Journal of Mathematics and Music*, 2009.

Fabien Lévy

Canons de Vuza pour une musique « morphologique »

• *Coïncidences* (pour 33 musiciens, 1999-2007)



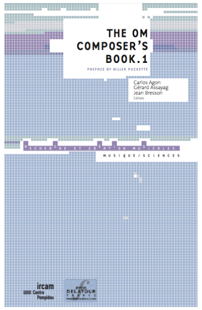
Coïncidences - Fabien Levy : déroulement du canon (mes. 158 à 226)
(chaque impact fait 3 temps)

Interprètes : Tokyo Symphony Orchestra, Dir.: Kazuyoshi Akiyama, 05/09/2007, Suntory Hall, Tokyo, Japon

Georges Bloch

Stratégies compositionnelles à partir d'un modèle formel

- **Réduction d'un canon par auto-similarité**
- **Modulations métriques entre canons**
- **Canons mosaïques et IAO (*OMax*)**



- ***Projet Beyeler* (2001)**
- ***Projet Hitchcock***
- ***Visite des tours de la cathédrale de Reims***
- ***Noël des Chasseurs***
- ***Canons à marcher***
- ***Canon à eau***
- ***Harawun* (2004)**
- ***L'Homme du champ* (2005)**
- ***A piece based on Monk* (2007)**
- ***Peking Duck Soup* (2008)**

- ***A piece based on Monk* (2007) (« Well You Need'nt »)**

RIA
ROYAL IRISH ACADEMY

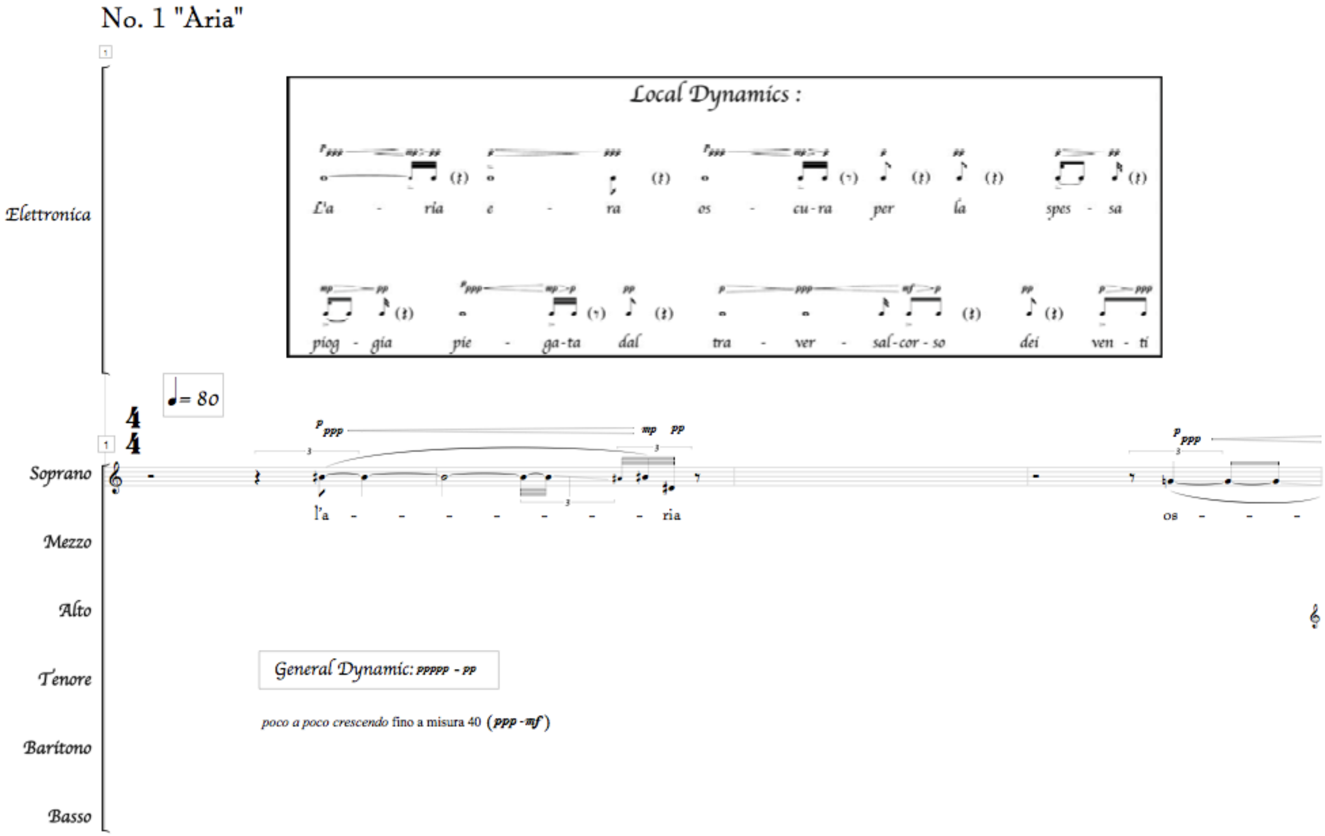
MONDAY, MARCH 26, 2007
SEED WORKSHOP on MATHEMATICS AND MUSIC

Mauro Lanza

Canons de Vuza et périodicités locales

• *La descrizione del diluvio* (Ricordi, 2007-2008)

Canon à 14 voix sur le pattern rythmique :
(1 3 25 27 1 3 11 14 27 1 3 25 27 4 25 27 1 3 25 14 13 1 3 25 27 1 3 52)



6 voix sont en live et 8 dans l'électronique. L'unité est la double-croche de triolet. Le choix des notes et des durées est fait en cherchant à souligner certaines ***quasi-périodicités*** *du canon de Vuza, et cela donne à chaque voix un caractère beaucoup plus "redondant".*

Mauro Lanza

Canons de Vuza et périodicités locales

• *La descrizione del diluvio* (Ricordi, 2007-2008)

[…] Le choix des notes et des durées est fait en cherchant à souligner certaines quasi-périodicités du canon de Vuza, et cela donne à chaque voix un caractère beaucoup plus "redondant".

(1 3 25 27 1 3 11 14 27 1 3 25 27 4 25 27 1 3 25 14 13 1 3 25 27 1 3 52)

(*1 3 25 27 1 3* 11 14 27 1 3 25 27 4 25 27 1 3 25 14 13 *1 3 25 27 1 3* 52)

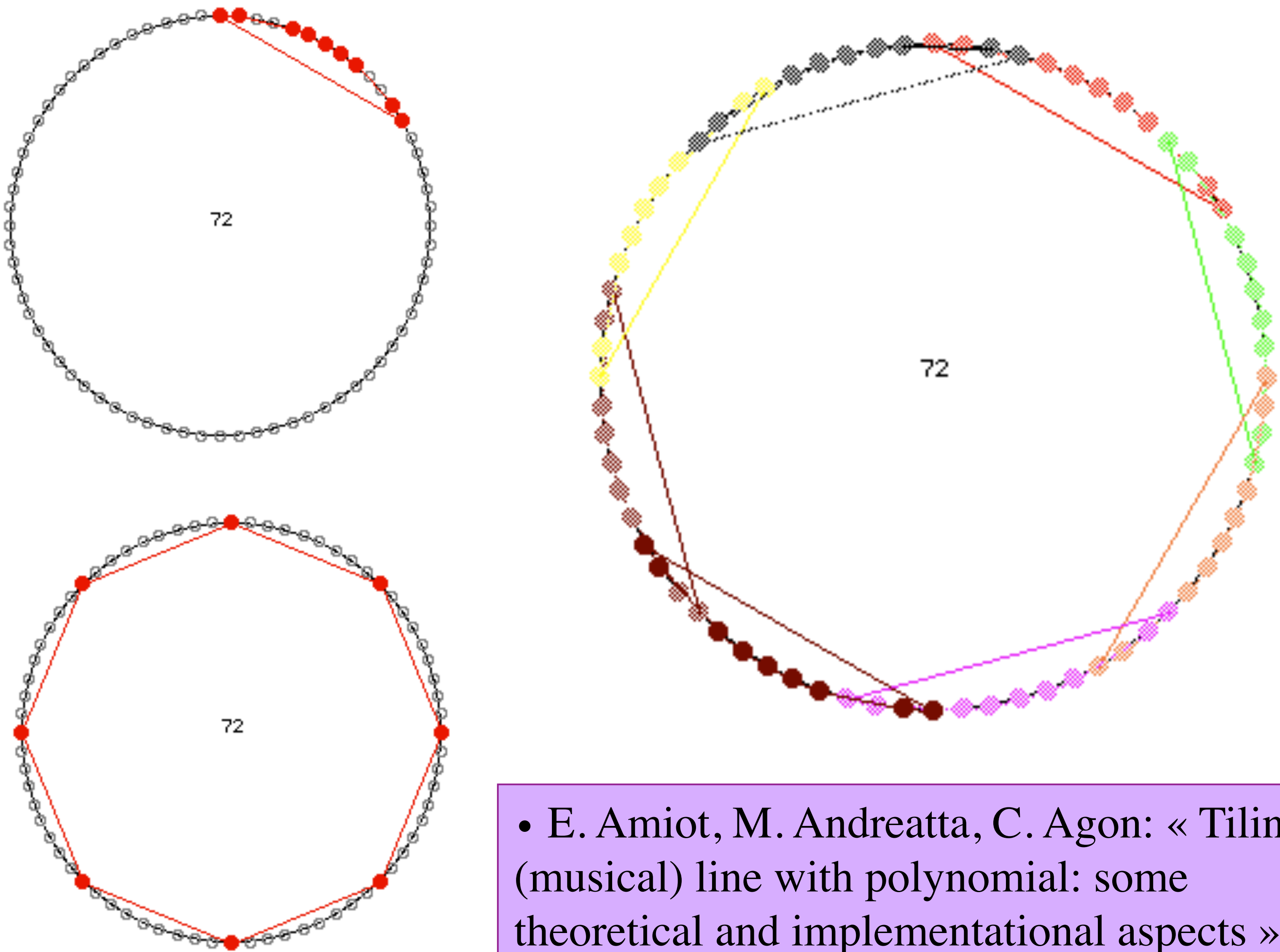
(*1 3 25 27* 1 3 11 14 27 *1 3 25 27* 4 25 27 1 3 25 14 13 *1 3 25 27* 1 3 52)

