

# Formation ATIAM

Acoustique Traitement du Signal Informatique Appliqués à la Musique Parcours  
multi-mentions du Master (M2) Sciences et Technologies de l'Université Pierre et  
Marie Curie (Paris 6)



UE Méthodes mathématiques pour  
l'informatique musicale [MMIM] -  
2010-2011

Moreno Andreatta

Equipe Représentations Musicales  
IRCAM/CNRS UMR 9912

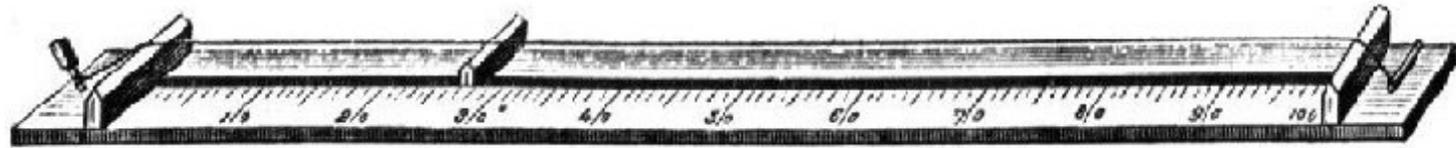


# Mathématiques/Musique...une histoire récente!

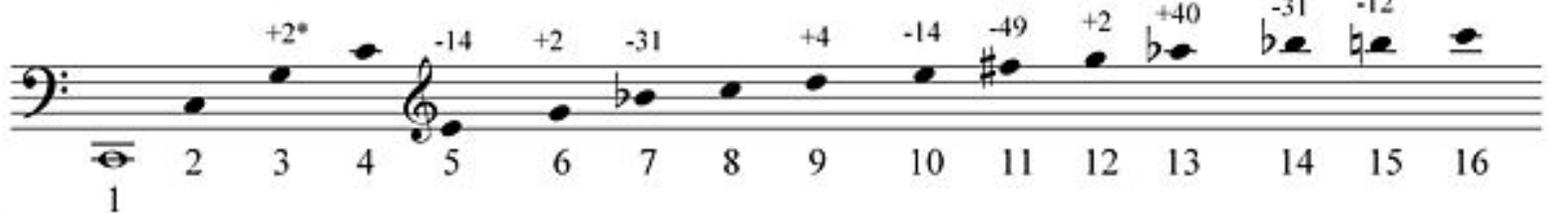
- 1999 : 4<sup>e</sup> Forum Diderot (Paris, Vienne, Lisbonne), *Mathematics and Music* (G. Assayag, H.G. Feichtinger, J.F. Rodrigues, Springer, 2001)
- 2000-2001 : Séminaire *MaMuPhi*, *Penser la musique avec les mathématiques ?* (Assayag, Mazzola, Nicolas éd., Coll. « M/S », Ircam/Delatour, 2006)
- 2000-2003 : International Seminar on *MaMuTh* (*Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory* (Mazzola, Noll, Luis-Puebla eds, epOs, 2004)
- 2003 : *The Topos of Music* (G. Mazzola et al.)
- 2003: *Music and Mathematics. From Pythagoras to Fractals* (J. Fauvel et al.)
- 2001 - 2011 : Séminaire *MaMuX* de l'Ircam
- 2004 - 2011 : Séminaire *mamuphi* (Ens/Ircam)
- 2006 : *Mathematical Theory of Music* (F. Jędrzejewski), Coll. « M/S »
- 2007 : *La vérité du beau dans la musique* (G Mazzola), Coll. « Musique/Sciences »
- 2007 : *Journal of Mathematics and Music* (Taylor & Francis) et MCM 2007
- 2007: *Music. A Mathematical Offering* (Dave Benson), CUP
- 2008: *Music Theory and Mathematics* (Jack Douthett et al.), URP
- 2009 : *Computational Music Science Series* (Springer)
- 2009 : MCM 2009 (Yale) et Proceedings chez Springer
- 2010 : Mathematics Subject Classification : 00A65 Mathematics and music
- 2011 : Conférence de la SMCM (Ircam, 15-17 juin 2011)



# De Pythagore... à la théorie des groupes



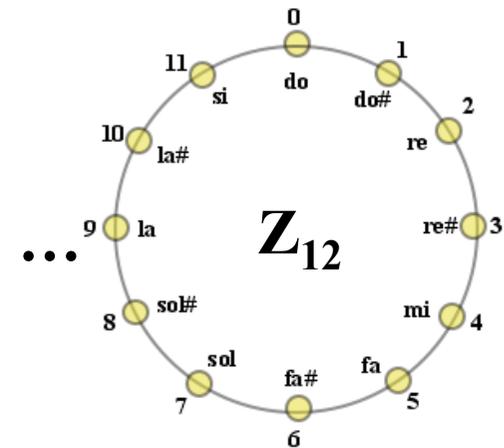
*i suoni armonici*



**Physique**

\* in cents, confrontati con la scala temperata

**Mathématiques**



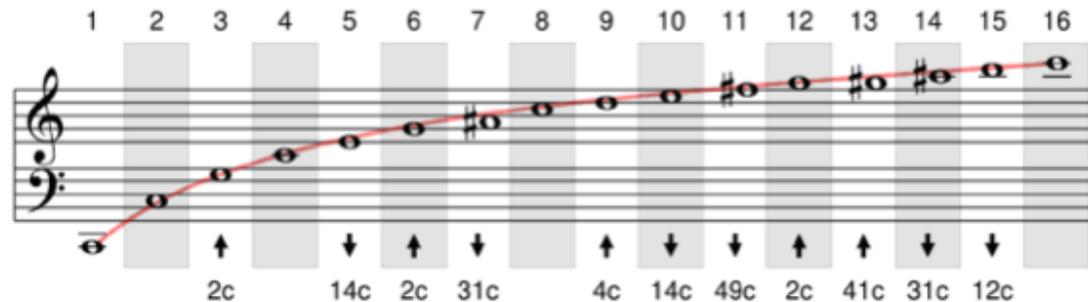
# La gamme tempérée et les harmoniques



Max Yribarren : Le tempérament égal a-t-il une justification acoustique ? (Séminaire *mamuphi*, 11 décembre 2010)

axe des	$F_1$	$F_2 = 2 F_1$	$F_3 = 3 F_1$	$F_4 = 4 F_1$	$F_5 = 5 F_1$	$F_6 = 6 F_1$	$F_7 = 7 F_1$	$F_8 = 8 F_1$
fréquences	440 Hz ( $la_3$ )	880 Hz	1320 Hz	1760 Hz	2200 Hz	2640 Hz	3080 Hz	3520 Hz
Ratios bruts	$F_1/F_1 = 1$	$F_2/F_1 = 2$	$F_3/F_1 = 3$	$F_4/F_1 = 4$	$F_5/F_1 = 5$	$F_6/F_1 = 6$	$F_7/F_1 = 7$	$F_8/F_1 = 8$
normalisés	1/1	2/1	3/2	4/2	5/4	6/4	7/4	8/4
en cents	0	1200	702	1200	386	702	969	1200

	Ratios	Cents
$H_1$	1/1	0
$H_3$	3/2	702
$H_5$	5/4	386
$H_7$	7/4	969
$H_9$	9/8	204
$H_{11}$	11/8	551
$H_{13}$	13/8	841
$H_{15}$	15/8	1 088
$H_{17}$	17/16	105
$H_{19}$	19/16	298
$H_{21}$	21/16	471
$H_{23}$	23/16	628
$H_{25}$	25/16	773
$H_{27}$	27/16	906
$H_{29}$	29/16	1 030
$H_{31}$	31/16	1 145
$H_{33}$	33/32	53

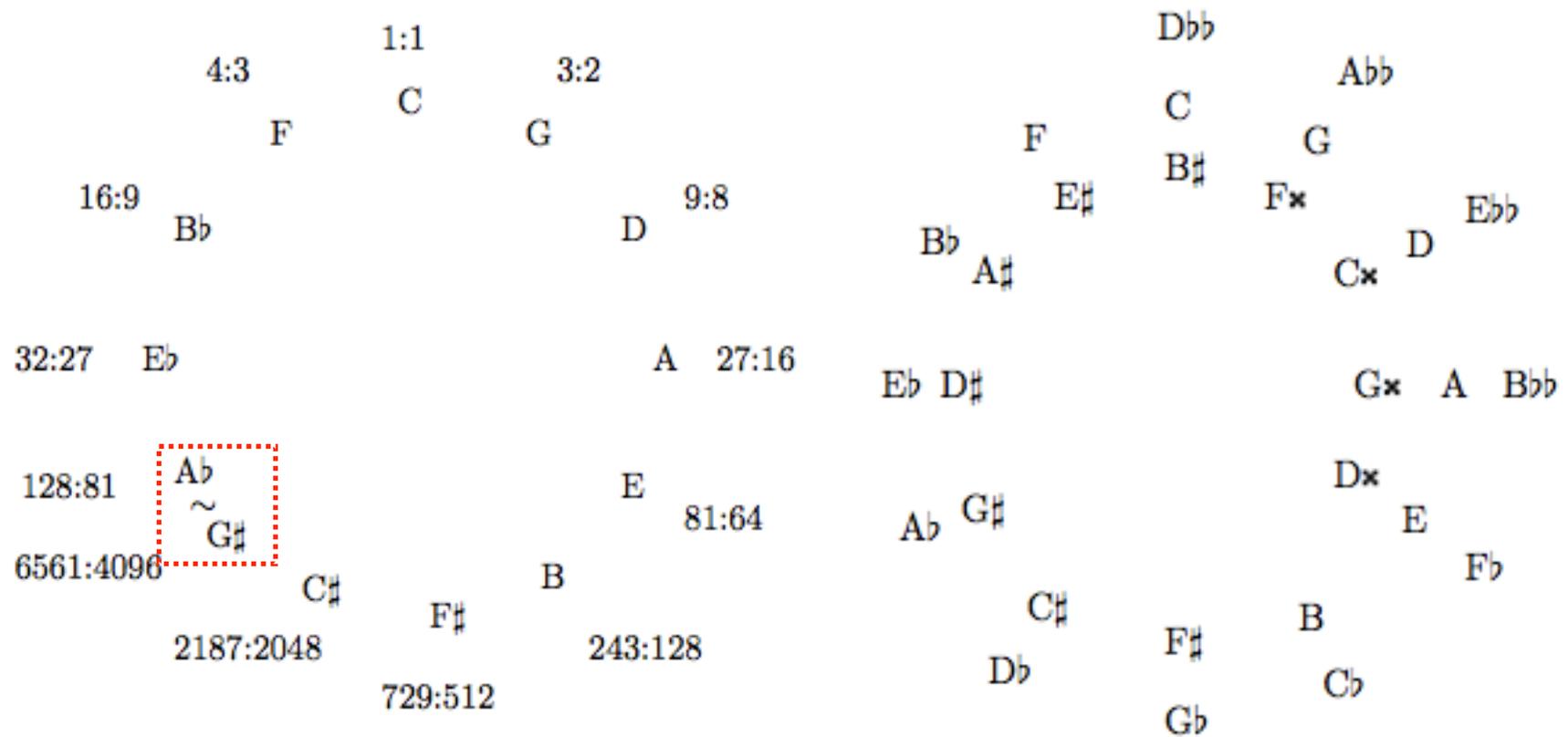


Positionnement des harmoniques par rapport à la gamme tempérée

# La spirale infinie du tempérament pythagorien

[Benson 2006]

note	do	re	mi	fa	so	la	ti	do
ratio	1:1	9:8	81:64	4:3	3:2	27:16	243:128	2:1



# Tempérament pythagoricien, intonation juste et tempérament égal



## Innsbruck, ich muss dich lassen

Heinrich Isaac (1450-1517)

Cantus

1. Inns - bruck, ich muss dich las - sen, ich  
 2. Gross Leid muss ich jetzt tra - gen, das  
 3. Mein Trost ob al - len Wei - ben, dein

Altus

1. Inns - - bruck, ich muss dich las - - sen, ich  
 2. Gross Leid muss ich jetzt tra - gen, das  
 3. Mein Trost ob al - len Wei - ben, dein

Tenor

1. Inns - bruck, ich muss dich las - sen, ich  
 2. Gross Leid muss ich jetzt tra - gen, das  
 3. Mein Trost ob al - len Wei - ben, dein

Bassus

1. Inns - - bruck, ich muss dich las - - sen, ich  
 2. Gross Leid muss ich jetzt tra - - gen, das  
 3. Mein Trost ob al - len Wei - - ben, dein



**TP**



**IJ**



**TE**

note	C	D	E	F	G	A	B	C
ratio	1:1	9:8	81:64	4:3	3:2	27:16	243:128	2:1
cents	0.000	203.910	407.820	498.045	701.955	905.865	1109.775	1200.000

**TP**

note	do	re	mi	fa	so	la	ti	do
ratio	1:1	9:8	5:4	4:3	3:2	5:3	15:8	2:1
cents	0.000	203.910	386.314	498.045	701.955	884.359	1088.269	1200.000

**IJ**

## Tempérament égal et fractions continues

---

$$\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 1 + \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \dots$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1+} \frac{1}{3+} \frac{4}{5+} \frac{9}{7+} \frac{16}{9+} \dots$$

$$e = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249\ 77572\ 47093\ \dots$$

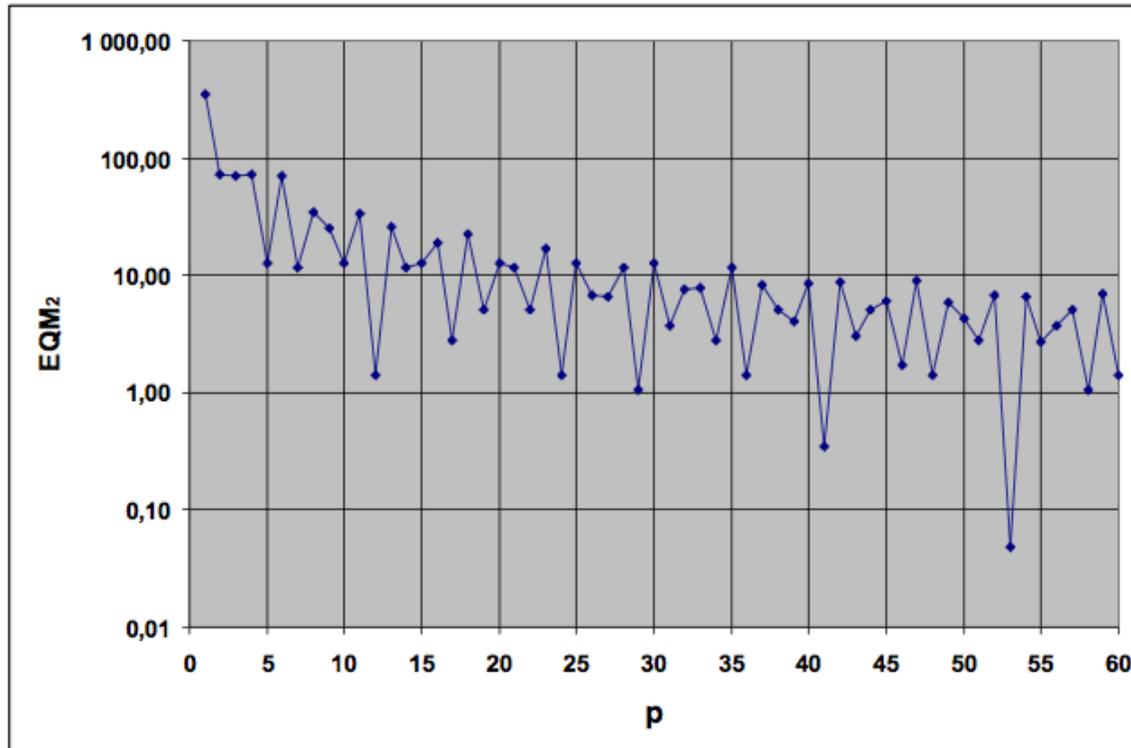
$$= 2 + \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{4+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{6+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{8+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \dots$$

$$e^{2\pi/5} \left( \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) = \frac{1}{1+} \frac{e^{-2\pi}}{1+} \frac{e^{-4\pi}}{1+} \frac{e^{-6\pi}}{1+} \dots$$

# Fractions continues, EQM et microtonalité

EQM des découpages de l'octave approchant la quinte

**Z/53Z**

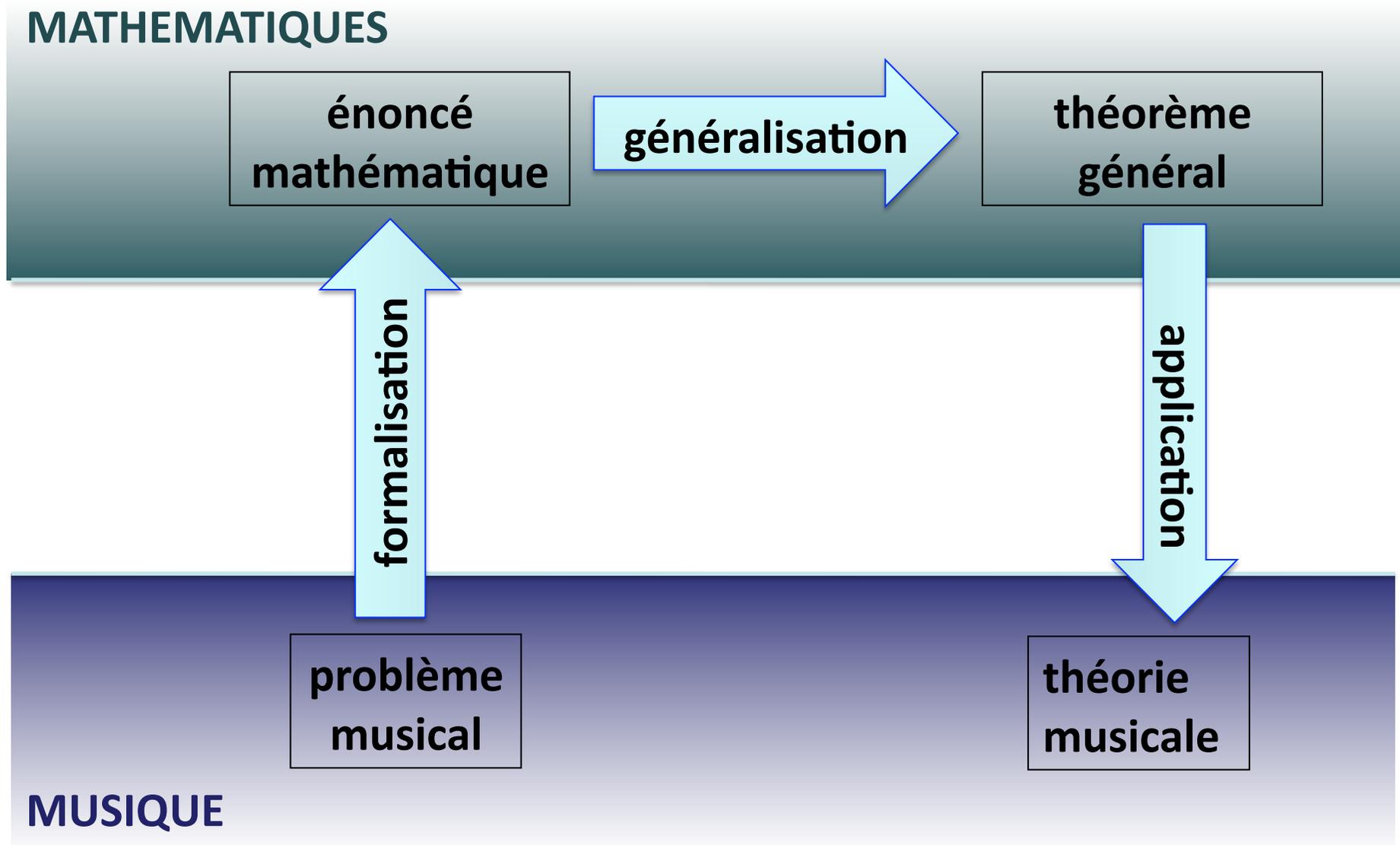


© Science and Society Picture Library

**Robert Bosanquet, 1876**

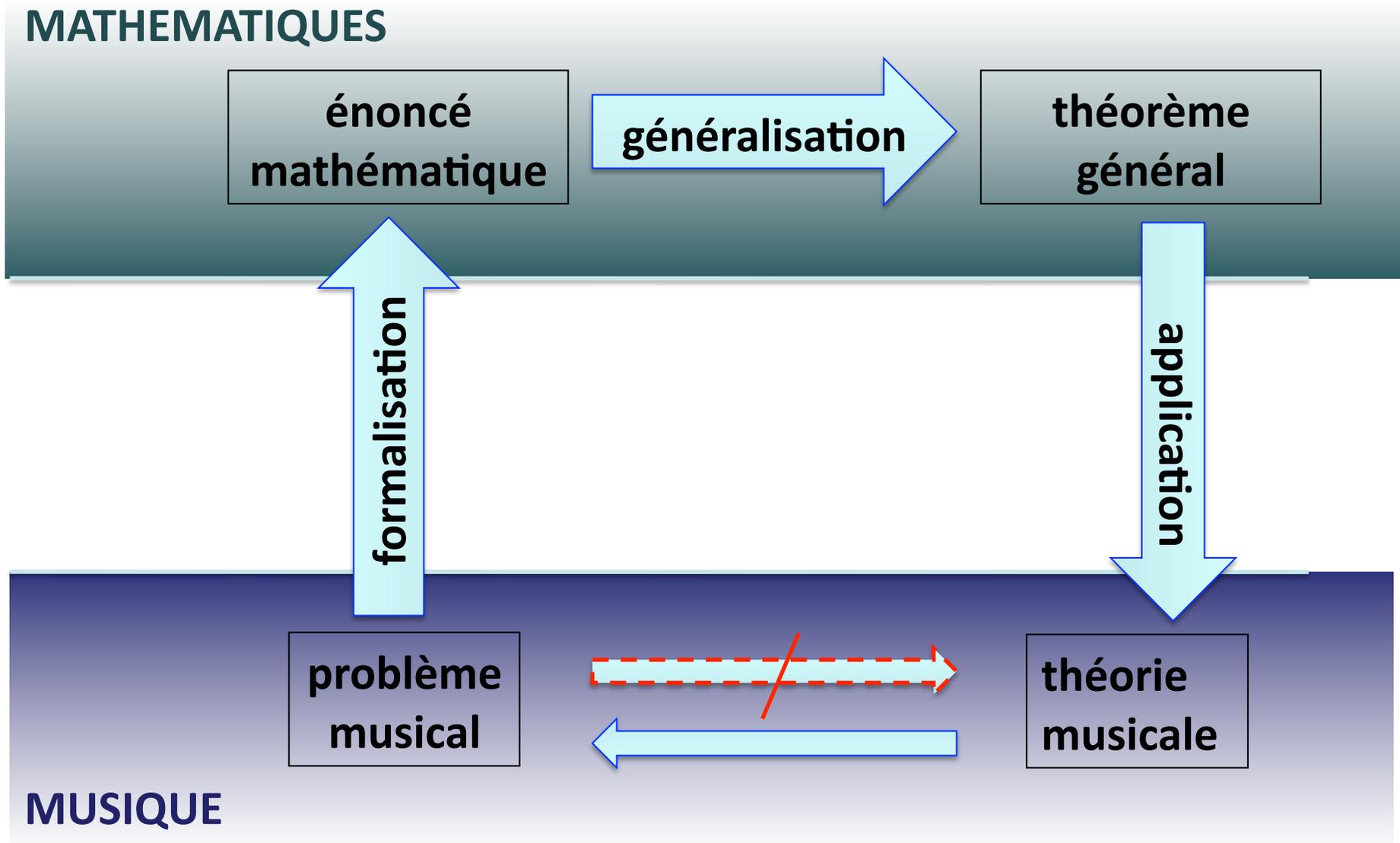
Max Yribarren : Le tempérament égal a-t-il une justification acoustique ? (Séminaire *mamuphi*, 11 décembre 2010)

# Double mouvement d'une dynamique mathémusicale

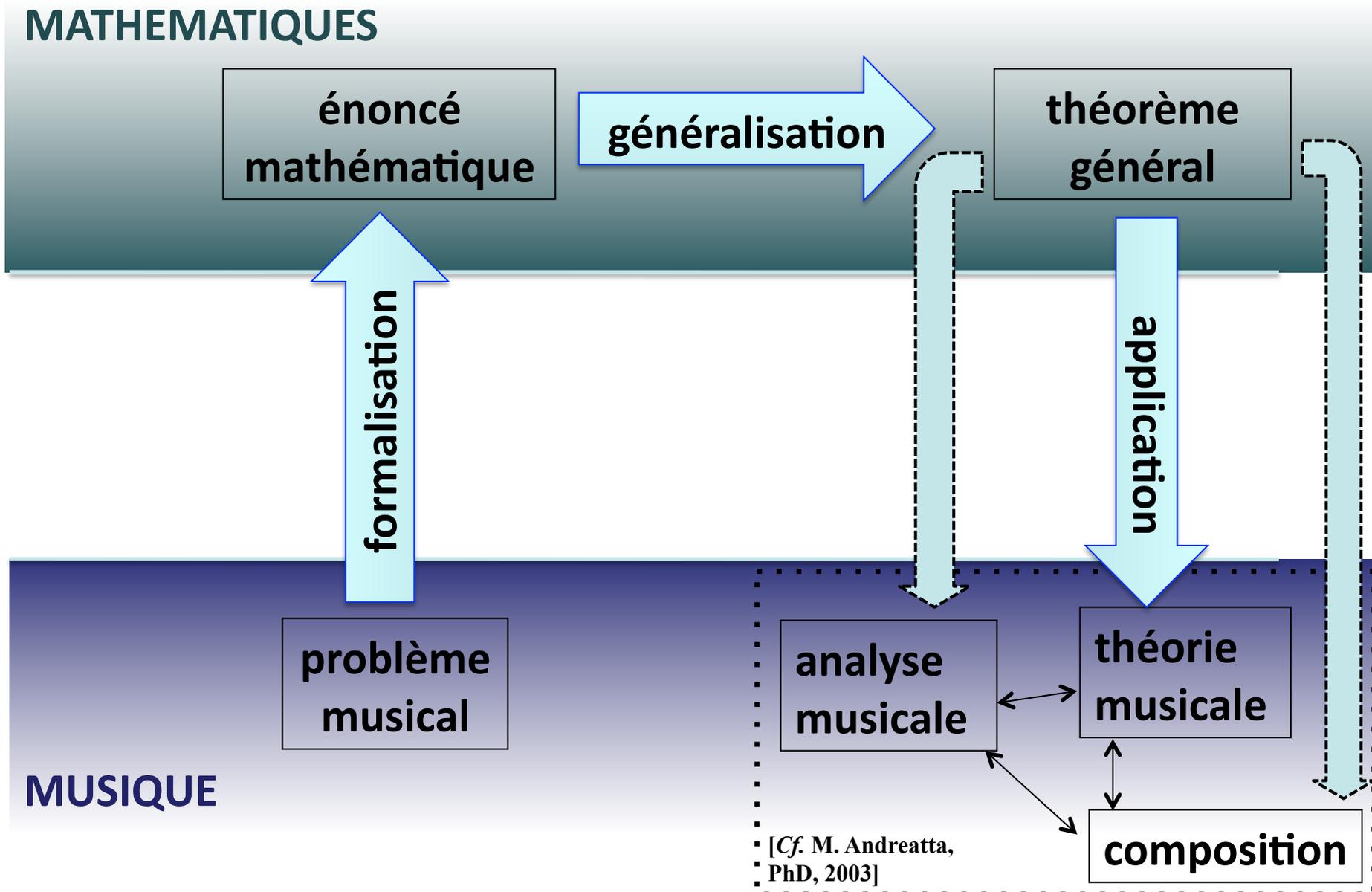


[Cf. M. Andreatta : *Mathematica est exercitium musicae*, HDR, octobre 2010]

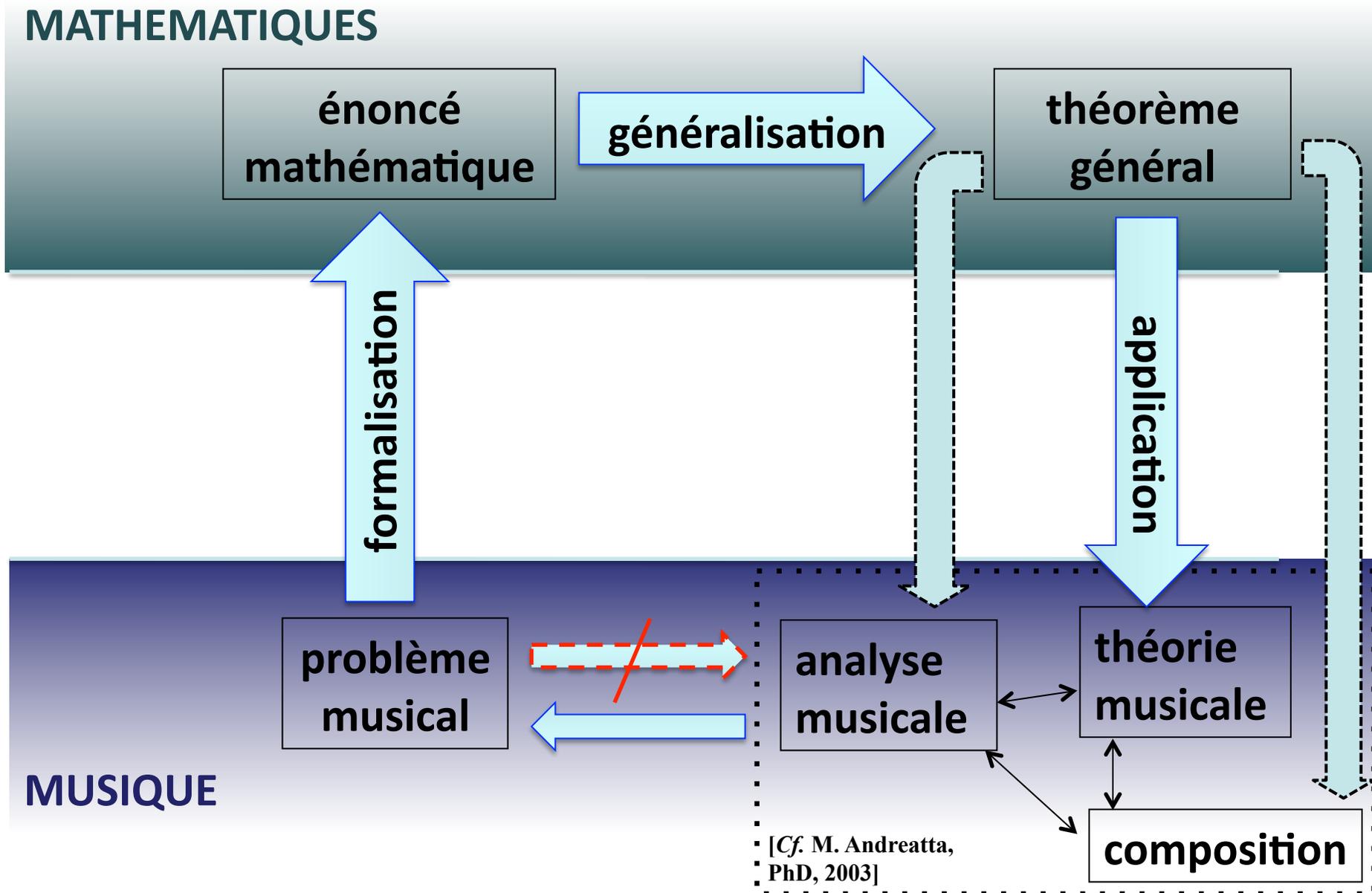
# Double mouvement d'une dynamique mathémusicale



# Double mouvement d'une dynamique mathémusicale



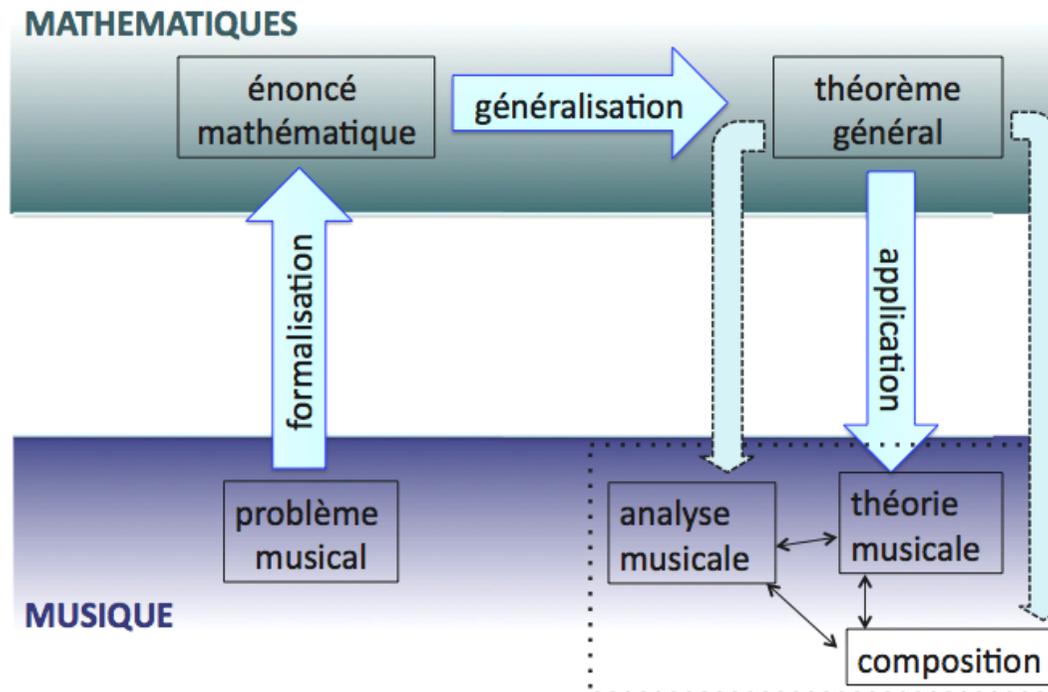
# Double mouvement d'une dynamique mathémusicale



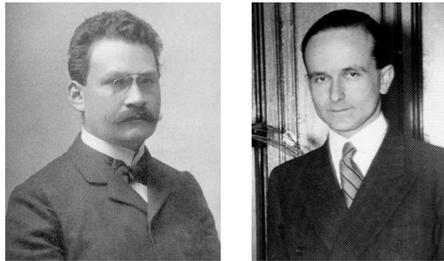
# Un survol sur six problèmes mathémusicaux

[Cf. M. Andreatta : *Mathematica est exercitium musicae*, HDR, octobre 2010]

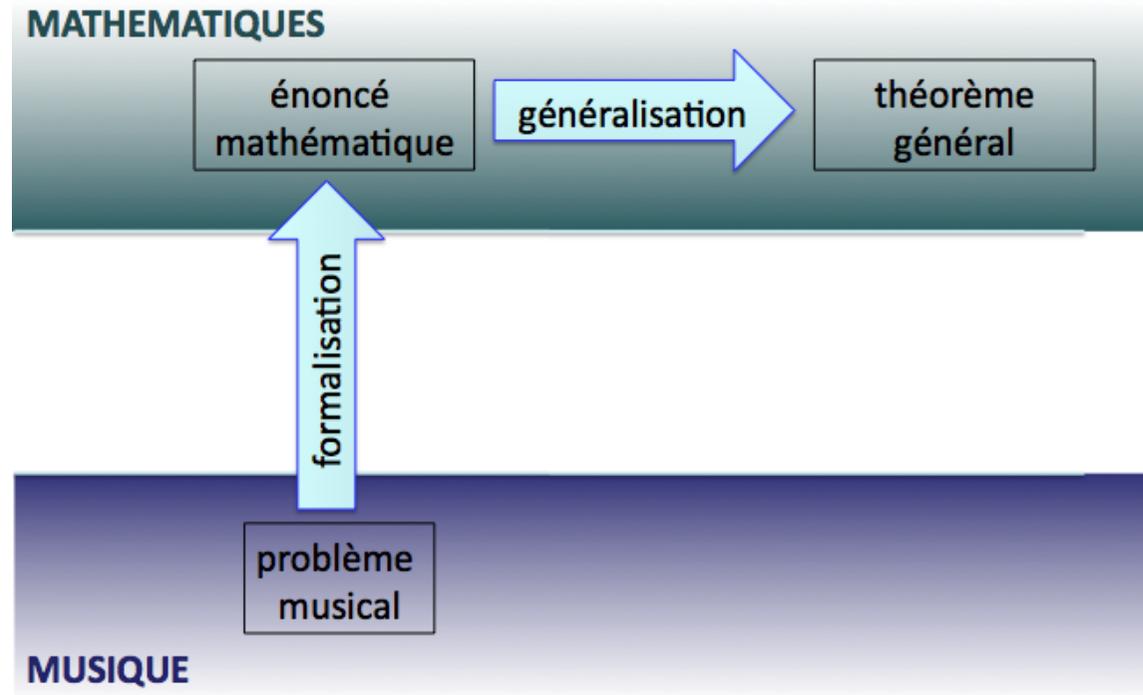
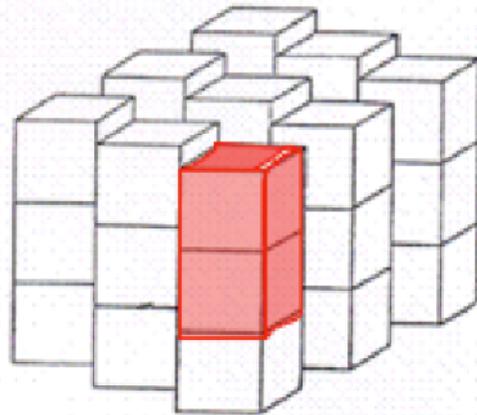
1. La construction des canons rythmiques mosaïques
2. Suites périodiques et calcul de différences finies
3. La *Set Theory* et la théorie transformationnelle
4. Les théories diatoniques et les *ME-sets*
5. La théorie des block-designs en composition algorithmique
6. La relation *Z* et la théorie des ensembles homométriques



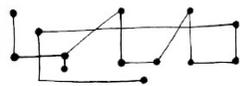
# 1. La construction des canons rythmiques mosaïques



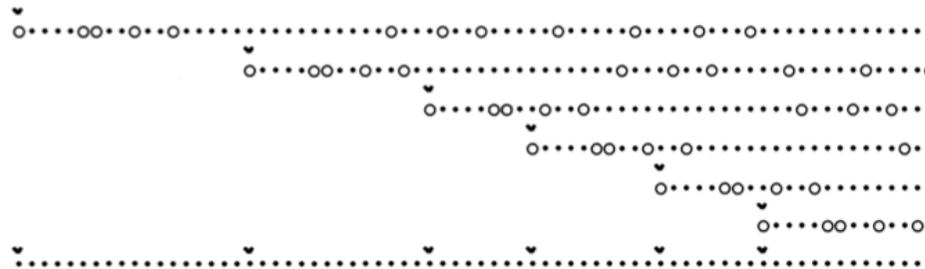
- Conjecture de Minkowski
- Solution de Hajos



1996



*Perspectives of  
New Music*



temps →

# 1. La construction des canons rythmiques mosaïques

**R** (1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)  
 (20 3 1 5 6 9 4 11 6 3 3 1)  
 (1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)  
 (6 13 4 7 6 6 1 4 19 1 4 1)  
 (1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)  
 (3 3 17 4 3 6 6 5 4 15 5 1)

**S** (8 8 2 8 8 38)  
 (16 2 14 2 16 22)  
 (14 8 10 8 14 18)

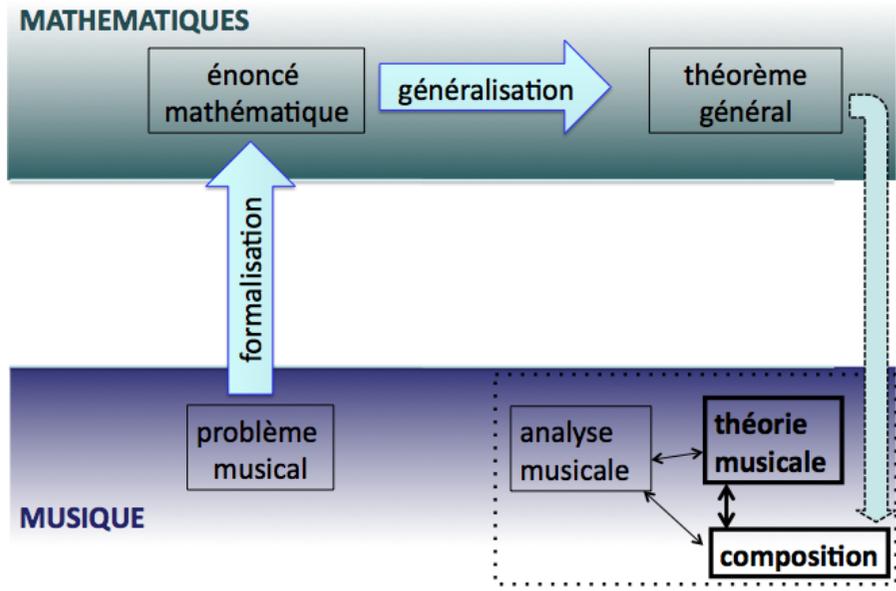
**R** (1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)  
 (1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)  
 (1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)

**S** (8 8 2 8 8 38)  
 (16 2 14 2 16 22)  
 (14 8 10 8 14 18)

**R** (1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)  
 (1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)

**S** (14 8 10 8 14 18)

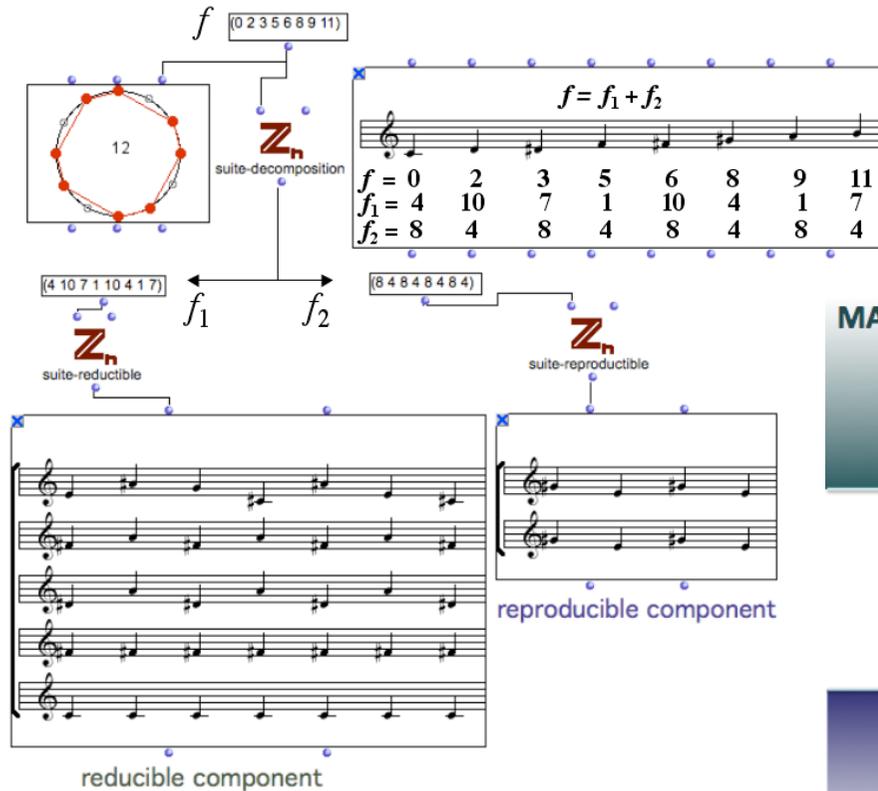
- Modèle computationnel
- Applications compositionnelles



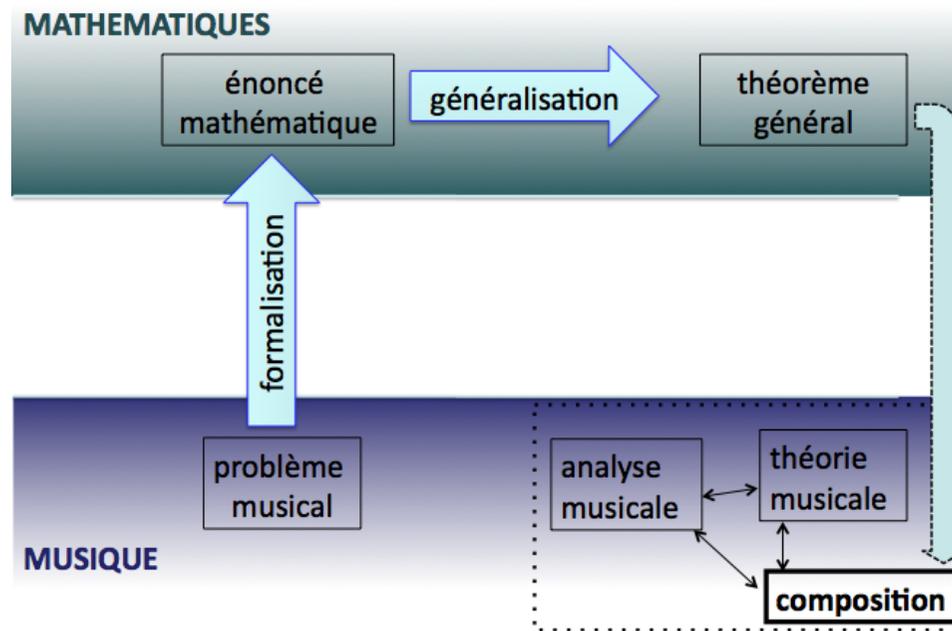
1999



# 2. Suites périodiques et calcul de différences finies



- Théorème de décomposition
- Lemme de Fitting



2001

$$Df(x) = f(x) - f(x-1)$$

7 11 10 11 7 2 7 11 10 11 7 2 7 11...  
 4 11 1 8 7 5 4 11 1 8 7 5 4 11...  
 7 2 7 11 10 11 7 2 7 11 10 11...  
 7 5 4 11 1 8 7 5 4 11 1 8...  
 .....

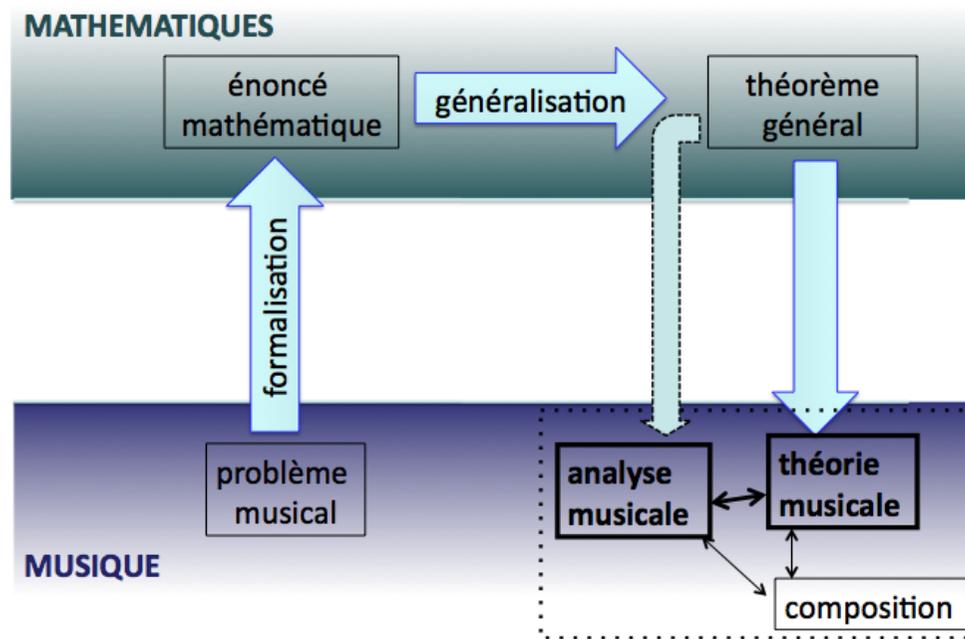
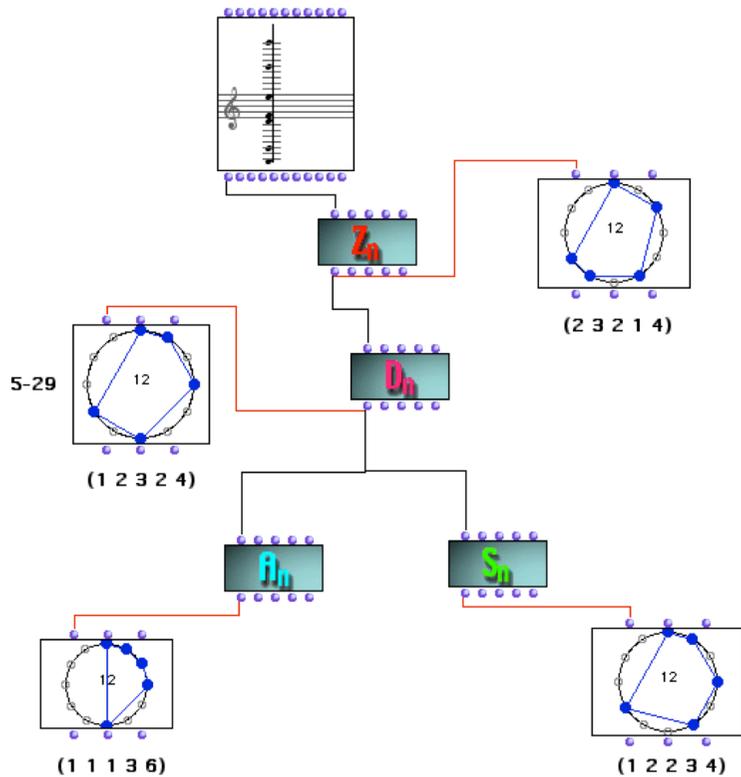
*dalassimo* *pp* *mp* *p* *mf* *mp* *pp* *pp*  

V	0	3	8	7	11	0	11	10	2	6	9	0	6	9	1	3	9	8	4	3	6
VIII	0	0	4	0	3	3	7	11	8	0	0	0	4	6	1	3	7	8	8	8	0
IX	0	0	0	0	0	1	11	11	0	3	3	0	3	3	9	0	11	8	8	3	6
X	0	0	0	0	0	3	6	9	[1]	0	0	0	3	3	9	0	6	6	[10]	6	6
V	0	10	3	9	10	0	9	7	7	0	6	7	9	9	6	4	9	3	4	6	3



# 3. La Set Theory et la théorie transformationnelle

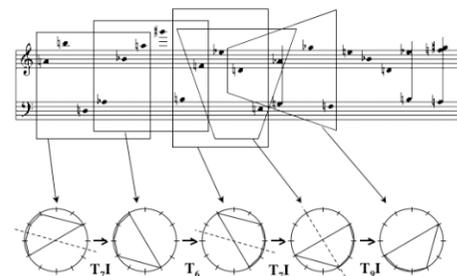
- Classification paradigmatique
- Analyse computationnelle
- Projet MISA



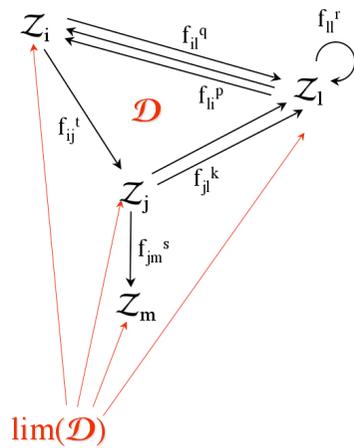
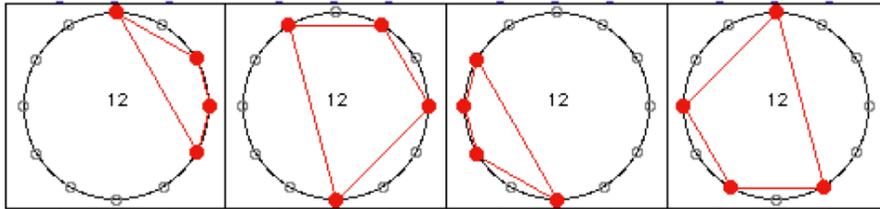
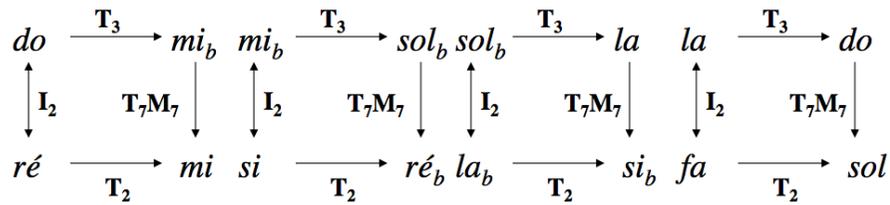
2003



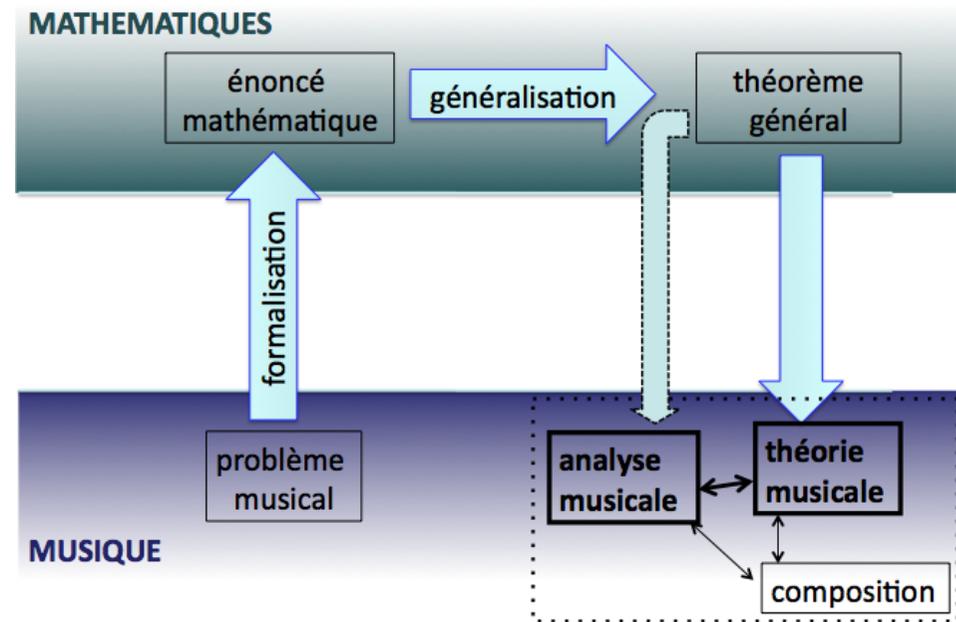
SE: (1, 1, 1, 3, 6) (6, 3, 1, 1, 1) (6, 3, 1, 1, 1)  
 IFUNC: [5 3 2 2 1 1 1 1 1 2 2 3] [5 3 2 2 1 1 1 1 1 2 2 3] [5 3 2 2 1 1 1 1 1 2 2 3]  
 VI: [3 2 2 1 1 1] [3 2 2 1 1 1] [3 2 2 1 1 1]



# 3. La Set Theory et la théorie transformationnelle

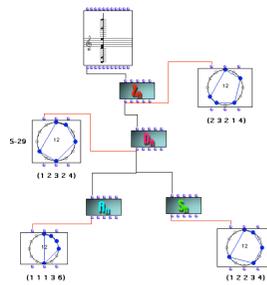
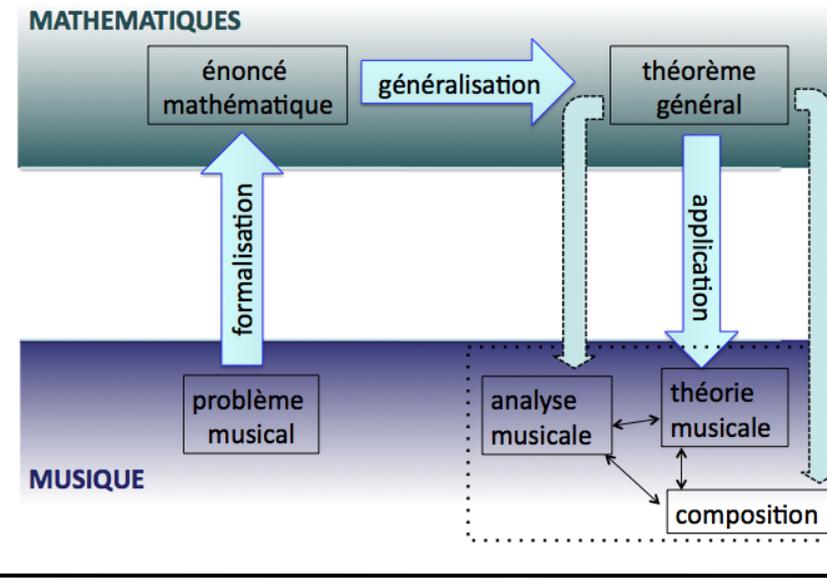
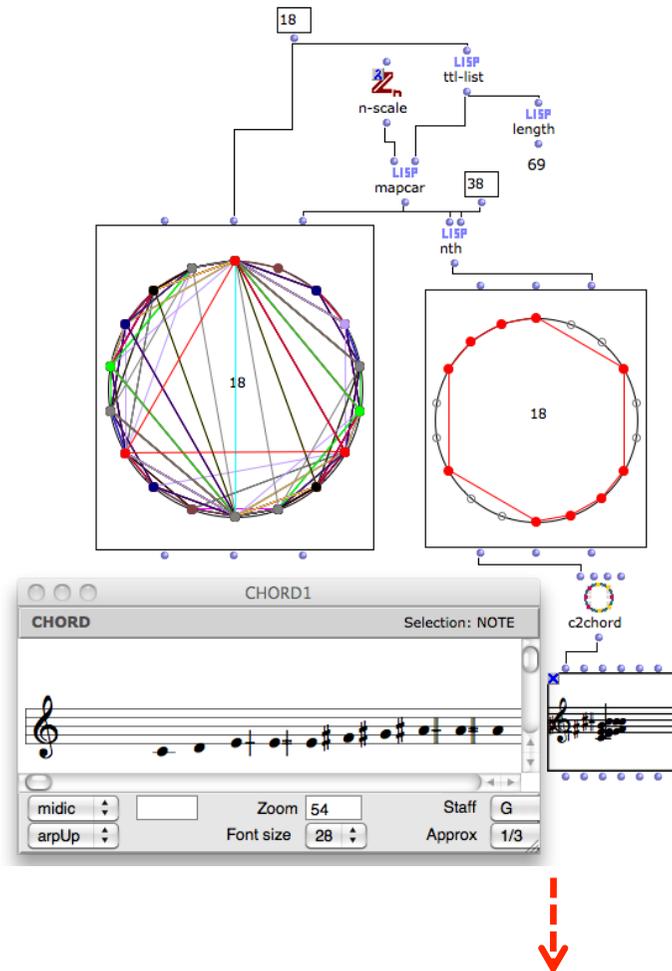


- Formalisation catégorielle
- Isographies fortes dans un *K*-net

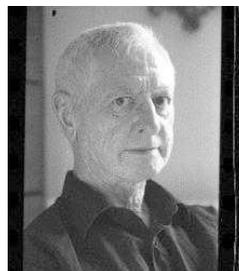


# 3. La Set Theory et la théorie transformationnelle

- Classification paradigmatique des structures microtonales
- Calcul des modes de Messiaen



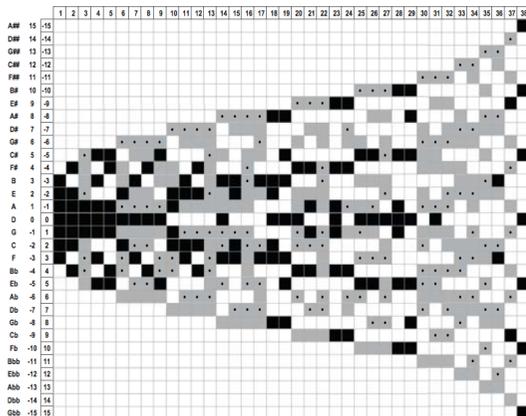
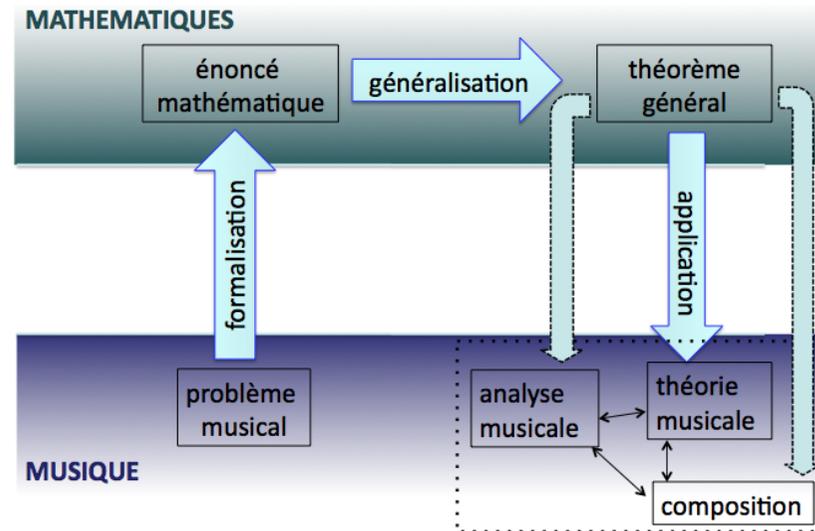
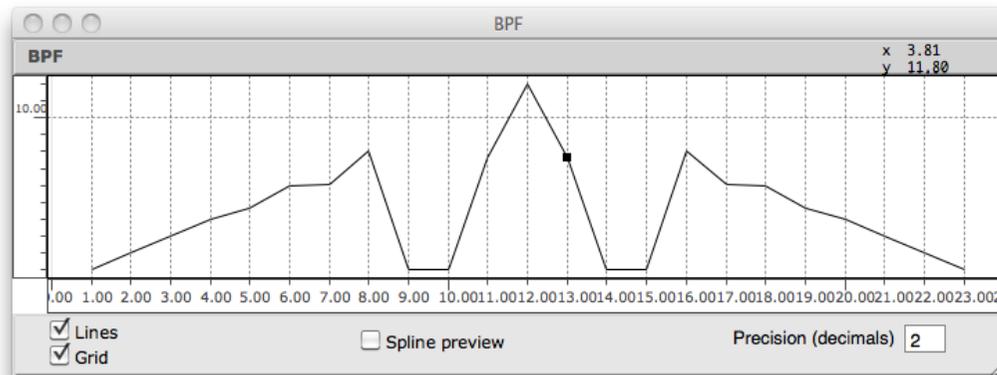
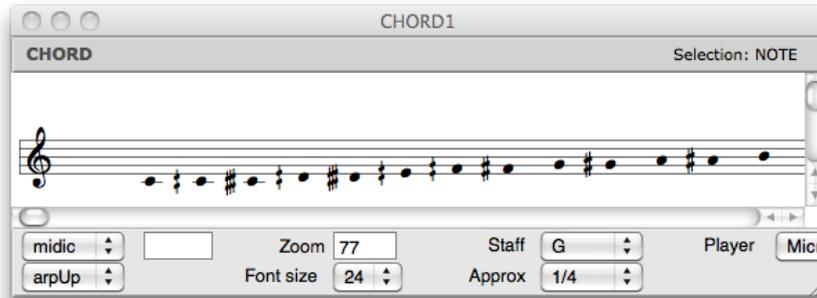
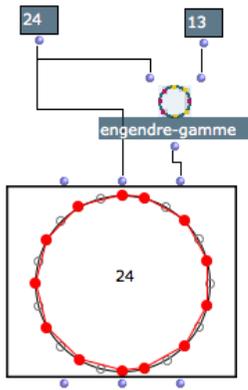
2006



# 4. Les théories diatoniques et les *ME-sets*

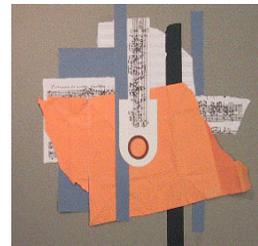
$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

- DFT
- Cloche diatonique
- Classification non-paradigmatique



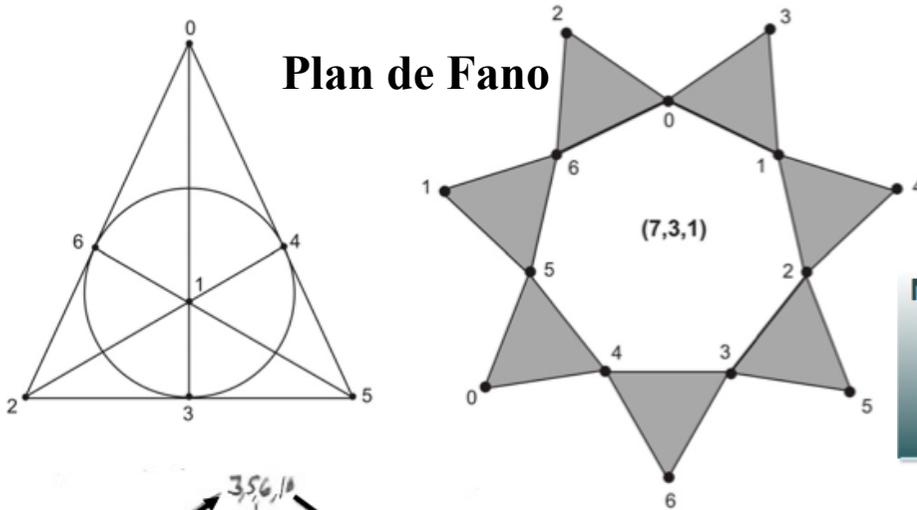
2008

c:  
conservatoire  
de lausanne

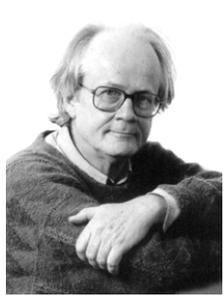
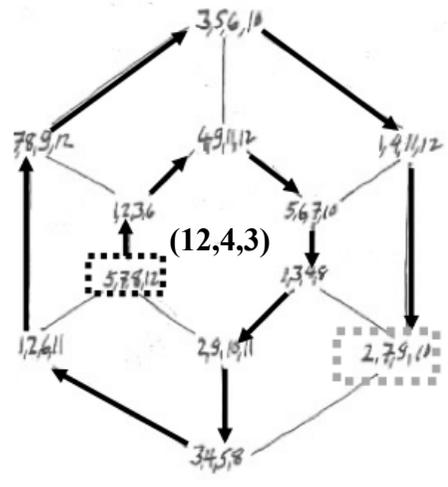
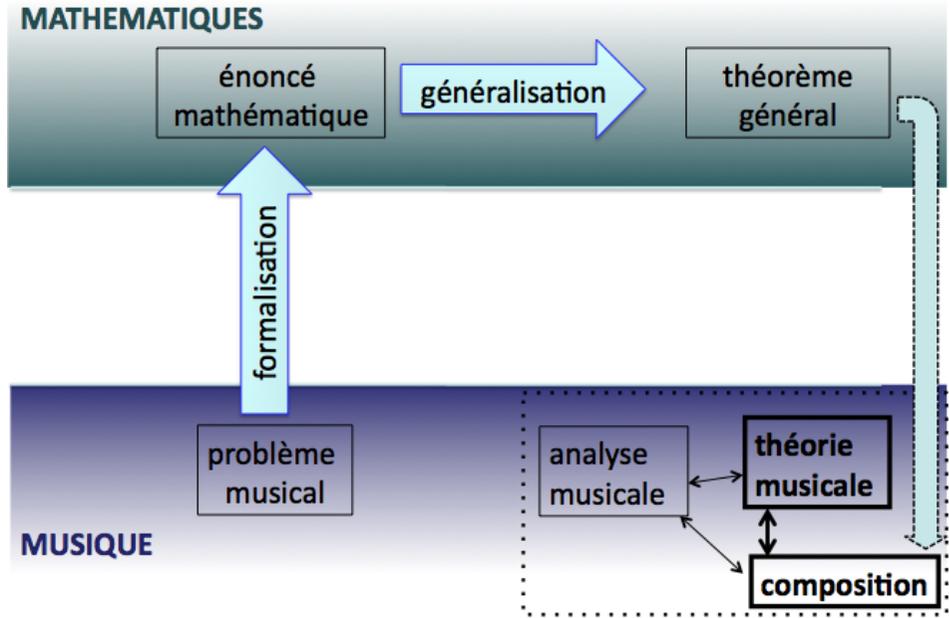


# 5. Block-designs et composition algorithmique

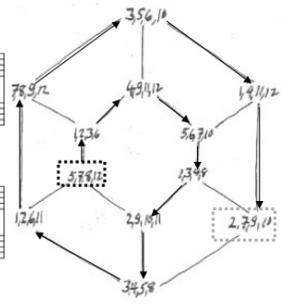
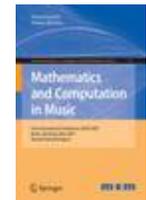
Plan de Fano



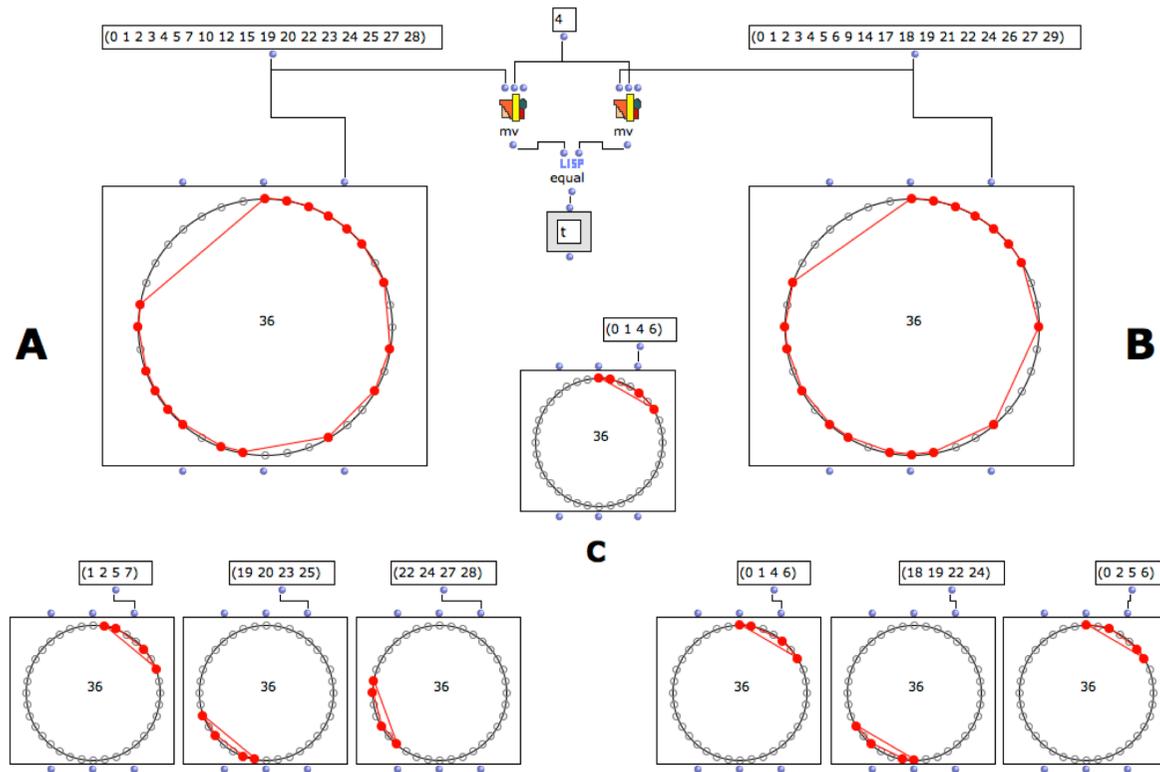
- Représentations géométriques
- Chemins et cycles hamiltoniens



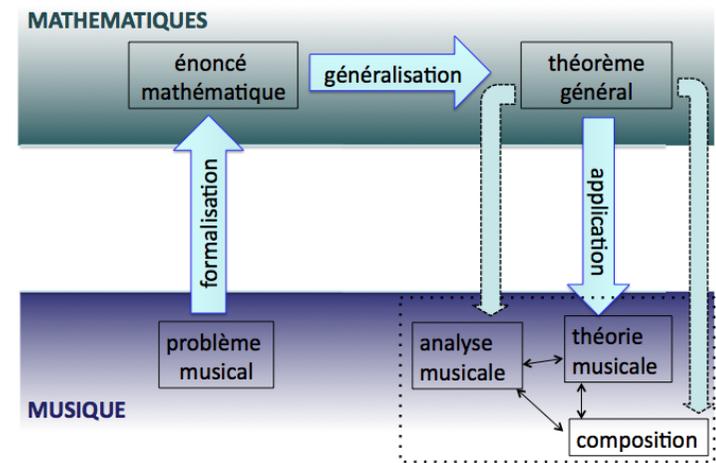
2009



# 6. La relation Z et la théorie de l'homométrie



- Reconstruction de la phase
- Relation  $Z^k$
- Modèle computationnel



**2010**

*mille e novanta auguri a caro Goffredo*

90+

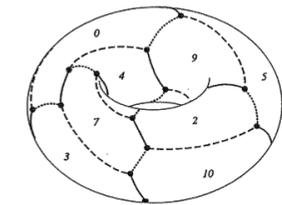
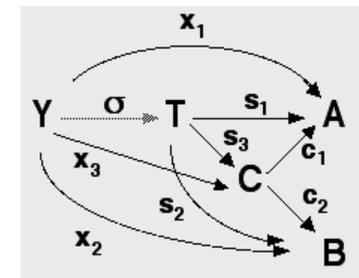
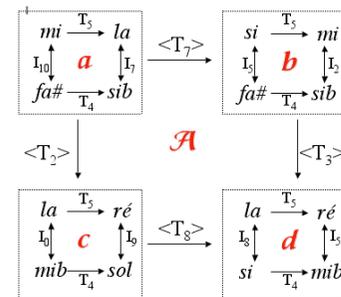
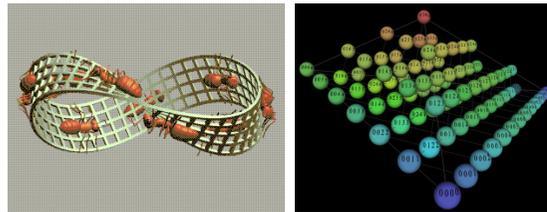
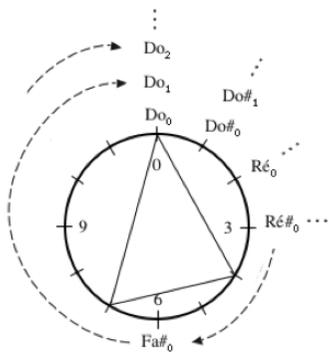
Elliott Carter (1994)

Piano

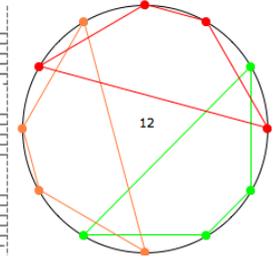
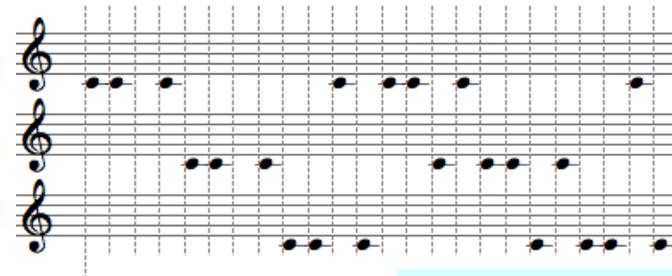
*(senza pedale)\**

# Plan du cours (17/1, 27/1, 31/1, 10/2)

- 1.) Représentation/formalisation et énumération/classification des structures musicales
- 2.) *Set Theory*, théories transformationnelles, diatoniques et néo-riemanniennes (+ Z-relation, ME-sets, ...)
- 4.) Pavages en composition : la construction des canons rythmiques mosaïques
- 5.) Block-designs et composition algorithmique
- 6.) Séquences périodiques et calcul de différences finies à valeurs dans un groupe cyclique
- 7.) Ramifications philosophiques et cognitives de l'approche algébrique en musique

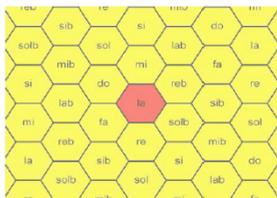


0 0	1 1	2 2	3 3	4 4	5 5	[6 6]
0 1	1 2	2 3	3 4	4 5	5 6	[5 7]
1 1	0 2	1 3	2 4	3 5	4 6	[4 8]
11 2	0 3	1 4	2 5	3 6	4 7	[9 3]
10 2	11 3	0 4	1 5	2 6	3 7	[10 2]
10 3	11 4	0 5	1 6	2 7	3 8	[11 1]
9 3	10 4	11 5	6 0	7 1	8 2	[0 0]
4 9	5 10	6 11	7 0	8 1	9 2	
4 8	5 9	6 10	7 11	8 0	9 1	
5 8	6 9	7 10	8 11	9 0	10 1	
5 7	6 8	7 9	8 10	9 11	10 0	
6 7	7 8	8 9	9 10	10 11	11 0	
6 6	7 7	8 8	9 9	10 10	11 11	



$$Df(x) = f(x) - f(x-1).$$

$$\begin{aligned}
 f &= 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \dots \\
 Df &= 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \dots \\
 D^2 f &= 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ 10 \ 11 \dots \\
 D^3 f &= 7 \ 5 \ 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \ 1 \ 8 \dots \\
 D^k f &= \dots
 \end{aligned}$$



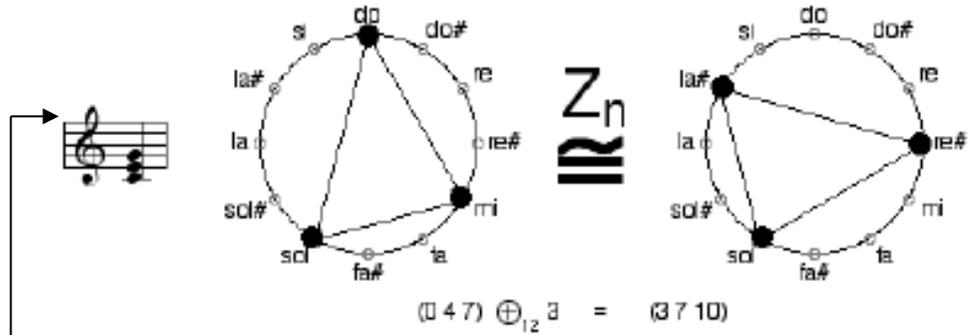
# Quelques notions algébriques de base

---

## 1.) Représentation/formalisation et énumération/classification des structures musicales

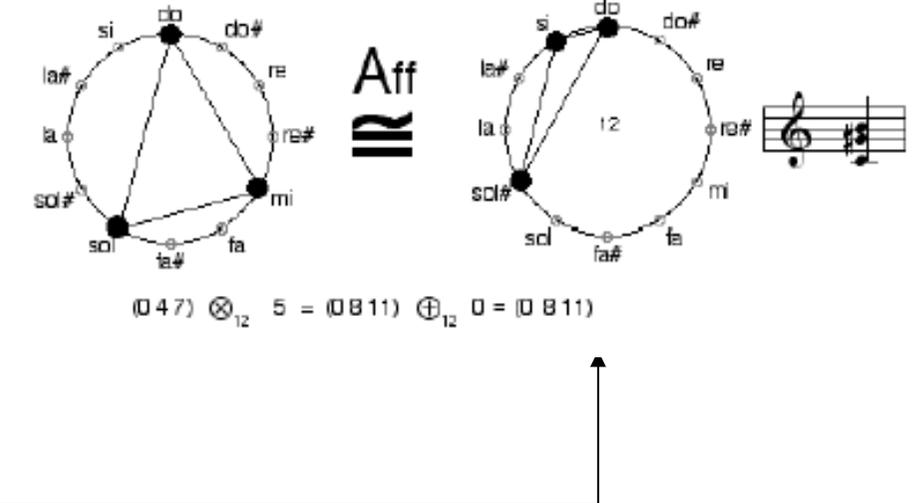
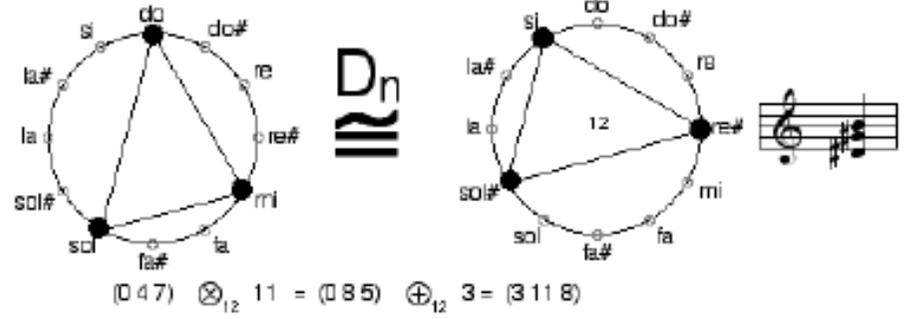
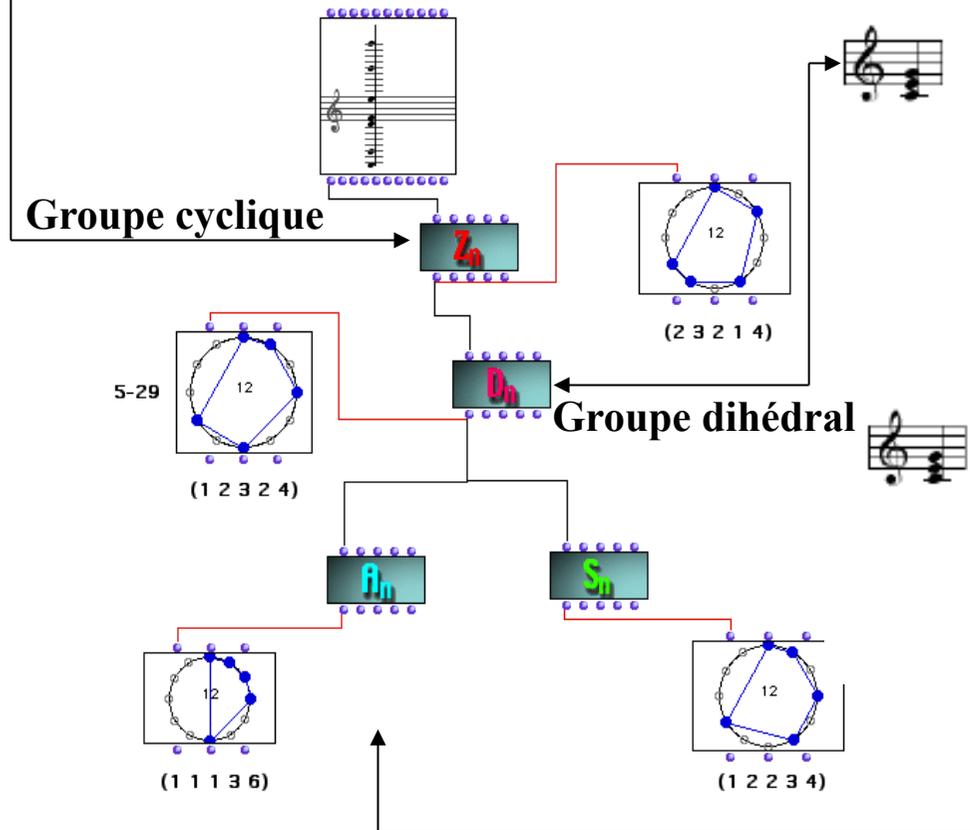
- Relation d'équivalence
- Définition de groupe
  - Groupe cyclique  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  d'ordre  $n$
  - Groupe diédral  $\mathbf{D}_{2n}$  d'ordre  $2n$
  - Groupe affine  $\mathbf{Aff}_n$  d'ordre  $\varphi(n) \cdot n$
  - Groupe symétrique  $\mathbf{S}_n$  d'ordre  $n!$
  - Groupe de Klein
- Action d'un groupe sur un ensemble
  - Action transitive et simplement transitive
  - Stabilisateur d'un élément (d'un ensemble)
- Factorisation d'un groupe