(*1 3 25* 27 1 3 11 14 27 *1 3 25* 27 4 25 27 *1 3 25* 14 13 *1 3 25* 27 1 3 52)

(*1 3* 25 27 *1 3* 11 14 27 *1 3* 25 27 4 25 27 *1 3* 25 14 13 *1 3* 25 27 *1 3* 52)

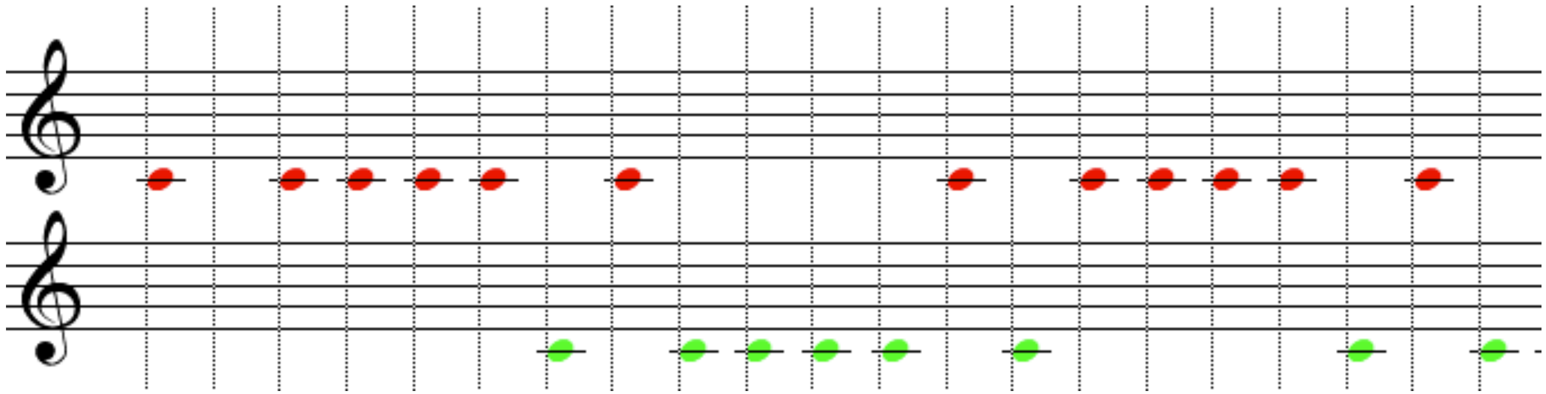
=> *OpenMusic*

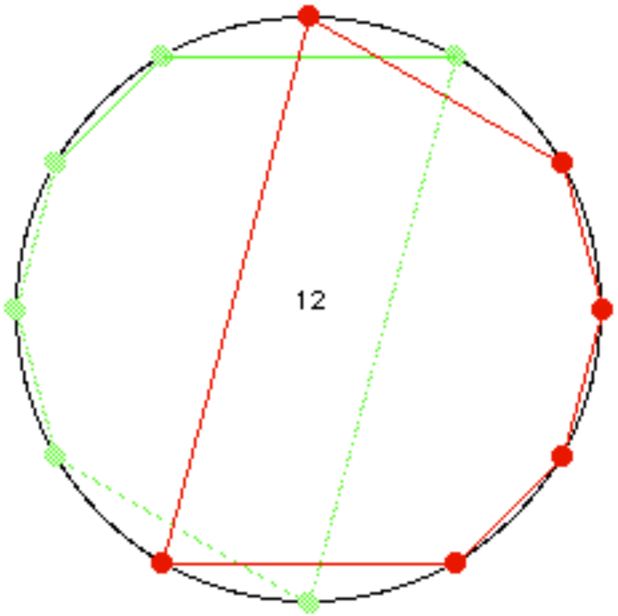
La famille des « canons cyclotomiques »



• E. Amiot, M. Andreatta, C. Agon: « Tiling the (musical) line with polynomial: some theoretical and implementational aspects », *ICMC*, Barcelona, 2005, pp.227-230.

Canons mosaïques par translation et augmentation

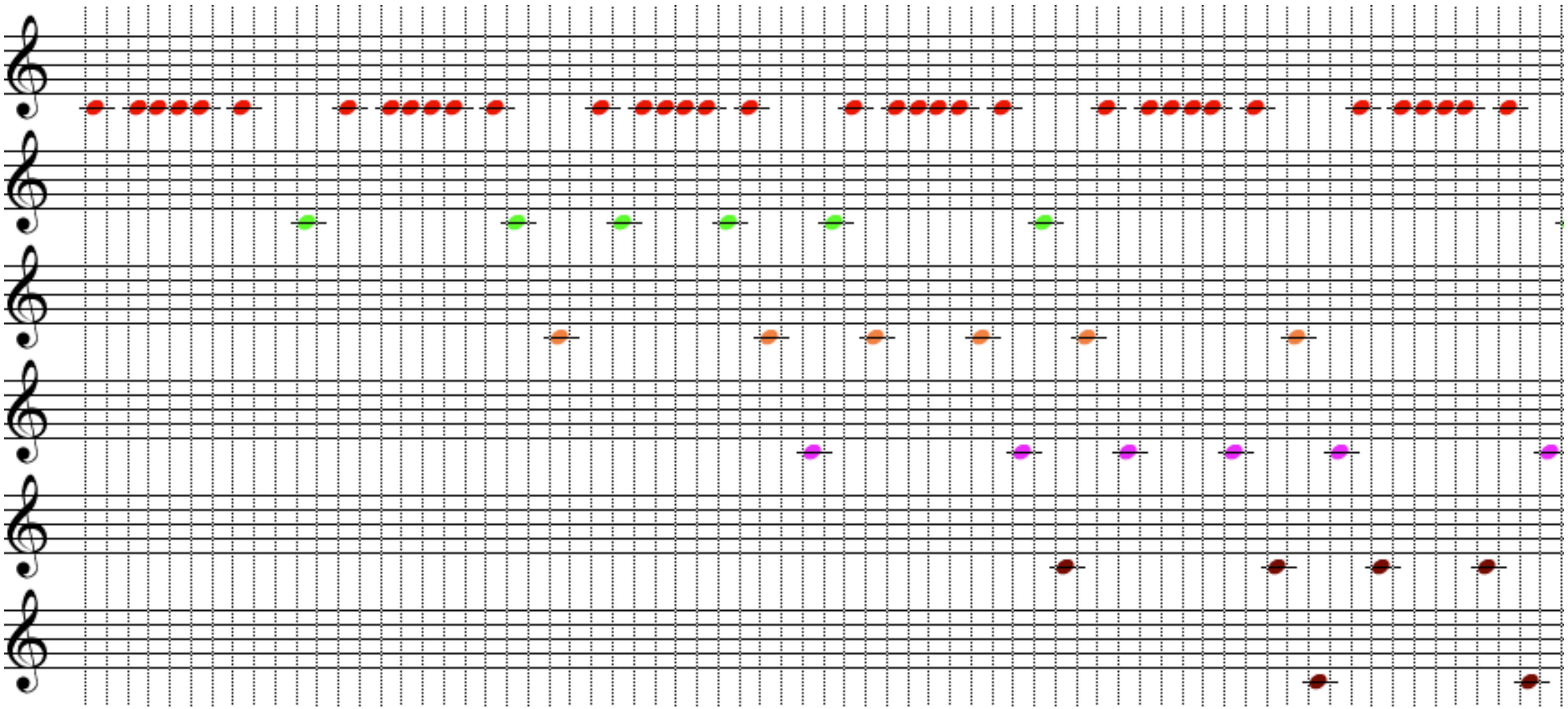





```
(((0 1 2 3 4 6) ((1 11)))
((0 1 2 3 4 5) ((1 11) (1 1)))
((0 1 2 3 5 7) ((1 11) (1 7)))
((0 1 3 4 7 8) ((1 5)))
((0 1 2 3 6 7) ((1 11)))
((0 1 3 4 6 9) ((1 11) (1 5)))
((0 1 3 6 7 9) ((1 11) (1 5)))
((0 1 2 6 7 8) ((1 11) (1 7) (1 5) (1 1)))
((0 1 4 5 8 9) ((1 11) (1 7) (1 5) (1 1)))
((0 1 2 5 6 7) ((1 7) (1 5)))
((0 2 3 4 5 7) ((1 11) (1 7) (1 5) (1 1)))
((0 1 4 5 6 8) ((1 11) (1 7)))
((0 1 2 4 5 7) ((1 5)))
((0 1 3 4 5 8) ((1 5) (1 1)))
((0 1 2 4 5 8) ((1 11)))
((0 1 2 4 6 8) ((1 11) (1 7)))
((0 2 3 4 6 8) ((1 11)))
((0 2 4 6 8 10) ((1 11) (1 7) (1 5) (1 1))))
```