# Les groupes comme "paradigmes"



**Relation d'équivalence:**

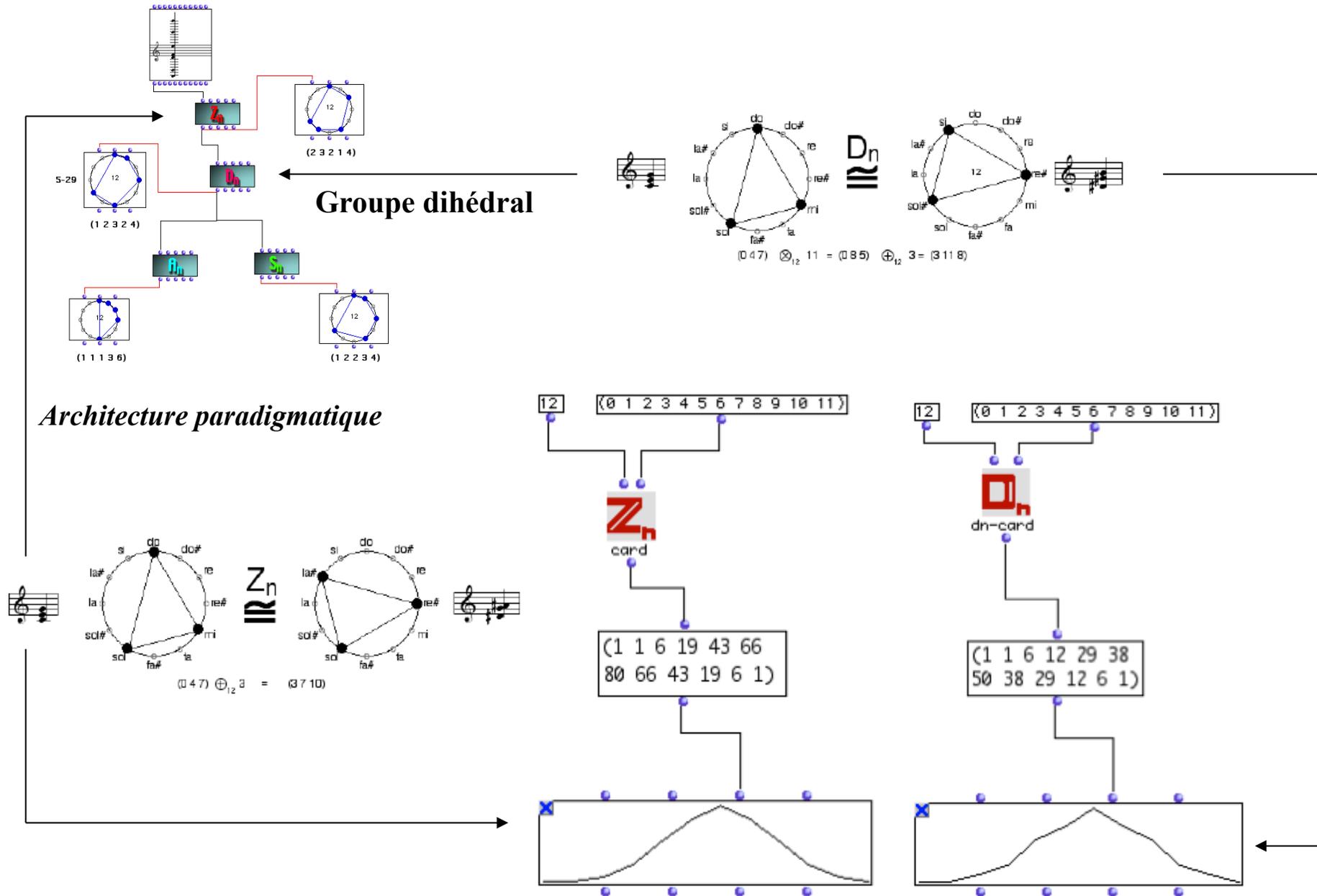
- Reflexive
- Symétrique
- Transitive



*Architecture paradigmatique*

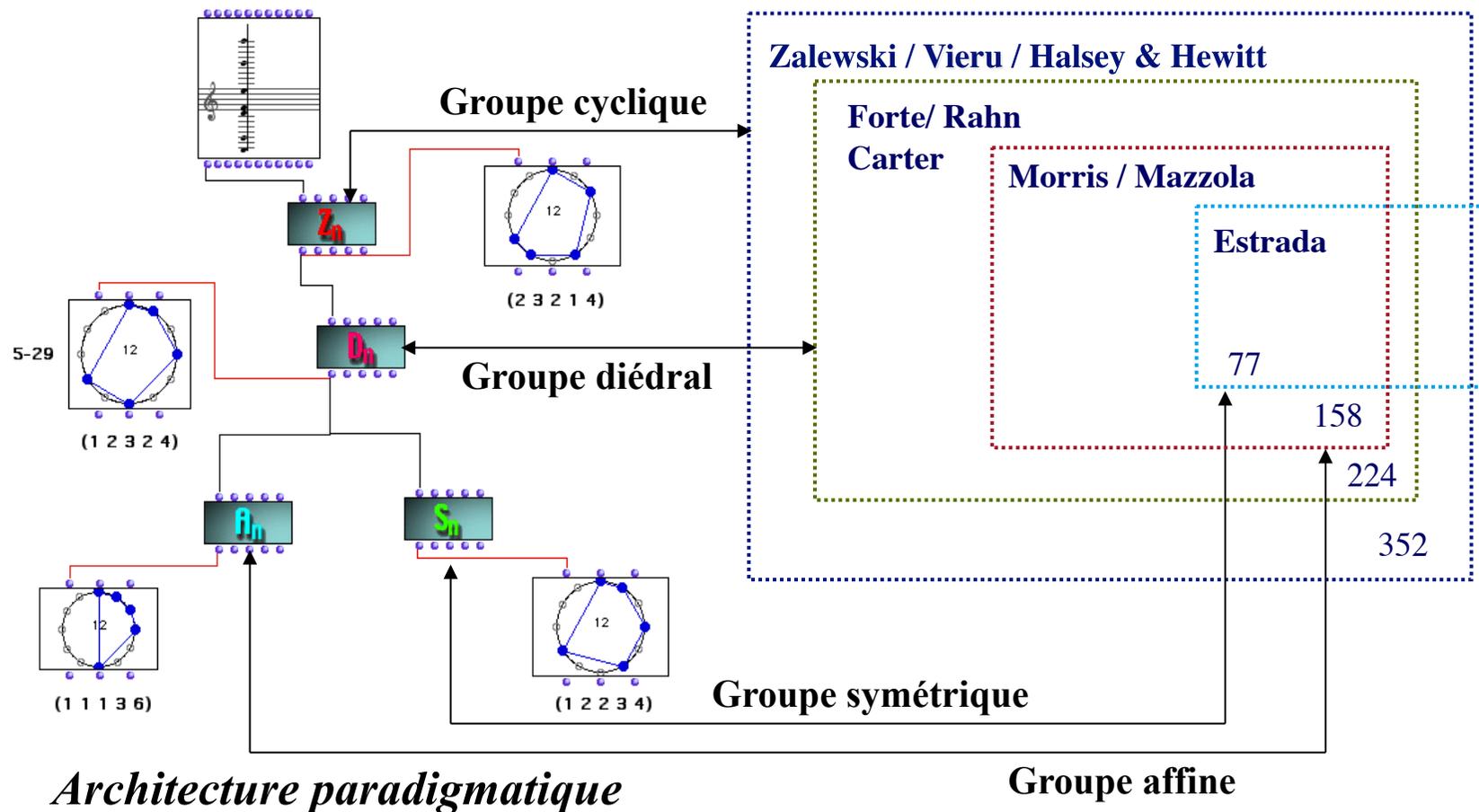
Groupe Affine

# Classes d'équivalence d'accords et groupes de transformations

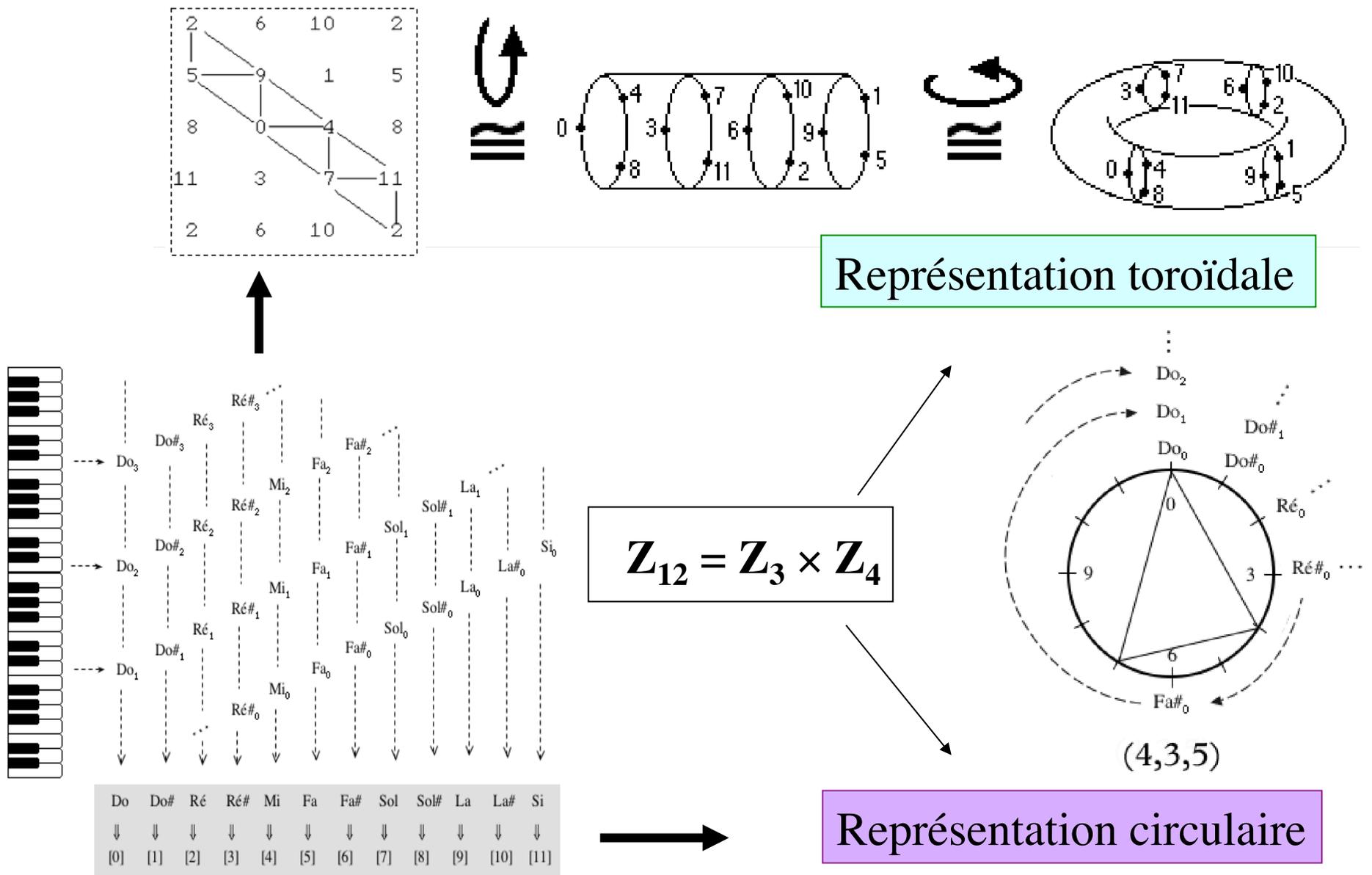


# Classification paradigmatique des structures musicales

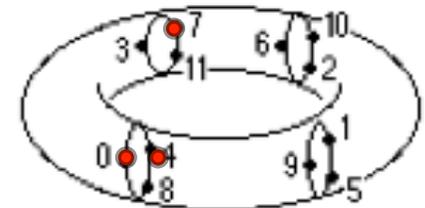
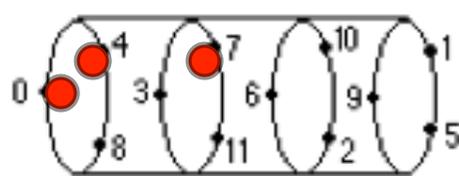
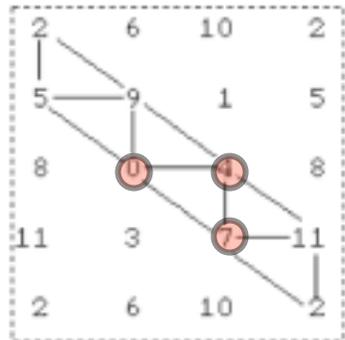
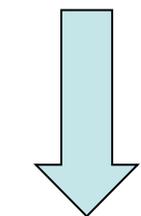
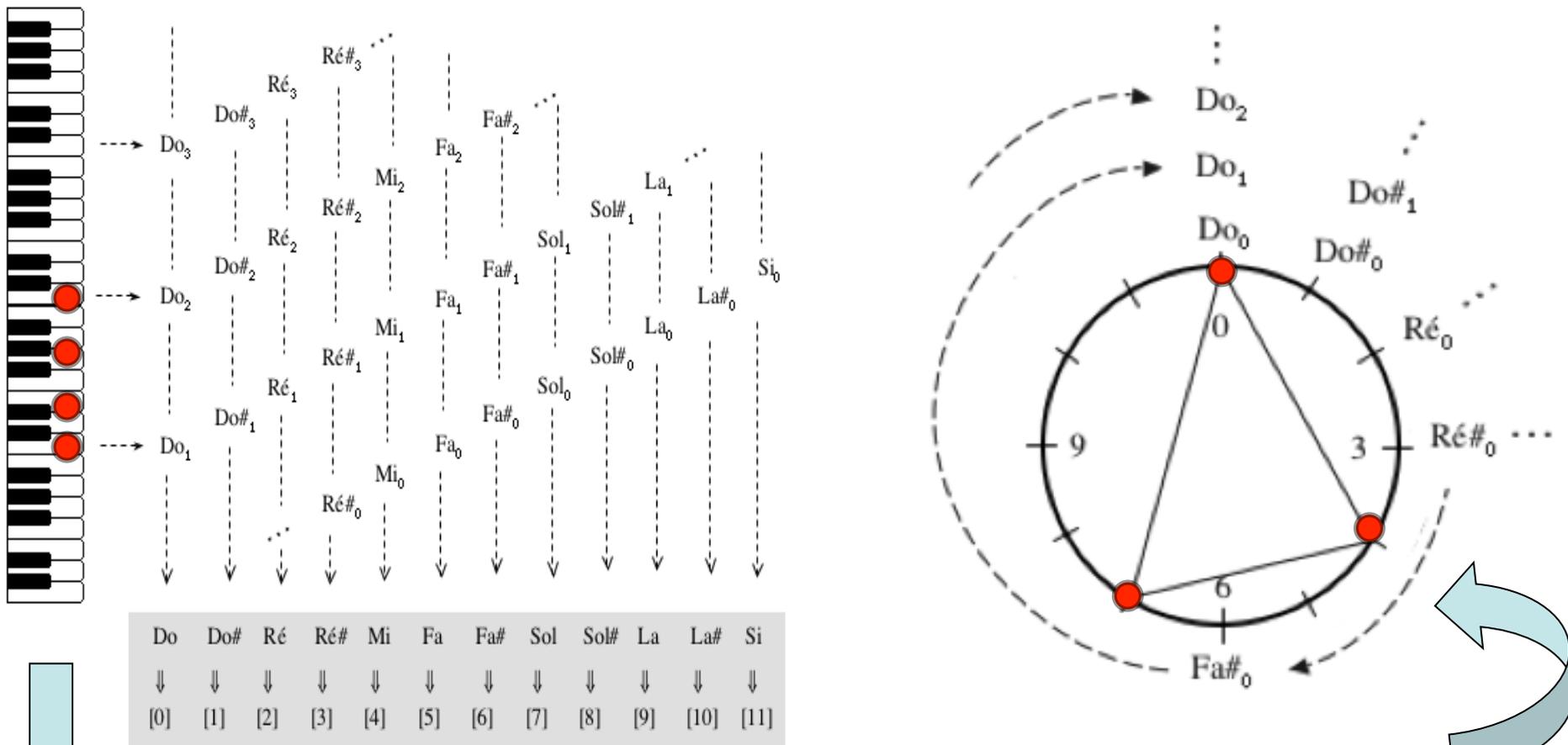
$G \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$C_{12}$	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1
$D_{12}$	1	6	12	29	38	50	38	29	12	6	1	1
$\text{Aff}_1(\mathbb{Z}_{12})$	1	5	9	21	25	34	25	21	9	5	1	1



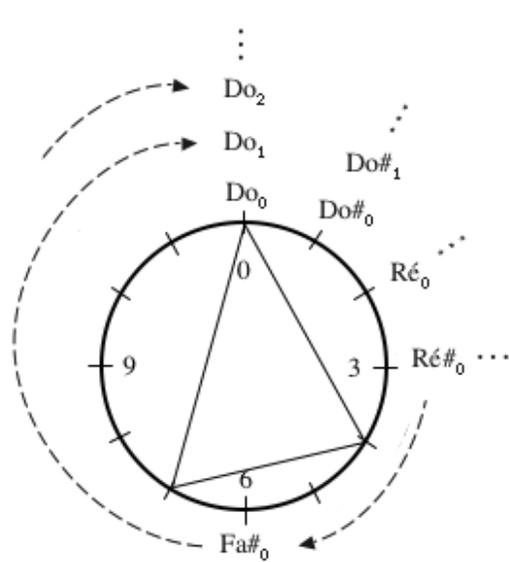
# Equivalence algébrique entre représentations géométriques



# Reduction à l'octave et congruence modulo 12



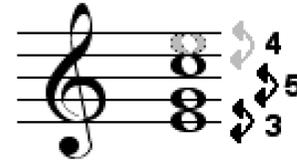
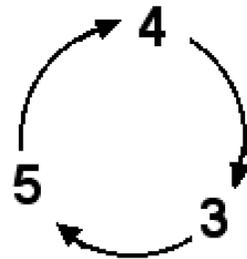
# Représentation circulaire et structure intervallique



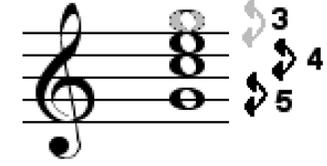
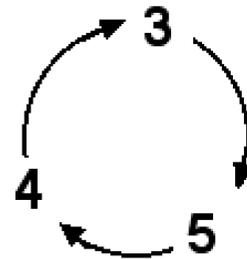
(4,3,5)



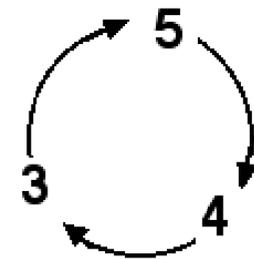
(4 3 5)



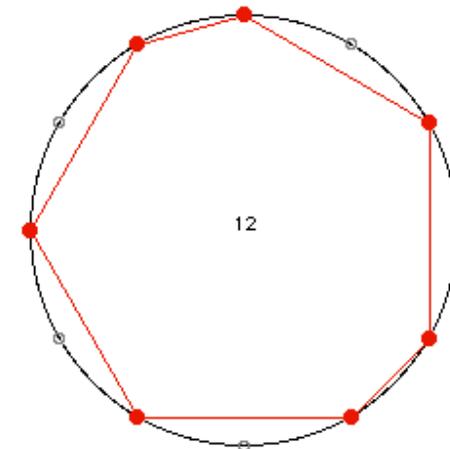
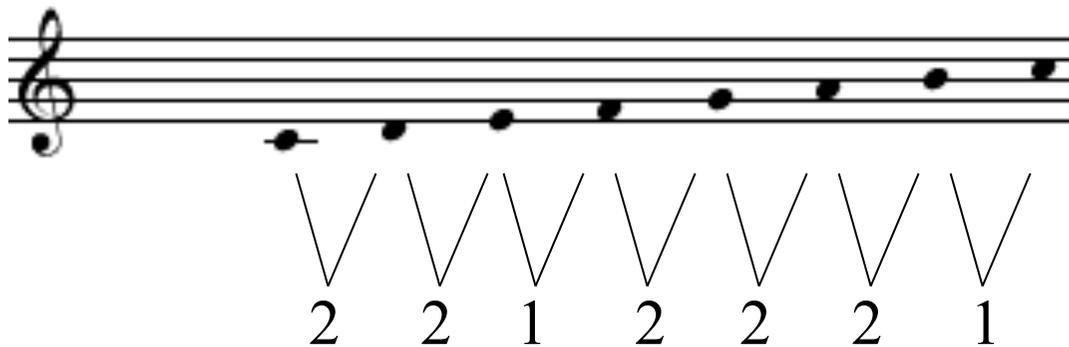
(3 5 4)



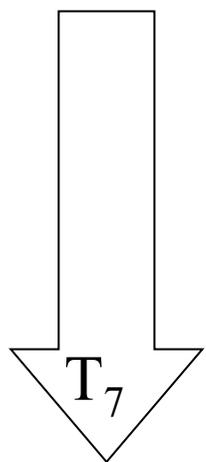
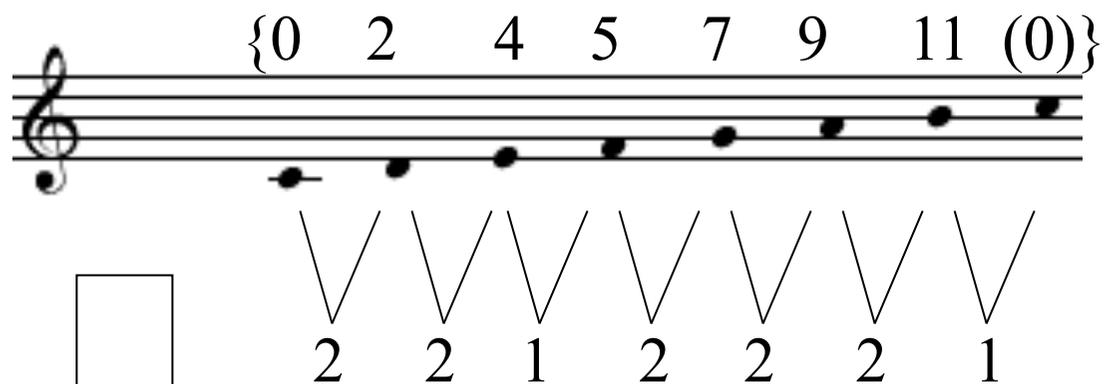
(5 4 3)



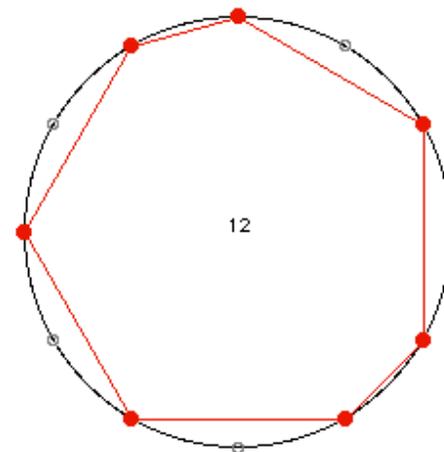
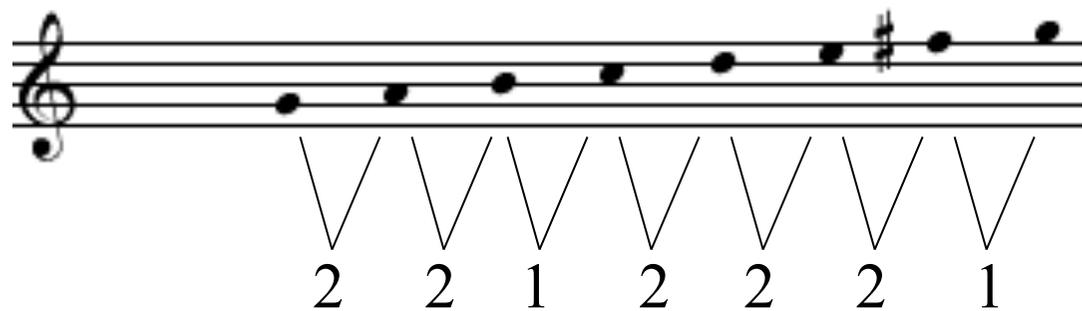
*Renversements = permutations circulaires de la structure intervallique*



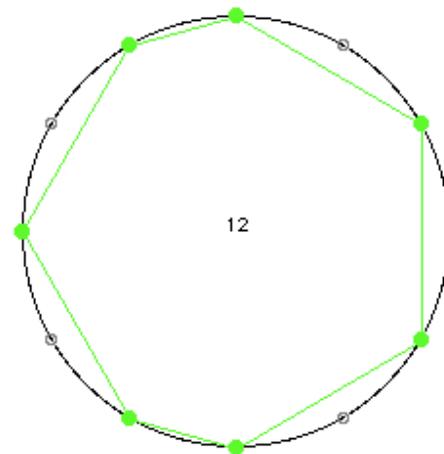
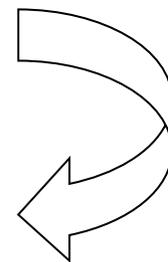
# Transformations géométriques : la transposition



$T_7(x) = 7 + x \pmod{12}$

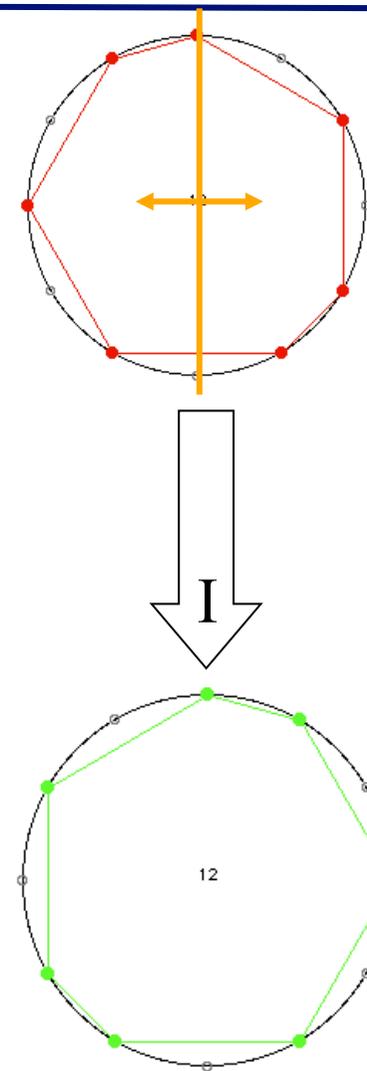
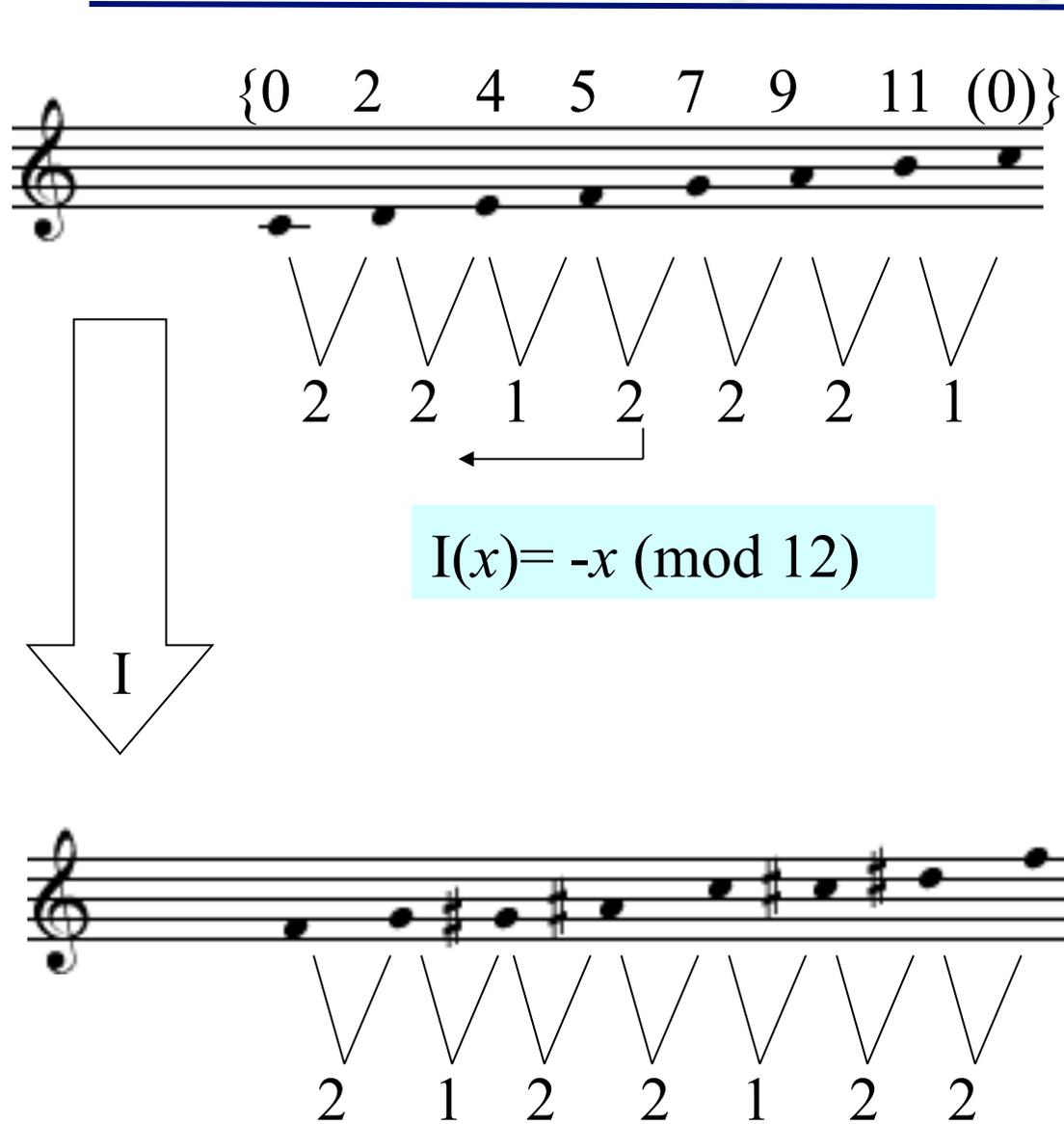


$\alpha = 210^\circ$



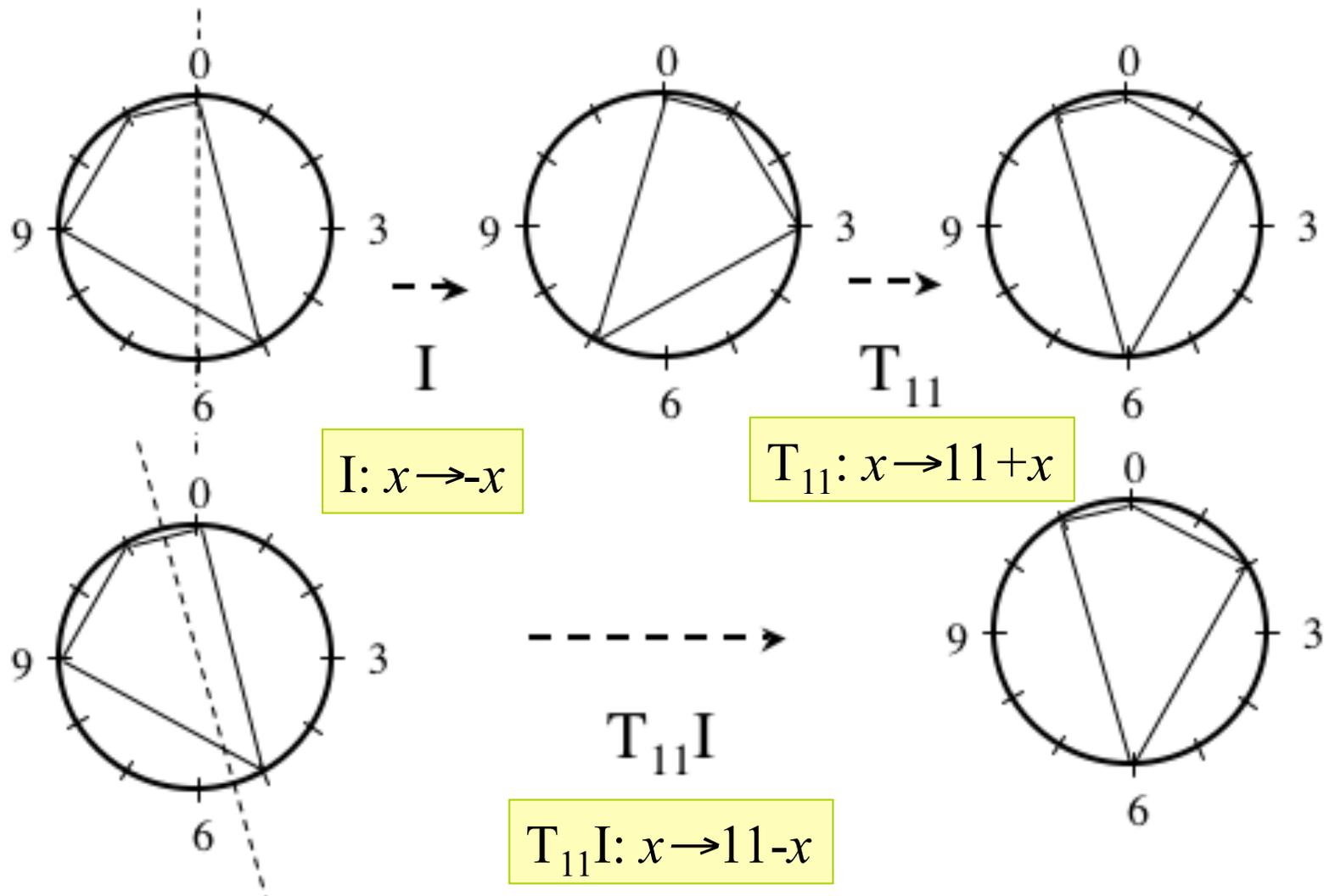
*Equivalence modulo la transposition*

# Transformations géométriques : l'inversion



*Equivalence modulo  
l'inversion*

# La Set Theory: équivalence modulo transposition/inversion

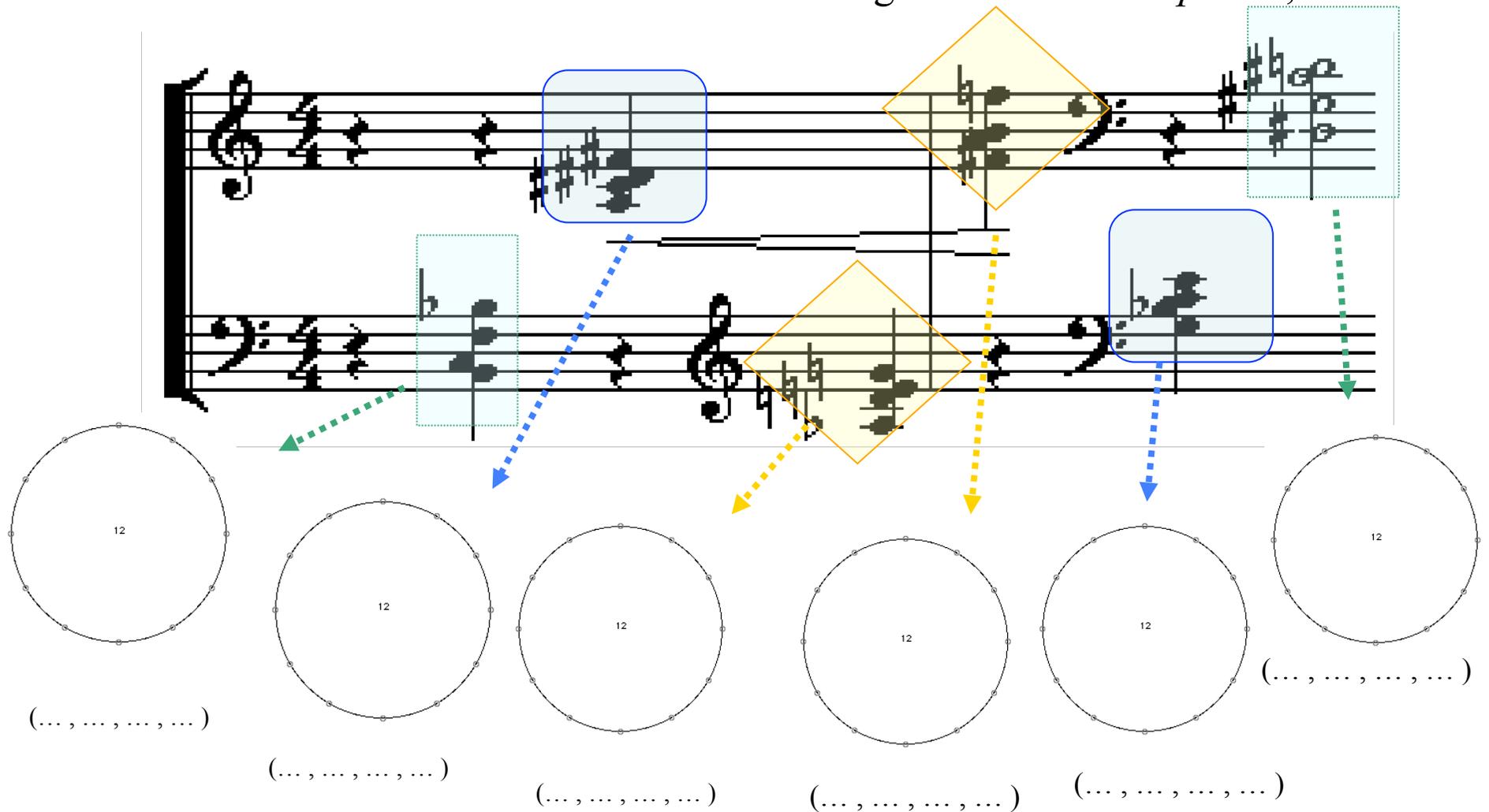


$$\{0, 5, 9, 11\} \longrightarrow \{11, 6, 3, 0\}$$

# L'analyse formalisée ou les entités formelles en musique

*André Riotte e Marcel Mesnage*

A. Schoenberg : *Klavierstück Op. 33a*, 1929



# L'analyse formalisée ou les entités formelles en musique

*André Riotte e Marcel Mesnage*

A. Schoenberg : *Klavierstück Op. 33a*, 1929

The image shows a musical score for Klavierstück Op. 33a, 1929, consisting of two staves. The score is annotated with several colored boxes and arrows. A blue rounded rectangle highlights a chord in the upper staff. A yellow diamond highlights a chord in the lower staff. A light blue dotted box highlights a chord in the upper staff. A light blue rounded rectangle highlights a chord in the lower staff. A light blue dotted box highlights a chord in the upper staff. Arrows connect these boxes to the corresponding chord diagrams below.

The image shows six chord diagrams (heptagrams) arranged in a row. Each diagram is a circle with 12 points labeled 0 through 11. The diagrams are connected by arrows and labeled with transformation symbols. Below each diagram is a numerical label and a set of numbers in parentheses.

Diagram	Label	Numbers
1	$T_3$	0-5511 (1 2 5 6)
2	$T_1 I$	9-4233 (2 3 4 5 6)
3	$T_1 I$	8-6231 (1 2 3 4 5 6)
4		11-6132 (1 2 3 4 5 6)
5		0-4332 (2 3 4 5 6)
6		3-5511 (1 2 5 6)

# Exercice : retrouver les symétries dans une série (I)

Schoenberg: Serenade Op.24, Mouvement 5

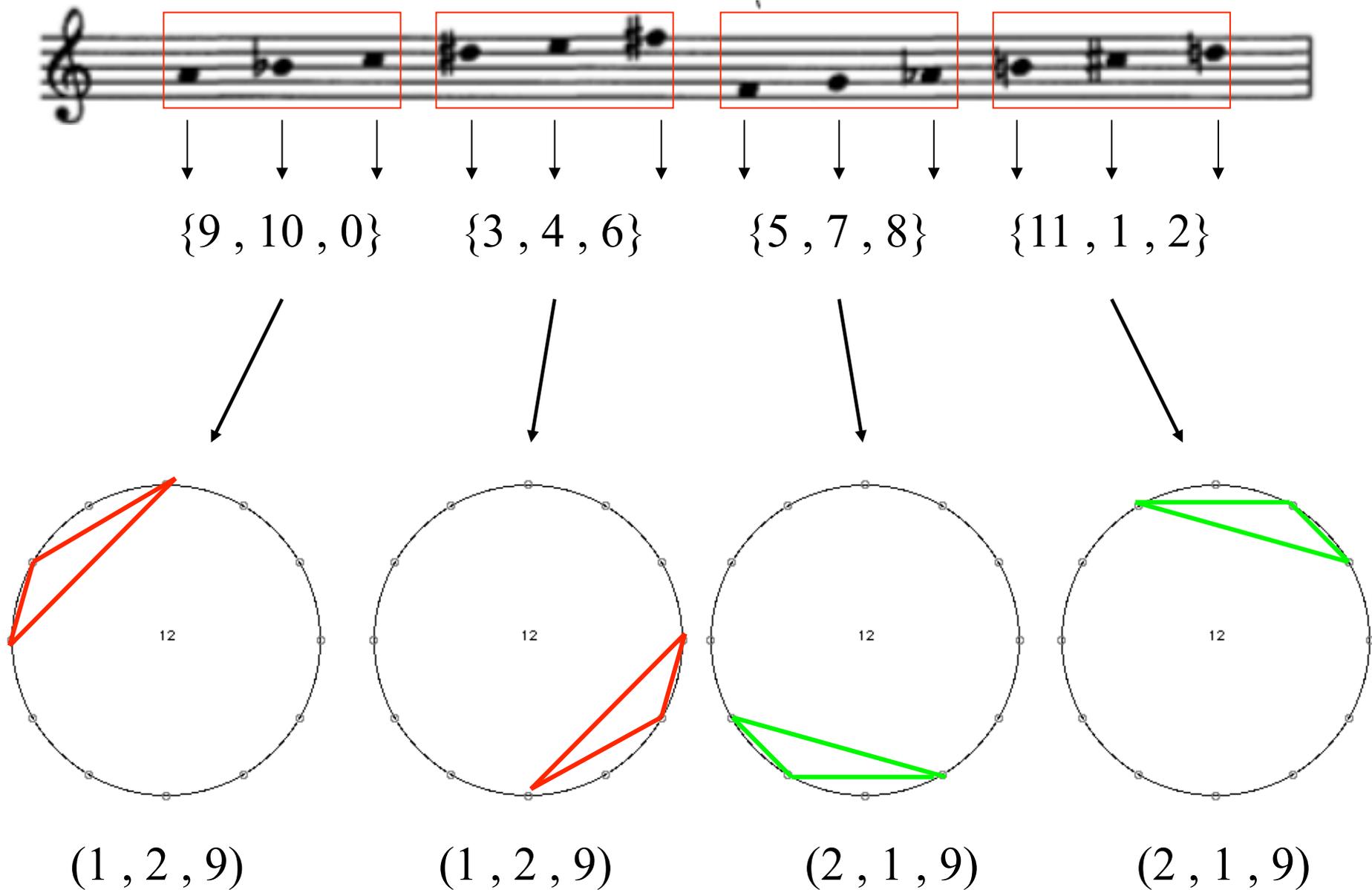
{... , ... , ...}    {... , ... , ...}    {... , ... , ...}    {... , ... , ...}

12                      12                      12                      12

(... , ... , ...)

# Exercice : retrouver les symétries dans une série (I)

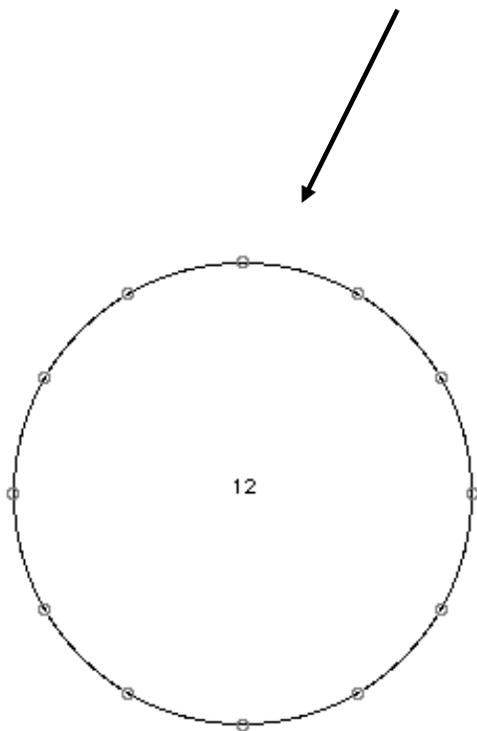
Schoenberg: Serenade Op.24, Mouvement 5



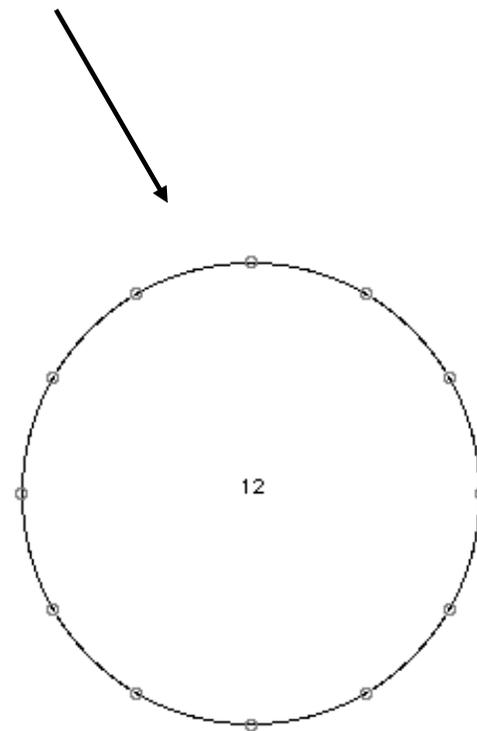
# Exercice : retrouver les symétries dans une série

Schoenberg: Serenade Op.24, Mouvement 5

The image shows a musical staff with a treble clef. Two segments of the series are highlighted with red boxes. The first box covers six notes: G4, F4, E4, D4, C4, B3. The second box covers six notes: B3, A3, G3, F3, E3, D3. Below each box, six arrows point down to a set of six dots enclosed in curly braces: { ..., ..., ..., ..., ..., ... }.



( ..., ..., ..., ..., ..., ... )

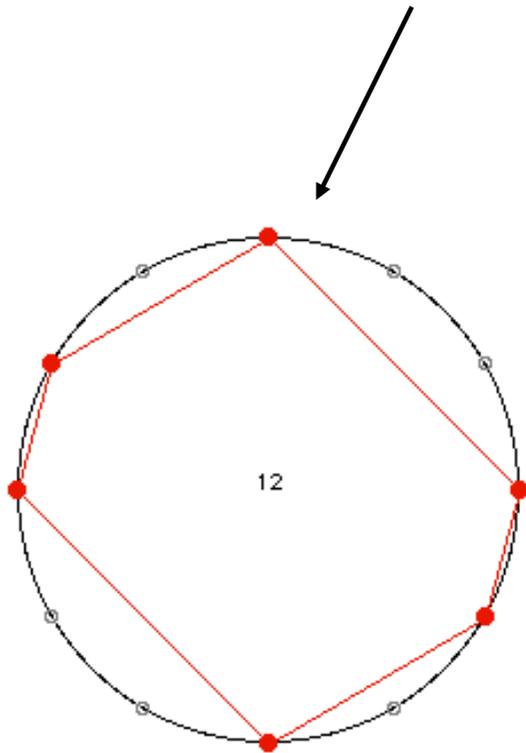


( ..., ..., ..., ..., ..., ... )

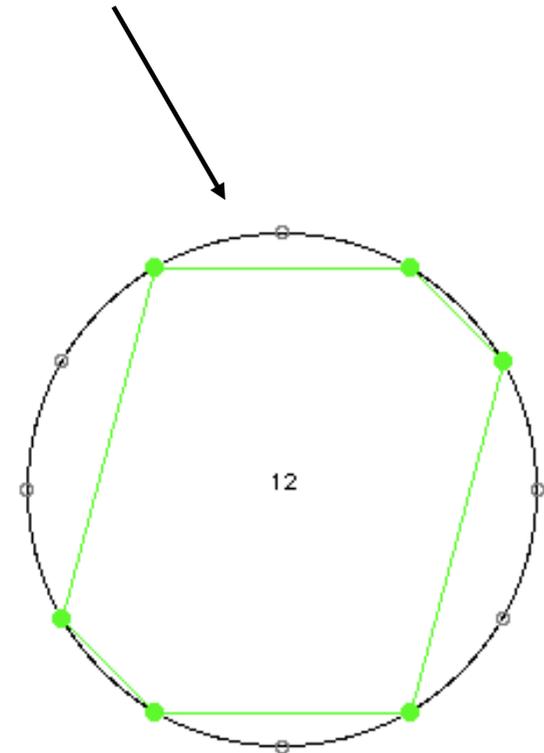
# Exercice : retrouver les symétries dans une série

Schoenberg: Serenade Op.24, Mouvement 5

$\{9, 10, 0, 3, 4, 6\}$        $\{5, 7, 8, 11, 1, 2\}$



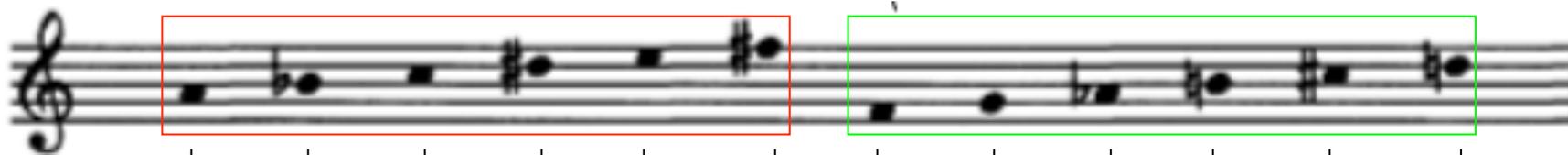
(3, 1, 2, 3, 1, 2)



(2, 1, 3, 2, 1, 3)

# “Combinatorialité” et symétrie par transposition

Schoenberg: Serenade Op.24, Mouvement 5

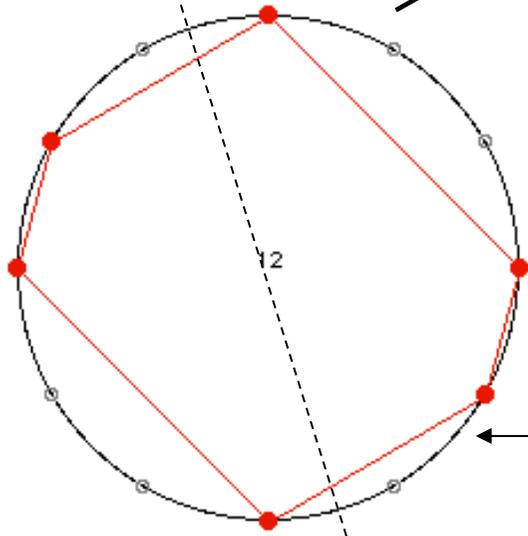


$$A = \{9, 10, 0, 3, 4, 6\} \quad \{5, 7, 8, 11, 1, 2\} = A'$$

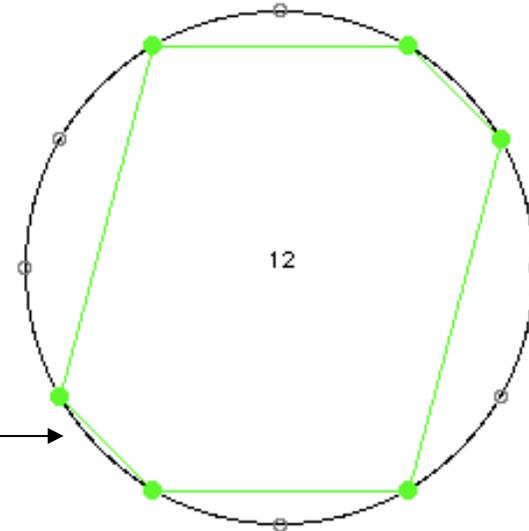
$$\begin{aligned} T_6\{9,10,0,3,4,6\} &= \\ &= \{6+9, 6+10, 6, 6+3, 6+4, 6+6\} = \\ &= \{3,4,6,9,10,0\} \end{aligned}$$

$$T_6(A) = A$$

$$I_{11} = T_{11} I$$

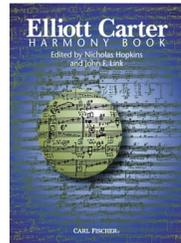


(3, 1, 2, 3, 1, 2)



(2, 1, 3, 2, 1, 3)

# Elliott Carter : 90+ (1994)



- **Combinatoire d'accords**
  - Hexacordes
  - Tétracordes
  - Triades
  - Relation Z
- **Séries tous-intervalles**
  - *Link-chords*



(piano: John Snijders)

*mille e novanta auguri a caro Goffredo*  
**90+**  
Elliott Carter  
(1994)

♩ = 96

Piano

(senza pedale)\*

\* Use pedal only to join one chord to another *legato*, as in mm. 1-13, 16-21, 36-43, and 45-48.

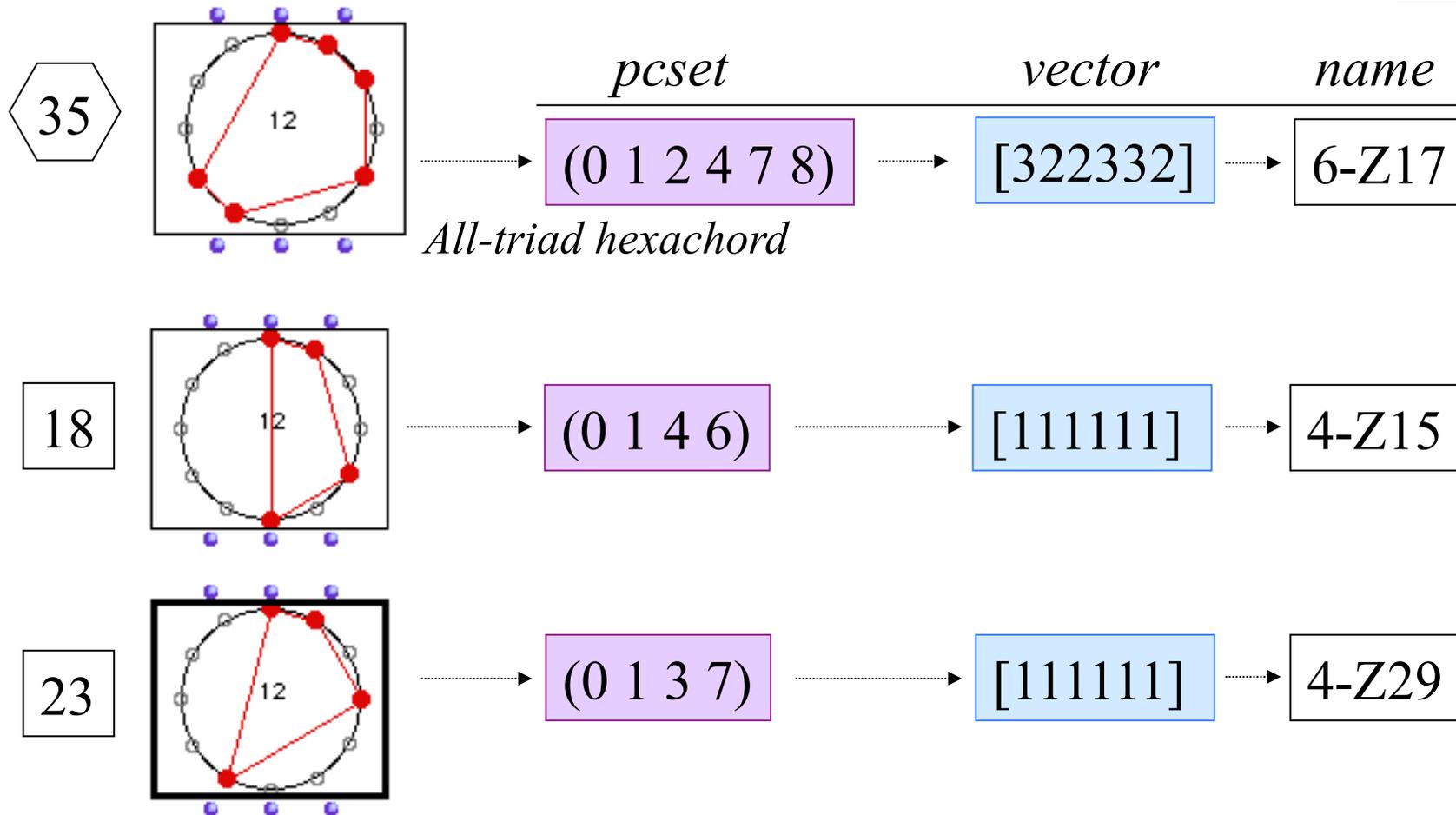
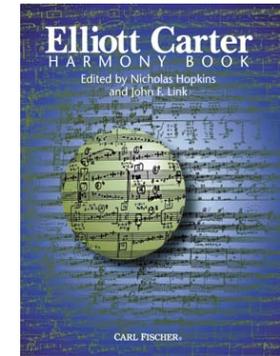
© Copyright 1994 by Hendon Music, Inc.  
a Boosey & Hawkes Company.  
Copyright for all countries. All rights reserved.

PIB 503

Printed in U.S.A.

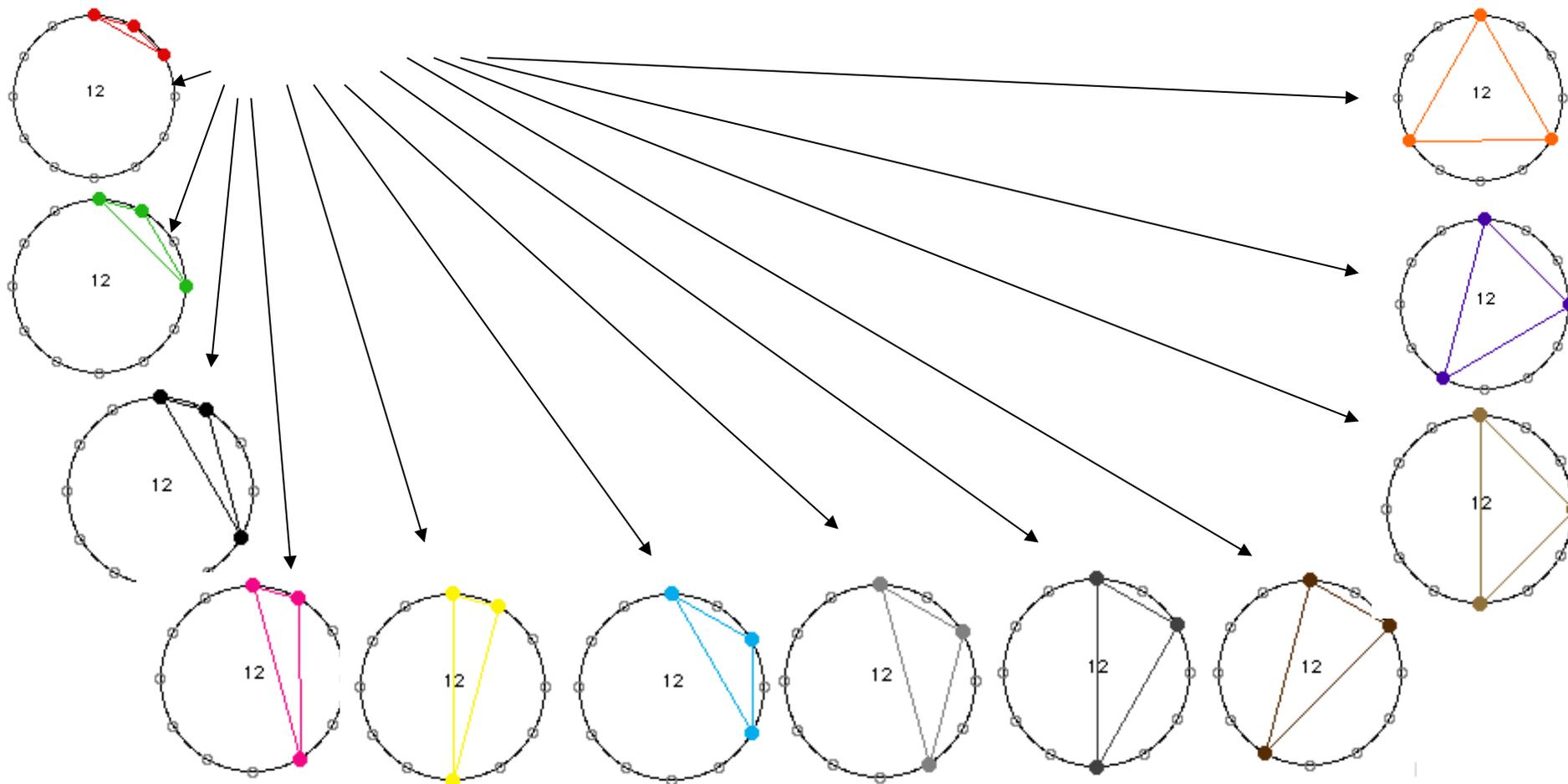
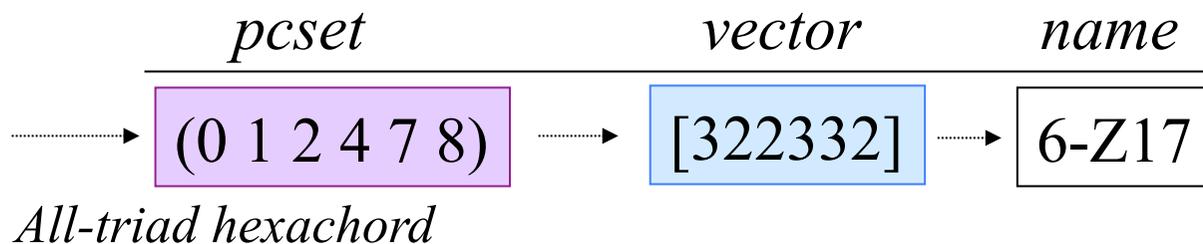
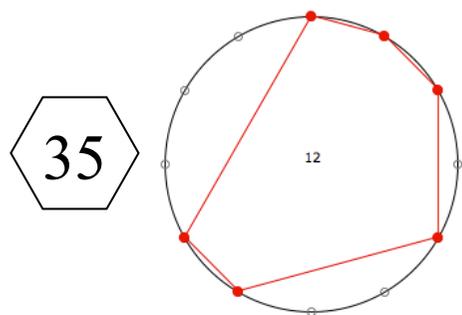
# Elliott Carter: 90+ (1994)

« From about 1990, I have reduced my vocabulary of chords more and more to the six note chord n° 35 and the four note chords n° 18 and 23, which encompass all the intervals » (Harmony Book, 2002, p. ix)



# Elliott Carter: 90+ (1994)

$G \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$C_{12}$	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1
$D_{12}$	1	6	12	29	38	50	38	29	12	6	1	1
$\text{Aff}_1(\mathbb{Z}_{12})$	1	5	9	21	25	34	25	21	9	5	1	1

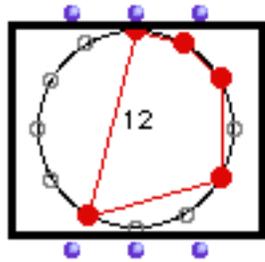


# Catalogue des *pitch-class sets* d'Allen Forte (1973)

complémentaire

name	pcs	vector	name	pcs	vector
5-30	0,1,4,6,8	121321	7-30	0,1,2,4,6,8,9	343542
5-31	0,1,3,6,9	114112	7-31	0,1,3,4,6,7,9	336333
5-32	0,1,4,6,9	113221	7-32	0,1,3,4,6,8,9	335442
5-33(12)	0,2,4,6,8	040402	7-33	0,1,2,4,6,8,10	262623
5-34(12)	0,2,4,6,9	032221	7-34	0,1,3,4,6,8,10	254442
5-35(12)	0,2,4,7,9	032140	7-35	0,1,3,5,6,8,10	254361
5-Z36	0,1,2,4,7	222121	7-Z36	0,1,2,3,5,6,8	444342
5-Z37(12)	0,3,4,5,8	212320	7-Z37	0,1,3,4,5,7,8	434541
5-Z38	0,1,2,5,8	212221	7-Z38	0,1,2,4,5,7,8	434442
6-1(12)	0,1,2,3,4,5	543210			
6-2	0,1,2,3,4,6	443211			
5-Z36	0,1,2,4,7	222121	7-Z36	0,1,2,3,5,6,8	444342
6-Z4(12)	0,1,2,4,5,6	432321	6-Z37(12)	0,1,2,3,4,8	
6-5	0,1,2,3,6,7	422232	6-Z38(12)	0,1,2,3,7,8	
6-Z6(12)	0,1,2,5,6,7	421242			
6-7(6)	0,1,2,6,7,8	420243			
6-8(12)	0,2,3,4,5,7	343230			
6-9	0,1,2,3,5,7	342231			
6-Z10	0,1,3,4,5,7	333321	6-Z39	0,2,3,4,5,8	
6-Z11	0,1,2,4,5,7	333231	6-Z40	0,1,2,3,5,8	
6-Z12	0,1,2,4,6,7	332232	6-Z41	0,1,2,3,6,8	
6-Z13(12)	0,1,3,4,6,7	324222	6-Z42(12)	0,1,2,3,6,9	

# Vecteur d'intervalles et relation Z



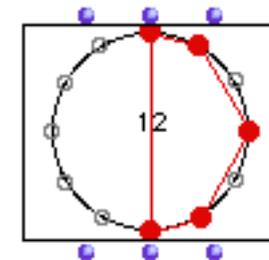
5-30	0,1,4,6,8	121321
5-31	0,1,3,6,9	114112
5-32	0,1,4,6,9	113221
5-33(12)	0,2,4,6,8	040402
5-34(12)	0,2,4,6,9	032221
5-35(12)	0,2,4,7,9	032140
5-Z36	0,1,2,4,7	222121
5-Z37(12)	0,3,4,5,8	212320
5-Z38	0,1,2,5,8	212221
6-1(12)	0,1,2,3,4,5	543210
6-2	0,1,2,3,4,6	443211

5-Z36	0,1,2,4,7	222121
6-Z4(12)	0,1,2,4,5,6	432321
6-5	0,1,2,3,6,7	422232
6-Z6(12)	0,1,2,5,6,7	421242
6-7(6)	0,1,2,6,7,8	420243
6-8(12)	0,2,3,4,5,7	343230
6-9	0,1,2,3,5,7	342231
6-Z10	0,1,3,4,5,7	333321
6-Z11	0,1,2,4,5,7	333231
6-Z12	0,1,2,4,6,7	332232
6-Z13(12)	0,1,3,4,6,7	324222

7-30	0,1,2,4,6,8,9	343542
7-31	0,1,3,4,6,7,9	336333
7-32	0,1,3,4,6,8,9	335442
7-33	0,1,2,4,6,8,10	262623
7-34	0,1,3,4,6,8,10	254442
7-35	0,1,3,5,6,8,10	254361
7-Z36	0,1,2,3,5,6,8	444342
7-Z37	0,1,3,4,5,7,8	434541
7-Z38	0,1,2,4,5,7,8	434442

6-Z36	0,1,2,3,4,7
6-Z37(12)	0,1,2,3,4,8
6-Z38(12)	0,1,2,3,7,8

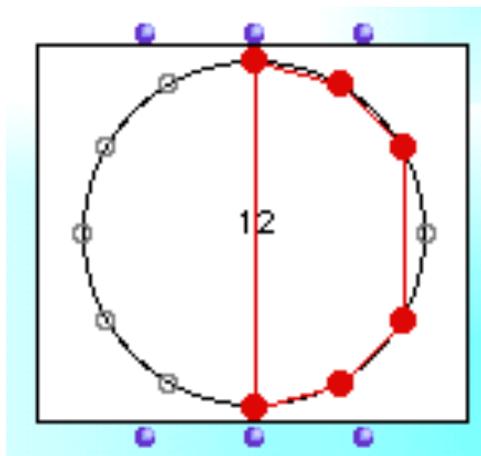
6-Z39	0,2,3,4,5,8
6-Z40	0,1,2,3,5,8
6-Z41	0,1,2,3,6,8
6-Z42(12)	0,1,2,3,6,9



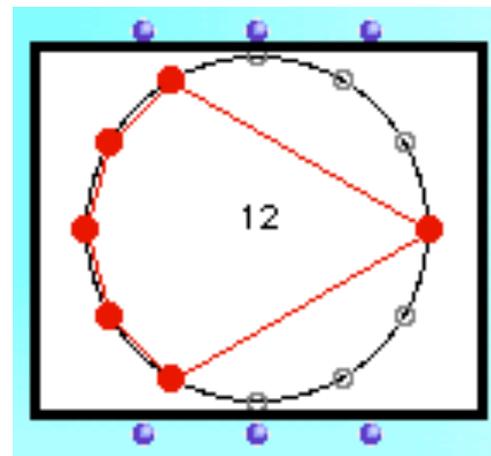
5-Z12

## Théorème de l'hexacorde (ou théorème de Babbitt)

(Wilcox, Ralph Fox (?), Chemillier, Lewin, Mazzola, Schaub, ..., Amiot [2006])



A



A'

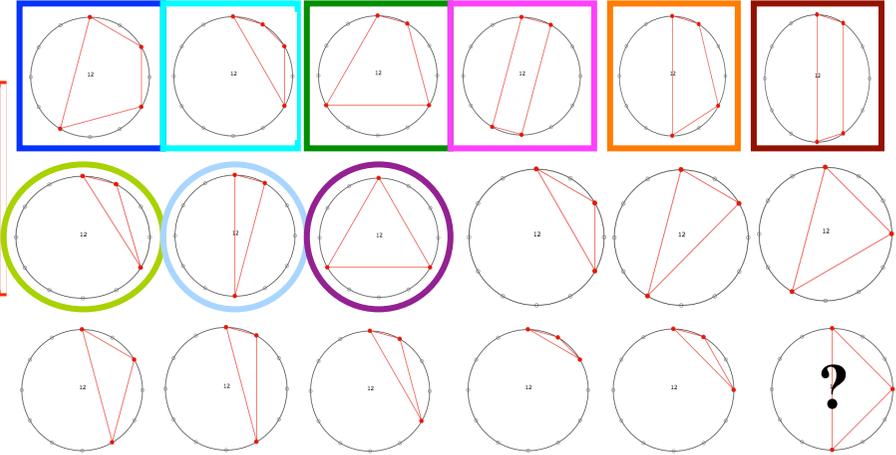
$$IV(A) = [4, 3, 2, 3, 2, 1] = [4, 3, 2, 3, 2, 1] = IV(A')$$

*Un hexacorde et son complémentaire ont le même vecteur d'intervalles*

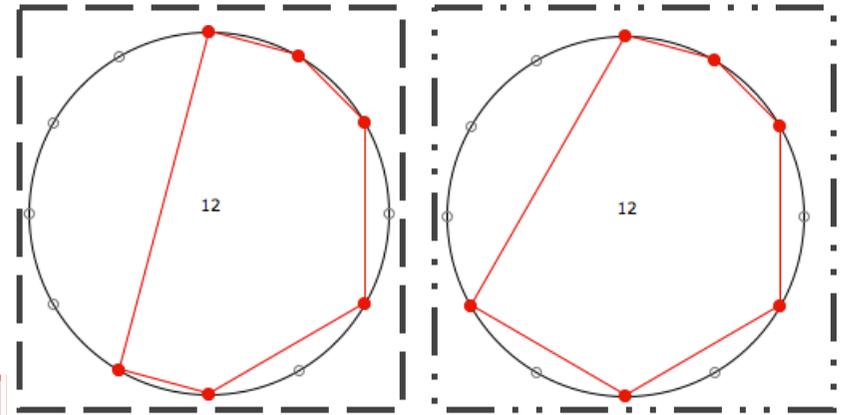
# Elliott Carter : 90+ (1994) : combinatoire tetra/tricordale

*mille e novanta auguri a caro Goffredo*  
**90+**  
Elliott Carter (1994)

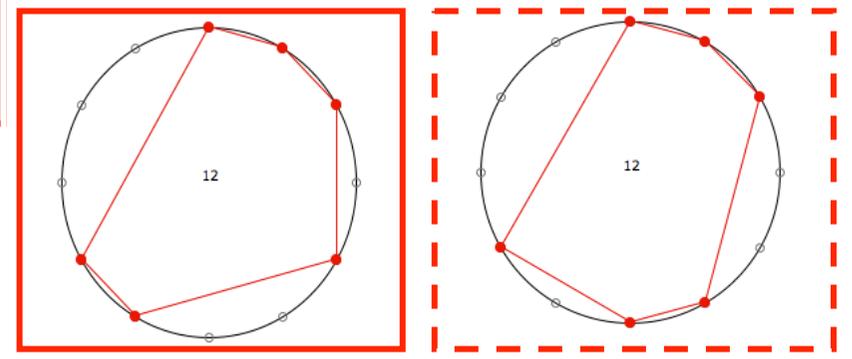
Piano  
= 96  
mp  
f  
(senza pedale)\*



mp  
f



mp  
f

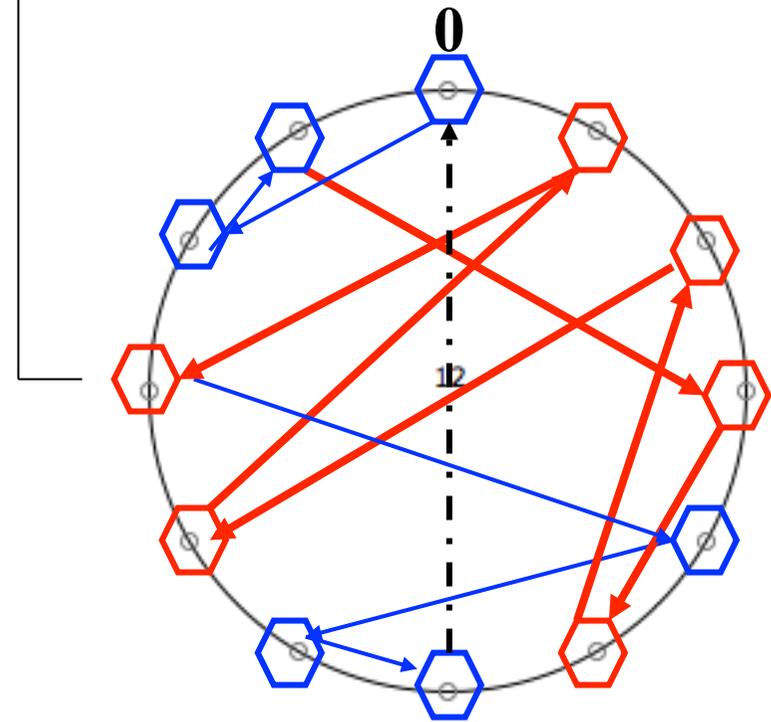
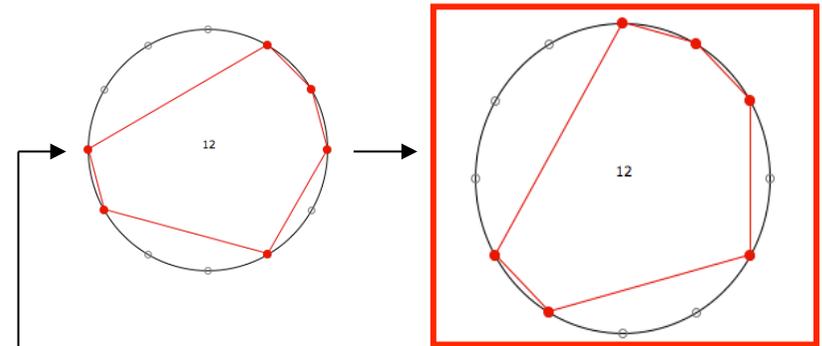
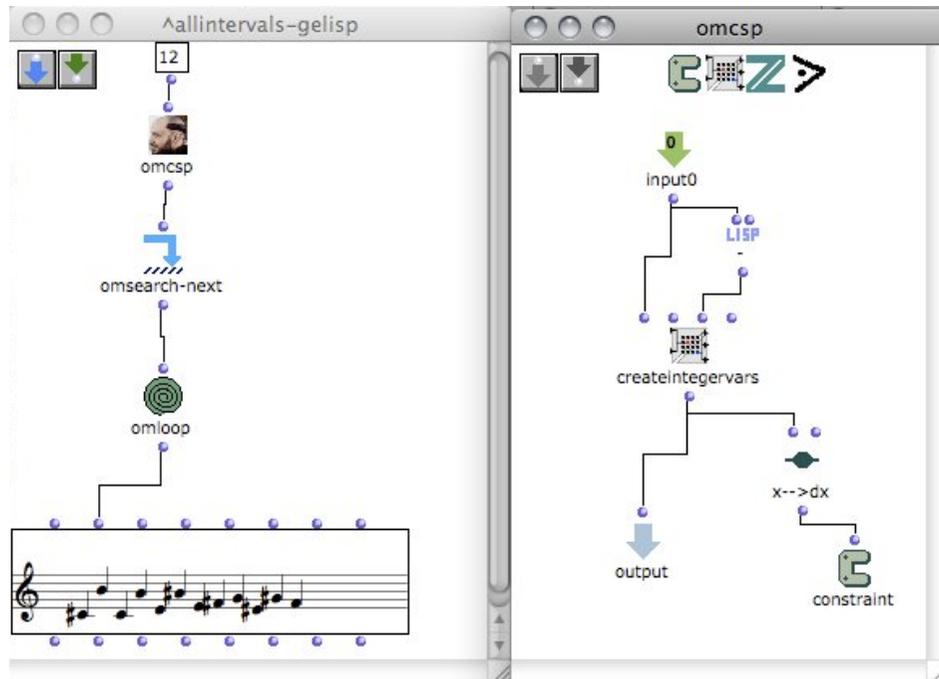


mp  
f

mp  
f

# Elliott Carter : 90+ (1994) : Link-chords (mm. 49–68)

OM-> ((0 10 11 3 5 2 8 1 9 4 7 6) (1 2 3 5 8 9))  
 OM-> ((0 10 11 1 5 2 9 3 8 4 7 6) (1 2 3 5 8 9))  
 OM-> ((0 10 3 5 2 8 9 1 4 11 7 6) (1 2 3 5 8 9))  
 OM-> ((0 9 4 8 2 3 5 10 1 11 7 6) (0 2 3 4 8 9))  
 OM-> ((0 9 4 2 3 8 10 1 5 11 7 6) (0 2 3 4 8 9))  
 OM-> ((0 9 3 11 4 5 7 10 2 1 8 6) (3 4 5 7 10 11))  
 OM-> ((0 9 1 4 2 8 3 5 10 11 7 6) (3 5 6 7 10 11))  
 ...



Mauricio Toro Universidad Javeriana, Colombia / IRCAM  
<http://gelisp.sourceforge.net/>

**S = (0 10 11 3 5 2 8 1 9 4 7 6)**  
**S\* = (10 1 4 2 9 6 5 8 7 3 11)**

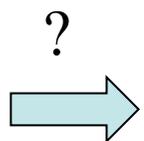
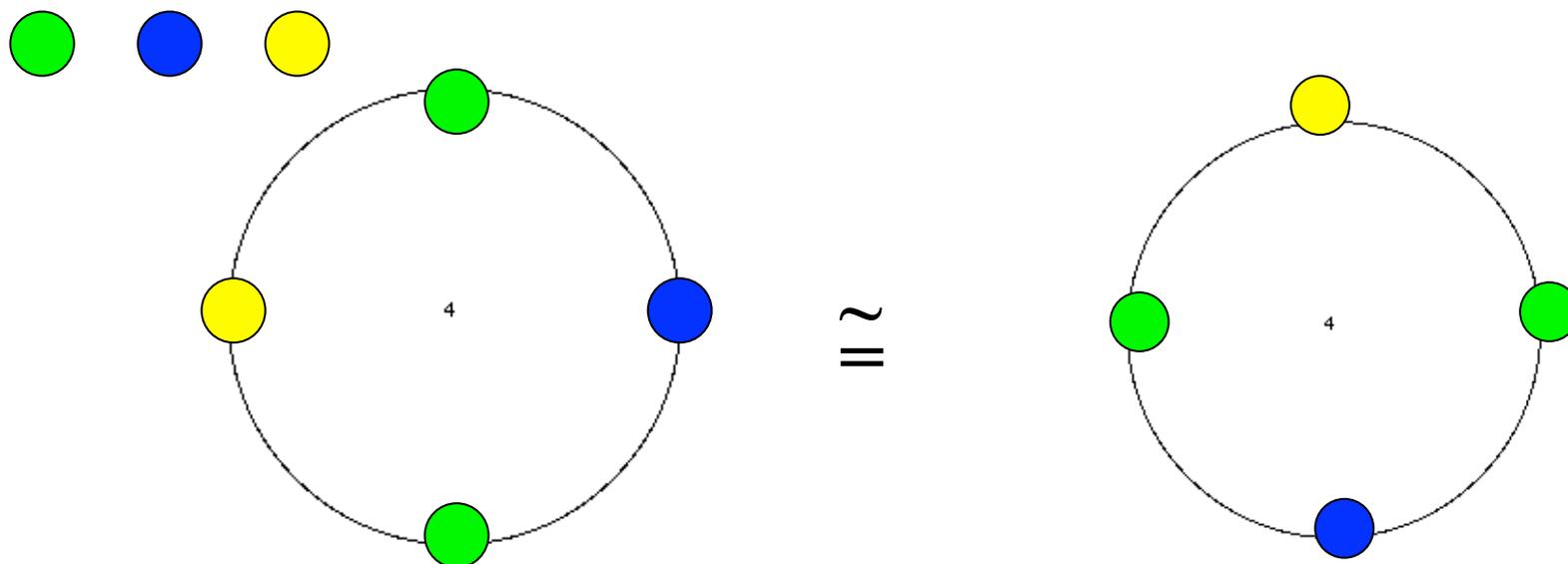
# Enumeration des orbites par rapport à l'action d'un groupe



Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

$$X^g = \{x \in X : gx = x\}$$



Trouver le nombre de configurations possibles

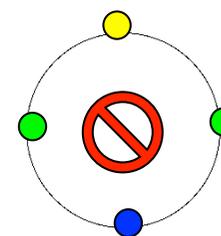
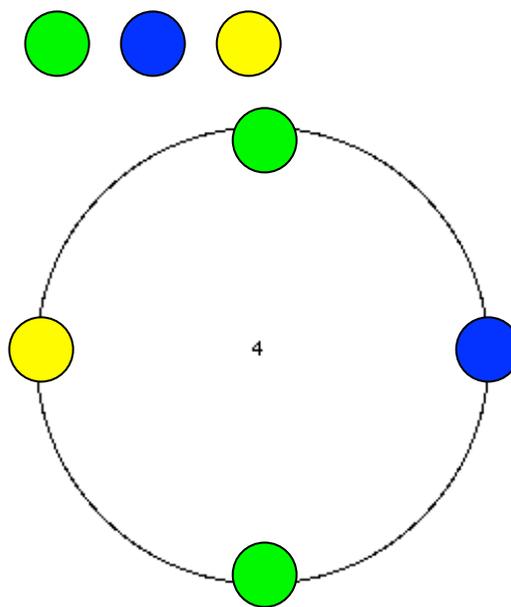
# Enumération d'orbites par rapport à l'action d'un groupe



Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

$$X^g = \{x \in X : gx = x\}$$



Action de  $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$

$T_0 =$  identité

$T_1 =$  rotation de  $90^\circ$

$T_2 =$  rotation de  $180^\circ$

$T_3 =$  rotation de  $270^\circ$

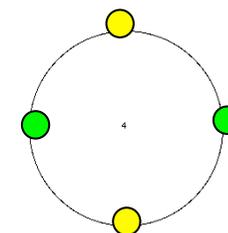
Configurations possibles =  $3^4 = 81$

$T_0$  fixe toute configuration  $\Rightarrow |X^{T_0}| = 81$

$T_1$  fixe toute configuration monochromes  $\Rightarrow |X^{T_1}| = 3$

$T_3$  idem

$T_2$  fixe toute configuration «double-diamètre»  $\Rightarrow |X^{T_2}| = 3^2 = 9$



➡  $n = 1/4 (81+3+3+9) = 24$

# Enumération d'orbites par rapport à l'action d'un groupe



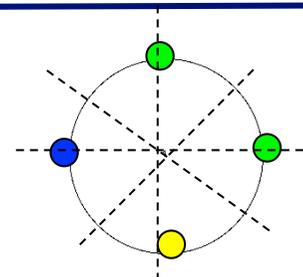
Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

$$X^g = \{x \in X : gx = x\}$$



Action de  $Z_4$



<i>Transformation</i>	<i>Action</i>	<i>Cycle representation</i>	<i>No. of cycles</i>	<i>Fixed configs.</i>	<i>Cycle type</i>	<i>Cycle index</i>
$T_0$	$0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3$	$(0)(1)(2)(3)$	4	$3^4 = 81$	$1^4$	$t_1^4$
$T_1$	$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 0$	$(0\ 1\ 2\ 3)$	1	$3^1 = 3$	$4^1$	$t_4^1$
$T_2$	$0 \rightarrow 2 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$	$(0\ 2)(1\ 3)$	2	$3^2 = 9$	$2^2$	$t_2^2$
$T_3$	$0 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$	$(0\ 3\ 2\ 1)$	1	$3^1 = 3$	$4^1$	$t_4^1$

Julian Hook, « Why are there 29 Tetrachords? A Tutorial on Combinatorics and Enumeration in Music Theory », MTO, 13(4), 2007

$$n = 1/4 (81+3+3+9) = 24$$

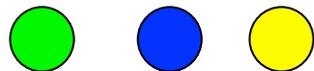
# Enumération d'orbites par rapport à l'action d'un groupe



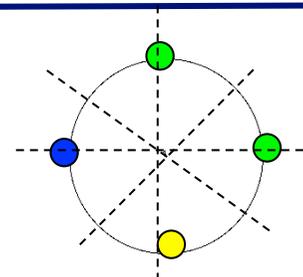
Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

$$X^g = \{x \in X : gx = x\}$$



Action de  $D_4$



Transformation	Action	Cycle representation	No. of cycles	Fixed configs.	Cycle type	Cycle index
$T_0$	$0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3$	$(0)(1)(2)(3)$	4	$3^4 = 81$	$1^4$	$t_1^4$
$T_1$	$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 0$	$(0\ 1\ 2\ 3)$	1	$3^1 = 3$	$4^1$	$t_4^1$
$T_2$	$0 \rightarrow 2 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$	$(0\ 2)(1\ 3)$	2	$3^2 = 9$	$2^2$	$t_2^2$
$T_3$	$0 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$	$(0\ 3\ 2\ 1)$	1	$3^1 = 3$	$4^1$	$t_4^1$
$I$	$0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2$	$(0)(1\ 3)(2)$	3	$3^3 = 27$	$1^2 2^1$	$t_1^2 t_2^1$
$T_1 I$	$0 \rightarrow 1 \rightarrow 0, 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2$	$(0\ 1)(2\ 3)$	2	$3^2 = 9$	$2^2$	$t_2^2$
$T_2 I$	$0 \rightarrow 2 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3$	$(0\ 2)(1)(3)$	3	$3^3 = 27$	$1^2 2^1$	$t_1^2 t_2^1$
$T_3 I$	$0 \rightarrow 3 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$	$(0\ 3)(1\ 2)$	2	$3^2 = 9$	$2^2$	$t_2^2$

Julian Hook, « Why are there 29 Tetrachords? A Tutorial on Combinatorics and Enumeration in Music Theory », MTO, 13(4), 2007

$$n = 1/8 (81+3+3+9+27+9+27+9) = 168/8=21$$

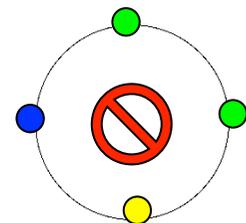
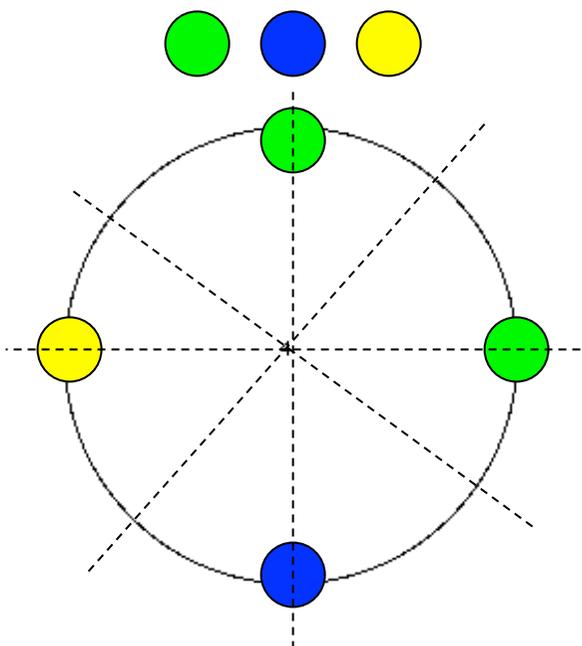
# Enumération d'orbites par rapport à l'action d'un groupe



Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

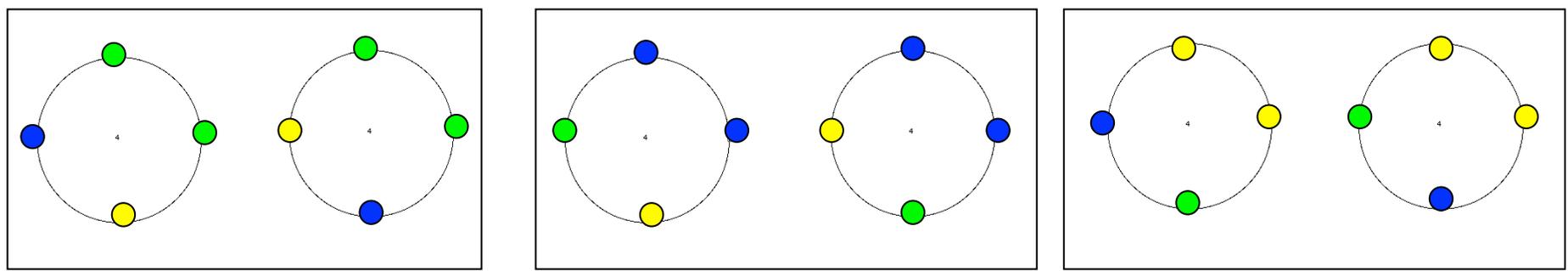
$X^g = \{x \in X : gx = x\}$



Action de  $D_4$

- |                               |                           |
|-------------------------------|---------------------------|
| $T_0 = \text{id}$             | $T_0I = \text{inversion}$ |
| $T_1 = \text{rot } 90^\circ$  | $T_1I = \text{inv.}$      |
| $T_2 = \text{rot } 180^\circ$ | $T_2I = \text{inv.}$      |
| $T_3 = \text{rot } 270^\circ$ | $T_3I = \text{inv.}$      |

→ 21=24-3



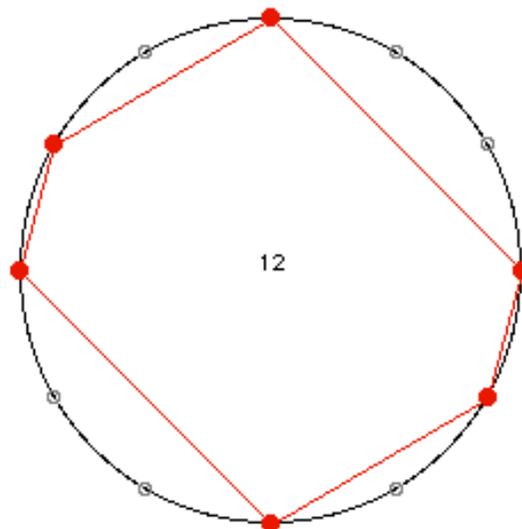
# Enumération d'accords par rapport à l'action d'un groupe



Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

$X^g = \{x \in X : gx = x\}$



Action de  $\mathbf{Z}_{12}$

(Benson, p. 348)

Group element	size of subset												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Identity	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1
$\mathbf{T}, \mathbf{T}^5, \mathbf{T}^7, \mathbf{T}^{11}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$\mathbf{T}^2, \mathbf{T}^{10}$	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	1
$\mathbf{T}^3, \mathbf{T}^9$	1	0	0	0	3	0	0	0	3	0	0	0	1
$\mathbf{T}^4, \mathbf{T}^8$	1	0	0	4	0	0	6	0	0	4	0	0	1
$\mathbf{T}^6$	1	0	6	0	15	0	20	0	15	0	6	0	1

➔ # accords de 3 notes =  $1/12 (220 + 4 \cdot 2) = 228/12 = 19$

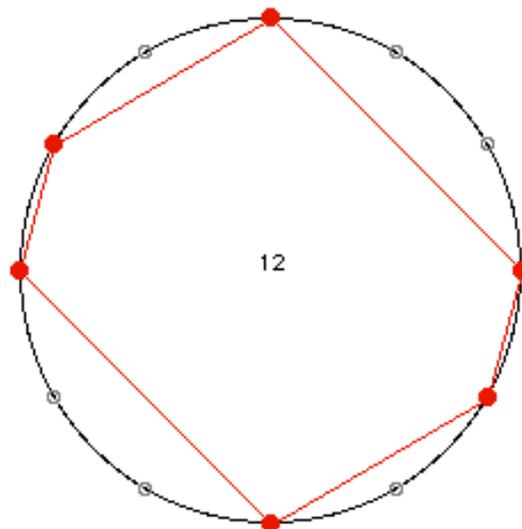
# Enumération d'accords par rapport à l'action d'un groupe



Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

$X^g = \{x \in X : gx = x\}$



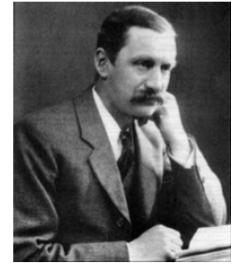
Action de  $D_{12}$

(Benson, p. 348)

Group element	size of subset												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Identity	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1
$T, T^5, T^7, T^{11}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$T^2, T^{10}$	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	1
$T^3, T^9$	1	0	0	0	3	0	0	0	3	0	0	0	1
$T^4, T^8$	1	0	0	4	0	0	6	0	0	4	0	0	1
$T^6$	1	0	6	0	15	0	20	0	15	0	6	0	1
$T^{2m}I$	1	2	6	10	15	20	20	20	15	10	6	2	1
$T^{2m+1}I$	1	0	6	0	15	0	20	0	15	0	6	0	1

➡ # accords de 3 notes =  $1/24 (220 + 4 \cdot 2 + 10 \cdot 6) = 288/24 = 12$

# Énumération d'accords par rapport à l'action du groupe diédrale



Transformation	Cycle representation	No. of cycles	Fixed configs.	Cycle type	Cycle index
$T_0$	(0)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(A)(B)	12	$2^{12} = 4096$	$1^{12}$	$t_1^{12}$
$T_1$	(0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B)	1	$2^1 = 2$	$12^1$	$t_{12}^1$
$T_2$	(0 2 4 6 8 A)(1 3 5 7 9 B)	2	$2^2 = 4$	$6^2$	$t_6^2$
$T_3$	(0 3 6 9)(1 4 7 A)(2 5 8 B)	3	$2^3 = 8$	$4^3$	$t_4^3$
$T_4$	(0 4 8)(1 5 9)(2 6 A)(3 7 B)	4	$2^4 = 16$	$3^4$	$t_3^4$
$T_5$	(0 5 A 3 8 1 6 B 4 9 2 7)	1	$2^1 = 2$	$12^1$	$t_{12}^1$
$T_6$	(0 6)(1 7)(2 8)(3 9)(4 A)(5 B)	6	$2^6 = 64$	$2^6$	$t_2^6$
$T_7$	(0 7 2 9 4 B 6 1 8 3 A 5)	1	$2^1 = 2$	$12^1$	$t_{12}^1$
$T_8$	(0 8 4)(1 9 5)(2 A 6)(3 B 7)	4	$2^4 = 16$	$3^4$	$t_3^4$
$T_9$	(0 9 6 3)(1 A 7 4)(2 B 8 5)	3	$2^3 = 8$	$4^3$	$t_4^3$
$T_{10}$	(0 A 8 6 4 2)(1 B 9 7 5 3)	2	$2^2 = 4$	$6^2$	$t_6^2$
$T_{11}$	(0 B A 9 8 7 6 5 4 3 2 1)	1	$2^1 = 2$	$12^1$	$t_{12}^1$
$I$	(0)(1 B)(2 A)(3 9)(4 8)(5 7)(6)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
$T_1 I$	(0 1)(2 B)(3 A)(4 9)(5 8)(6 7)	6	$2^6 = 64$	$2^6$	$t_2^6$
$T_2 I$	(0 2)(1)(3 B)(4 A)(5 9)(6 8)(7)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
$T_3 I$	(0 3)(1 2)(4 B)(5 A)(6 9)(7 8)	6	$2^6 = 64$	$2^6$	$t_2^6$
$T_4 I$	(0 4)(1 3)(2)(5 B)(6 A)(7 9)(8)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
$T_5 I$	(0 5)(1 4)(2 3)(6 B)(7 A)(8 9)	6	$2^6 = 64$	$2^6$	$t_2^6$
$T_6 I$	(0 6)(1 5)(2 4)(3)(7 B)(8 A)(9)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
$T_7 I$	(0 7)(1 6)(2 5)(3 4)(8 B)(9 A)	6	$2^6 = 64$	$2^6$	$t_2^6$
$T_8 I$	(0 8)(1 7)(2 6)(3 5)(4)(9 B)(A)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
$T_9 I$	(0 9)(1 8)(2 7)(3 6)(4 5)(A B)	6	$2^6 = 64$	$2^6$	$t_2^6$
$T_{10} I$	(0 A)(1 9)(2 8)(3 7)(4 6)(5)(B)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
$T_{11} I$	(0 B)(1 A)(2 9)(3 8)(4 7)(5 6)	6	$2^6 = 64$	$2^6$	$t_2^6$

Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

$$X^g = \{x \in X : gx = x\}$$

Action de  $D_{12}$

(Hook, MTO)



# d'accords =  $1/12[4096+2+4+8+16+2+64+2+16+8+4+2]=4224/12=352$



# d'accords =  $1/24[4224+1152] = 224$

# Énumération d'accords et dans un système tempéré

(Reiner, 1985)

 # of  $k$ -chords =  $\frac{1}{n} \sum_{j|(n,k)} \phi(j) \binom{n/j}{k/j} = \frac{1}{n} \Phi_n(k)$ ,

 # of  $k$ -chords =  $\begin{cases} \frac{1}{2n} \left[ \Phi_n(k) + n \binom{(n-1)/2}{[k/2]} \right], & \text{if } n \text{ is odd,} \\ \frac{1}{2n} \left[ \Phi_n(k) + n \binom{n/2}{k/2} \right], & \text{if } n \text{ is even and } k \text{ is even,} \\ \frac{1}{2n} \left[ \Phi_n(k) + n \binom{(n/2)-1}{[k/2]} \right], & \text{if } n \text{ is even and } k \text{ is odd.} \end{cases}$



$k =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
number	1	1	6	12	29	38	50	38	29	12	6	1	1

- D. Halsey & E. Hewitt: « Eine gruppentheoretische Methode in der Musik-theorie », *Jahresber. Der Dt. Math.-Vereinigung*, 80, 1978.
- D. Reiner: « Enumeration in Music Theory », *Amer. Math. Month.* 92:51-54, 1985
- H. Friepfingter: « Enumeration in Musical Theory », *Beiträge zur Elektr. Musik*, 1, 1992
- R.C. Read: « Combinatorial problems in the theory of music », *Discrete Math.*, 1997
- H. Friepfingter: « Enumeration of mosaics », *Discrete Math.*, 1999
- H. Friepfingter: « Enumeration of non-isomorphic canons », *Tatra Mt. Math. Publ.*, 2001
- M. Broué : « Les tonalités musicales vues par un mathématicien », *Le temps des savoirs, Revue de l'Institut Universitaire de France*, 2002
- David J. Hunter & Paul T. von Hippel : « How Rare Is Symmetry in Musical 12-Tone Rows? », *The American Mathematical Monthly*, Vol. 110, No. 2., Feb., 2003
- H. Friepfingter: « Tiling problems in music theory », in *Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory* (Mazzola, Noll, Puebla ed., Epos, 2004)
- Rachel W. Hall & P. Klingsberg: « Asymmetric Rhythms, Tiling Canons, and Burnside's Lemma », *Bridge Proceedings*, 2004
- ...