Augmented Tiling Canons ou l'action du groupe affine

(en collaboration avec Thomas Noll)

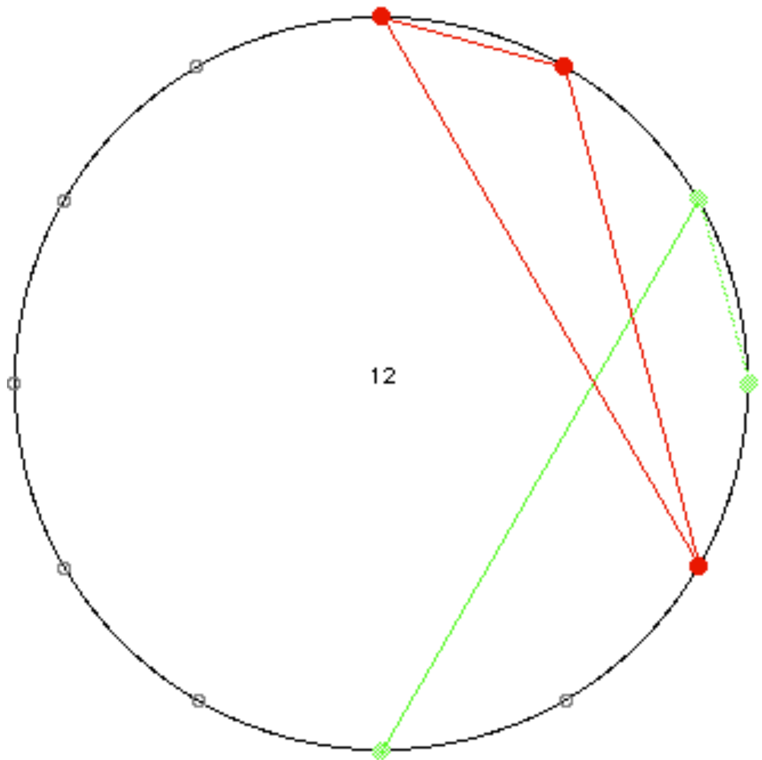


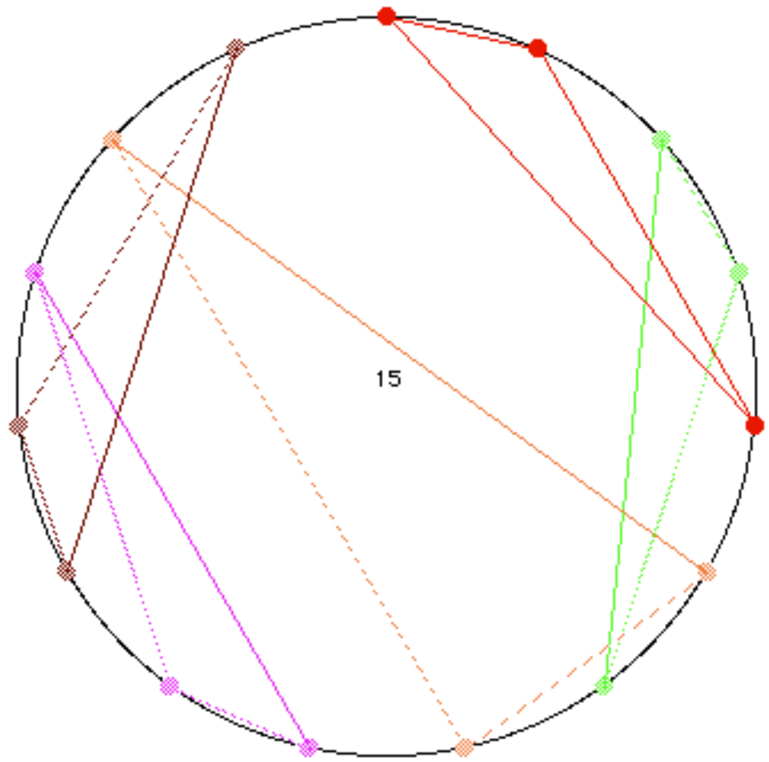
=> *OpenMusic*

Tiling the line and/or circle with augmentations

- **Tom Johnson (2001): tiling the line with a given rhythmic pattern**
  - **ex. (0 1 4). Does it tile? With augmentations? With which period?**

• **Theorem (Amiot, 2002) :** ***Any tiling of the line with the pattern* (0 1 4) *and its augmentations is periodic and the period is equal to a multiple of 15***



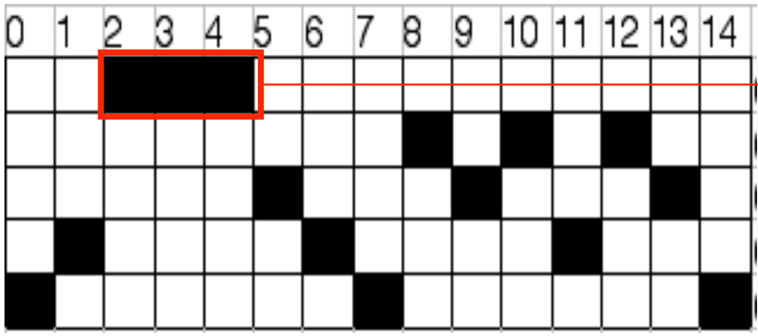


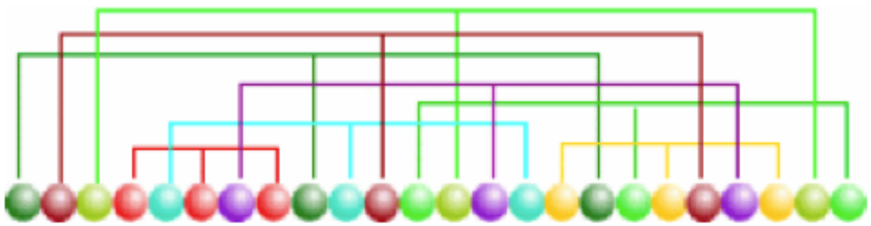
$n = 12$

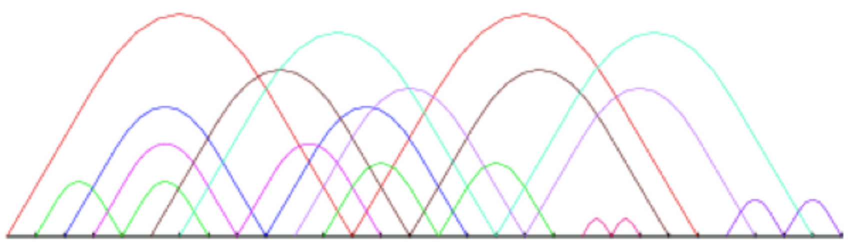
$n = 15$

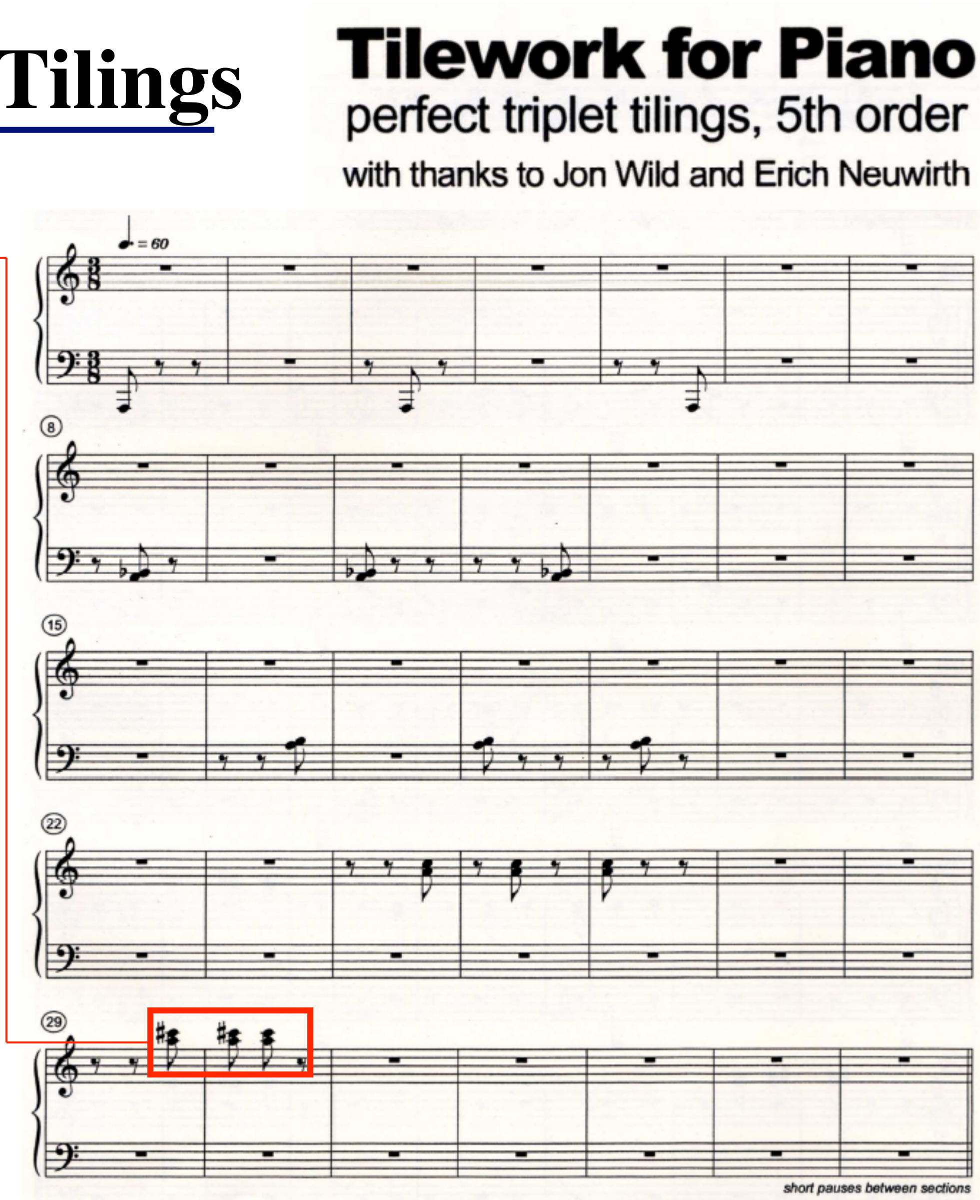
Tom Johnson's « Self-Similar Melodies »

Tom Johnson's Perfect Tilings



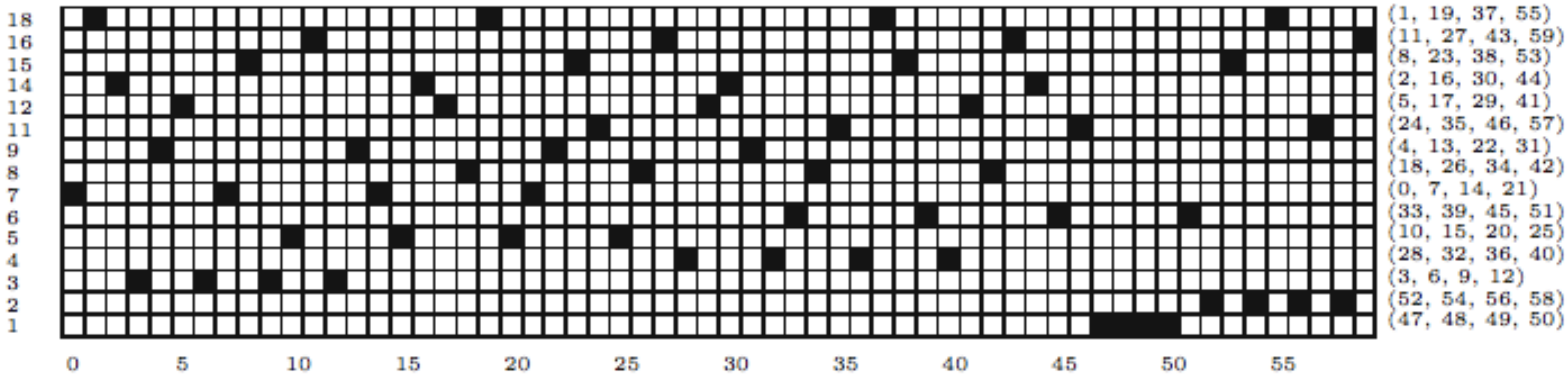


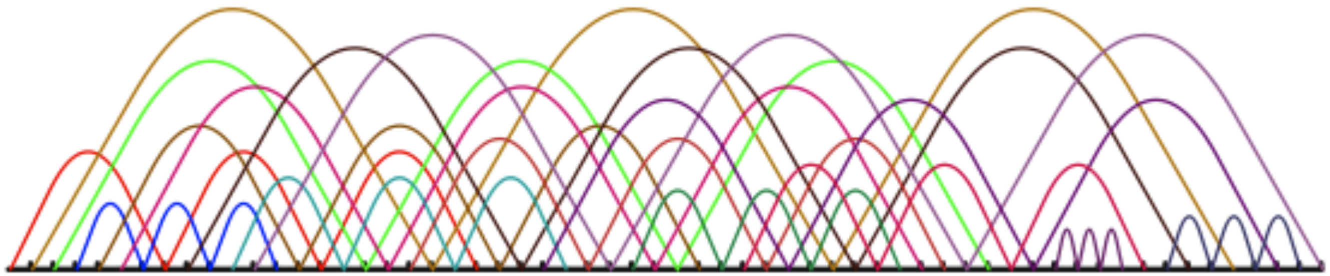




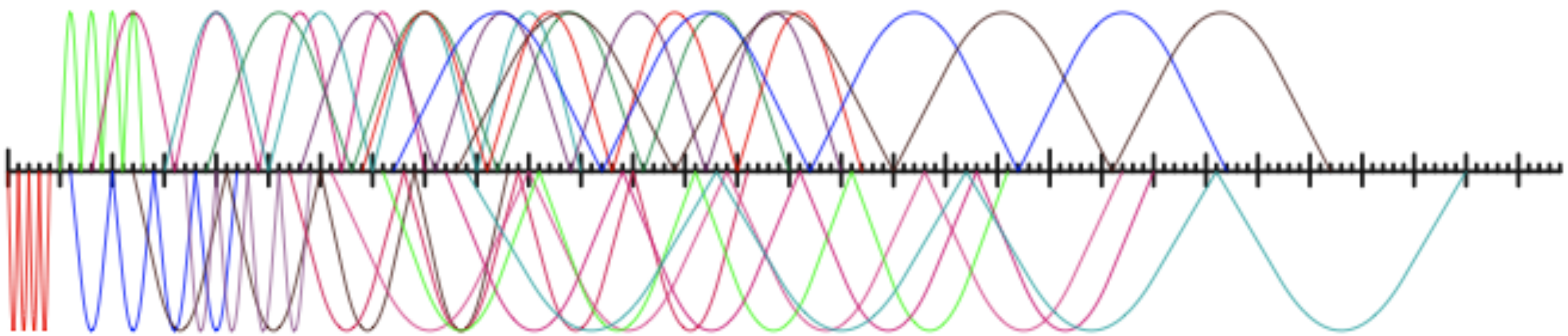
Jean-Paul Davalan, « Perfect Rhythmic Tilings » (to appear in *Perspectives of New Music*, special issue on Tiling Problems in Music, 2011

Perfect Rhythmic Tilings and open problems





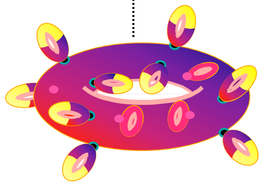
Does it exist a quintuple perfect tiling canon?



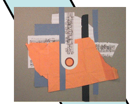
Quelle est la place de la cognition ?

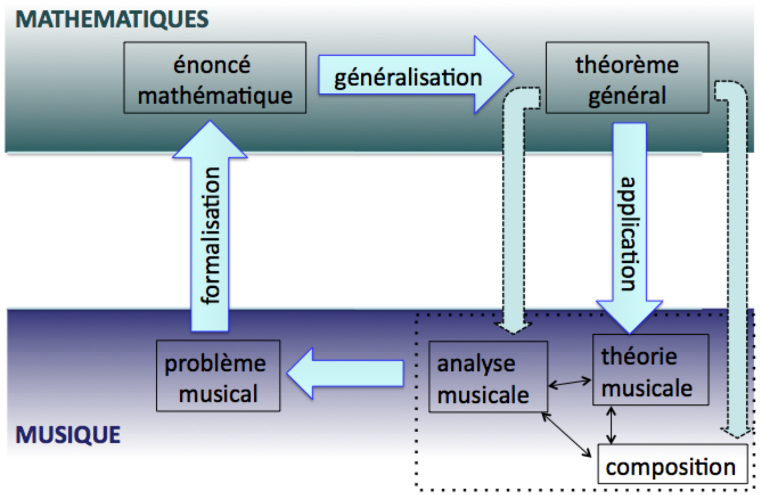
http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/Cognition.html