# Énumération des modes à transpositions limitées de Messiaen



R.C. Read: « Combinatorial problems in the theory of music », *Discrete Math.*, 1997

M. Broué : « Les tonalités musicales vues par un mathématicien », 2002

$$A_n = \sum_{k|n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) 2^k$$

$$s_d(n) = \sum_{\{e; (e|(n/d))\}} \mu\left(\frac{n/d}{e}\right) 2^e$$

$$\begin{cases} \mu(k) = 0 & \text{si } k \text{ est divisible par un carré,} \\ \mu(k) = (-1)^m & \text{si } k \text{ est produit de } m \text{ nombres premiers distincts.} \end{cases}$$

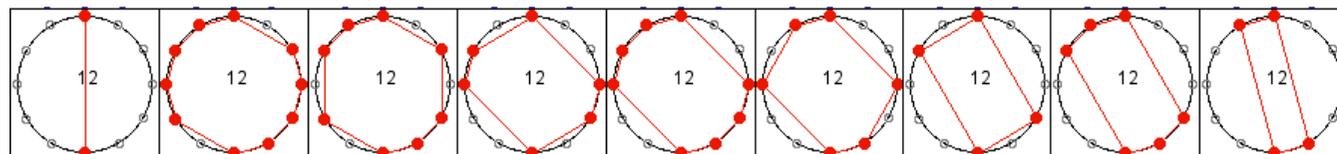
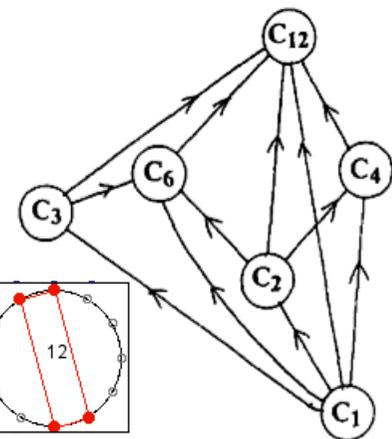
$$\begin{aligned} A_6 &= \mu(6)2 + \mu(3)2^2 + \mu(2)2^3 + \mu(1)2^6 = \\ &= (-1)^2 2 + (-1)2^2 + (-1)2^3 + 2^6 = \\ &= 2 - 4 - 8 + 64 = \\ &= 54 \end{aligned}$$

$$54/6 = 9$$

$$12/6 = 2$$

Table 1

Number of notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Symmetry													
	1	5	18	40	66	75	66	40	18	5	1		
	2	1	2	3	2	1							
	3												
	4				1			1					
	6						1						
	12	1											1
All scales	1	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1



# Énumération des séries dodécaphoniques (Lemme de Burnside)

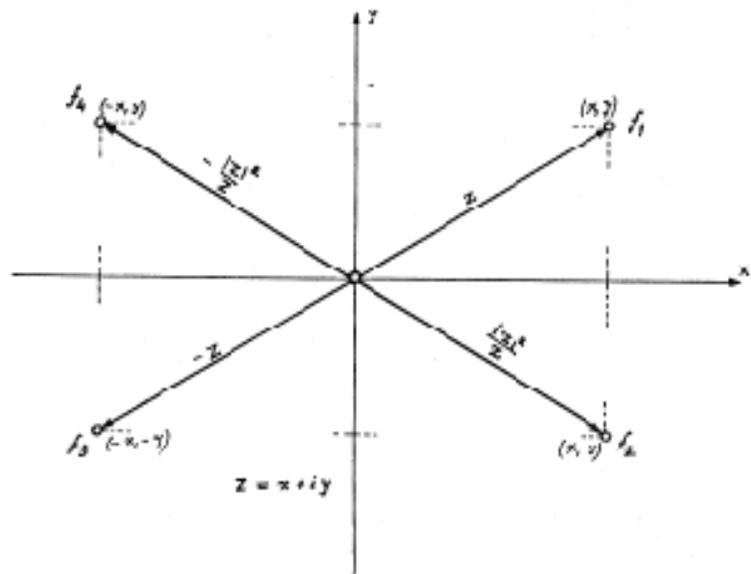
D. Reiner: «Enumeration in Music Theory»,  
 Amer. Math. Month. 92:51-54, 1985

**Lemme de Burnside**

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

$$X^g = \{x \in X : gx = x\}$$


9	10	0	3	4	6	5	7	8	11	1	2
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11



- $Z = x + yi$
- $f_1 = Z = x + yi = Z = f_1(Z) = \text{original form}$
- $f_2 = x - yi = |Z|^{-2} Z = f_2(Z) = \text{inversion}$
- $f_3 = -x - yi = -Z = f_3(Z) = \text{inverted retrogradation}$
- $f_4 = -x + yi = -( |Z|^{-2} \bar{Z} ) = f_4(Z) = \text{retrogradation}$

Thus the number of  $n$ -tone rows is

$$\frac{1}{4} [(n-1)! + (n-1)(n-3) \cdots (2)] \quad \text{if } n \text{ is odd;}$$

$$\frac{1}{4} [(n-1)! + (n-2)(n-4) \cdots (2)(1 + n/2)] \quad \text{if } n \text{ is even.}$$

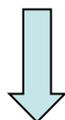
For example, there are 9985920 twelve tone rows, a fact which does not seem to be in the literature.

# Enumération des séries dodécaphoniques (Lemme de Burnside)

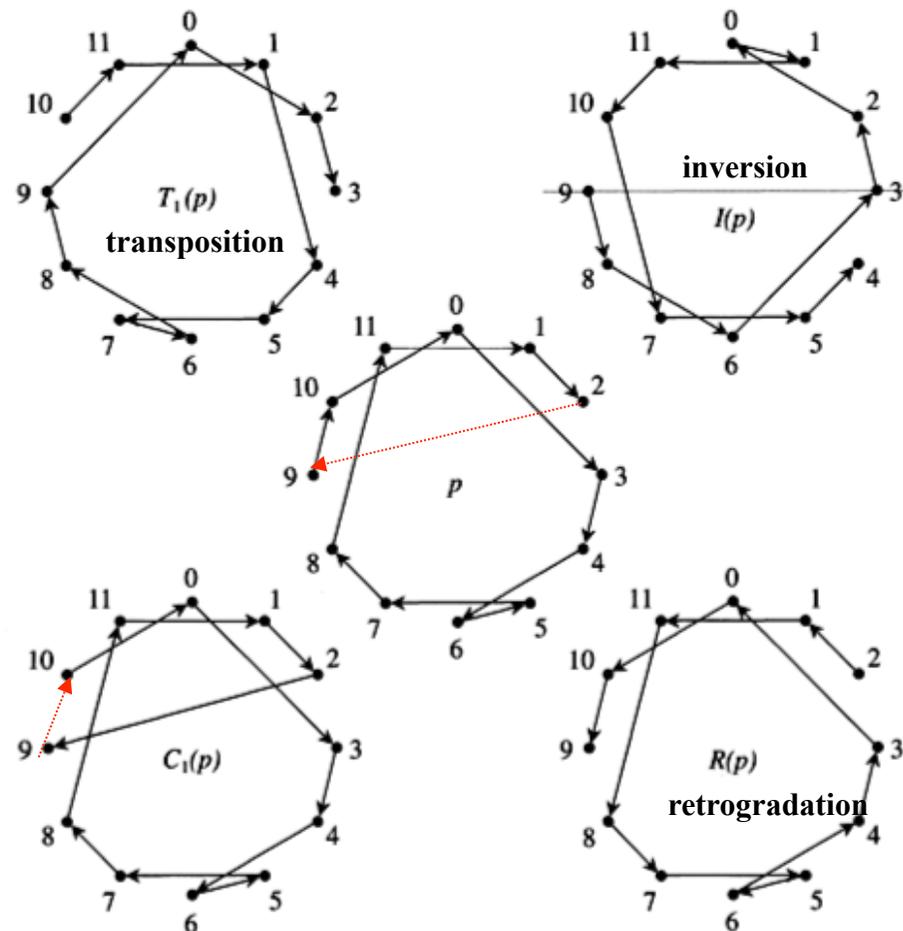
R.C. Read: « Combinatorial problems in the theory of music », *Discrete Math.*, 1997



# orbites = # superpositions de deux graphes cycliques de longueur 12.



836.017 séries



« rotation »  
(permutation circulaire)

# Énumération des séries « symétriques »

David J. Hunter & Paul T. von Hippel : « How Rare Is Symmetry in Musical 12-Tone Rows? », *The American Mathematical Monthly*, Vol. 110, No. 2., Feb., 2003

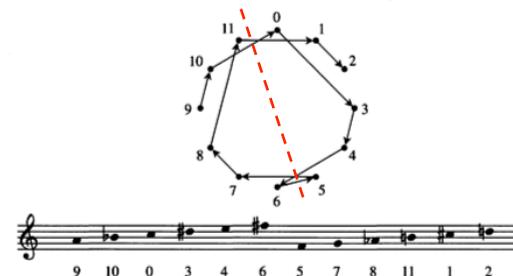
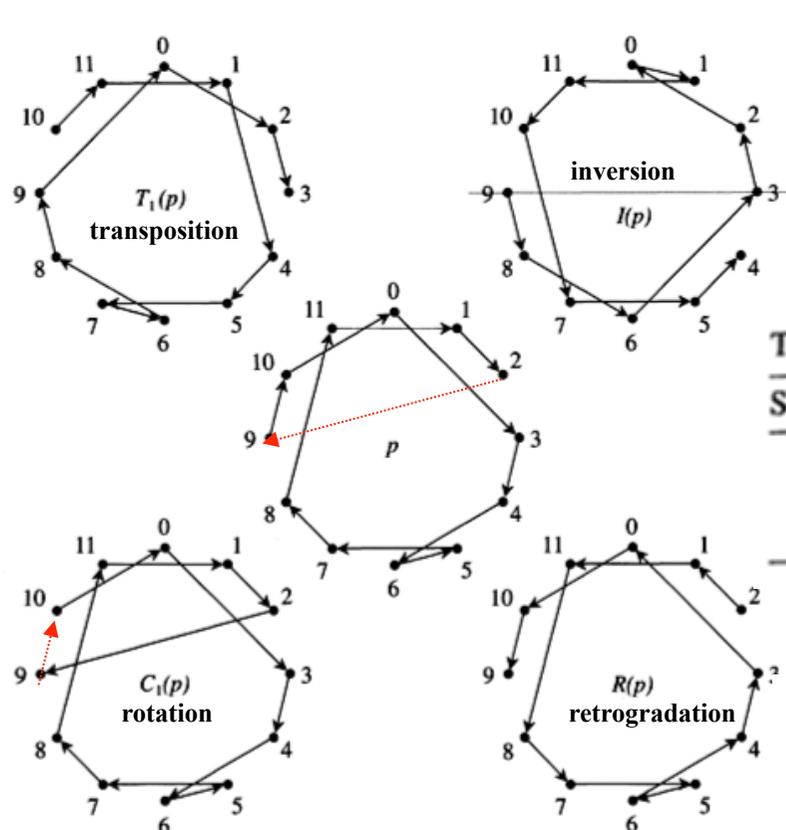


Figure 1. Clock diagram and musical notation for the row from Schoenberg's Serenade, opus 24, movement 5.

TABLE 1. Rareness of symmetry under transposition, retrograde, and inversion.

Symmetry	Coset size	# of cosets	% of cosets	# of rows	% of rows
$T, R$	24	1,920	0.019%	46,080	0.0096%
$T, R, I$	24	11,520	0.115%	276,480	0.058%
none	48	9,972,480	99.87%	478,679,040	99.93%

TABLE 2. Rareness of symmetry under transposition, inversion, retrograde, and cyclic shift.

Coset size	# of cosets	% of cosets	# of rows	% of rows
24	2	0.00024%	48	0.00001%
48	2	0.00024%	96	0.00002%
72	6	0.00072%	432	0.00009%
96	17	0.0020%	1632	0.00034%
144	152	0.018%	21,888	0.0046%
192	11	0.0013%	2,112	0.00044%
288	8,545	1.02%	2,460,960	0.514%
576	827,282	98.84%	476,514,432	99.48%

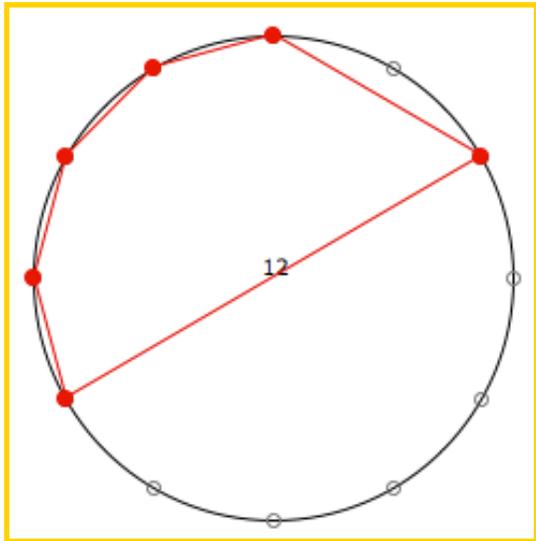
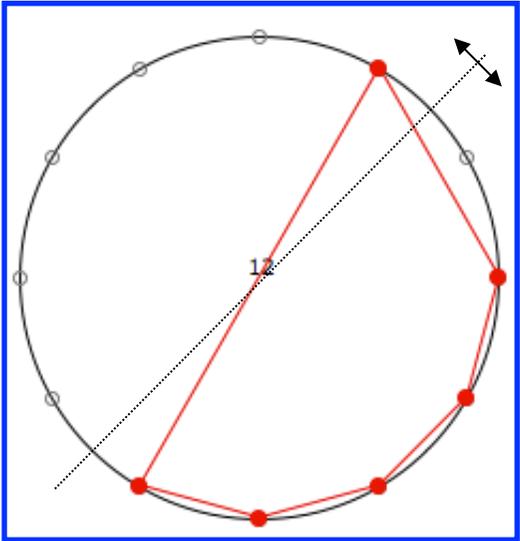
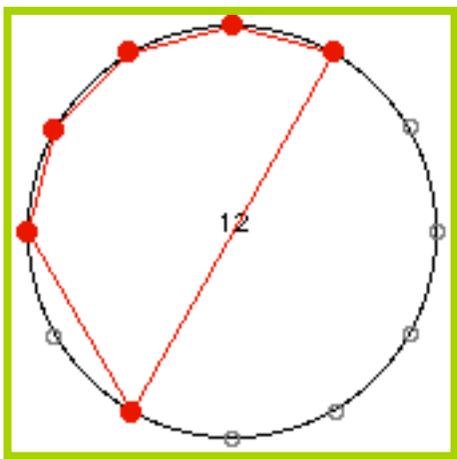
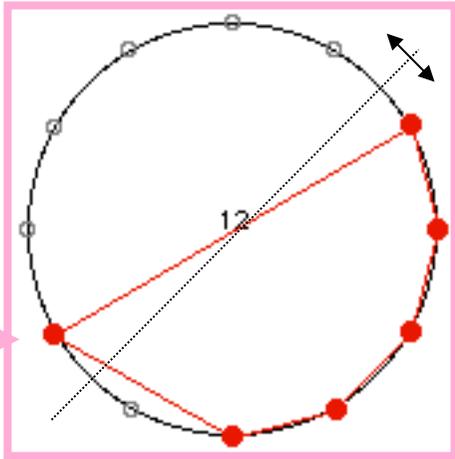
- Gamme chromatique
- Cycle des quintes

# Sérialisme et combinatorialité des hexacordes

Schoenberg: Suite Op.25, Minuetto

The musical score shows two hexacords. The first hexacord (pink box) consists of notes 5, 6, 8, and 2 in the treble clef, and notes 1 and 4 in the bass clef. The second hexacord (green box) consists of notes 9, 10, 11, and 12 in the treble clef, and notes 3 and 4 in the bass clef. The notes are numbered 1 through 12, representing the chromatic scale.

**Double “combinatorialité”**



# « Making and Using a Pcset Network for Stockhausen's Klavierstück III »



Trois interprétations :



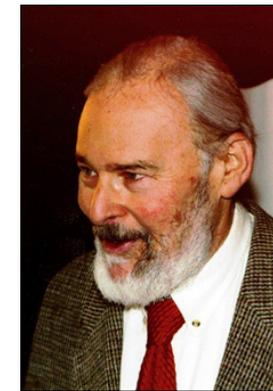
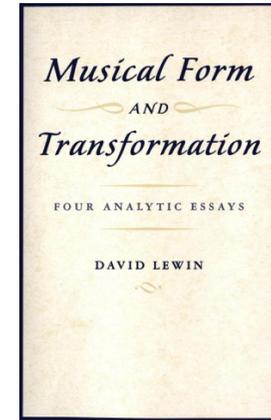
Henck



Kontarsky

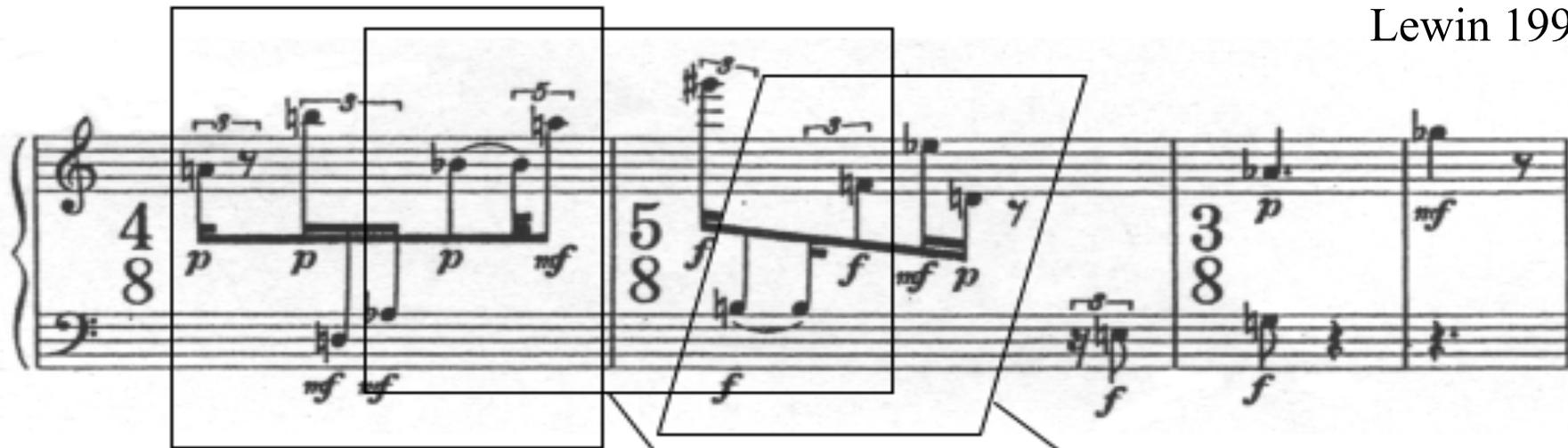


Tudor



« *Making and Using a Pcset Network for Stockhausen's Klavierstück III* »

Lewin 1993



**SI:** (1, 1, 1, 3, 6)

(6, 3, 1, 1, 1)

(6, 3, 1, 1, 1)

**IFUNC:** [5 3 2 2 1 1 1 1 2 2 3]

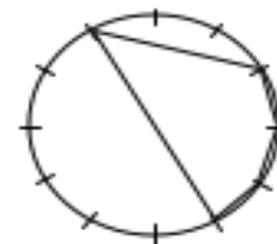
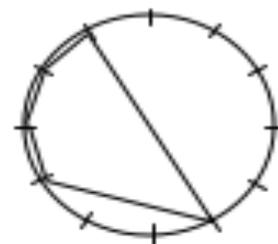
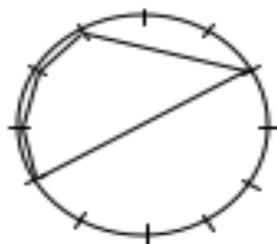
[5 3 2 2 1 1 1 1 2 2 3]

[5 3 2 2 1 1 1 1 2 2 3]

**VI:** [3 2 2 1 1 1]

[3 2 2 1 1 1]

[3 2 2 1 1 1]



# Segmentation par « imbrication »: progression transformationnelle

Stockhausen: *Klavierstück III* (Analisi di D. Lewin)

Musical score for Klavierstück III, measures 1-3. The score is in 4/8, 5/8, and 3/8 time signatures. The first measure is in 4/8 with dynamics *p p p mf*. The second measure is in 5/8 with dynamics *f f mf p*. The third measure is in 3/8 with dynamics *p mf*. The score includes various ornaments and articulations.

Diagram illustrating transformational relationships between musical segments. The top part shows a musical score with several segments highlighted by overlapping boxes. Arrows point from these segments to a sequence of five circular diagrams below, each representing a transformation. The diagrams are labeled  $T_7I$ ,  $T_6$ ,  $T_7I$ ,  $T_{10}I$ , and  $T_{10}I$ . The diagrams show various geometric configurations of lines and points, representing the transformational relationships between the segments.

# Vers une modélisation informatique de l'analyse transformationnelle

YunKang Ahn, L'analyse musicale computationnelle, thèse, Université de Paris VI / Ircam, déc 2009

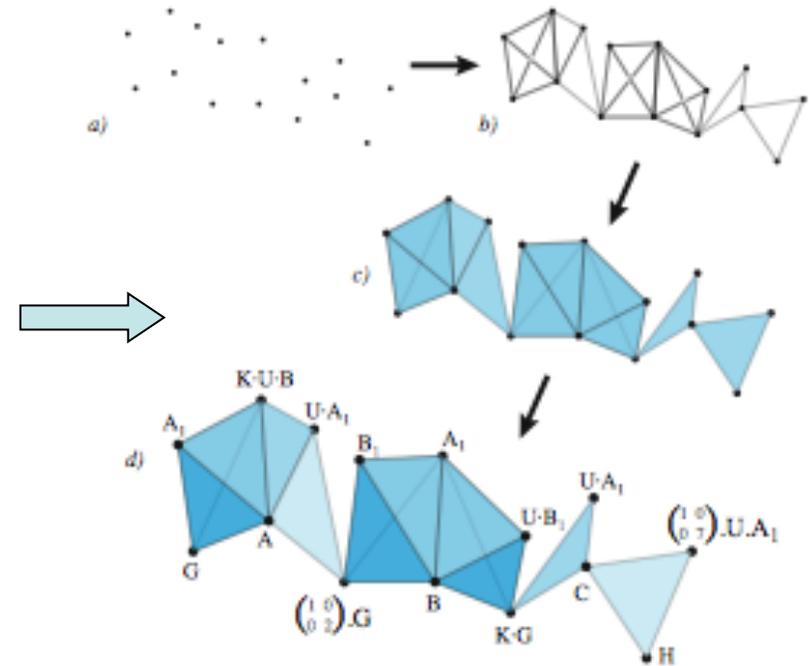
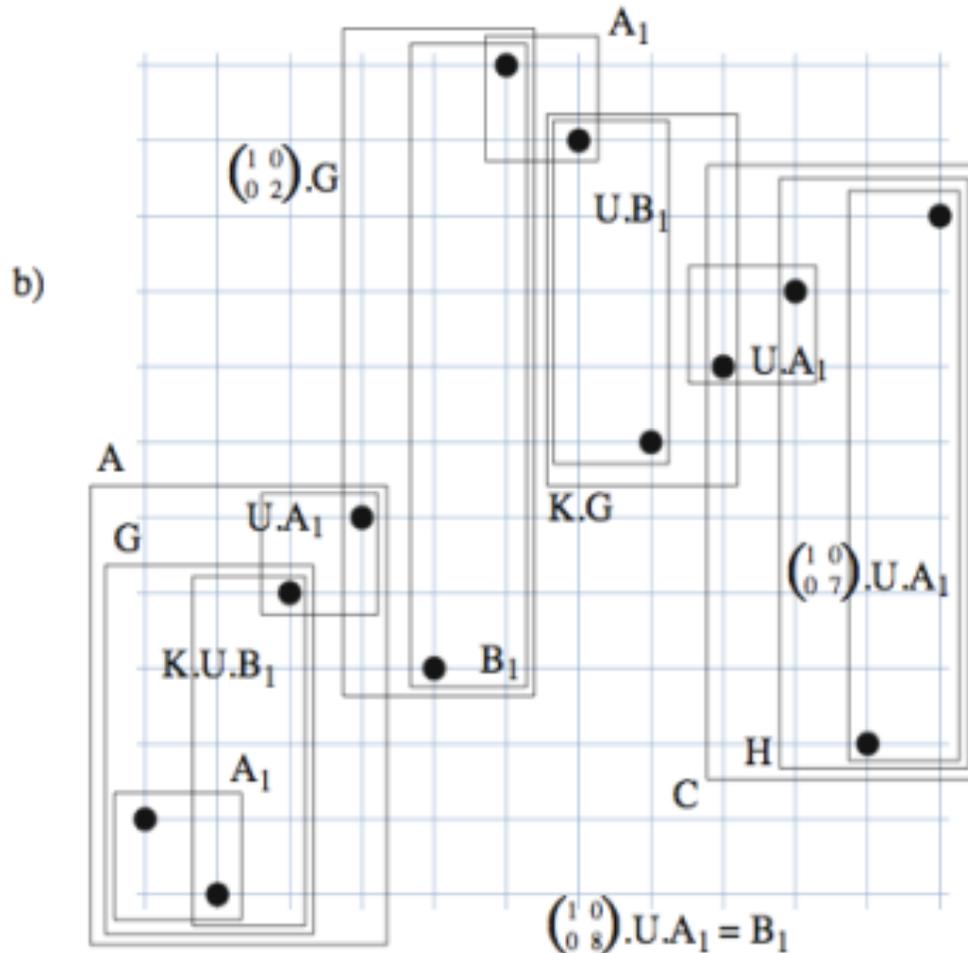
The diagram illustrates the process of transforming musical analysis into a computational model. It features piano sheet music on the left and right, a central diagram with geometric shapes and labels (a, b, c, d), and two portraits of men. The top portrait is of YunKang Ahn, and the bottom portrait is of a man with a chalkboard background containing mathematical notations like "ED. Simple ( $\mathbb{R}^2$ )", "Zn", and " $\mathbb{R}^3$ ".

The central diagram consists of several parts:

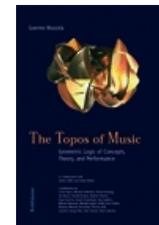
- a)** A set of points.
- b)** A network of interconnected nodes.
- c)** A series of blue triangles representing a mesh or structure.
- d)** A detailed geometric structure with vertices labeled  $A_1, B, C, H$  and other points like  $K-U-B, U-A_1, U-B_1, U-A_1, G, A, B, C, H, K-G$ .

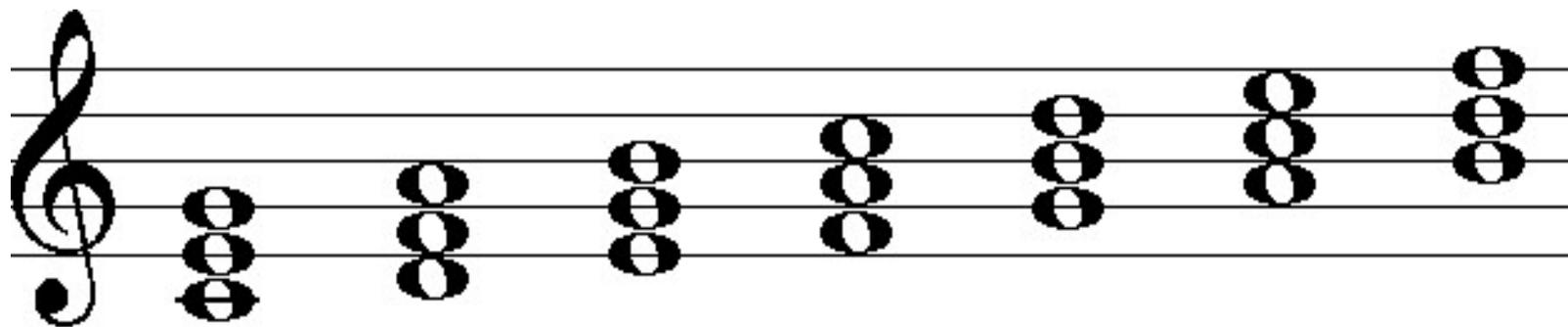
Arrows indicate the flow of information: a dashed arrow points from the top portrait to the central diagram, and another dashed arrow points from the central diagram to the bottom portrait. The piano sheet music on the left and right shows various musical notations, including dynamics ( $p, f, ff$ ), articulation ( $y$ ), and time signatures ( $4/8, 3/8$ ), with red and blue boxes highlighting specific sections.

# Nerf topologique et analyse musicale



G. Mazzola : *The Topos of Music*,  
 ch. 13 - "What are  
 global compositions ?"





I

II

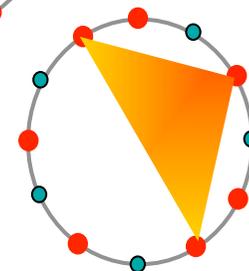
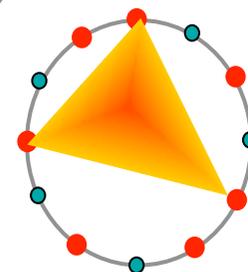
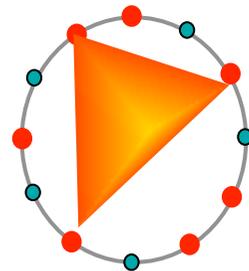
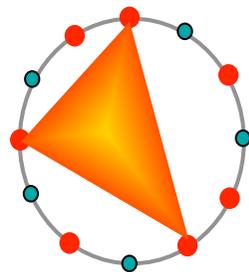
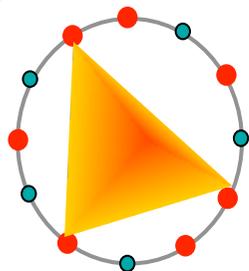
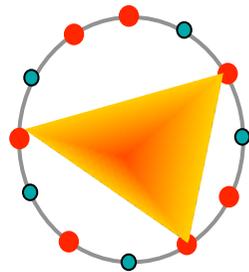
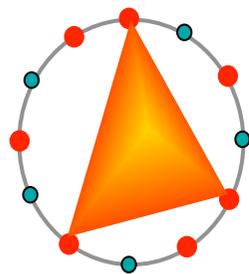
III

IV

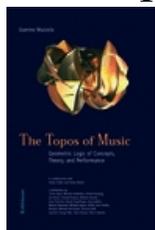
V

VI

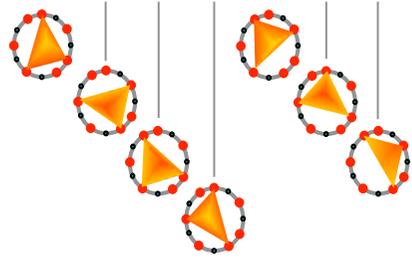
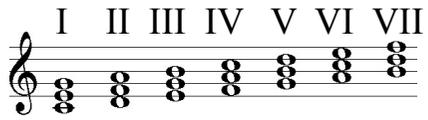
VII



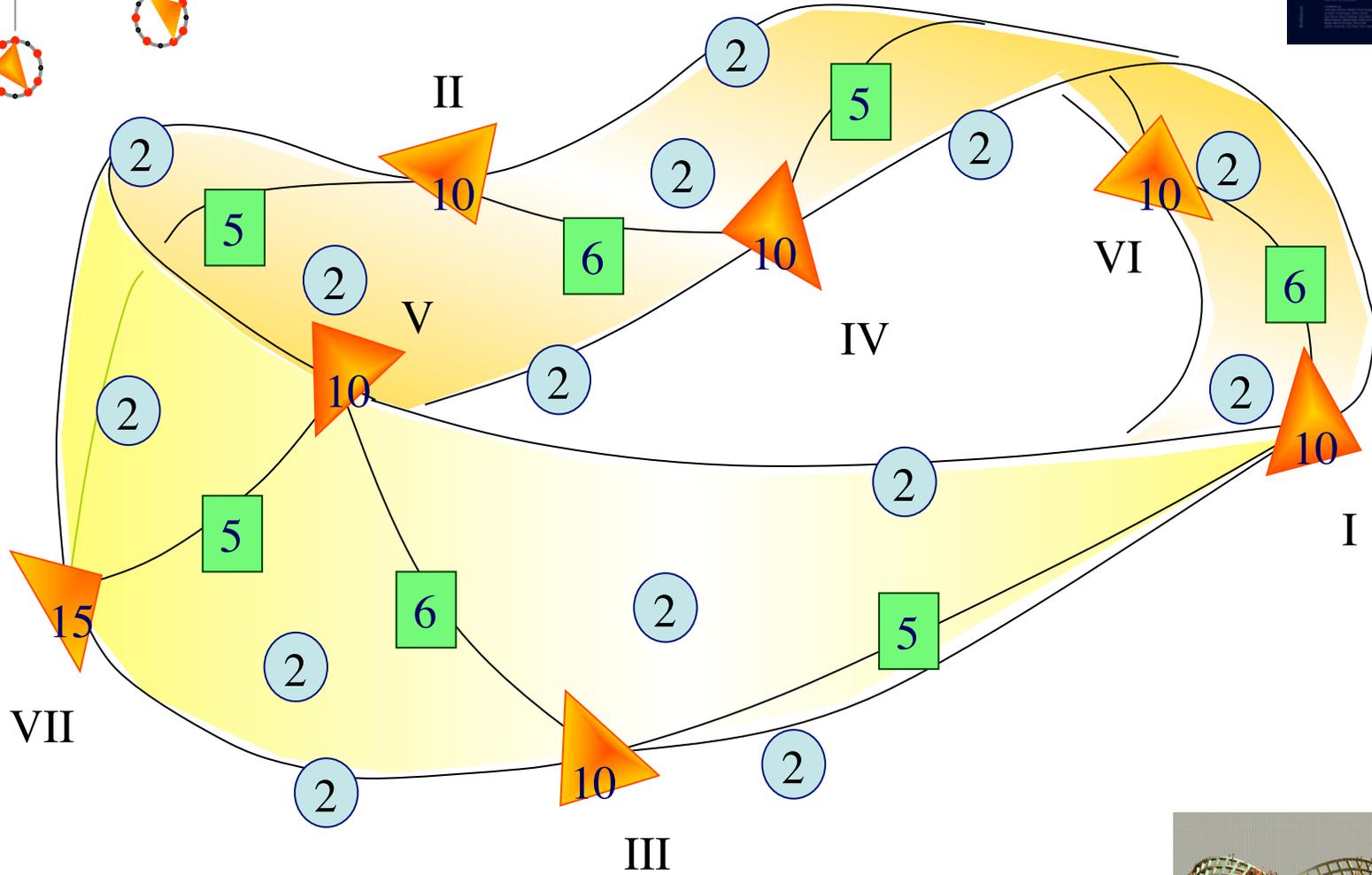
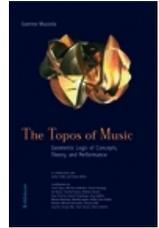
Un atlas pour la gamme diatonique...



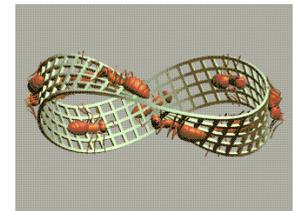
G. Mazzola, *The Topos of Music*



G. Mazzola, *The Topos of Music*



...et le nerf topologique associé



# Nerf topologique et théorie de la modulation

G. Mazzola, *La vérité du beau dans la musique*, Collection « Musique/Sciences », IRCAM/Delatour, 2007.

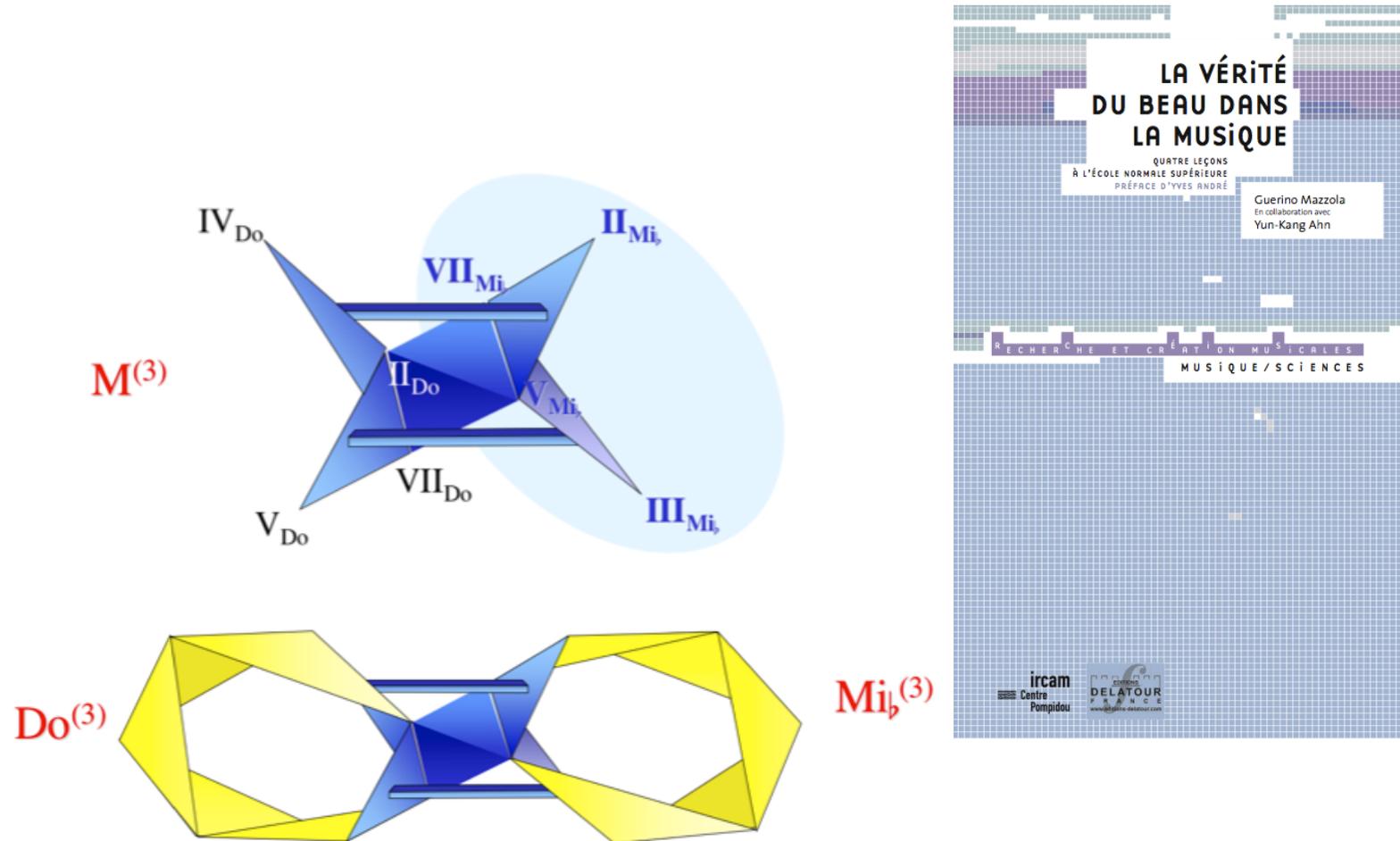
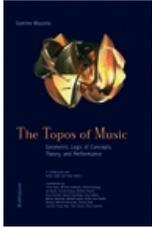
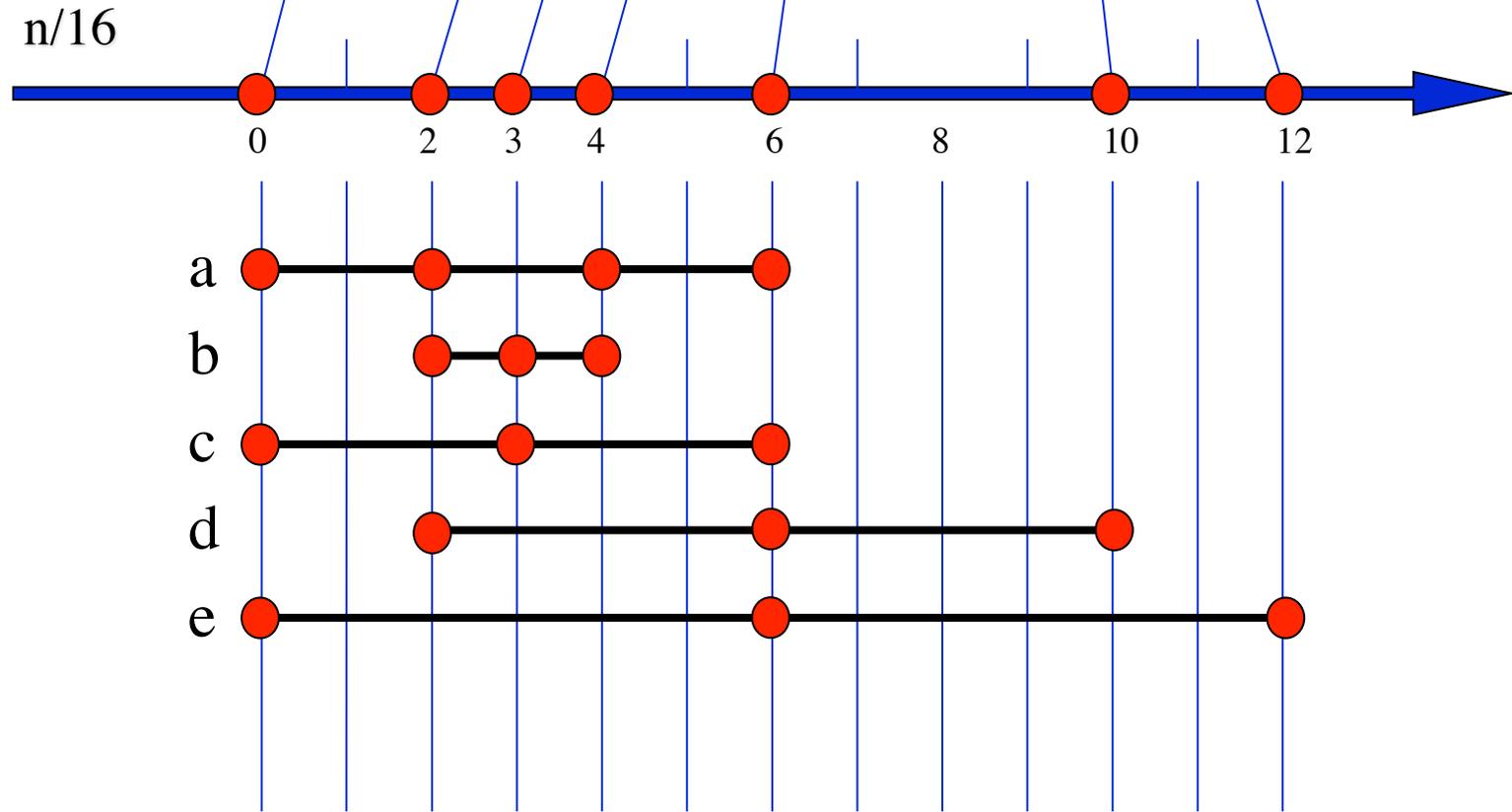


FIG. 8.6 – Le quantum de modulation de la tonalité  $Do^{(3)}$  dans la tonalité  $Mi_b^{(3)}$  dans sa représentation topologique via le nerf. Le nerf est de dimension cinq (six sommets en position générale), ce qui est symbolisé par les barres horizontales reliant six degrés chacune. En haut à droite sont représentés les pivots  $II, III, V, VII$ .