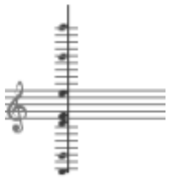
Représentations mathématiques



Maths & Musique



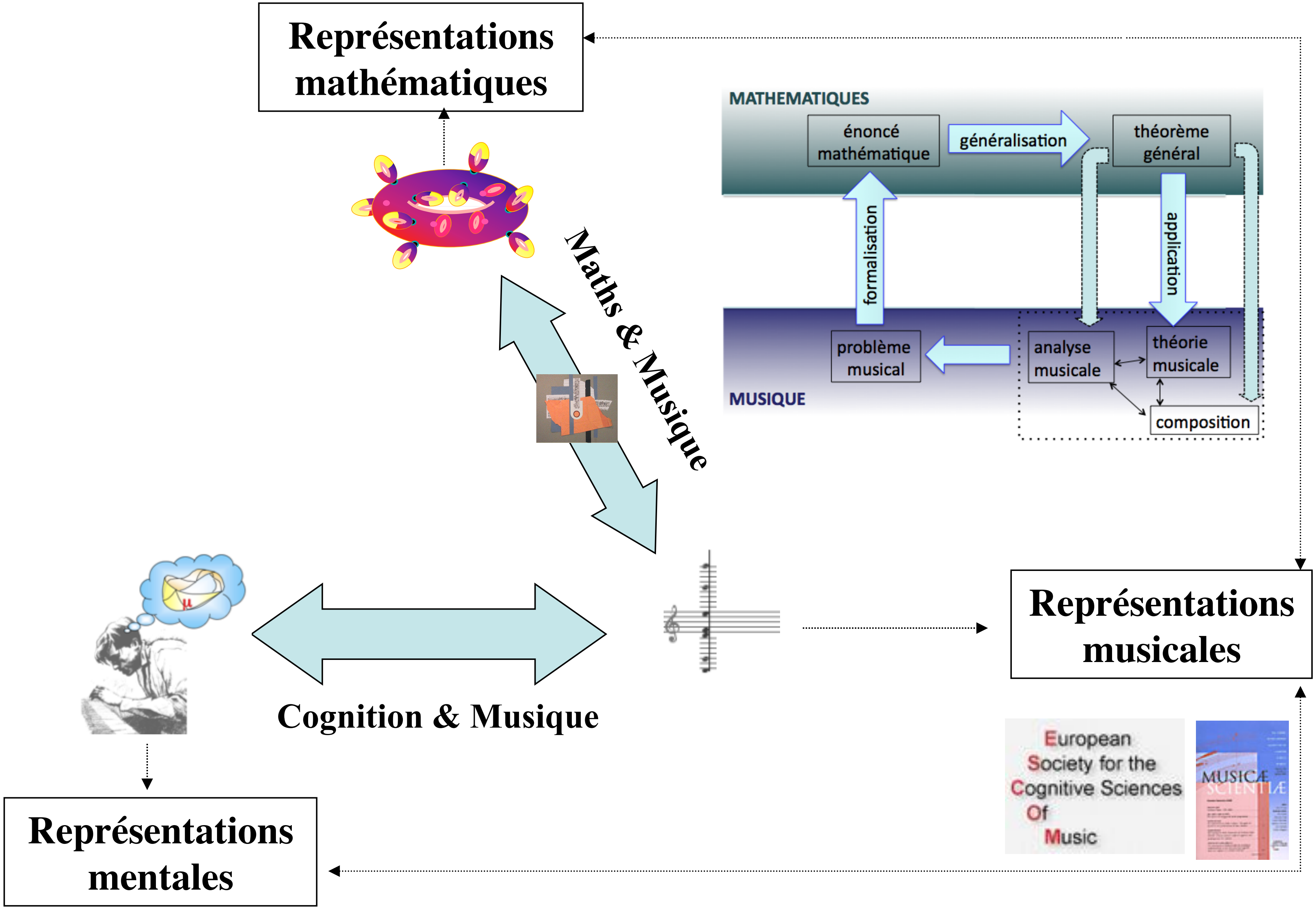




Représentations musicales

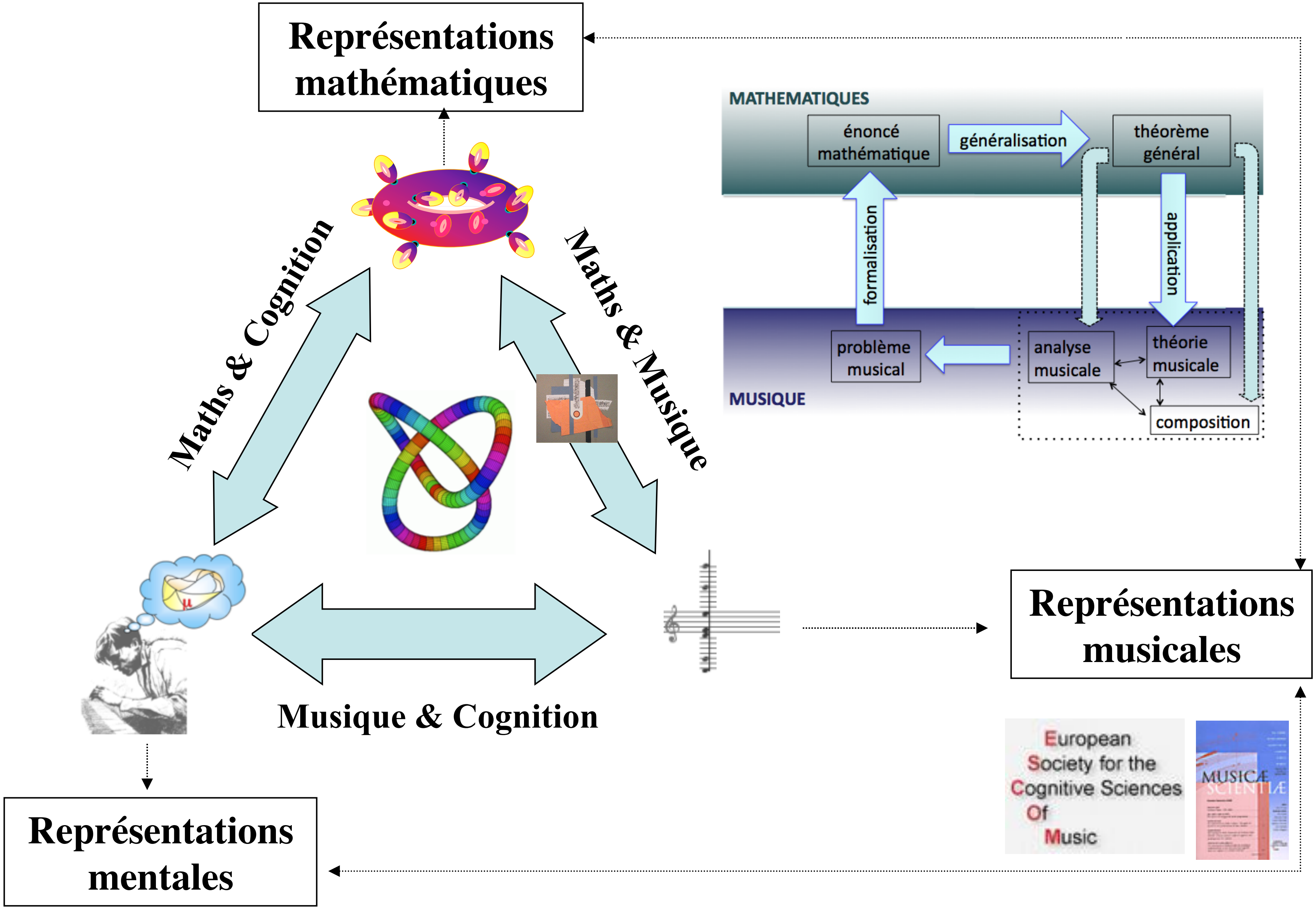
Quelle est la place de la cognition ?

http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/Cognition.html

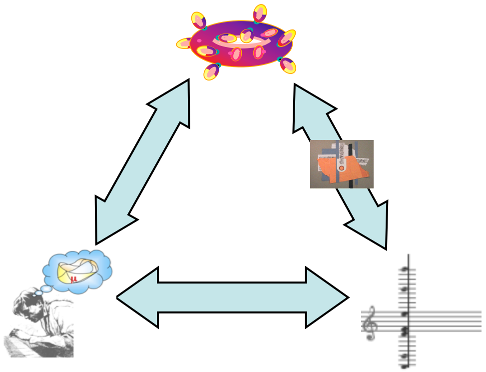


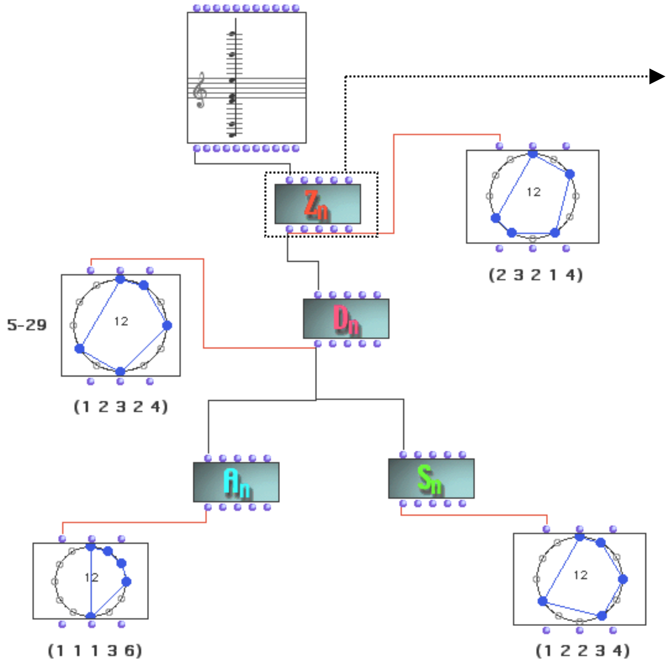
Quelle est la place de la cognition ?

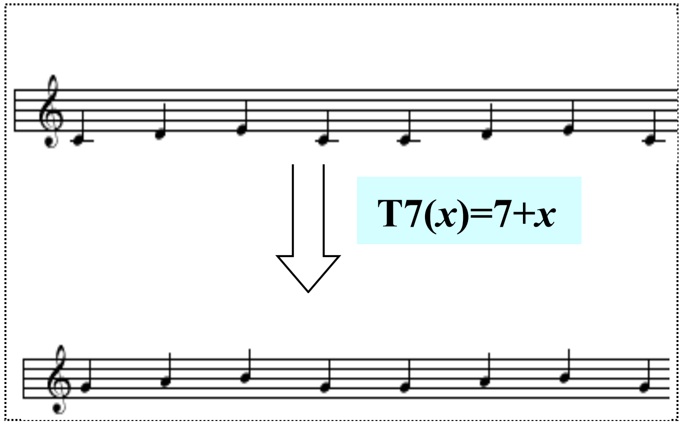
http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/Cognition.html



Approche paradigmatique et perception







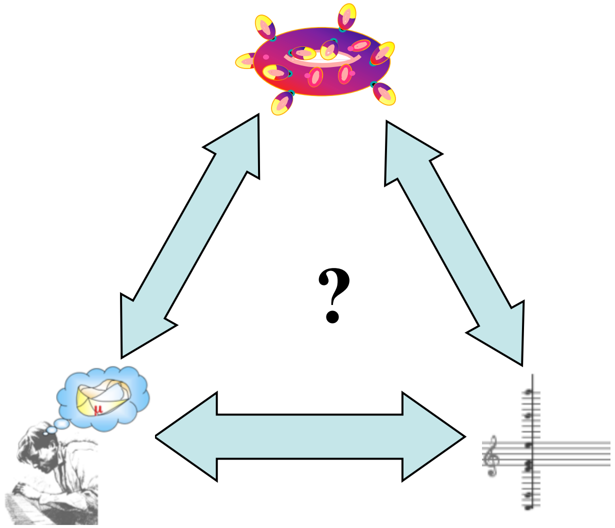
The nature of a given geometry is […] defined by the *reference* to a determinate group and the way in which spatial forms are related within that type of geometry. [*Cf. Felix Klein Erlangen Program - 1872*][…] We may raise the question whether there are any concepts and principles that are, although in different ways and different degrees of distinctness, necessary conditions for both the *constitution* of the perceptual world and the construction of the universe of geometrical thought. It seems to me that the concept of group and the concept of invariance are such principles.

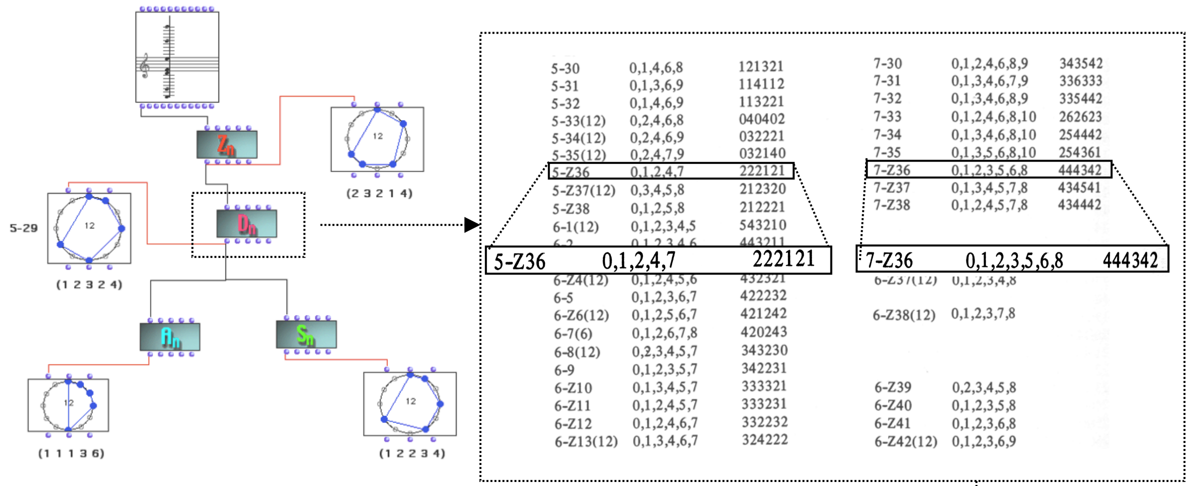
E. Cassirer : « The concept of group and the theory of perception », 1944

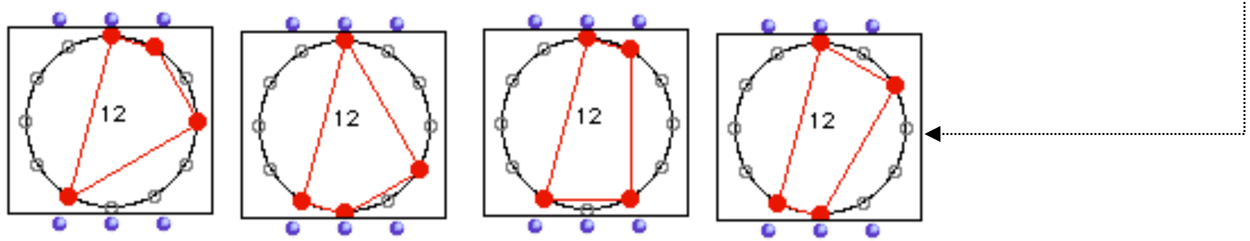
Felix Klein

Ernst Cassirer

Approches « set-théoriques » et perception musicale



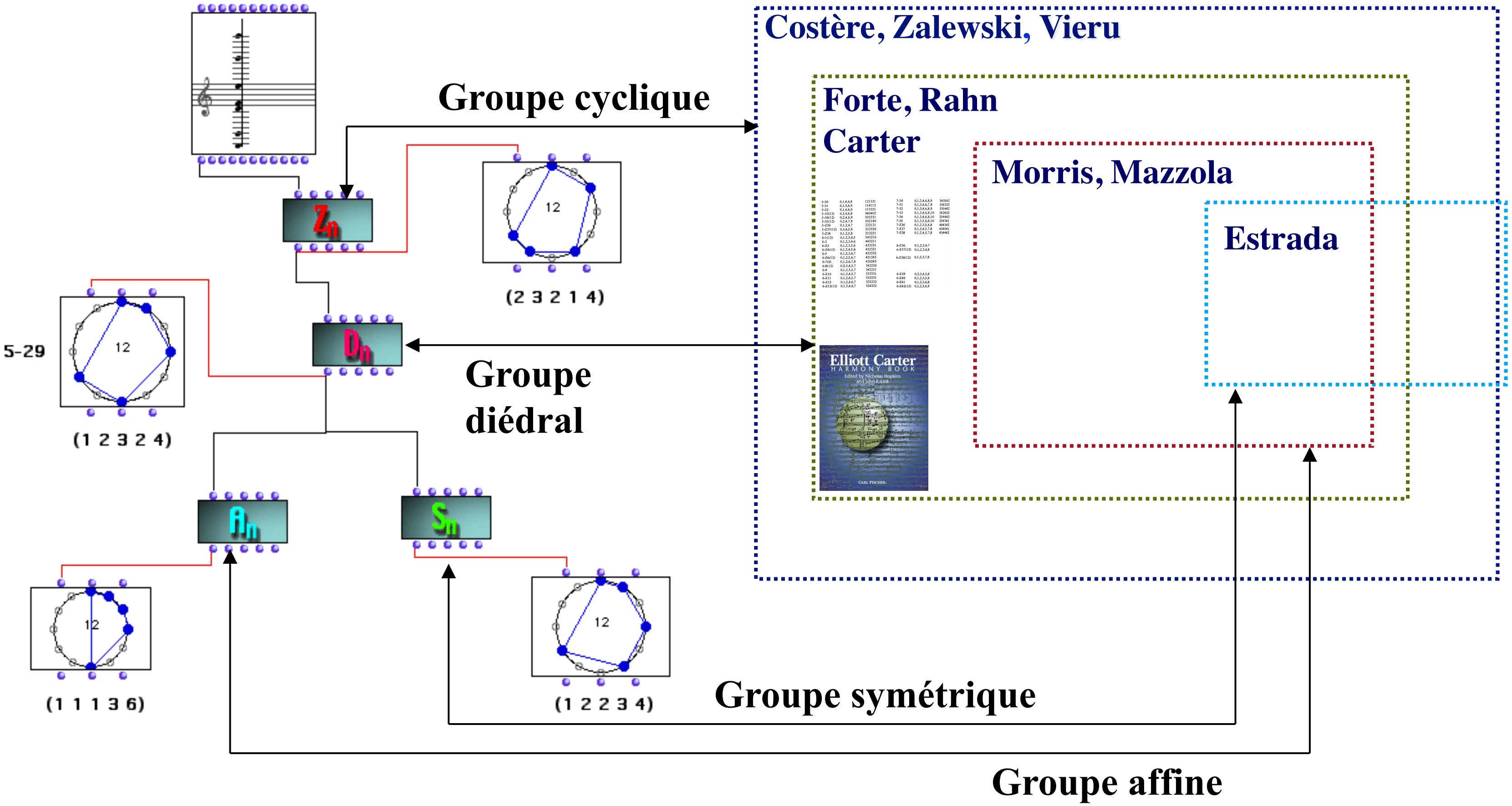




« Trained musicians rated the similarity of 24 instances of set classes [0137/0467] and [0157/0267] at three different transposition levels and two different spacing types. […] The results are consistent with the hypothesis that even musicians with significant experience of atonal music do not use the equivalence relation TnI in making similarity judgments »