# Un atlas pour un pattern rythmique...

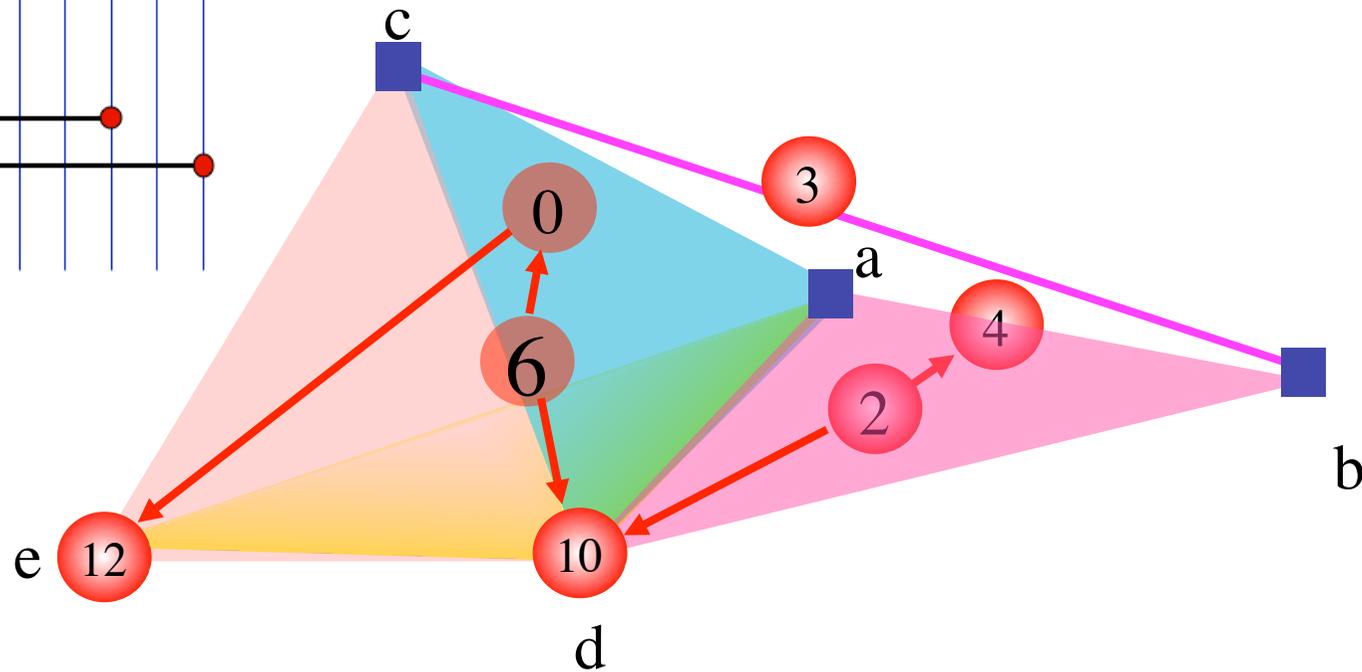
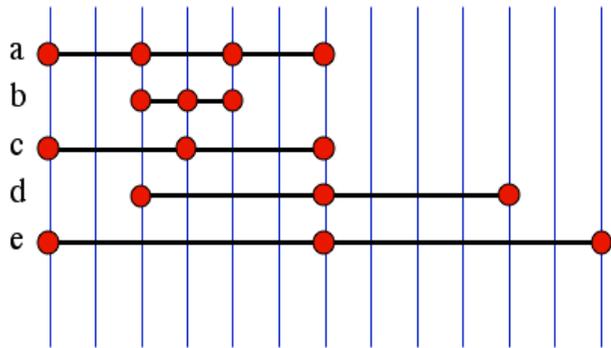
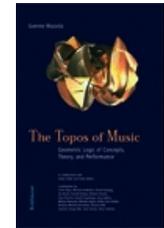
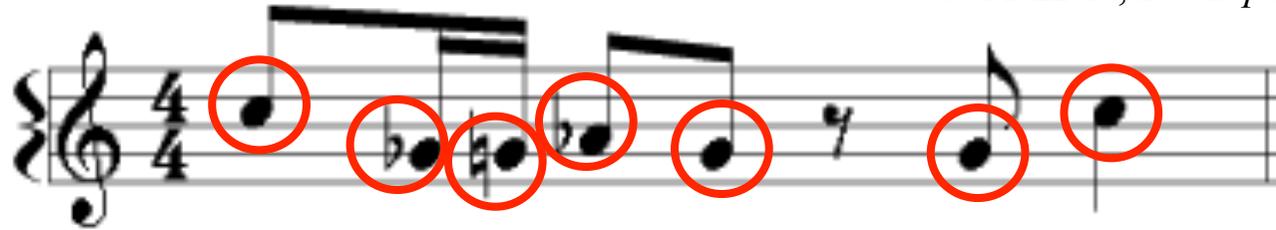


G. Mazzola, *The Topos of Music*



...et le nerf topologique associé

G. Mazzola, *The Topos of Music*



Nerf du recouvrement  $\{a,b,c,d,e\}$

**$x$  domine  $y$  ssi  $\text{simplex}(y) \subseteq \text{simplex}(x)$**

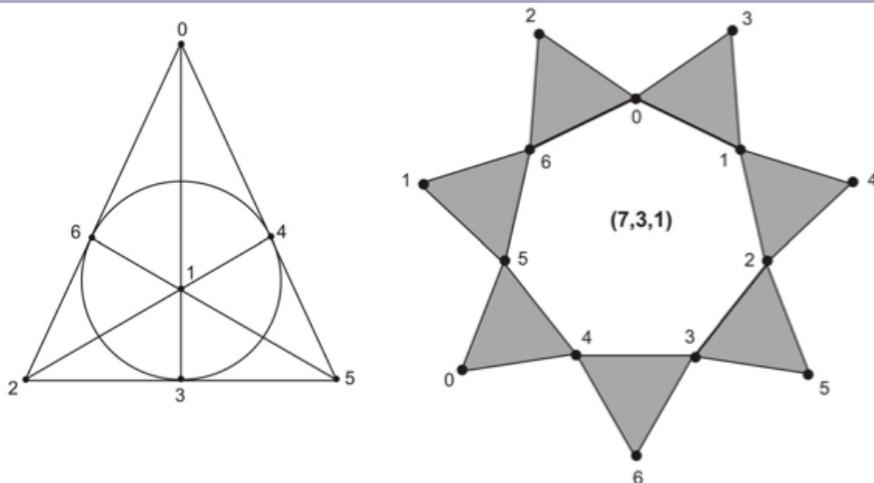
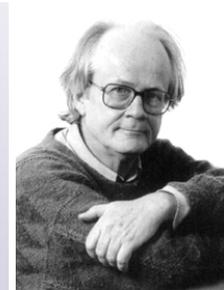
# Block-designs et composition algorithmique

## Definition

A  $t$ -design  $t - (v, k, \lambda)$  is a pair  $D = (X, \mathcal{B})$  where  $X$  is a  $v$ -set ( $X = \mathbb{Z}_v$ ) and  $\mathcal{B}$  a collection of  $k$ -subsets of  $X$  called blocks such that every  $t$ -subset of  $X$  is contained in exactly  $\lambda$  blocks.  $D$  is simple if it has no repeated block.

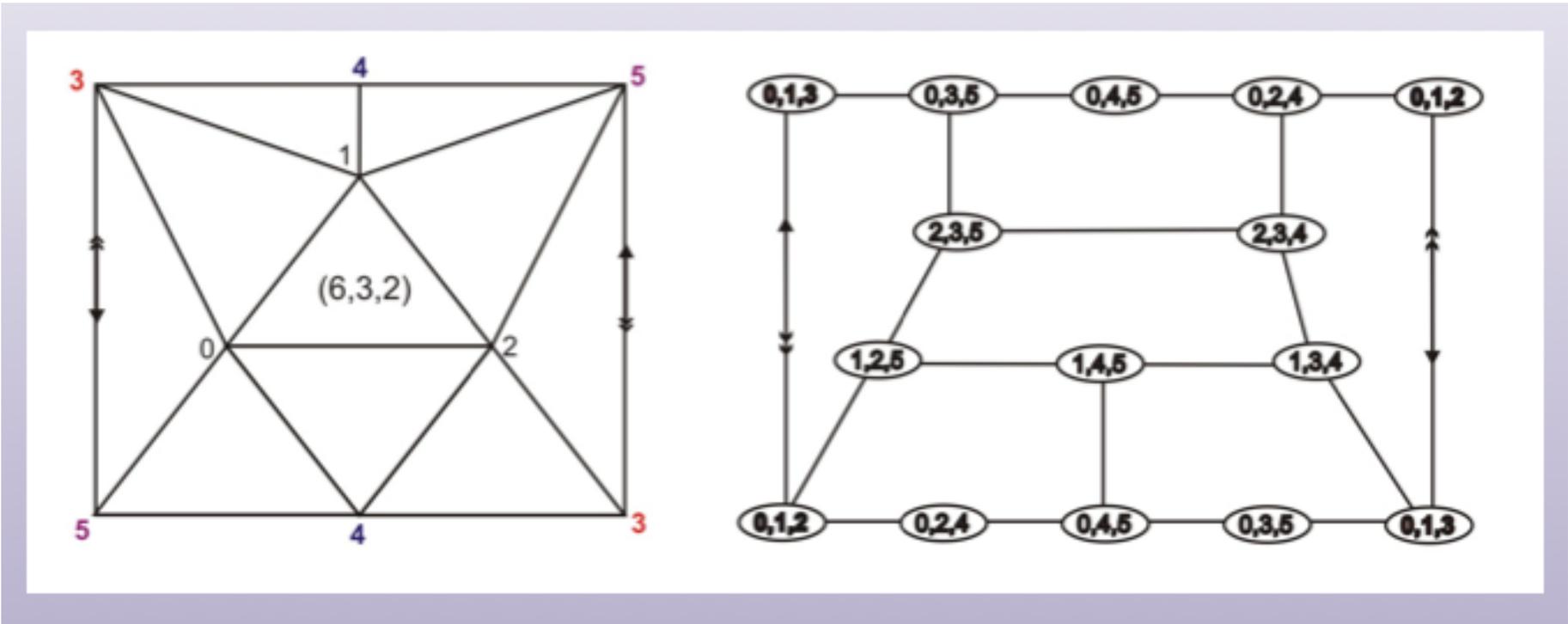
## Examples

- $2 - (v, k, \lambda) =$  Balanced Incomplete Block Design (BIBD)
- $t - (v, k, 1) =$  Steiner Systems
- $t - (v, 3, 1) =$  Triple Systems (TS)
- $2 - (v, 3, 1) =$  Steiner Triple Systems (STS)
- $2 - (v, 4, 1) =$  Steiner Quadruple System (SQS).



**Plan de Fano = plan avec 7 points et 7 droites. Chaque droite comporte seulement 3 points, par chaque point ne passent que 3 droites.**

# Block-designs et composition algorithmique



Monday	0,1,2	3,9,11	4,7,13	5,8,14	6,10,12
Tuesday	0,3,4	1,8,10	2,10,14	5,7,11	6,9,13
Wednesday	0,5,6	1,7,9	2,11,13	3,12,14	4,8,10
Thursday	1,3,5	0,10,13	2,7,12	4,9,14	6,8,11
Friday	1,4,6	0,11,14	2,8,9	3,7,10	5,12,13
Saturday	2,3,6	0,7,8	1,13,14	4,11,12	5,9,10
Sunday	2,4,5	0,9,12	1,10,11	3,8,13	6,7,14

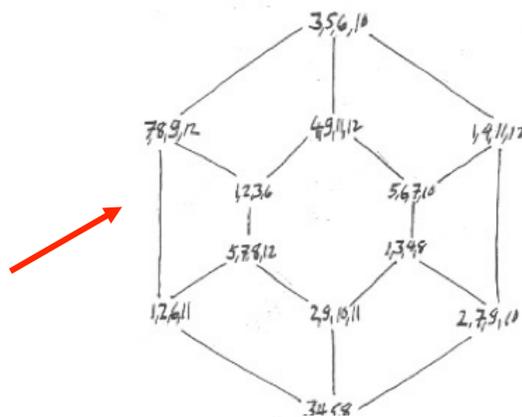
**Table 2.** The Kirkman Triple system (15, 3, 1)

## Problème de Kirkman

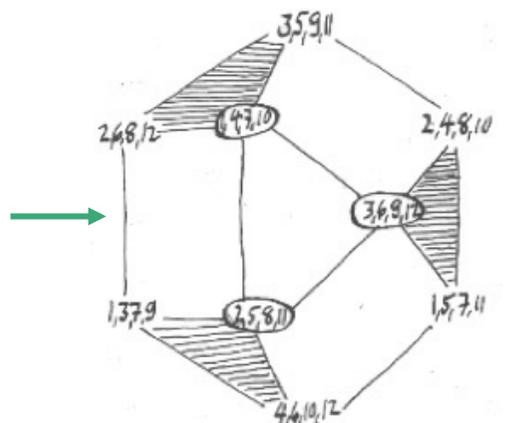
15 jeunes filles d'une école se promènent 3 par 3 les 7 jours d'une semaine. Est-il possible de les répartir journalièrement de telle sorte que chaque deux d'entre-elles ne marchent jamais deux fois côte à côte ?

# Tom Johnson's *Twelve for piano*, part III, based on (12,4,3)

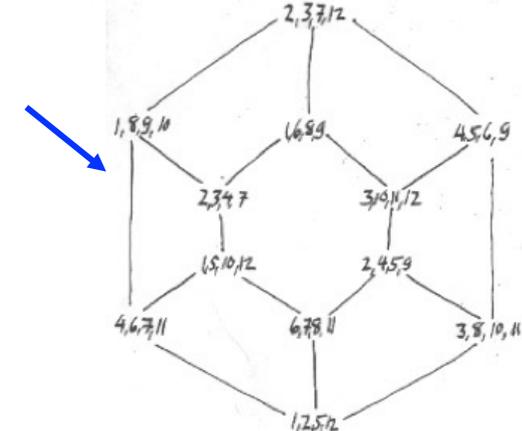
## III



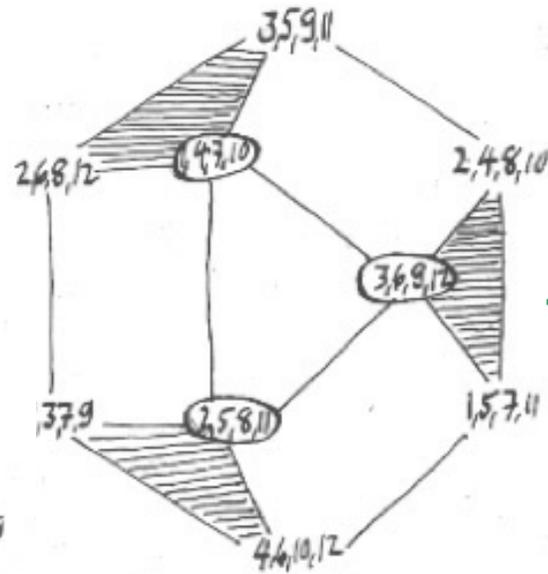
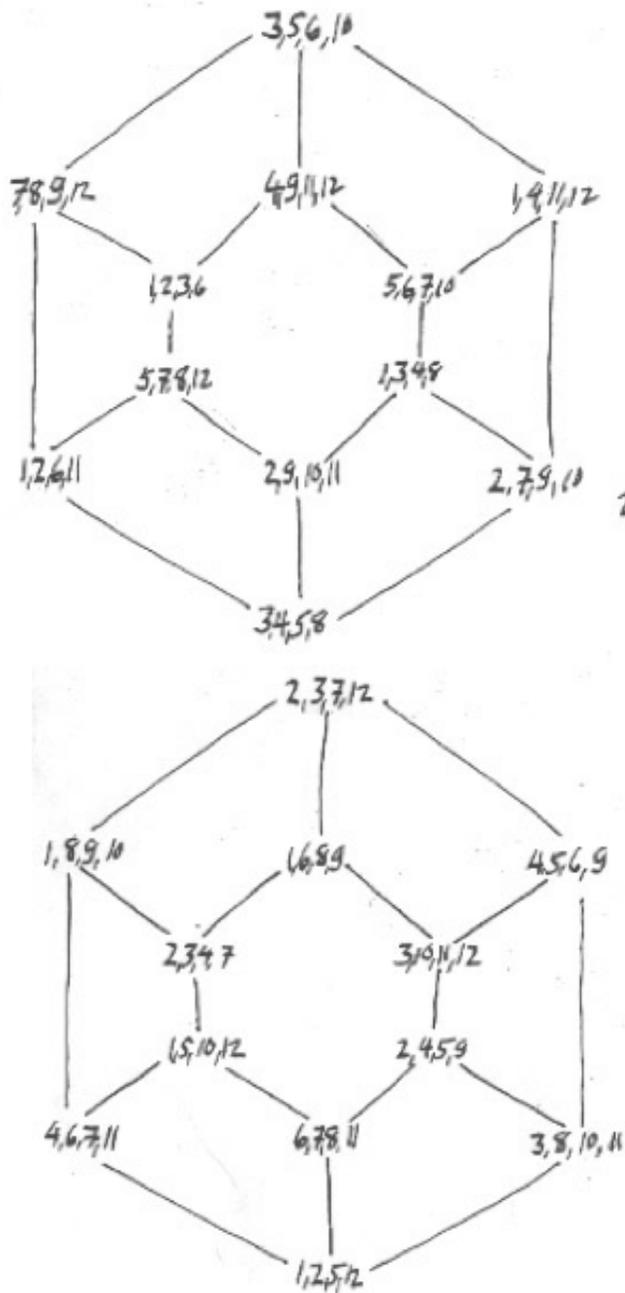
- (5 7 8 12)
- (1 2 3 6)
- (4 9 1 12)
- (5 6 7 10)
- (1 3 4 5)
- (2 9 10 11)
- (3 4 5 8)
- (1 2 6 11)
- (7 8 9 12)
- (3 5 6 10)
- (1 4 11 12)
- (2 7 9 10)



- (1 3 7 9)
- (4 6 10 12)
- (2 5 8 11)
- (1 5 7 11)
- (2 4 8 10)
- (3 6 9 12)
- (3 5 9 11)
- (2 6 8 12)
- (1 4 7 10)



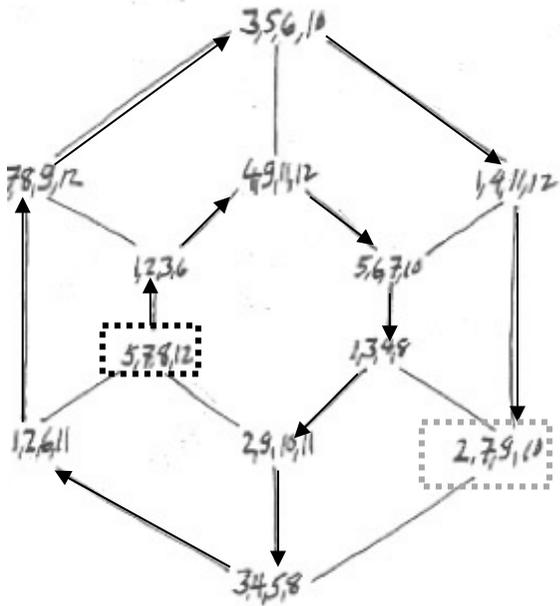
- (2 4 5 9)
- (3 10 11 12)
- (1 6 8 9)
- (2 3 4 7)
- (1 5 10 12)
- (6 7 8 11)
- (1 2 5 12)
- (3 8 10 11)
- (4 5 6 9)
- (2 3 7 12)
- (1 8 9 10)
- (4 6 7 11)



- (5 7 8 12)
- (1 2 3 6)
- (4 9 1 12)
- (5 6 7 10)
- (1 3 4 5)
- (2 9 10 11)
- (3 4 5 8)
- (1 2 6 11)
- (7 8 9 12)
- (3 5 6 10)
- (1 4 11 12)
- (2 7 9 10)
- (1 3 7 9)
- (4 6 10 12)
- (2 5 8 11)
- (1 5 7 11)
- (2 4 8 10)
- (3 6 9 12)
- (3 5 9 11)
- (2 6 8 12)
- (1 4 7 10)
- (2 4 5 9)
- (3 10 11 12)
- (1 6 8 9)
- (2 3 4 7)
- (1 5 10 12)
- (6 7 8 11)
- (1 2 5 12)
- (3 8 10 11)
- (4 5 6 9)
- (2 3 7 12)
- (1 8 9 10)
- (4 6 7 11)

# Tom Johnson's *Twelve for piano*, part III, based on (12,4,3)

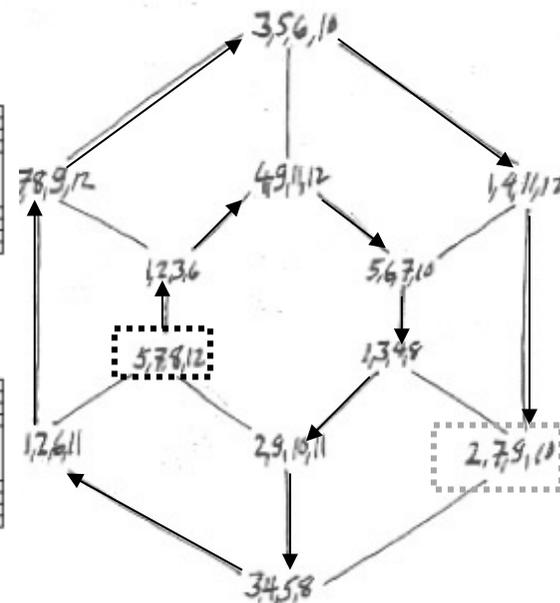
♩ = 128



- (5 7 8 12)
- (1 2 3 6)
- (4 9 1 12)
- (5 6 7 10)
- (1 3 4 5)
- (2 9 10 11)
- (3 4 5 8)
- (1 2 6 11)
- (7 8 9 12)
- (3 5 6 10)
- (1 4 11 12)
- (2 7 9 10)

# Tom Johnson's *Twelve for piano*, part III, based on (12,4,3)

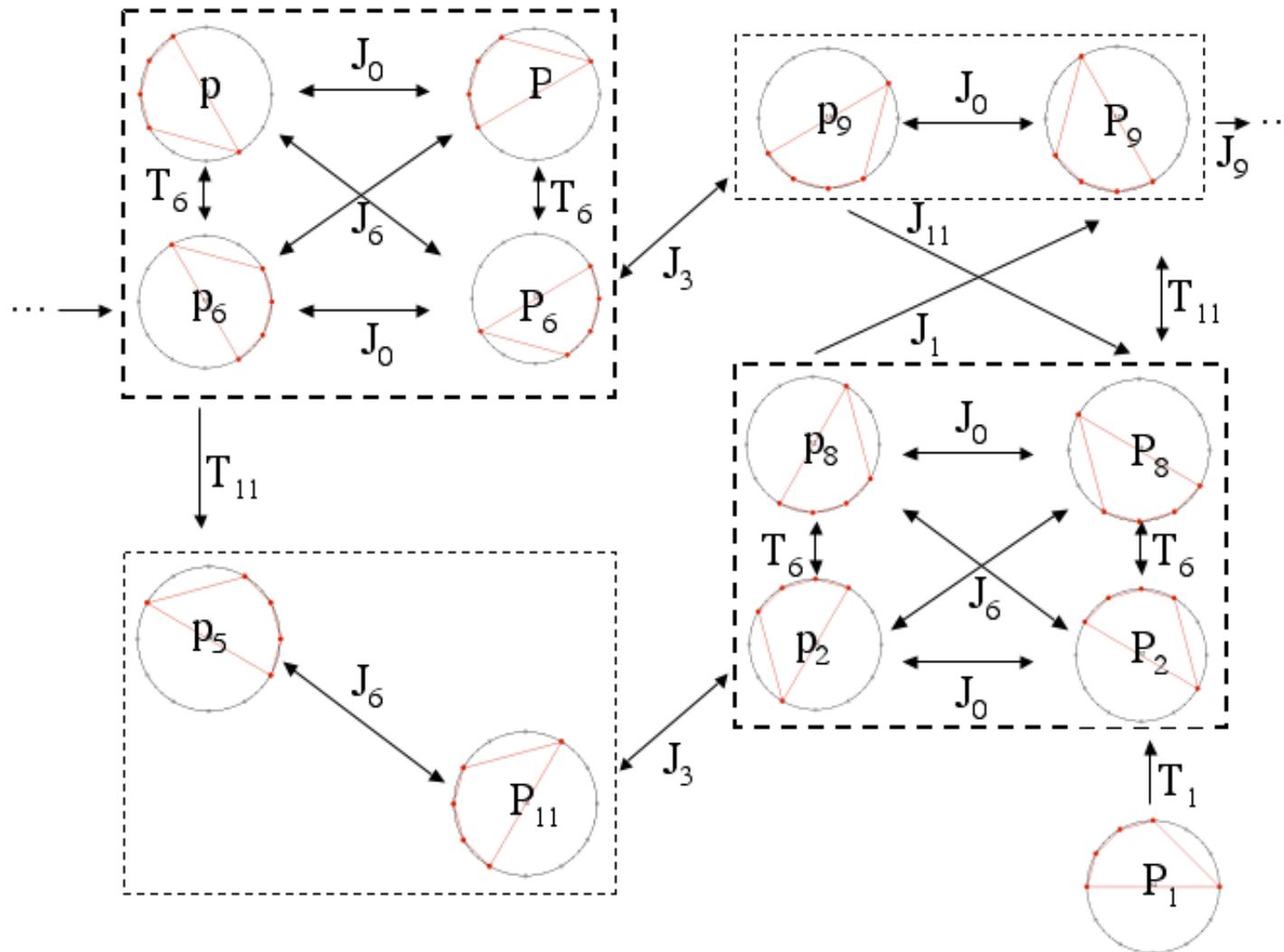
$\text{♩} = 128$



**(5 7 8 12)**  
**(1 2 3 6)**  
**(4 9 1 12)**  
**(5 6 7 10)**  
**(1 3 4 5)**  
**(2 9 10 11)**  
**(3 4 5 8)**  
**(1 2 6 11)**  
**(7 8 9 12)**  
**(3 5 6 10)**  
**(1 4 11 12)**  
**(2 7 9 10)**

# Reseau transformationnel

Stockhausen: *Klavierstück III* (Analyse de D. Lewin)



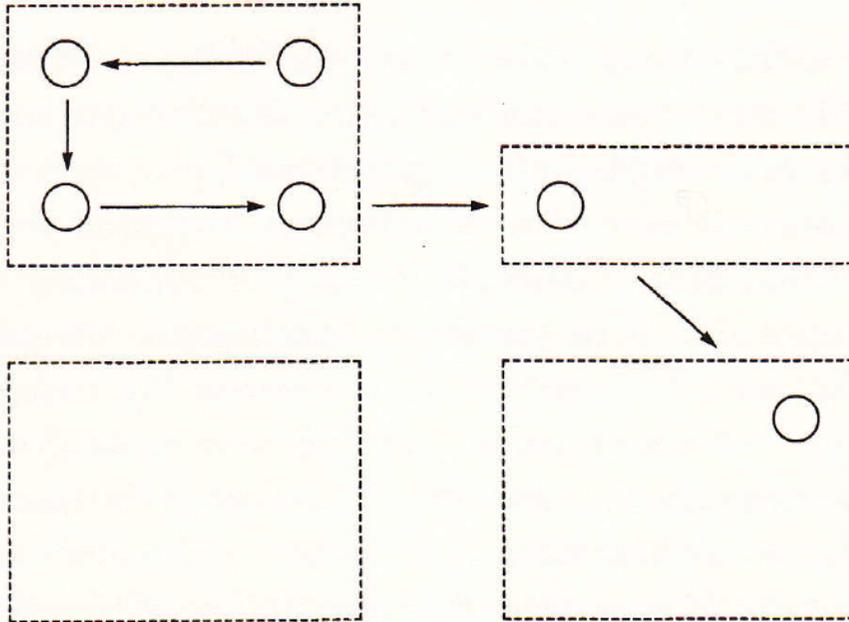
« Rather than asserting a network that follows pentachord relations one at a time, according to the chronology of the piece, I shall assert instead a network that displays all the pentachord forms used and all their **potentially functional interrelationships**, in a very compactly organized little **spatial configuration**. »

« [...] the sequence of events moves within a clearly defined world of possible relationships, and because - in so moving - **it makes the abstract space of such a world accessible to our sensibilities**. That is to say that the story projects what one would traditionally call *form*. »

# Parcours multiples d'écoute dans un réseau transformationnel

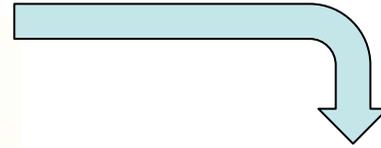
Stockhausen: *Klavierstück III* (Analyse de D. Lewin)

Pass 1 (mm. 1-5).

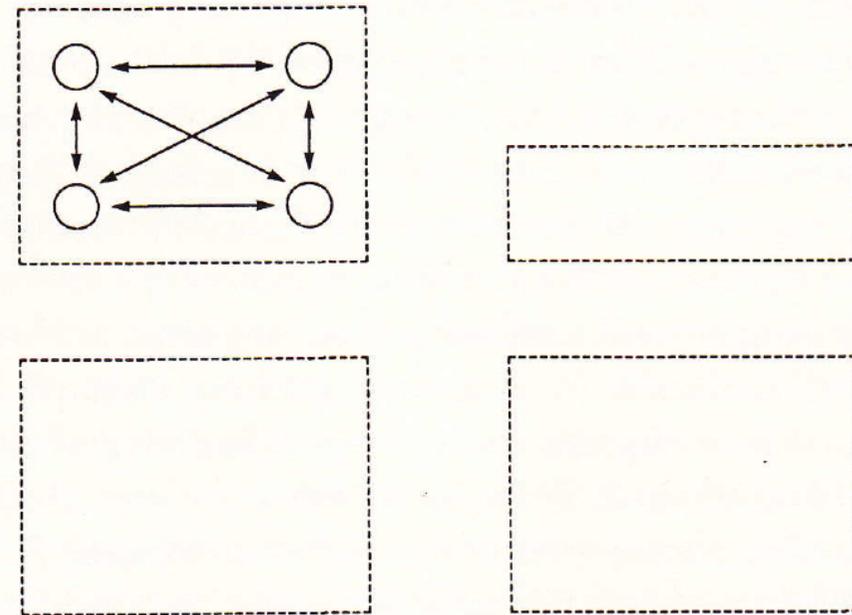


*a*

horizontal arrows within boxes = J0; between boxes = J3 or J9  
 vertical arrows within boxes = T6; between boxes = Te or T1  
 diagonal arrows within boxes = J6; between boxes = Je or J1

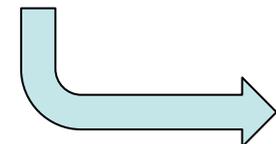


Pass 2 (mm. 5-8) goes back and elaborates the beginning area of pass 1.



*b*

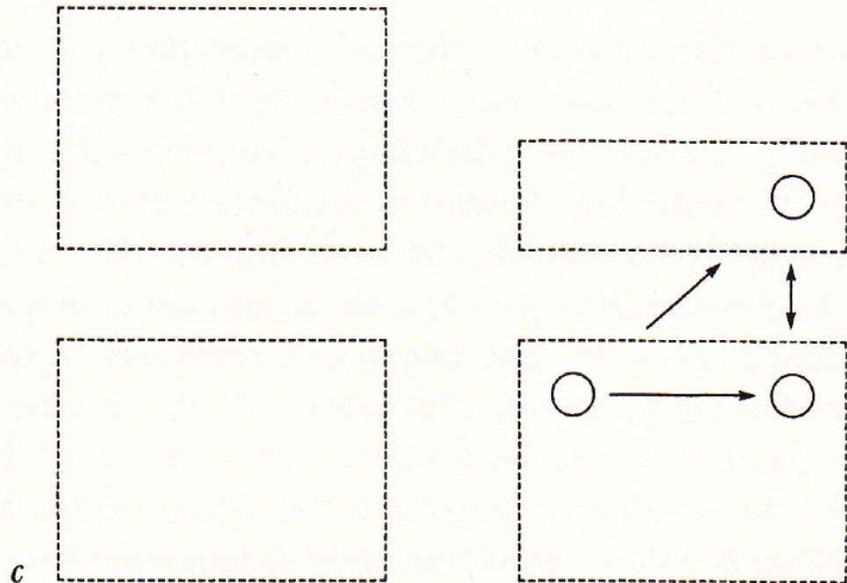
horizontal arrows within boxes = J0; between boxes = J3 or J9  
 vertical arrows within boxes = T6; between boxes = Te or T1  
 diagonal arrows within boxes = J6; between boxes = Je or J1



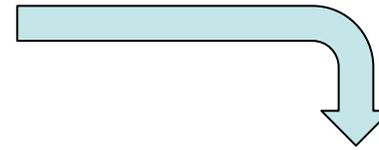
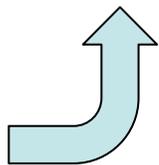
# Parcours multiples d'écoute dans un réseau transformationnel

Stockhausen: *Klavierstück III* (Analyse de D. Lewin)

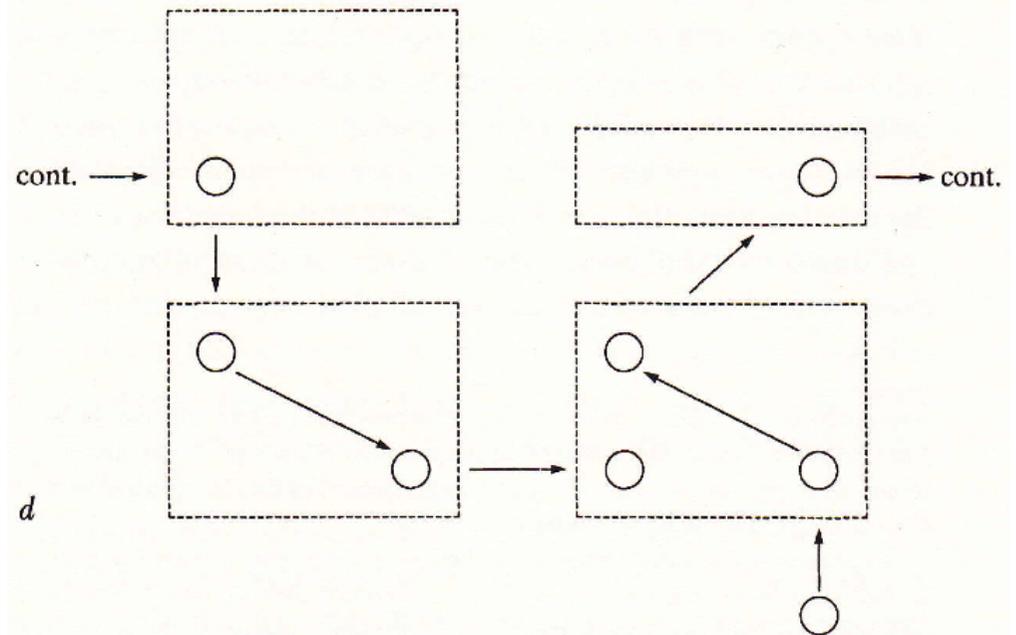
Pass 3 (mm. 8-10) picks up and elaborates the ending area of pass 1.



horizontal arrows within boxes = J0; between boxes = J3 or J9  
vertical arrows within boxes = T6; between boxes = Te or T1  
diagonal arrows within boxes = J6; between boxes = Je or J1



Pass 4 (mm. 9-16) expands the p8 + P8 area of pass 3 to activate P2 and p2 as well. P2 is the "essential" incipit of pass 4; p2 is the end of the pass, and of the piece.



horizontal arrows within boxes = J0; between boxes = J3 or J9  
vertical arrows within boxes = T6; between boxes = Te or T1  
diagonal arrows within boxes = J6; between boxes = Je or J1

## Exercices d'écoute : « do you hear it? » vs « can you hear it? »

Stockhausen: *Klavierstück III* (Analyse de D. Lewin)

m. 1 1-2 2 2-3 2-5 2-5

P0 p0 p6 P6 p9 P8

m. 5-7 5-7 5-7 5-7 8-10 8-10 8-10

P6 p6 P0 p0 p8 P8 P9

m. 9-11 10-11 11-12 11-12 11-13 12-13 13-14 13-15

P1 P2 p8 P9 p6 p5 Pe p2

Example 2.7. An ear-training aid for listening to P/p forms and their inter-relations.

« I take the question ‘Can you hear it » to mean something like this: After studying the analysis in examples 2.5 and 2.6, do you find it possible to focus your **aural attention** upon aspects of the acoustic signal that seem to engage the signifiers of that analysis? [...] For me, the interesting questions involve the extent and ways in which I am satisfied and dissatisfied when **focusing my aural attention** in that manner. It is important to ask those questions about any systematic analysis of any musical composition ».

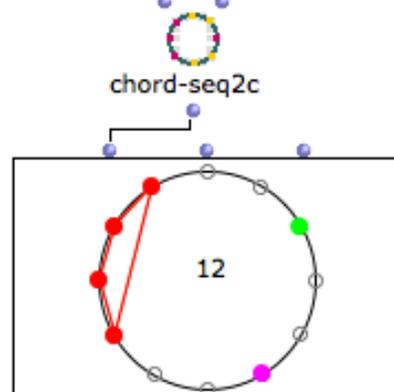
# Computer-Aided Transformational Analysis in OpenMusic

mm. 1-2

mm. 1-2

$J = T7I$   
 $p \implies p$

Musical notation for mm. 1-2 showing a transformation from p to p via J=T7I.



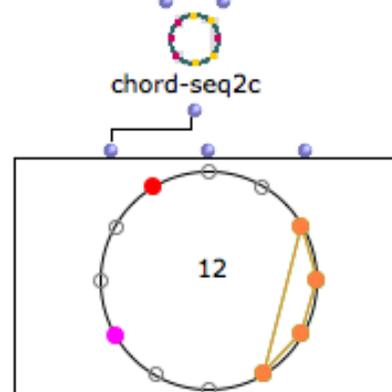
Calcule

mm. 2-3

mm. 2-3

$T6$   
 $p6 \implies P6$

Musical notation for mm. 2-3 showing a transformation from p6 to P6 via T6.



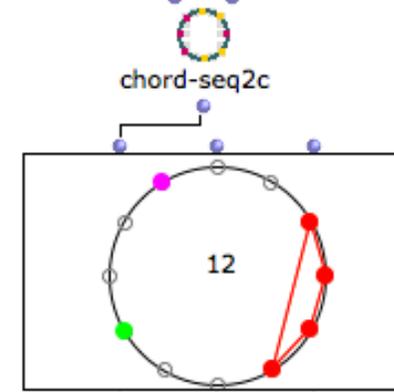
Calcule

mm. 5-7

mm. 5-7

$J$   
 $P6 \implies p6$

Musical notation for mm. 5-7 showing a transformation from P6 to p6 via J.



Calcule

→ <http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/OpenMusic/>

→ OpenMusic

# Visualisations multimédia de l'analyse transformationnelle

R. Attas : *Metaphors in Motion: Agents and Representation in Transformational Analysis*, *MTO*, 15(1), 2009  
<http://mto.societymusictheory.org/issues/mto.09.15.1/mto.09.15.1.attas.html>

Animation 1. Klavierstück III

MAP

day  
2

**Klavierstück III**

This website is best viewed in 1024 x 768 resolution. Copyright © 2007-2008 UBC School of Music. All Rights Reserved.

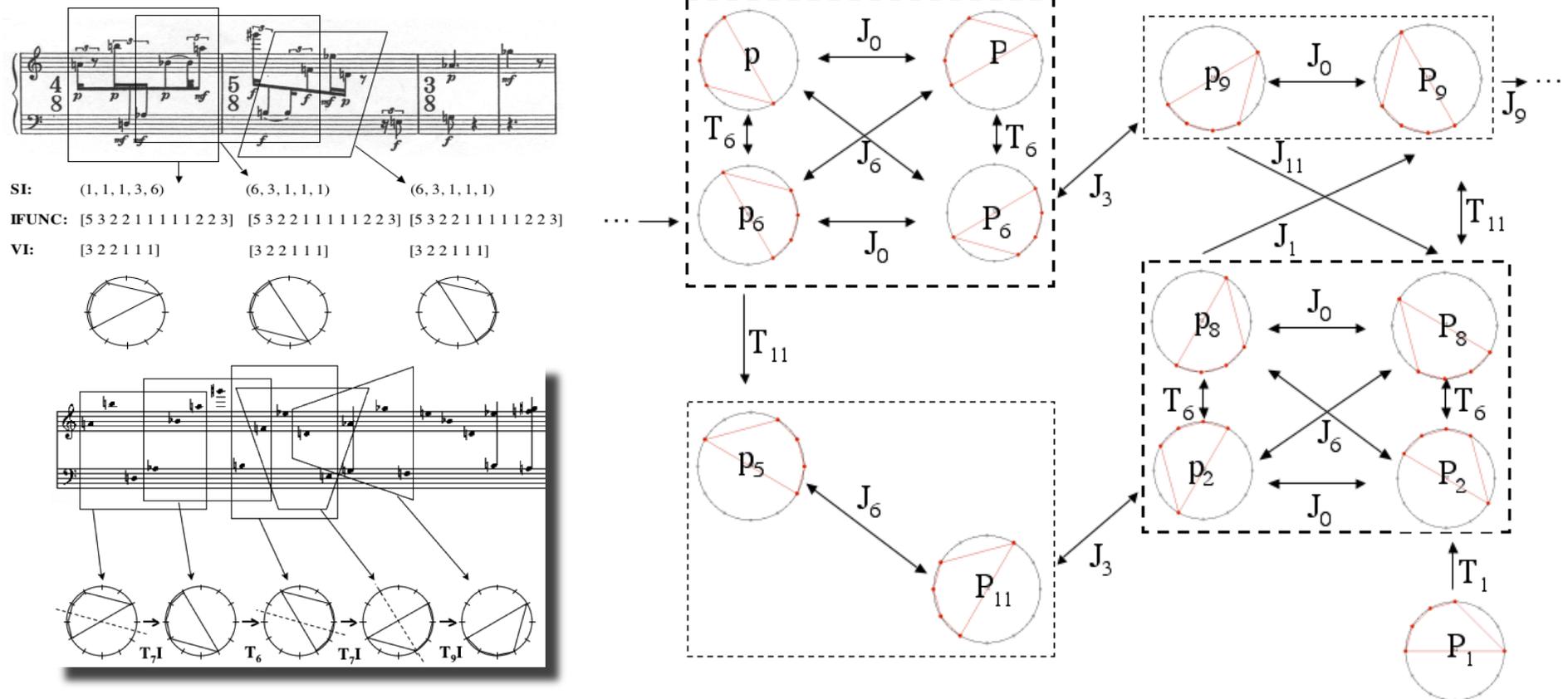
# Visualisations multimédia de l'analyse transformationnelle

R. Attas : Metaphors in Motion: Agents and Representation in Transformational Analysis, *MTO*, 15(1), 2009  
<http://mto.societymusictheory.org/issues/mto.09.15.1/mto.09.15.1.attas.html>

## Animation 2. Grow Your Own Pentachord

The interface features a central 3D illustration of a brown pot containing soil and several white flowers with yellow centers. To the left, there are two rows of glowing wands: 'T WANDS' (yellow) labeled T1, T6, and Te; and 'J WANDS' (blue) labeled J0, J1, J3, J6, J9, and Je. In the top left, a 'PLAYBACK SPEED' control shows a progress bar. In the top right, a 'PENTACHORD MAP' displays a grid with nodes (p, P, T6, J6, J0, p6, J3, p9, p5, p8) and arrows, with a red dot indicating the current position. Below the map is a large 'P' symbol and the text '89te2' and 'CURRENT PENTACHORD'. At the bottom right, there are buttons for 'INSTRUCTIONS', 'POT LAYOUT', and 'GUIDE'. The bottom of the screen has a black banner with the text 'grow your own pentachord!' and a footer: 'This website is best viewed in 1024 x 768 resolution. GROW YOUR OWN PENTACHORD! Copyright © 2007-2008 UBC School of Music. All Rights Reserved.'