Art Samplaski, « The Relative Perceptual Salienece of Tn and TnI », *MP*, 21(4), 2004

Architecture paradigmatique et dualité objectale/opératoire



« [C'est la notion de groupe qui] donne un sens précis à l'idée de structure d'un ensemble [et] permet de déterminer les éléments efficaces des transformations en réduisant en quelque sorte à son schéma opératoire le domaine envisagé. […]L'objet véritable de la science est le système des relations et non pas les termes supposés qu'il relie. […] Intégrer les résultats - symbolisés - d'une expérience nouvelle revient […] à créer un canevas nouveau, un groupe de transformations plus complexe et plus compréhensif »

G.-G. Granger : « Pygmalion. Réflexions sur la pensée formelle », 1947

G.-G. Granger

Approche catégorielle et cognition : de Piaget aux SEM

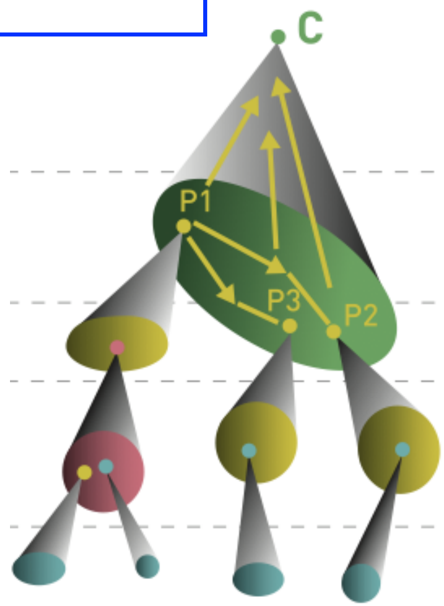
« La théorie des catégories est une théorie des constructions mathématiques, qui est macroscopique, et procède d'étage en étage. Elle est un bel exemple d'abstraction réfléchissante, cette dernière reprenant elle-même un principe constructeur présent dès le stade sensori-moteur. Le style catégoriel qui est ainsi à l'image d'un aspect important de la genèse des facultés cognitives, est un style adéquat à la description de cette genèse »

J. Piaget

Jean Piaget, Gil Henriques et Edgar Ascher, *Morphismes et Catégories. Comparer et transformer*, 1990

- G. S. Halford & W. H. Wilson, "A Category Theory Approach to Cognitive Development", *Cognitive Psychology*, 12, 1980
- J. Macnamara & G. E. Reyes, *The Logical Foundation of Cognition*, OUP, 1994

« […]L'émergence d'une œuvre d'art est l'expression d'une dynamique se développant dans un système hiérarchique de complexité croissante à multiples temporalités. Notamment, dans le cadre de notre modèle mathématique « les systèmes évolutifs à mémoire » (SEM), nous analysons l'existence d'objets multiformes émergeant dans le système sociétal d'un « monde artistique »; il pourrait s'agir de courants artistiques, issus de mouvements de pensée, de mouvements sociaux, culturels, scientifiques, technologiques. » (Colloque « Complexité dan les sciences et dans les arts », Ircam, 8-19 juin 2009)



A. Ehresmann et J.-P. Vanbremeersch, « Petite mathématique de la création », *L'étincelle*, n° 6, novembre 2009

Vers une « algèbre des objets mentaux » (Changeux) en musique

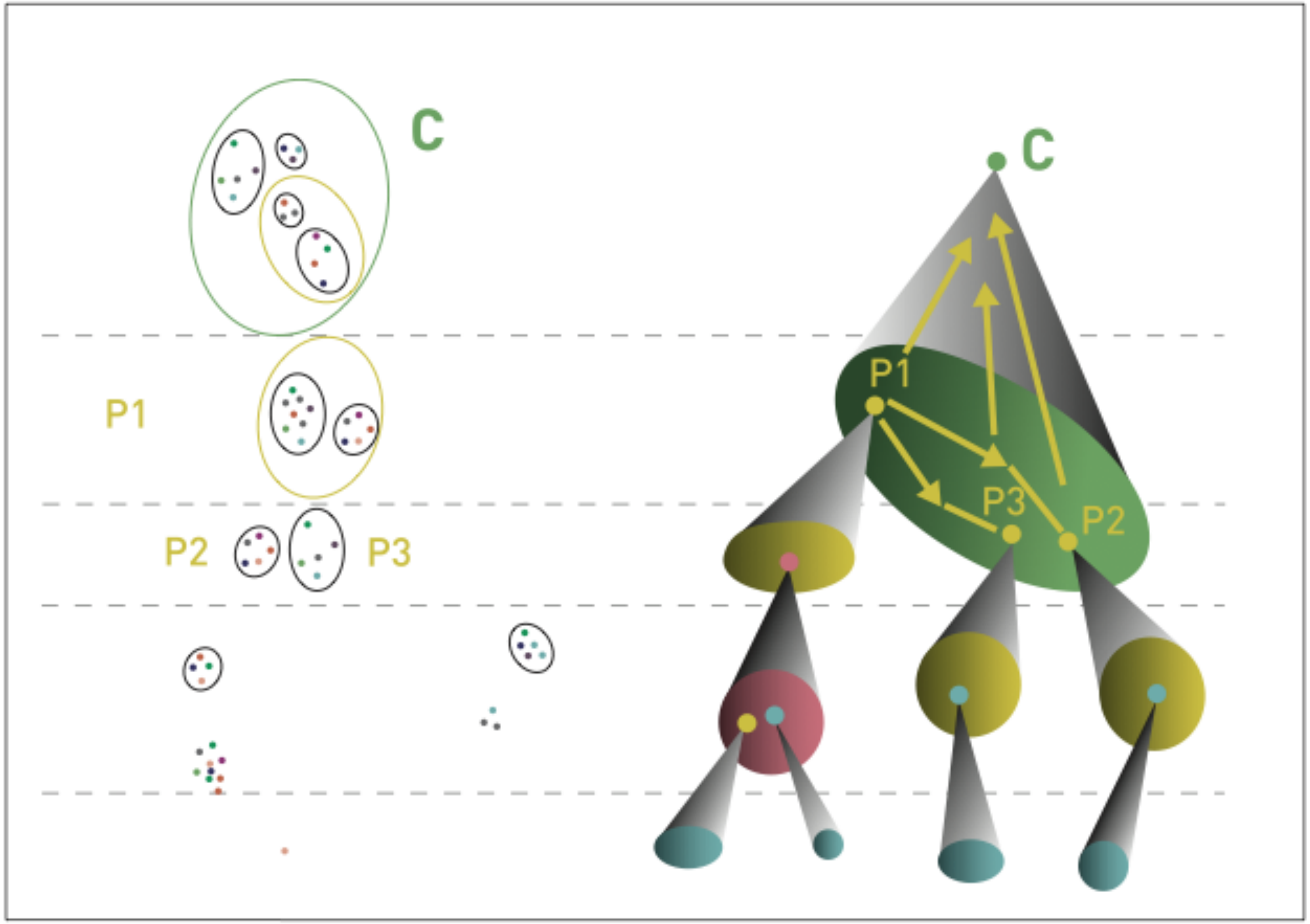
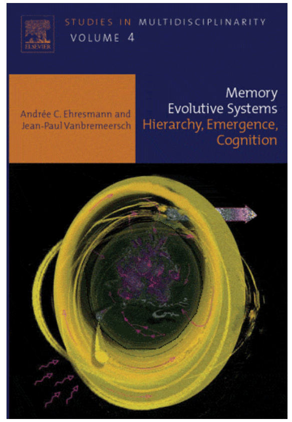


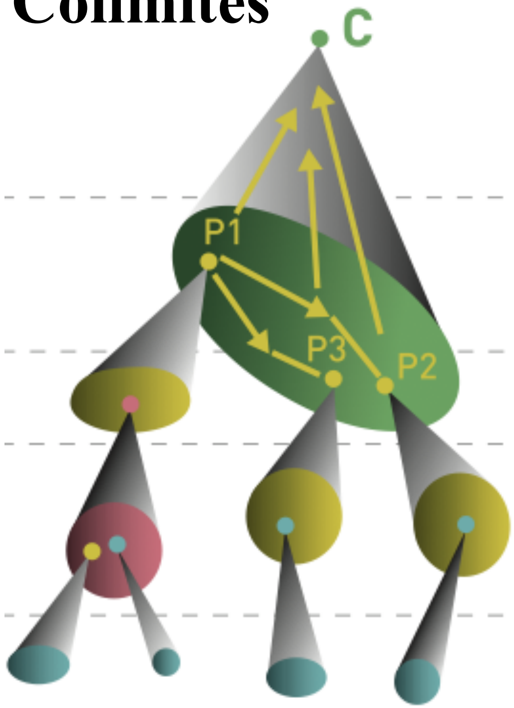
FIGURE 1 : À GAUCHE, FORMATION PROGRESSIVE D'UN OBJET COMPLEXE C PAR RECOLLEMENT D'OBJETS PLUS SIMPLES. À DROITE MODÈLE CATÉGORIQUE DE LA RAMIFICATION DE C, DÉPLOYÉE « DE HAUT EN BAS ».



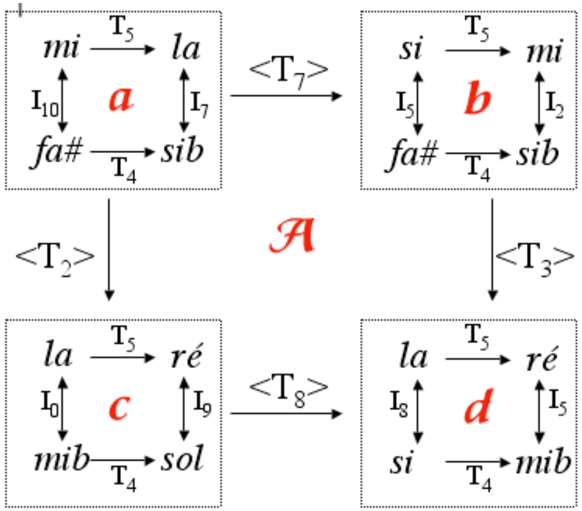
A. Ehresmann et J.-P. Vanbremeersch, « Petite mathématique de la création », *L'étincelle*, n° 6, novembre 2009

Systèmes évolutifs à mémoire et *K*-réseaux ?

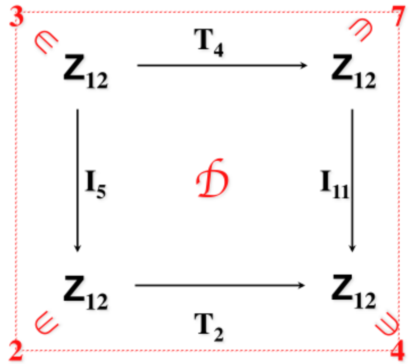
Colimites



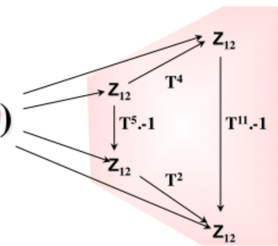
dualité



Limites

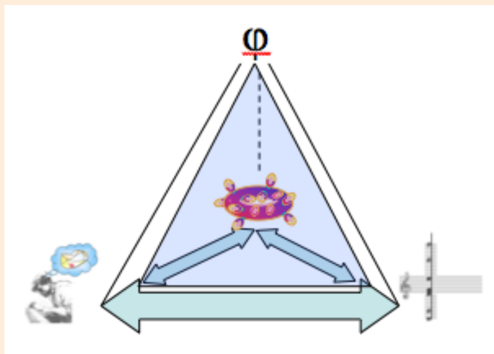


$(3, 7, 2, 4) \in \underline{\lim}(\mathcal{D})$



La représentation d'un état mental, tel un processus cognitif complexe, par un cat-neurone d'ordre supérieur conduit à une nouvelle approche du problème philosophique de l'identité entre états mentaux et états physiques du cerveau.

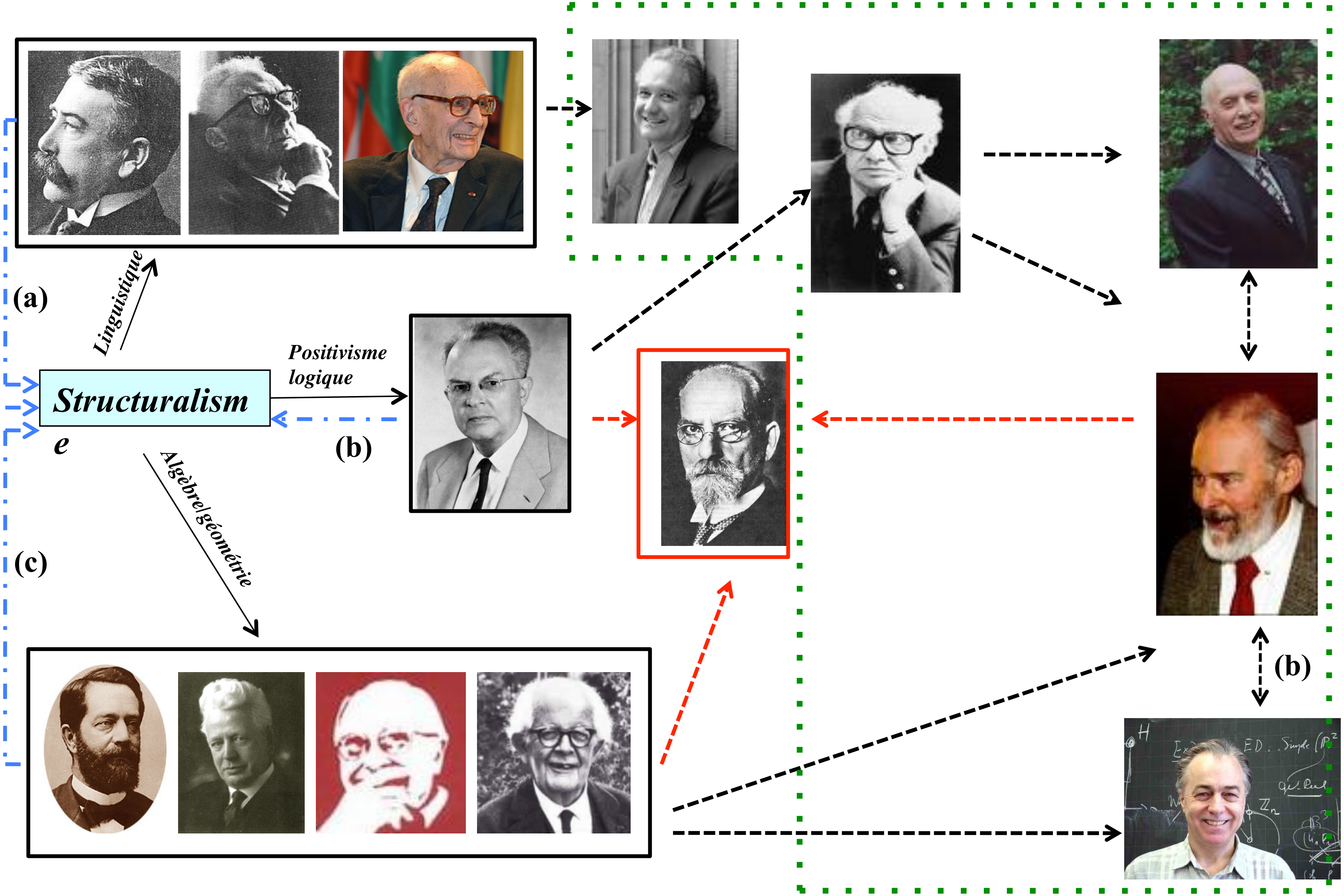
?



Quelle philosophie pour la recherche mathémusicale ?

Vers un structuralisme-phénoménologique en musique ?

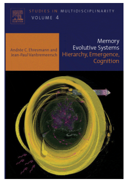
Repenser la généalogie du structuralisme et le rôle des structures

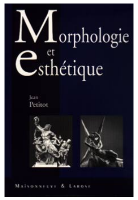


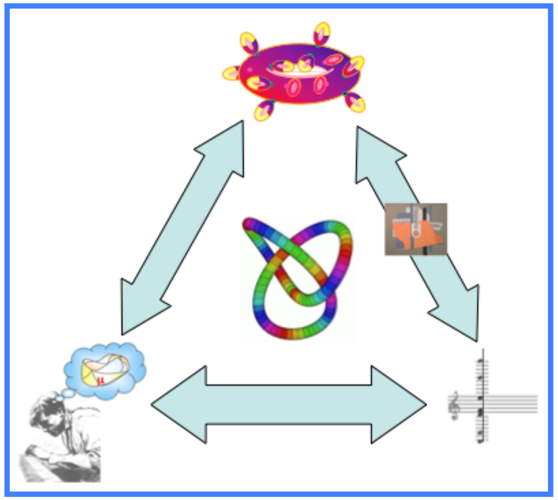
Vers un structuralisme-phénoménologique en musique ?

Mathématiques, perception esthétique et cognition/perception musicales

Modèles mathématiques | **Perception esthétique** | **Cognition/perception musicales**







(1) Modèles catégoriels

(2) Modèles morpho-dynamiques

(3) Modèles logiques

`http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/PEPS-GdIM.html`