# Progression transformationnelle vs réseau transformationnel



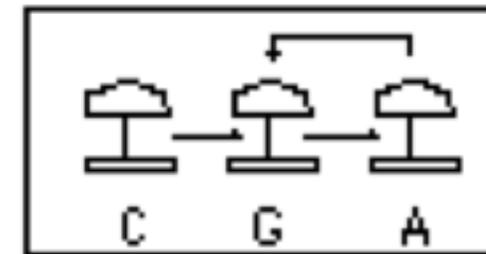
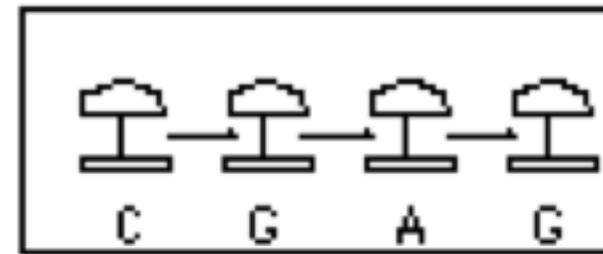
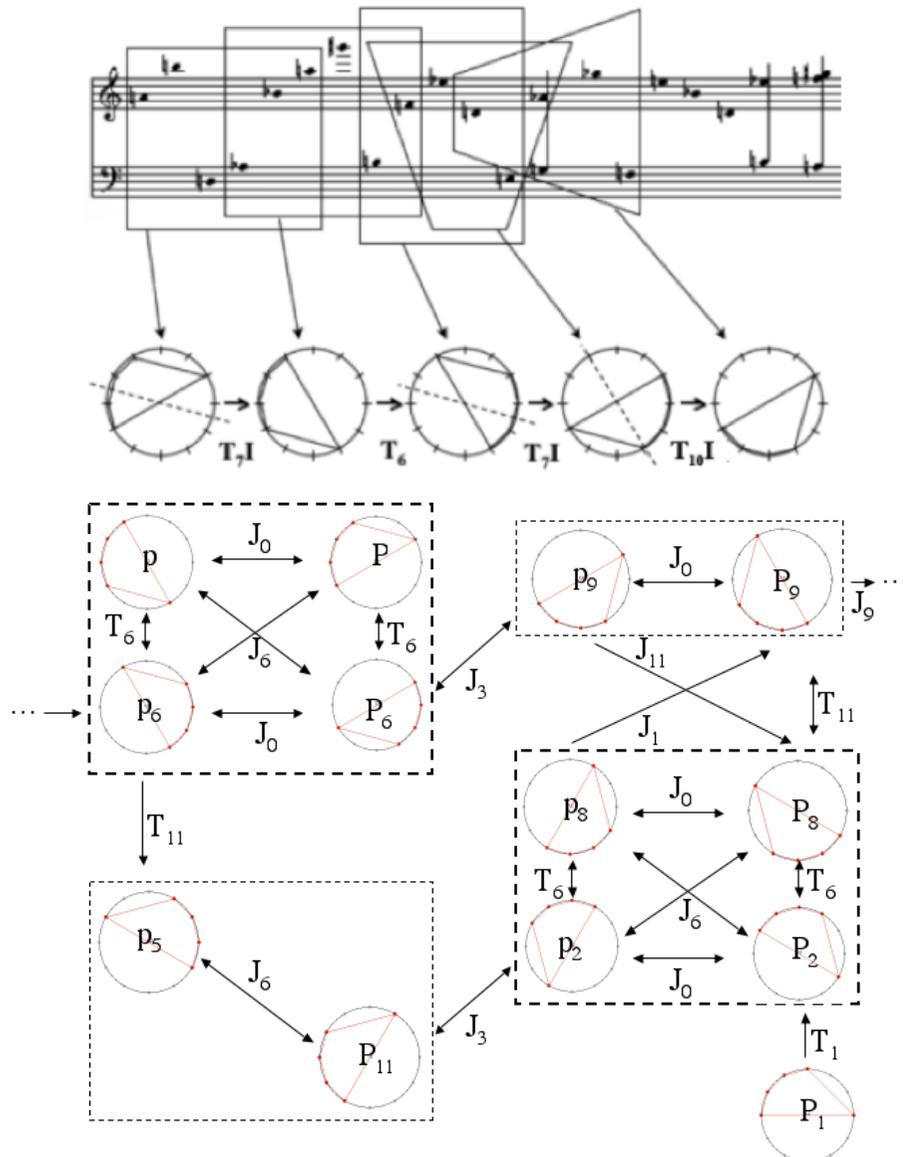
« A rational reconstruction of a work or works, which is a theory of the work or works, is an explanation not, assuredly, of the 'actual' process of construction, but of how the work or works may be construed by a hearer, how the 'given' may be 'taken' »

M. Babbitt : « Contemporary Music Composition and Music Theory as Contemporary Intellectual History », 1972

# Réseau transformationnel et cognition (musicale)



Bamberger, J. (1986). Cognitive issues in the development of musically gifted children. In *Conceptions of giftedness* (eds., R. J. Sternberg, & J. E. Davidson), pp. 388-413. Cambridge University Press, Cambridge



Bamberger, J. (2006). "What develops in musical development?" In G. MacPherson (ed.) *The child as musician: Musical development from conception to adolescence*. Oxford, U.K. Oxford University Press.

# Théorie des groupes et cognition (musicale)

« Group Theory has emerged as a powerful tool for analyzing cognitive structure. The number of cognitive disciplines using group theory is now enormous. The power of group theory lies in its ability to identify organization, and to express organization in terms of **generative actions that structure a space** »

Michael Leyton, The International Society for Group Theory in Cognitive Science

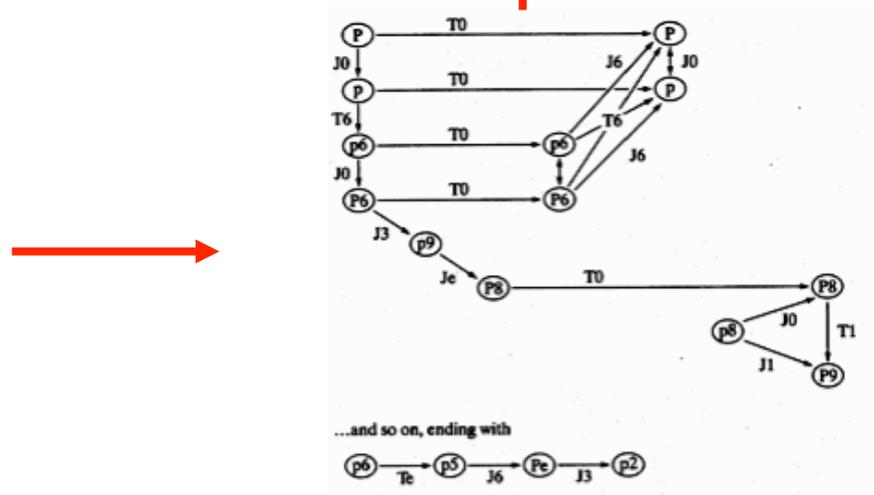
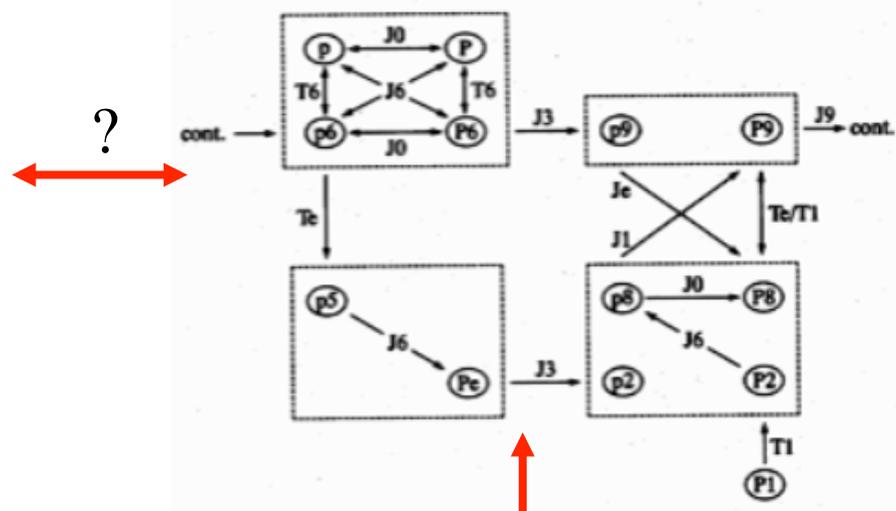
SI: (1, 1, 1, 3, 6)      (6, 3, 1, 1, 1)      (6, 3, 1, 1, 1)

IFUNC: [5 3 2 2 1 1 1 1 1 2 2 3]    [5 3 2 2 1 1 1 1 1 2 2 3]    [5 3 2 2 1 1 1 1 1 2 2 3]

VI: [3 2 2 1 1 1]      [3 2 2 1 1 1]      [3 2 2 1 1 1]



T<sub>7,I</sub>      T<sub>6</sub>      T<sub>7,I</sub>      T<sub>9,I</sub>



...and so on, ending with  
 p<sub>6</sub> → T<sub>e</sub> → p<sub>5</sub> → J<sub>6</sub> → P<sub>c</sub> → J<sub>3</sub> → p<sub>2</sub>

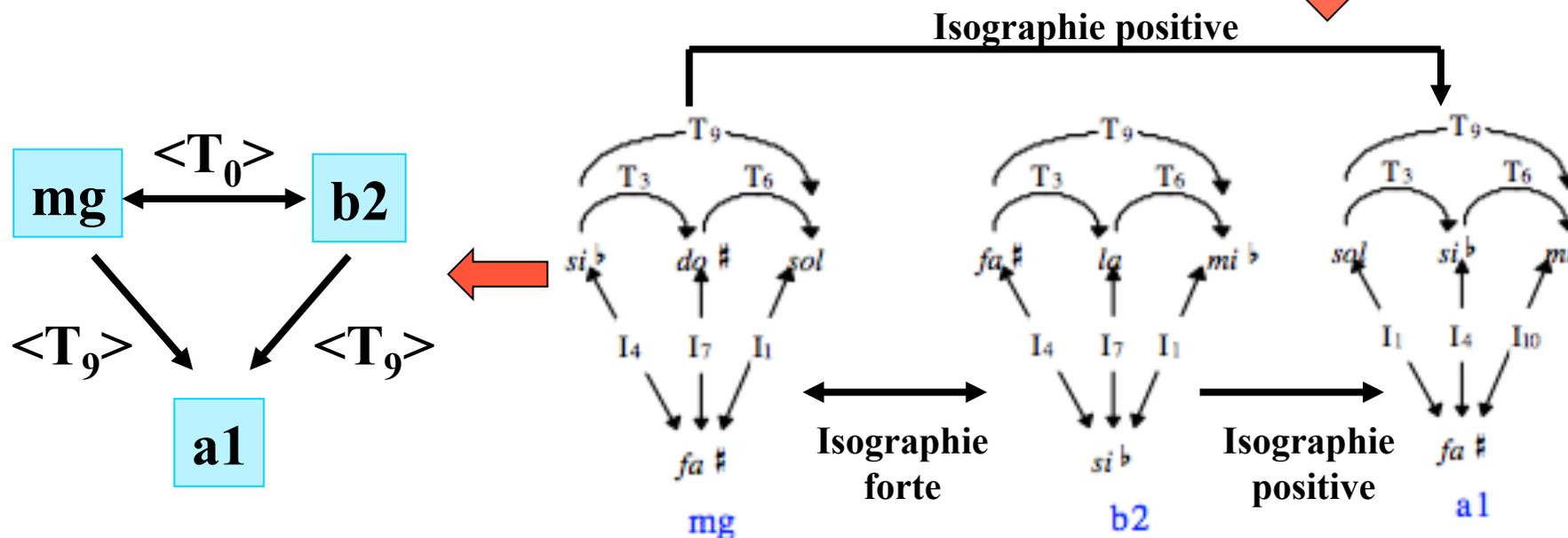
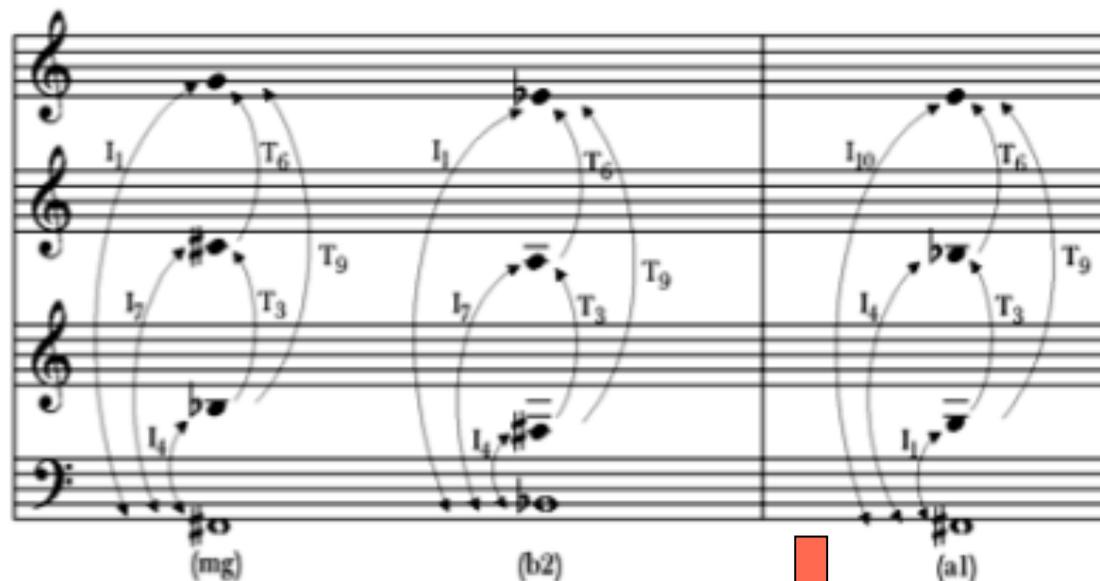
Example 2.4. A network whose left-to-right layout reflects the chronological progress of the piece through P/p forms.

# Klumpenhouver Networks (K-réseaux)

Xavier Hascher: « Liszt et les sources de la notion d'agrégat », *Analyse Musicale*, 43, 2002



Ex. 1 - « Ladislaus Teleki » (*Historische ungarische Bildnisse n° 4*), mes. 1-7  
Les agrégats dans la classification de Forte



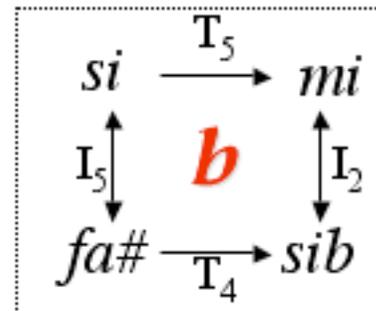
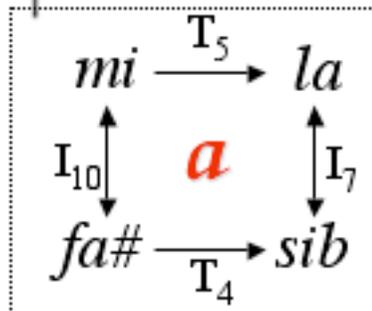
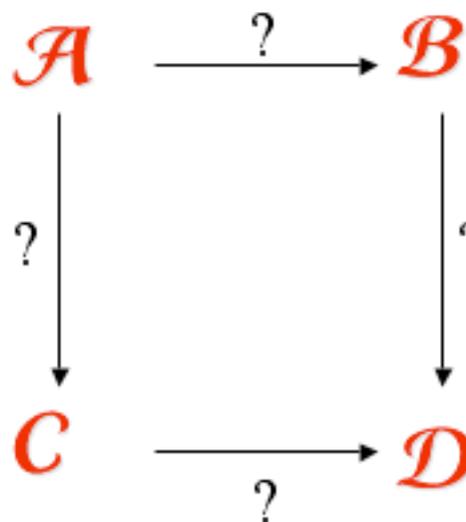
# Klumpenhower Networks (K-réseaux) : isographies positives et récursivité

David Lewin: «A Tutorial on K-nets using the Chorale in Schoenberg's Op.11, N°2 », JMT, 1994

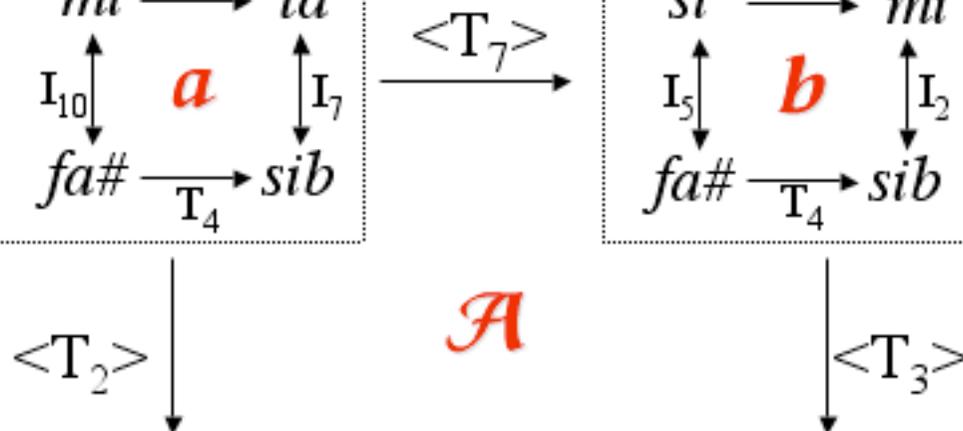
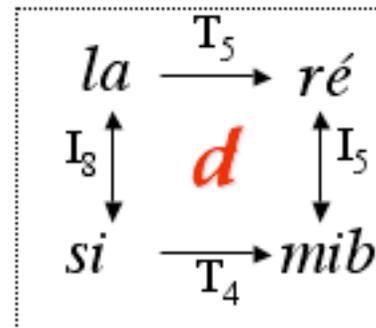
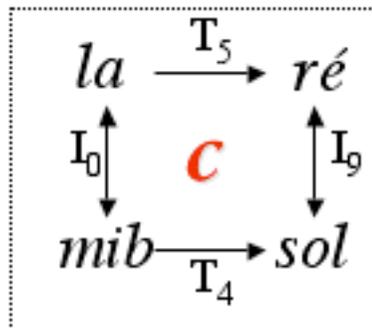


$$\langle T_k \rangle : T_m \rightarrow T_m$$

$$I_m \rightarrow I_{k+m}$$



**A**



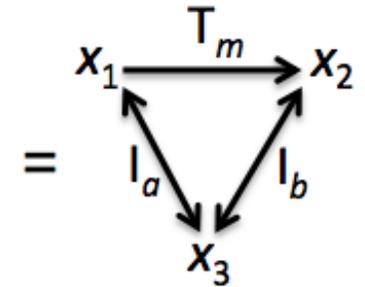
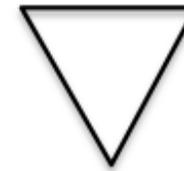
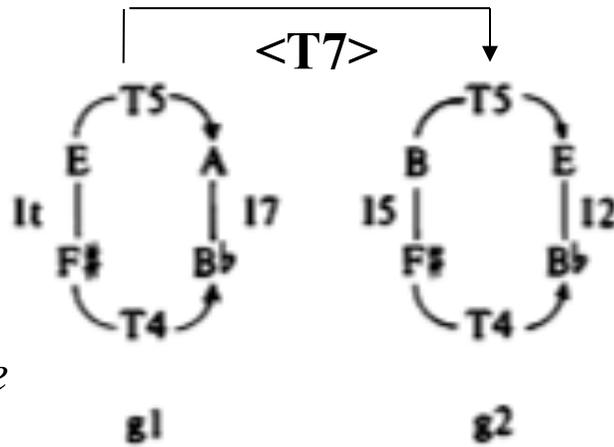
# Isographies positives, négatives et loi de composition

Examen 25/2/2010

*Isographie positive*

$$\langle T_k \rangle : T_m \rightarrow T_m$$

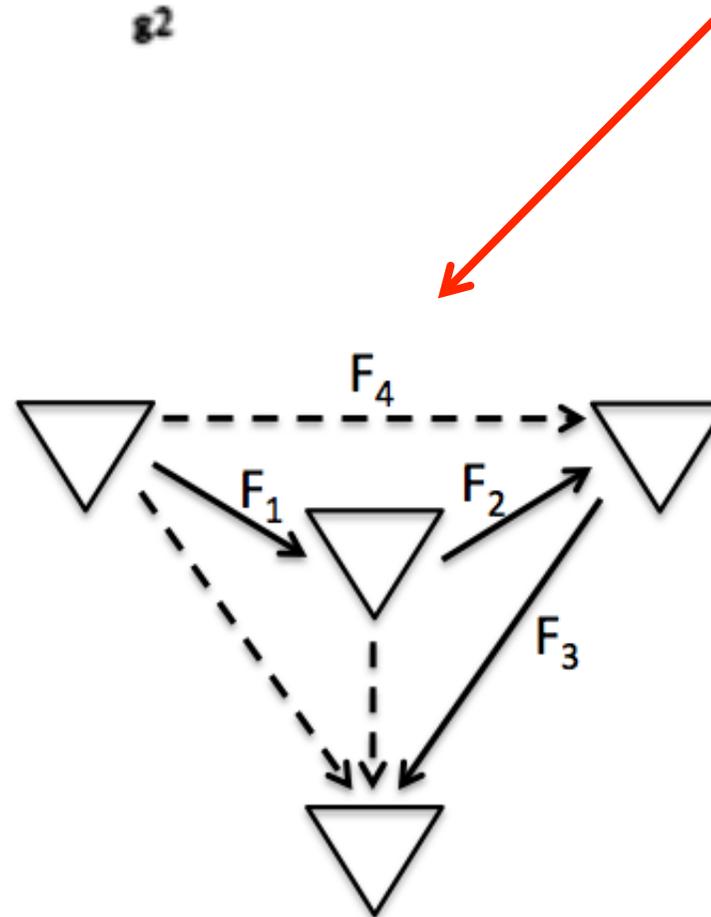
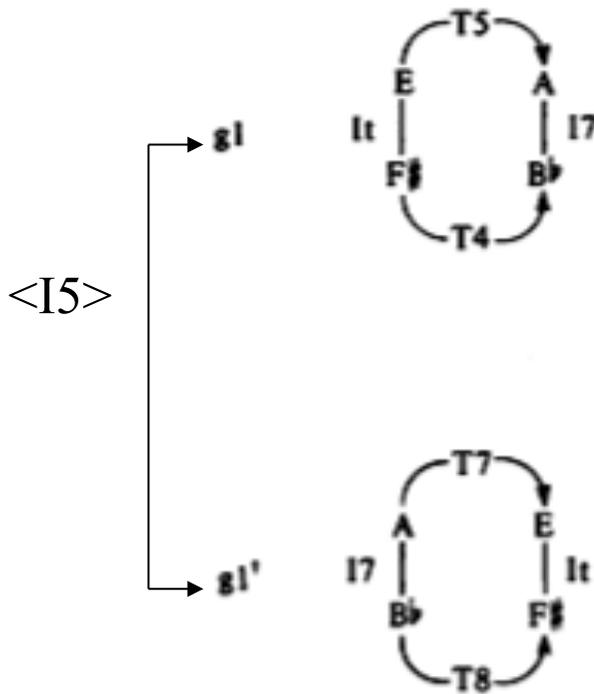
$$I_m \rightarrow I_{k+m}$$



*Isographie négative*

$$\langle I_k \rangle : T_m \rightarrow T_{-m}$$

$$I_m \rightarrow I_{k-m}$$



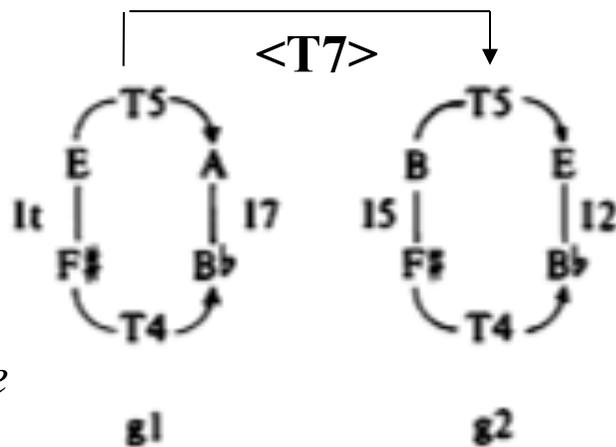
- $F_1 = \langle T_2 \rangle$
- $F_2 = \langle I_4 \rangle$
- $F_3 = \langle I_5 \rangle$

# Isomorphismes de réseaux de Klumpenhouwer

*Isographie positive*

$$\langle T_k \rangle : T_m \rightarrow T_m$$

$$I_m \rightarrow I_{k+m}$$

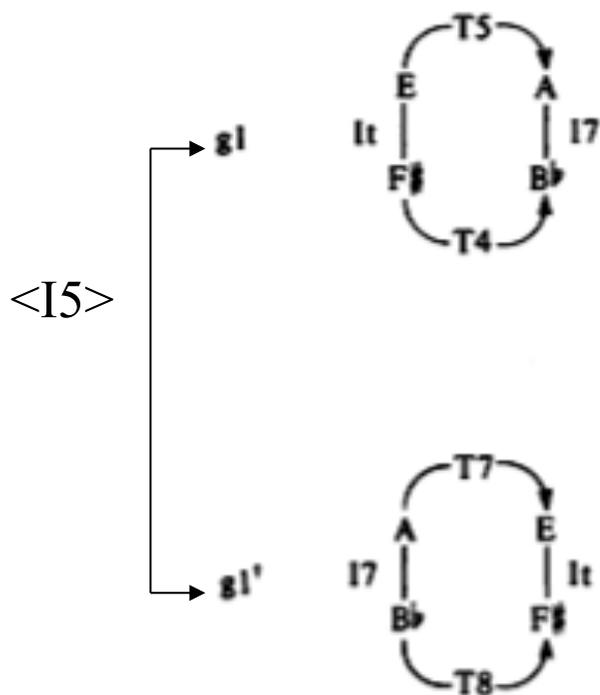


*Isographie négative*

$$\langle I_k \rangle : T_m \rightarrow T_{-m}$$

$$I_m \rightarrow I_{k-m}$$

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\varphi} & y \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \delta \\ w & \xrightarrow{\psi} & z \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{F\varphi F^{-1}} & F(y) \\ F\gamma F^{-1} \downarrow & & \downarrow F\delta F^{-1} \\ F(w) & \xrightarrow{F\psi F^{-1}} & F(z) \end{array}$$

# Isomorphismes de réseaux de Klumpenhouwer

*Isographie positive*

$$\langle \mathbf{T}_k \rangle : \mathbf{T}_m \rightarrow \mathbf{T}_m$$

$$\mathbf{I}_m \rightarrow \mathbf{I}_{k+m}$$

*Isographie négative*

$$\langle \mathbf{I}_k \rangle : \mathbf{T}_m \rightarrow \mathbf{T}_{-m}$$

$$\mathbf{I}_m \rightarrow \mathbf{I}_{k-m}$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{T_4} & 4 \\ I_1 \downarrow & & \downarrow I_9 \\ 1 & \xrightarrow{T_4} & 5 \end{array} \xrightarrow{T_2} \begin{array}{ccc} T_2(0) & \xrightarrow{T_k} & T_2(4) \\ I_m \downarrow & & \downarrow I_n \\ T_2(1) & \xrightarrow{T_h} & T_2(5) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 4 & \xrightarrow{T_4} & 8 \\ I_9 \downarrow & & \downarrow I_5 \\ 5 & \xrightarrow{T_4} & 9 \end{array} \xrightarrow{T_2} \begin{array}{ccc} T_2(4) & \xrightarrow{T_{k'}} & T_2(8) \\ I_{m'} \downarrow & & \downarrow I_{n'} \\ T_2(5) & \xrightarrow{T_{h'}} & T_2(9) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\varphi} & y \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \delta \\ w & \xrightarrow{\psi} & z \\ \downarrow F & & \\ F(x) & \xrightarrow{F\varphi F^{-1}} & F(y) \\ F\gamma F^{-1} \downarrow & & \downarrow F\delta F^{-1} \\ F(w) & \xrightarrow{F\psi F^{-1}} & F(z) \end{array}$$

# Isomorphismes de réseaux de Klumpenhouwer

*Isographie positive*

Examen 7/3/2006

$$\langle \mathbf{T}_k \rangle : \mathbf{T}_m \rightarrow \mathbf{T}_m$$

$$\mathbf{I}_m \rightarrow \mathbf{I}_{k+m}$$

*Isographie négative*

$$\langle \mathbf{I}_k \rangle : \mathbf{T}_m \rightarrow \mathbf{T}_{-m}$$

$$\mathbf{I}_m \rightarrow \mathbf{I}_{k-m}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & \xrightarrow{T_1} & 3 \\ I_2 \downarrow & & \downarrow I_8 \\ 0 & \xrightarrow{T_5} & 5 \end{array} \xrightarrow{I_5} \begin{array}{ccc} I_5(2) & \xrightarrow{T_k} & I_5(3) \\ I_a \downarrow & & \downarrow I_b \\ I_5(0) & \xrightarrow{T_h} & I_5(5) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\varphi} & y \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \delta \\ w & \xrightarrow{\psi} & z \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{F\varphi F^{-1}} & F(y) \\ F\gamma F^{-1} \downarrow & & \downarrow F\delta F^{-1} \\ F(w) & \xrightarrow{F\psi F^{-1}} & F(z) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \delta \\ C & \xrightarrow{\psi} & D \end{array} \xrightarrow{\text{Passage au complémentaire}} \begin{array}{ccc} A^C & \xrightarrow{\varphi'} & B^C \\ \gamma' \downarrow & & \downarrow \delta' \\ C^C & \xrightarrow{\psi'} & D^C \end{array}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$$

$$B = \{0, 6, 8, 9, 10, 11\}$$

$$C = \{1, 2, 4, 7, 9, 11\}$$

$$D = \{0, 2, 4, 5, 7, 10\}$$

Examen 25/2/2009

# Isomorphismes de réseaux de Klumpenhouwer

*Isographie positive*

$$\langle \mathbf{T}_k \rangle : \mathbf{T}_m \rightarrow \mathbf{T}_m$$

$$\mathbf{I}_m \rightarrow \mathbf{I}_{k+m}$$

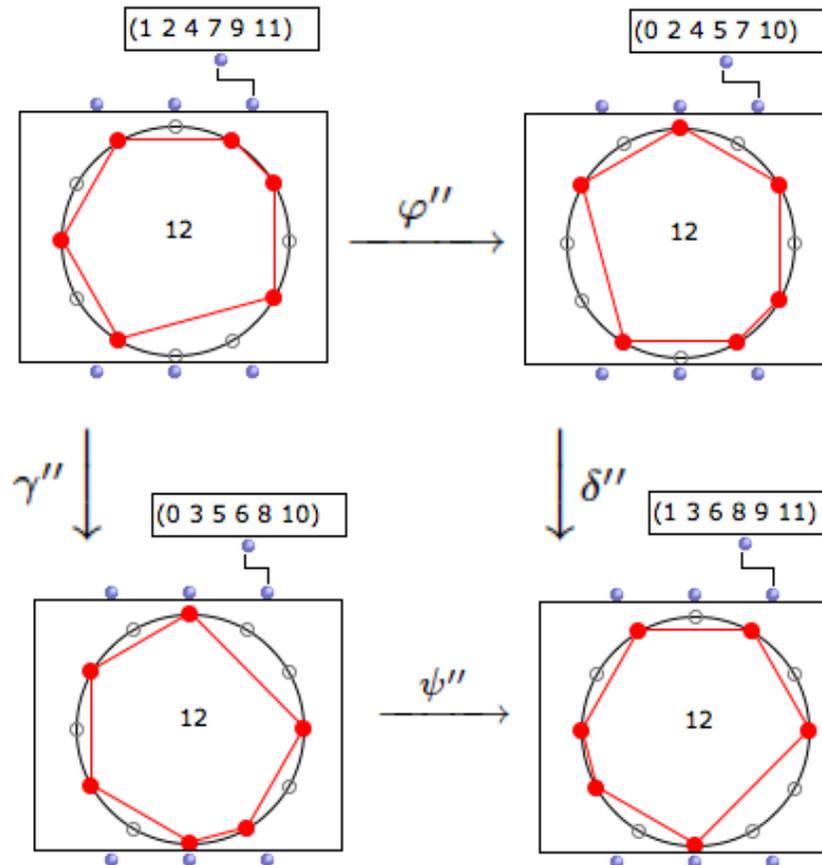
*Isographie négative*

$$\langle \mathbf{I}_k \rangle : \mathbf{T}_m \rightarrow \mathbf{T}_{-m}$$

$$\mathbf{I}_m \rightarrow \mathbf{I}_{k-m}$$

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\varphi''} & D \\
 \gamma'' \downarrow & & \downarrow \delta'' \\
 C^C & \xrightarrow{\psi''} & D^C
 \end{array}
 \xrightarrow{T_1}
 \begin{array}{ccc}
 T_1(C) & \xrightarrow{\varphi'''} & T_1(D) \\
 \gamma''' \downarrow & & \downarrow \delta''' \\
 T_1(C^C) & \xrightarrow{\psi'''} & T_1(D^C)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{\varphi} & y \\
 \gamma \downarrow & & \downarrow \delta \\
 w & \xrightarrow{\psi} & z
 \end{array}
 \xrightarrow{F}
 \begin{array}{ccc}
 F(x) & \xrightarrow{F\varphi F^{-1}} & F(y) \\
 F\gamma F^{-1} \downarrow & & \downarrow F\delta F^{-1} \\
 F(w) & \xrightarrow{F\psi F^{-1}} & F(z)
 \end{array}$$



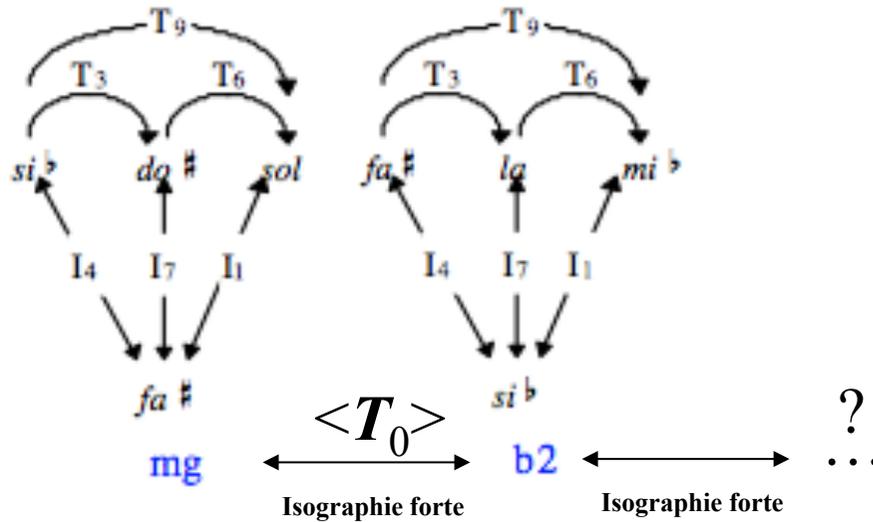
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$$

$$B = \{0, 6, 8, 9, 10, 11\}$$

$$C = \{1, 2, 4, 7, 9, 11\}$$

$$D = \{0, 2, 4, 5, 7, 10\}$$

# Énumération des K-nets en relation d'isographie forte



$$\begin{array}{ccccc}
 x & \xrightarrow{T_3} & x+3 & \xrightarrow{T_6} & x+9 \\
 \swarrow I_4 & & \uparrow I_7 & & \searrow I_1 \\
 & & 4-x & = & 7-(x+3) = 1-(x+9)
 \end{array}$$

$\Rightarrow$  12 solutions

$$\begin{array}{ccc}
 re \xrightarrow{T_4} fa^\# & & x \xrightarrow{T_4} x+4 \\
 M_5 \downarrow & \longleftrightarrow \text{Isographie forte} & M_5 \downarrow \\
 sib \xrightarrow{T_6 I} sol^\# & & 5x \xrightarrow{T_6 I} 6-5x=2-(x+4) \implies 8=4x \implies x=2, 5, 8, 11 \\
 & & \Rightarrow 4 \text{ solutions}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 re^\# \xrightarrow{M_3} la & & x \xrightarrow{M_1} x \\
 M_1 \downarrow & \longleftrightarrow \text{Isographie forte} & M_1 \downarrow \\
 re^\# \xrightarrow{M_{11}} la & & x \xrightarrow{M_{11}} 11x=7x \implies 4x=0 \implies x=0, 3, 6, 9 \\
 & & \Rightarrow 4 \text{ solutions}
 \end{array}$$

# Henry Klumpenhouwer: *Deep Structure in K-net Analysis with Special Reference to Webern (Opus 16, n°4)*

**J<sub>1</sub> [0125]    J<sub>2</sub> [0125]    J<sub>3</sub> [0125]**  
 Sehr lebhaft (♩ = ca 112)

1 2 rit. . . . .  
 Gesang *fp* *pp*  
 As - ter - ges me,

**Baß-Klarinette** *fp*

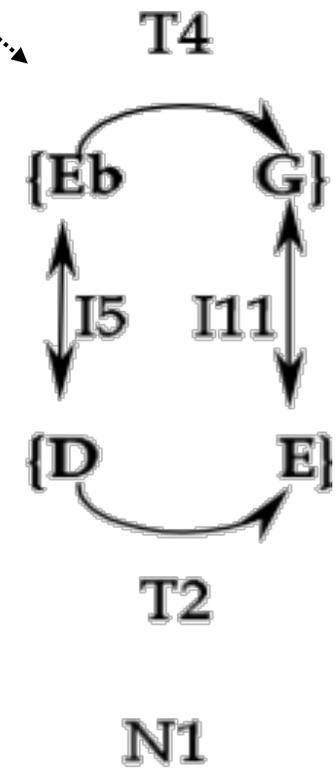
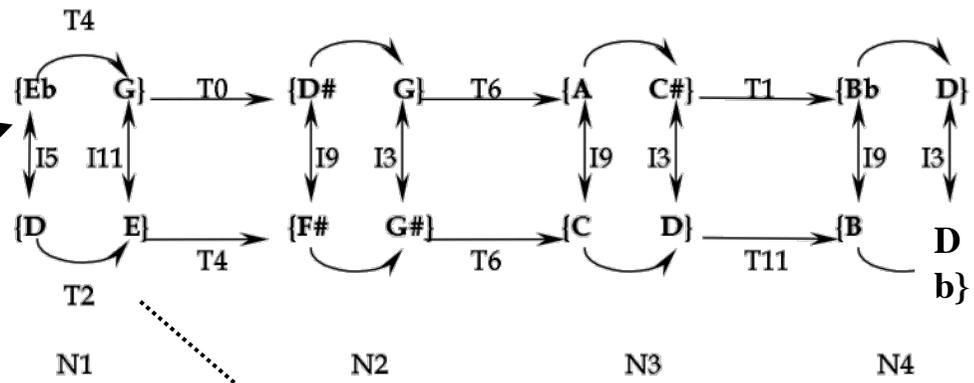
**J<sub>4</sub> [0134]    J<sub>5</sub> [0145]    J<sub>6</sub> [0347]    J<sub>7</sub> [0134]**  
 langsamer (♩ = ca 84)

3 4 *sehr zart pp* *pp* *pp* tempo I. (♩ = ca 112)  
 mi - ne, hys - so - po, et mun -

**Bkl.** *pp* *pp* *pp* *p*

**J<sub>8</sub> [0125]**  
 5 6 *fp* *p*  
 da - bor: la - - va - bis me, et

**Bkl.** *fp* *p*



J1 [0125]    J2 [0125]    J3 [0125]  
 Sehr lebhaft (♩ = ca 112)    rit.

Gesang  
 1    2  
 A.6    . . . . .  
 . . . . .  
 . . . . .

Baß-Klarinette  
*fp*

J4 [0134]    J5 [0145]    J6 [0347]    J7 [0134]  
 langsamer (♩ = ca 84)    sehr zart    tempo I. (♩ = ca 112)

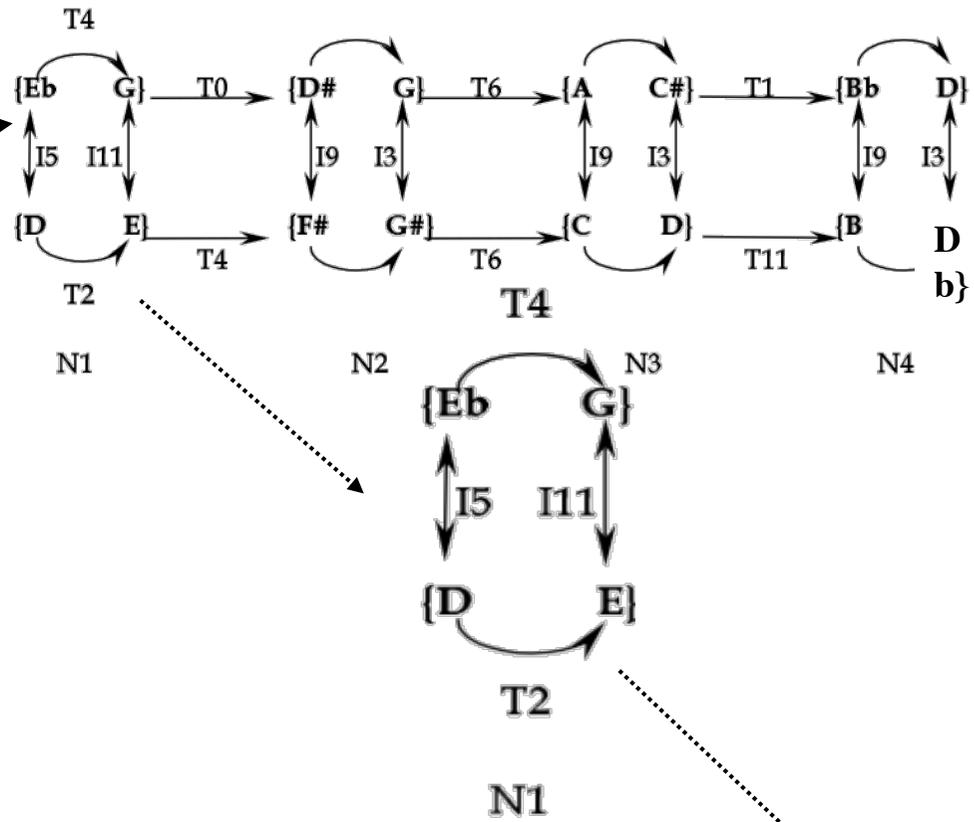
mi - ne, hys - so - po, et mun -  
 sehr zart

*pp*    *pp*    *p*

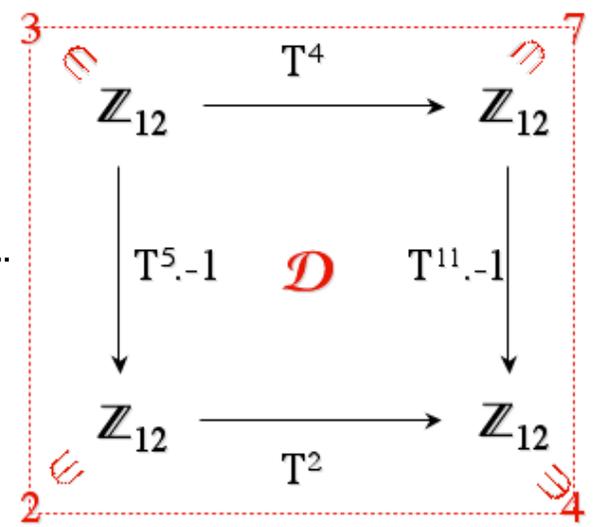
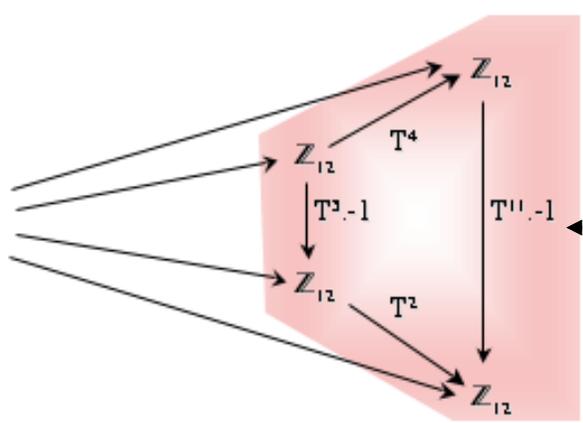
J8 [0125]  
 5    6  
 da - bor: la - - va - bis me, et

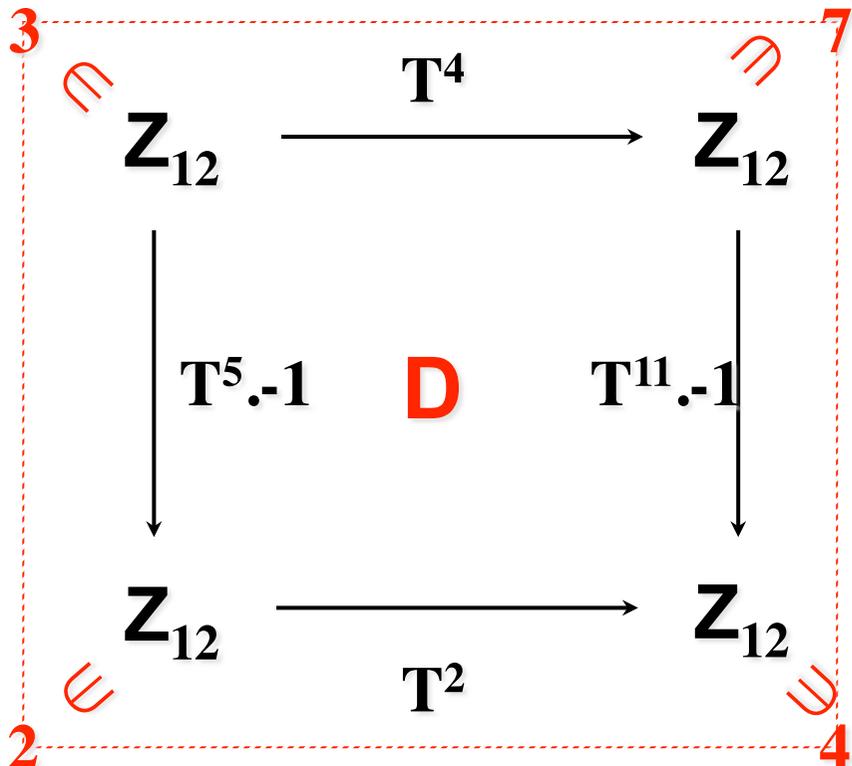
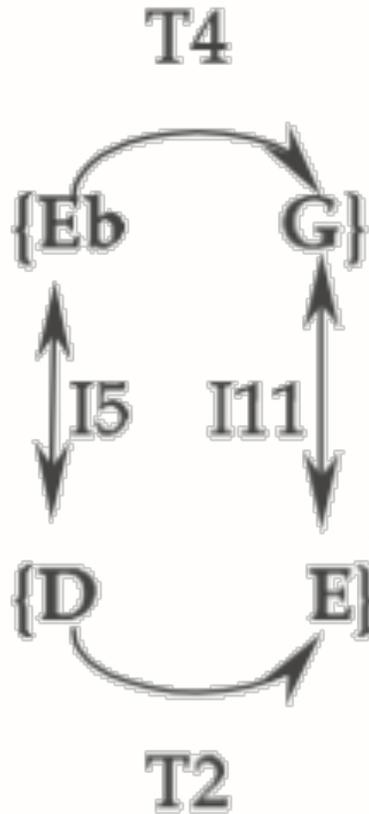
*fp*    *p*

Hkl.



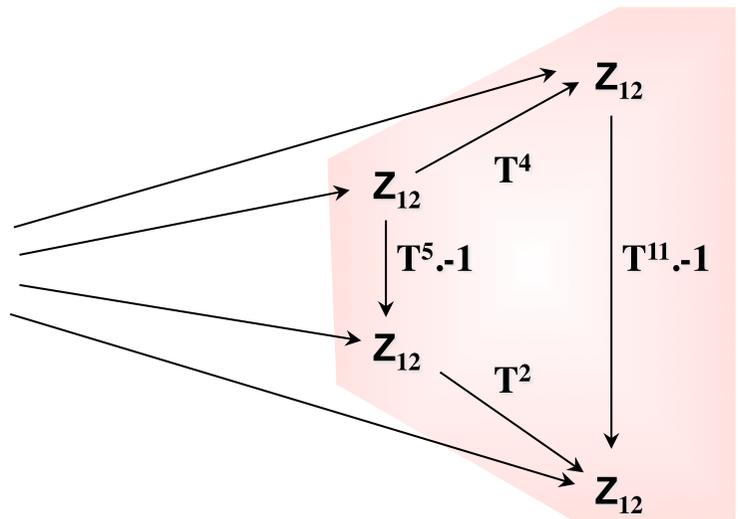
$(3, 7, 2, 4) \in \text{lim}(\mathcal{D})$





N1

$(3, 7, 2, 4) \in \mathbf{lim}(\mathbf{D})$

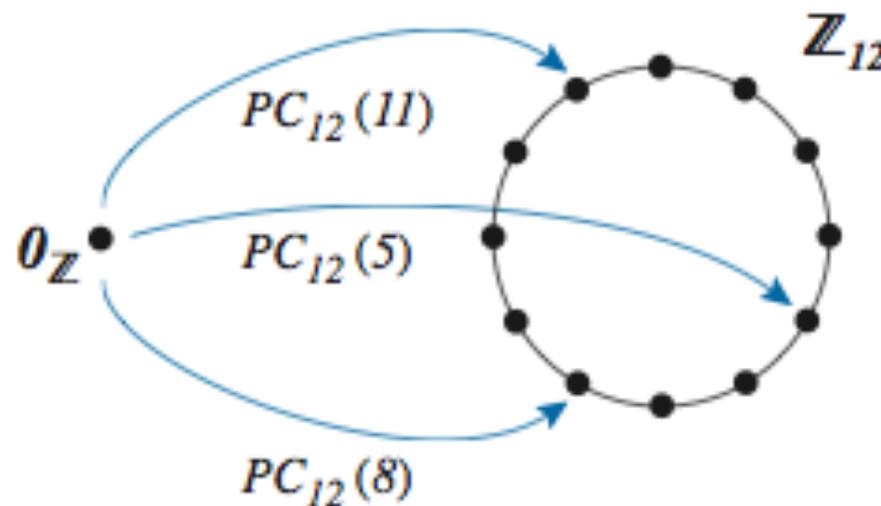


$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_{12}$$

$$f_{ij}^t \in \mathbf{Z}_i @ \mathbf{Z}_j$$

$$0_{\mathbf{Z}} @ \mathbf{Z}_{12}$$

$$Cr = \{PC_{12}(5), PC_{12}(8), PC_{12}(11)\}$$



$$\mathbf{Z}_{12} @ \mathbf{Z}_{12}$$

$$Cr = \{[10,11], [6,1], [1,1]\}$$

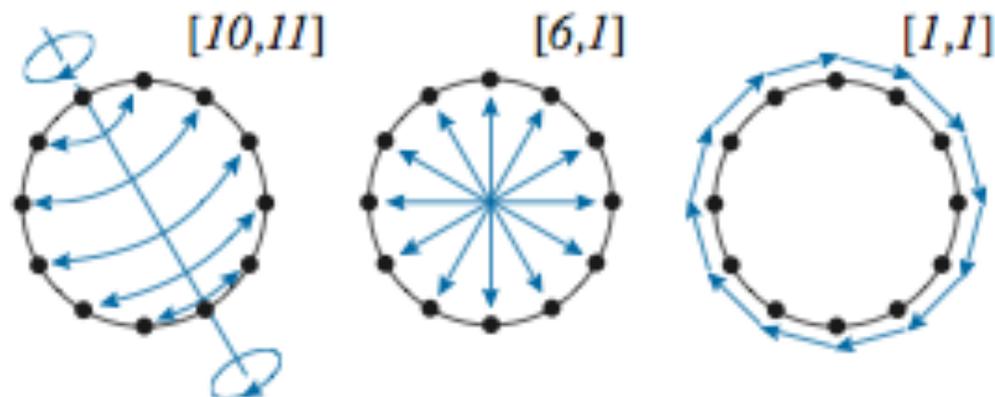


Figure 7.2: Above, a zero-addressed 12-tempered class 3-chord, below a self-addressed 12-tempered class 3-chord [ToM, p. 111].

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_{12}$$

$$f_{ij}^t \in \mathbf{Z}_i @ \mathbf{Z}_j$$

$\text{lim}(\mathbf{D}) =$  family of strongly-isographic networks

**Z**

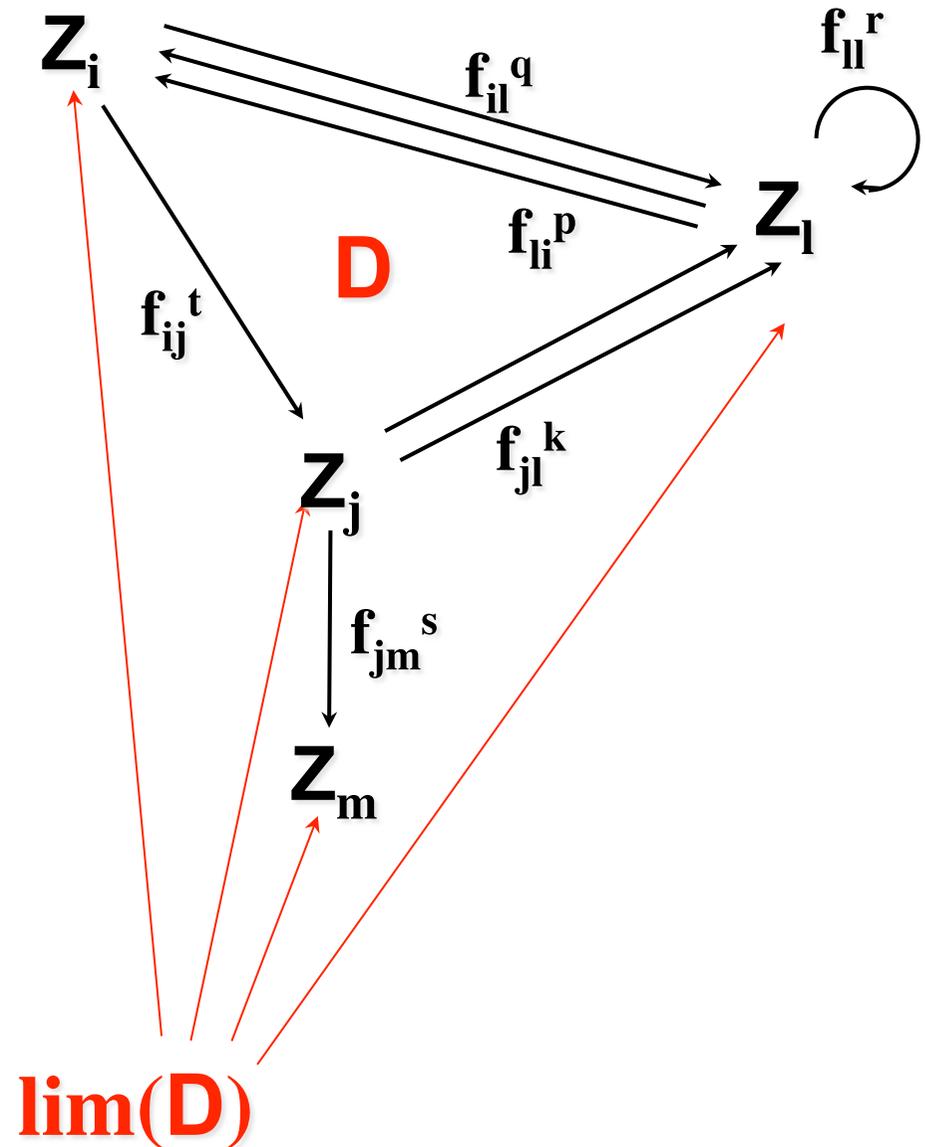
**Fact:**

$$\text{lim}(\mathbf{D}) \approx \mathbf{U}$$

$\mathbf{U} =$  (empty or) subgroup of  $(\mathbf{Z}_{12})^n$

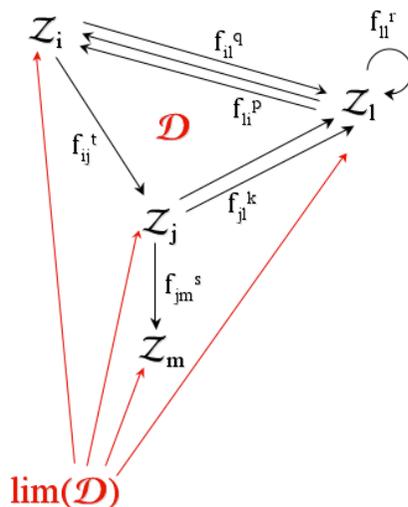
If  $f_{**}^* =$  isomorphisms  
 $\text{card}(\mathbf{U})$  (= 0 or) divides 12

G. Mazzola & M. Andreatta: From a Categorical Point of View: K-nets as Limit Denotators, *PNM*, 2006



$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_{12}$$

$$\mathbf{f}_{ij}^t \in \mathbf{Z}_i @ \mathbf{Z}_j$$

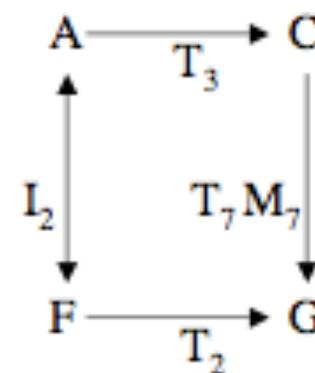
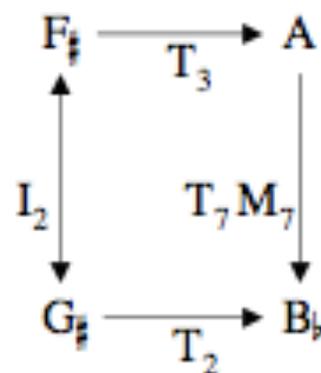
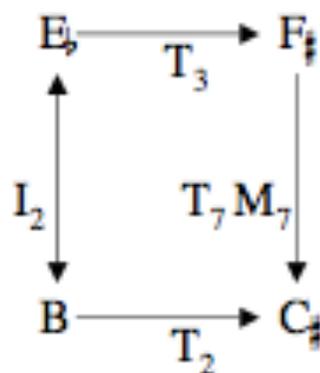
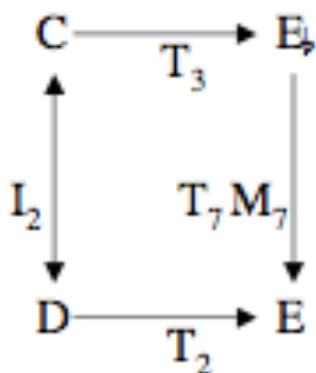


**Fact:**  
 $\lim(\mathcal{D}) \approx U$



$U =$  (empty or)  
 subgroup of  $(\mathbf{Z}_{12})^n$

If  $f_{**}^* =$  isomorphisms  
 card  $(U)$  (= 0 or)  
 divides 12



EXAMPLE 6: THE FOUR SOLUTIONS (STRONGLY ISOGRAPHIC K-NETS) OF THIS DIAGRAM ILLUSTRATE THAT THE CARDINALITY OF THE SOLUTION SET IS A DIVISOR OF 12. HERE, THE OPERATOR  $M_7$  DENOTES THE MULTIPLICATION BY 7

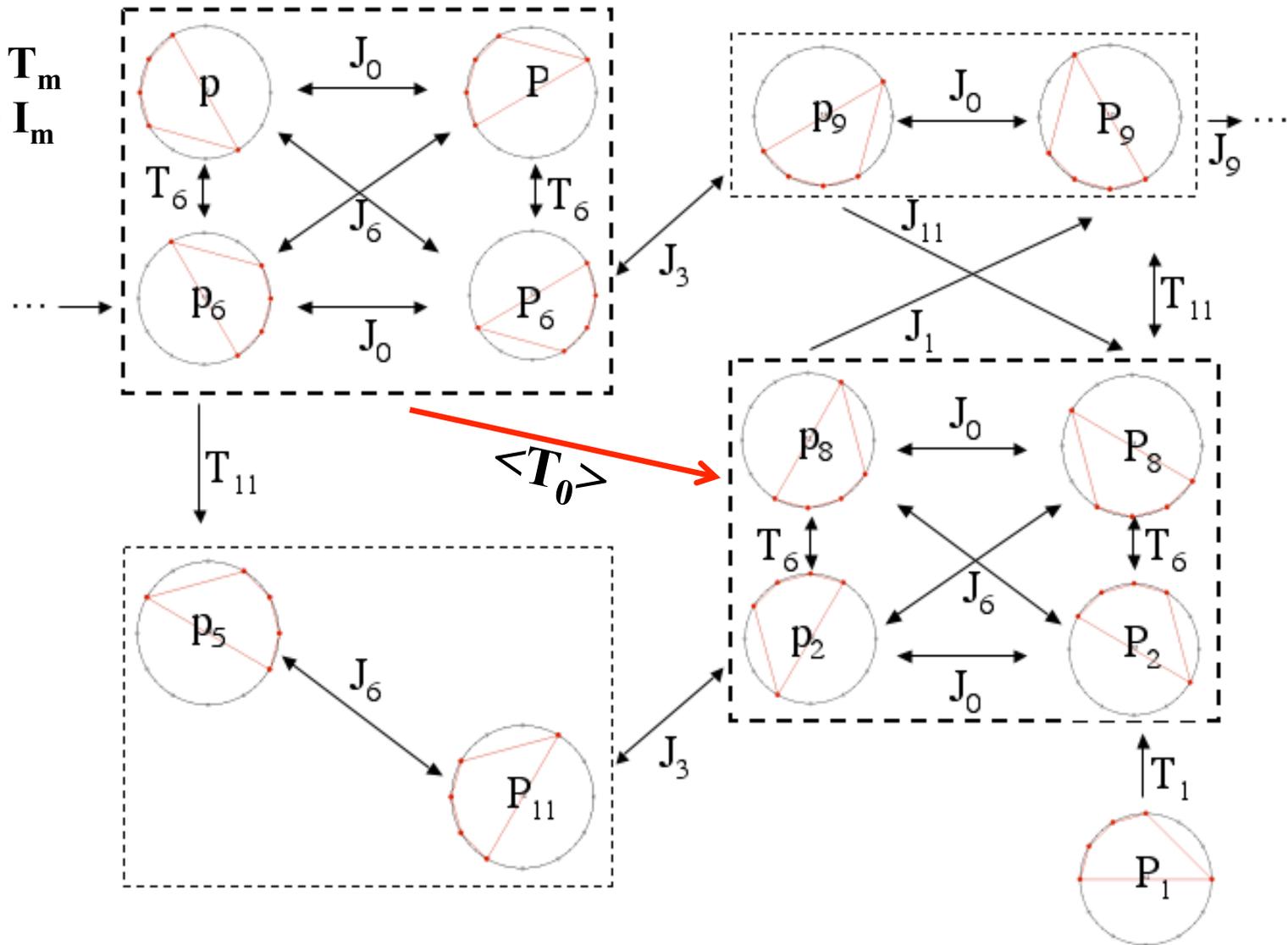
# Réseau transformationnel et « isographies » (théorie des *K-nets*)

Stockhausen: *Klavierstück III* (Analyse de D. Lewin)

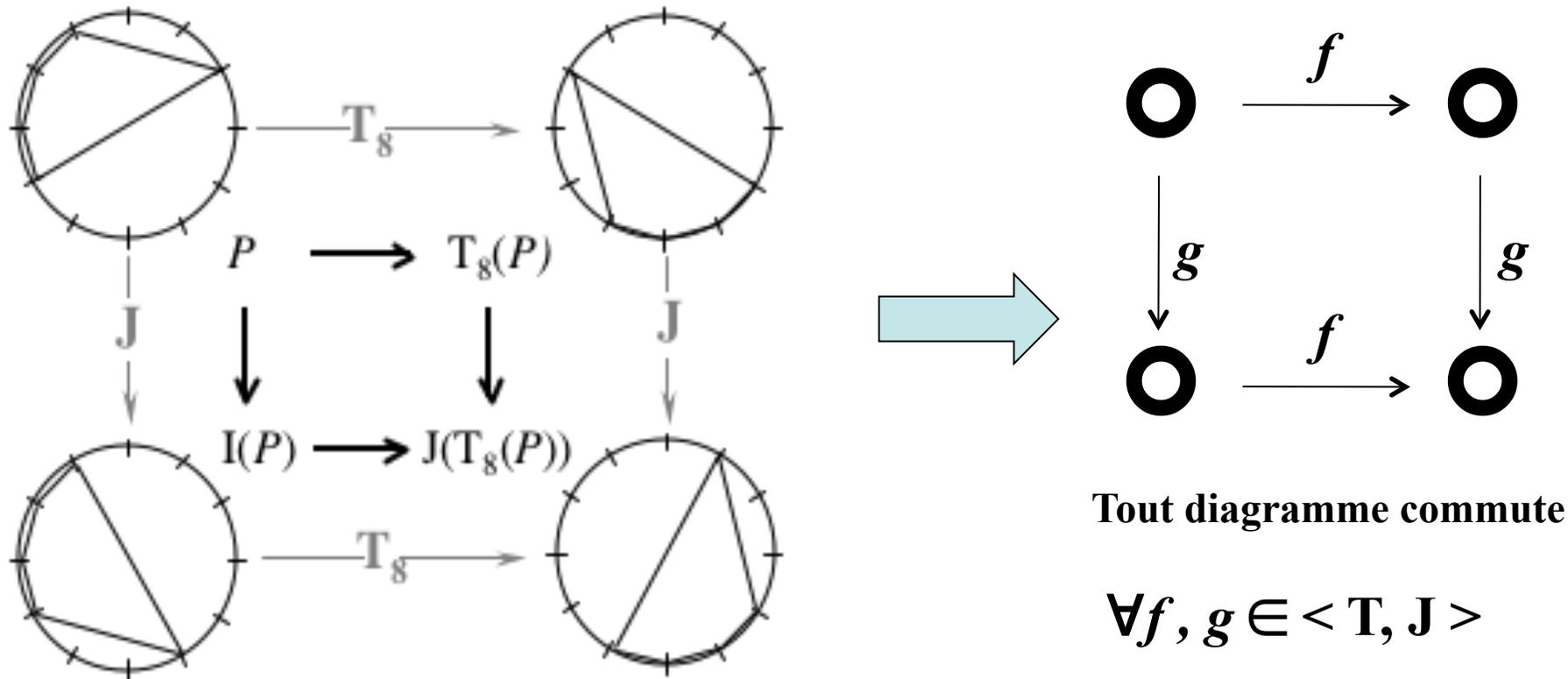
## Isographie forte

$$\langle T_0 \rangle : T_m \rightarrow T_m$$

$$I_m \rightarrow I_m$$



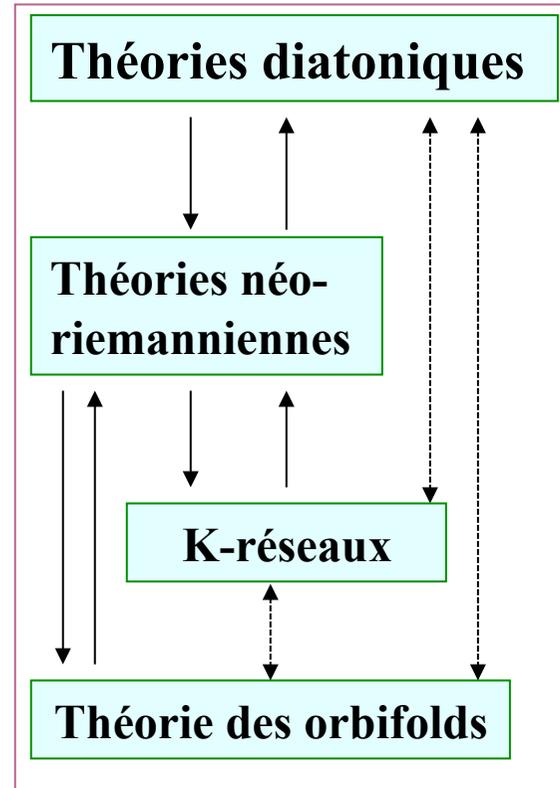
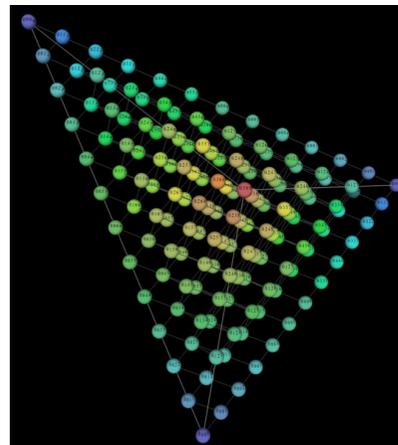
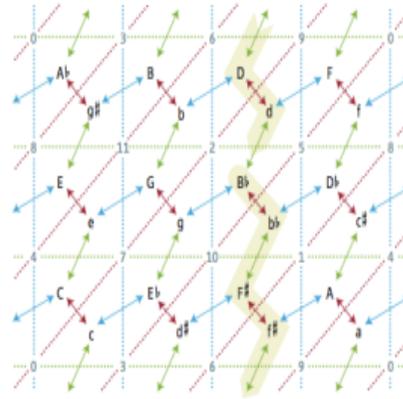
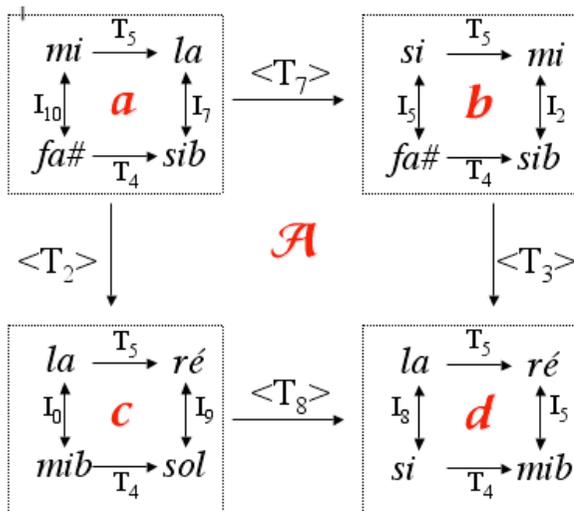
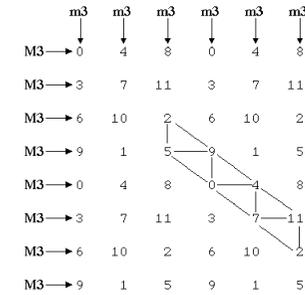
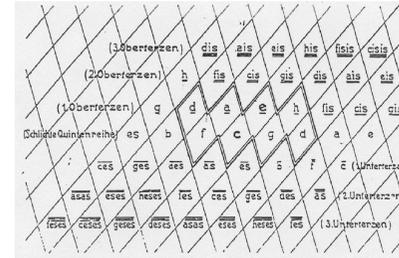
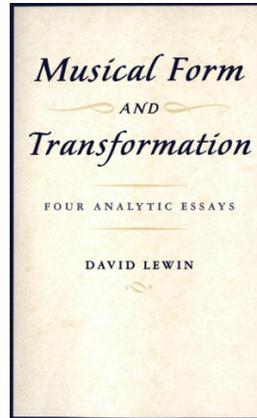
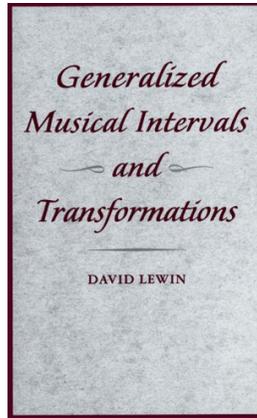
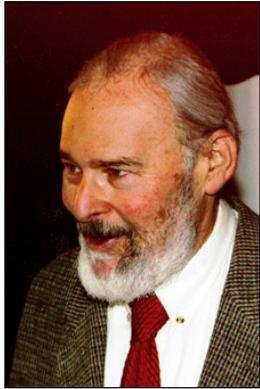
# Action de groupe et commutativité des diagrammes

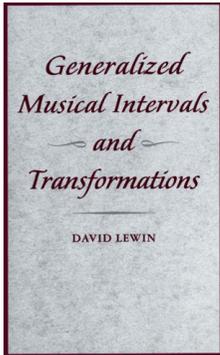


Le groupe des 24 transformations  $\sigma = \{T_0, T_1, \dots, T_{11}, T_0J, T_1J, \dots, T_{11}J\}$  est commutatif et opère de manière simplement transitive sur l'espace  $S$  des 24 formes du pentacorde de base (i.e. l'ensemble de ses 12 transpositions et de ses 12 inversions)

$\Rightarrow (S, \sigma, \text{int})$  est un GIS

# Approches transformationnelles en théorie et analyse musicales





# Système d'Intervalles Généralisés - Système Généralisé d'Intervalles

## David Lewin's *Generalized Interval System* [GMIT, 1987]

$$\text{GIS} = (S, G, \text{int})$$

$S$  = ensemble

$(G, \bullet)$  = groupe d'intervalles

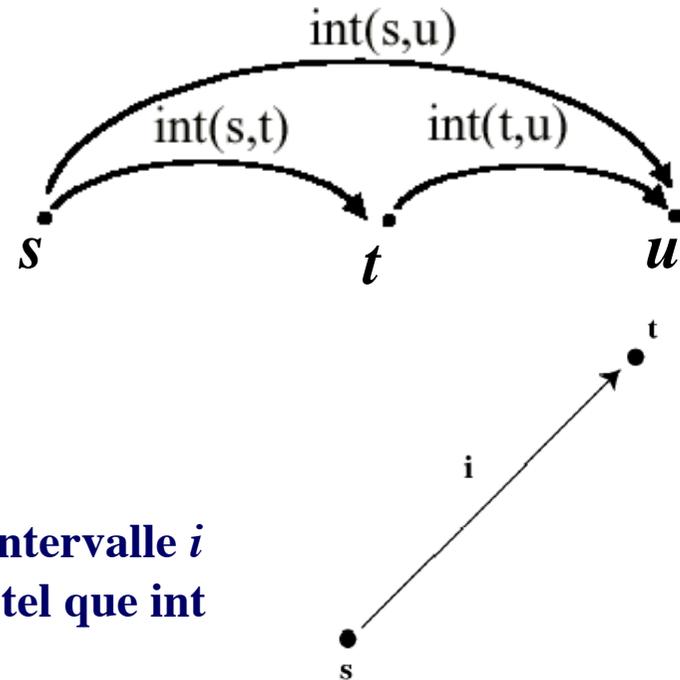
int = fonction intervallique

$$S \times S \xrightarrow{\text{int}} G$$

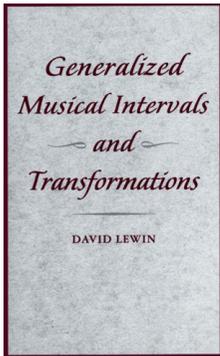
1. Pour tout objets  $s, t, u$  dans  $S$  :

$$\text{int}(s,t) \bullet \text{int}(t,u) = \text{int}(s,u)$$

2. Pour tout objet  $s$  dans  $S$  et tout intervalle  $i$  dans  $G$  il y a un seul objet  $t$  dans  $S$  tel que  $\text{int}(s,t) = i$



- $S = \{\dots, do, do_{\#} = ré_b, ré, \dots, si, do', \dots\}$ ,  $G = \mathbf{Z}$ ,  $\text{int}(do, ré) = 2$ ,  $\text{int}(fa, do) = -5$  etc.
- $S = \{\dots, do, ré, mi, fa, sol, la, si, do', \dots\}$ ,  $G = \mathbf{Z}$ ,  $\text{int}(do, ré) = 1$ ,  $\text{int}(fa, do) = -3$  etc.
- $S = G = \mathbf{Z}_{12} = \{do, do_{\#} = ré_b, ré, \dots, si\}$ ,  $\text{int}(do, ré) = 2$ ,  $\text{int}(fa, do) = 7$  etc.



# Premières généralisations : transposition

$$\mathbf{GIS} = (S, G, \text{int})$$

$S$  = ensemble

$(G, \bullet)$  = groupe d'intervalles

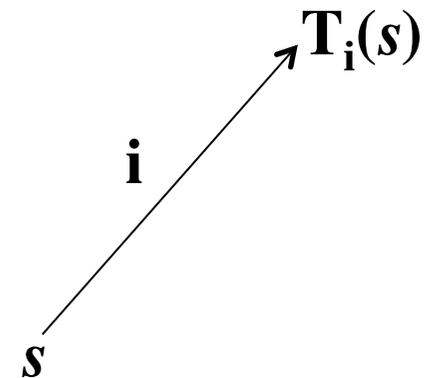
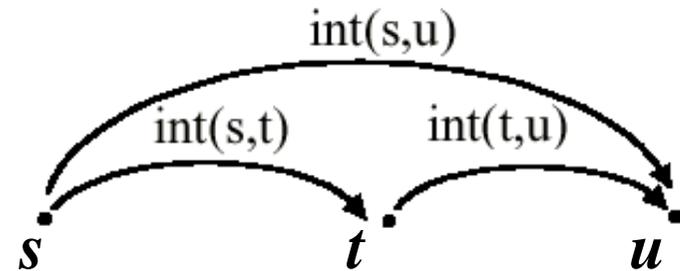
int = fonction intervallique

$$S \times S \xrightarrow{\text{int}} G$$

1. Pour tout objets  $s, t, u$  dans  $S$  :

$$\text{int}(s,t) \bullet \text{int}(t,u) = \text{int}(s,u)$$

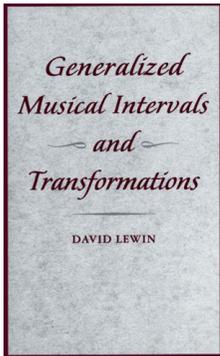
2. Pour tout objet  $s$  dans  $S$  et tout intervalle  $i$  dans  $G$  il y a un seul objet  $t$  dans  $S$  tel que  $\text{int}(s,t) = i$



*Généralisation de la notion de transposition (musicale)*

Pour tout élément  $i$  dans  $G$ , la transposition  $T_i$  est une application

$$T_i : S \rightarrow S \quad \text{telle que} \quad \text{int}(s, T_i(s)) = i \quad \text{pour tout élément } s \text{ dans } S$$



# Premières généralisations : inversion

$$\mathbf{GIS} = (S, G, \text{int})$$

$S$  = ensemble

$(G, \bullet)$  = groupe d'intervalles

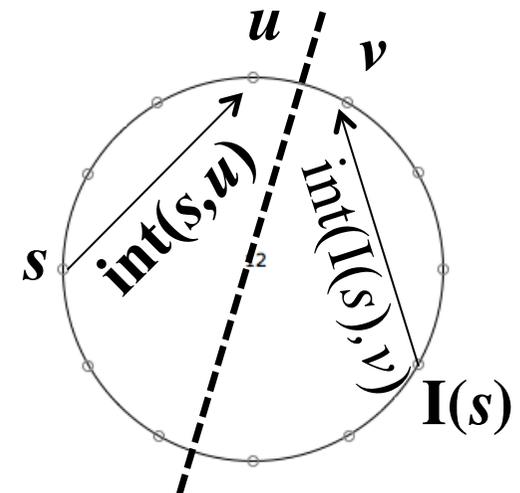
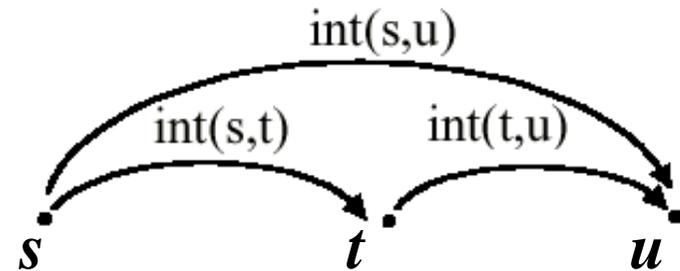
int = fonction intervallique

$$S \times S \xrightarrow{\text{int}} G$$

1. Pour tout objets  $s, t, u$  dans  $S$  :

$$\text{int}(s,t) \bullet \text{int}(t,u) = \text{int}(s,u)$$

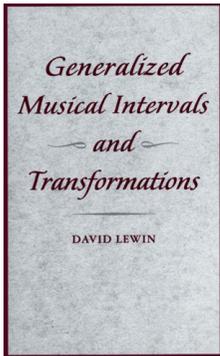
2. Pour tout objet  $s$  dans  $S$  et tout intervalle  $i$  dans  $G$  il y a un seul objet  $t$  dans  $S$  tel que  $\text{int}(s,t) = i$



*Généralisation de la notion d'inversion (par rapport à  $u$  et  $v$ )*

Pour tous éléments  $u, v$  dans  $S$ , l'inversion  $I$  est une application

$$I_{u,v} : S \rightarrow S \quad \text{telle que} \quad \text{int}(s, u) = \text{int}(v, I_{u,v}(s))$$



# Premières propriétés intervalliques

$$\text{GIS} = (S, G, \text{int})$$

$S$  = ensemble

$(G, \bullet)$  = groupe d'intervalles

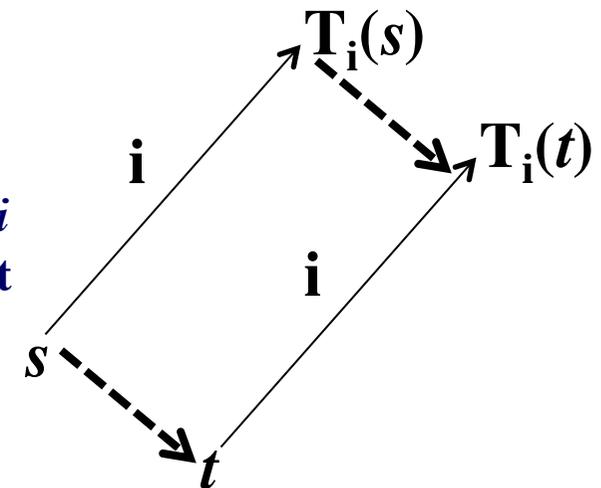
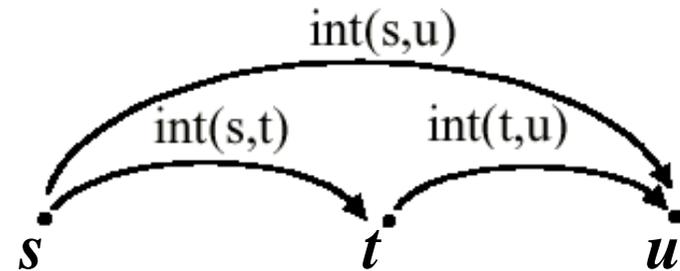
int = fonction intervallique

$$S \times S \xrightarrow{\text{int}} G$$

1. Pour tout objets  $s, t, u$  dans  $S$  :

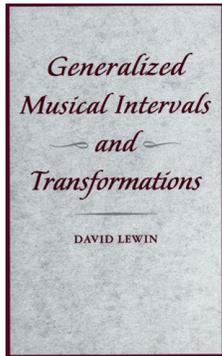
$$\text{int}(s,t) \bullet \text{int}(t,u) = \text{int}(s,u)$$

2. Pour tout objet  $s$  dans  $S$  et tout intervalle  $i$  dans  $G$  il y a un seul objet  $t$  dans  $S$  tel que  $\text{int}(s,t) = i$



Dans un GIS commutatif, la transposition préserve les rapports intervalliques

$$\text{int}(s, t) = \text{int}(T_i(s), T_i(t))$$



# Premières propriétés d'un GIS non commutatif

$$\text{GIS} = (S, G, \text{int})$$

$S$  = ensemble

$(G, \bullet)$  = groupe non commutatif

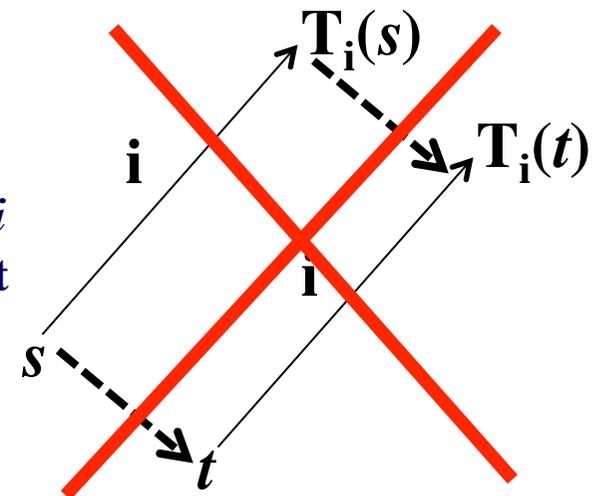
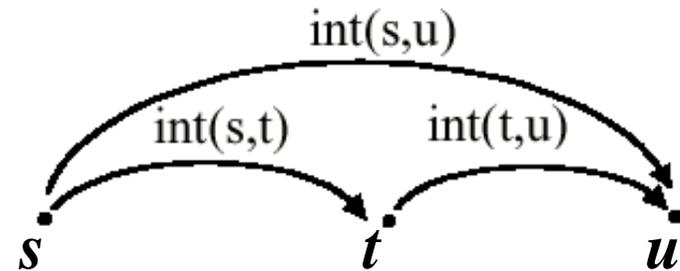
int = fonction intervallique

$$S \times S \xrightarrow{\text{int}} G$$

1. Pour tout objets  $s, t, u$  dans  $S$  :

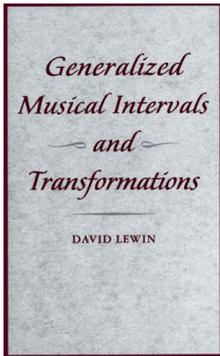
$$\text{int}(s,t) \bullet \text{int}(t,u) = \text{int}(s,u)$$

2. Pour tout objet  $s$  dans  $S$  et tout intervalle  $i$  dans  $G$  il y a un seul objet  $t$  dans  $S$  tel que  $\text{int}(s,t) = i$



*Il a des transpositions qui ne préservent pas les intervalles et il y a des transformations qui préservent les intervalles et qui ne sont pas des transpositions [GMIT, p. 50]*

*Il n'y a pas de transformations qui reversent les intervalles [GMIT, p. 59]*



# Equivalence entre GIS et action de groupe

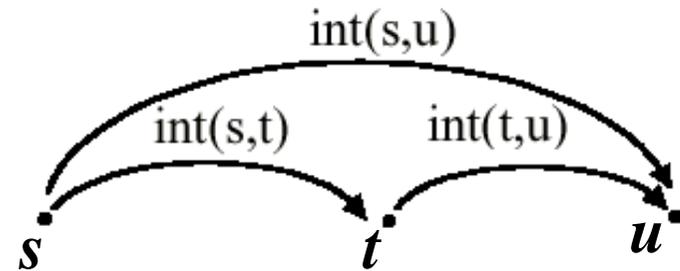
$$\text{GIS} = (S, G, \text{int})$$

$S$  = ensemble

$(G, \bullet)$  = groupe d'intervalles

int = fonction intervallique

$$S \times S \xrightarrow{\text{int}} G$$

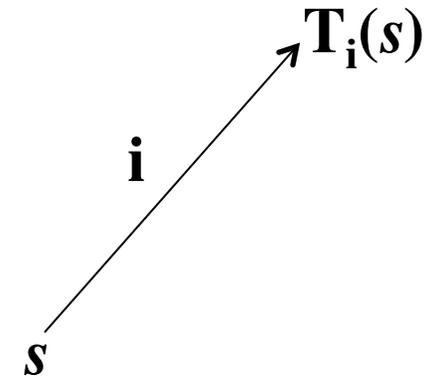


Action  
simplement  
transitive

1. Pour tout objets  $s, t, u$  dans  $S$  :

$$\text{int}(s,t) \bullet \text{int}(t,u) = \text{int}(s,u)$$

2. Pour tout objet  $s$  dans  $S$  et tout intervalle  $i$  dans  $G$  il y a un seul objet  $t$  dans  $S$  tel que  $\text{int}(s,t) = i$



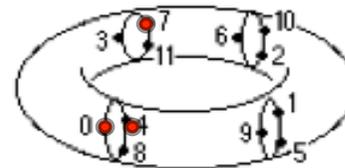
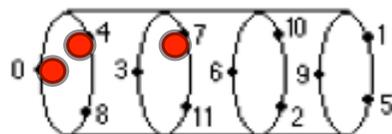
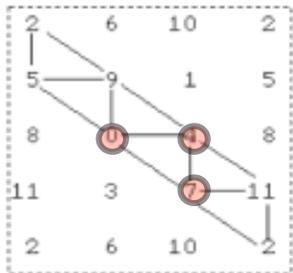
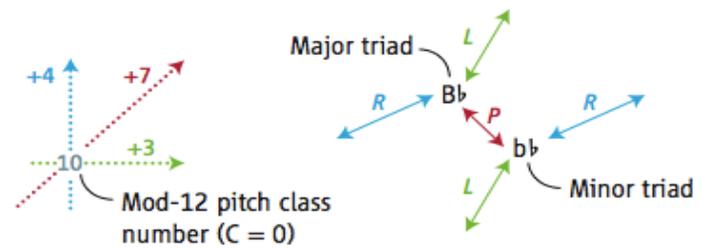
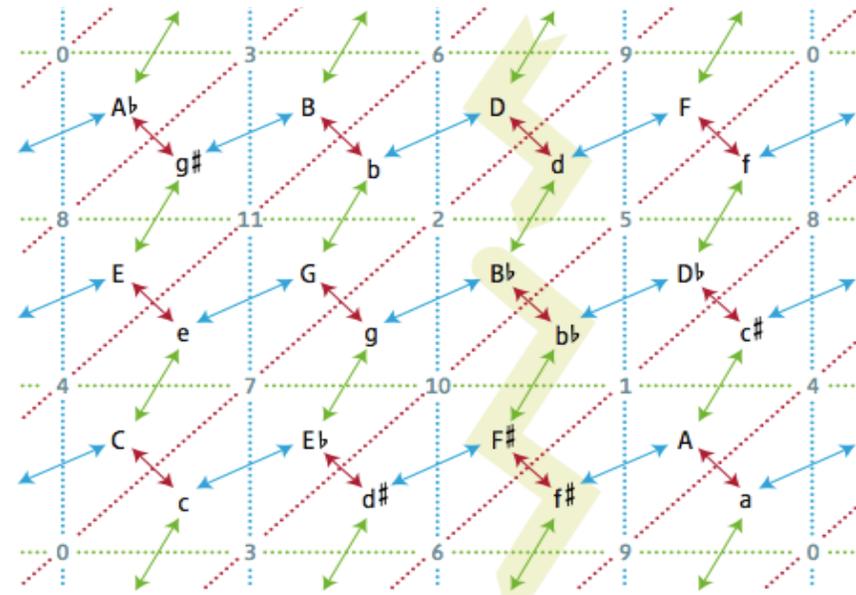
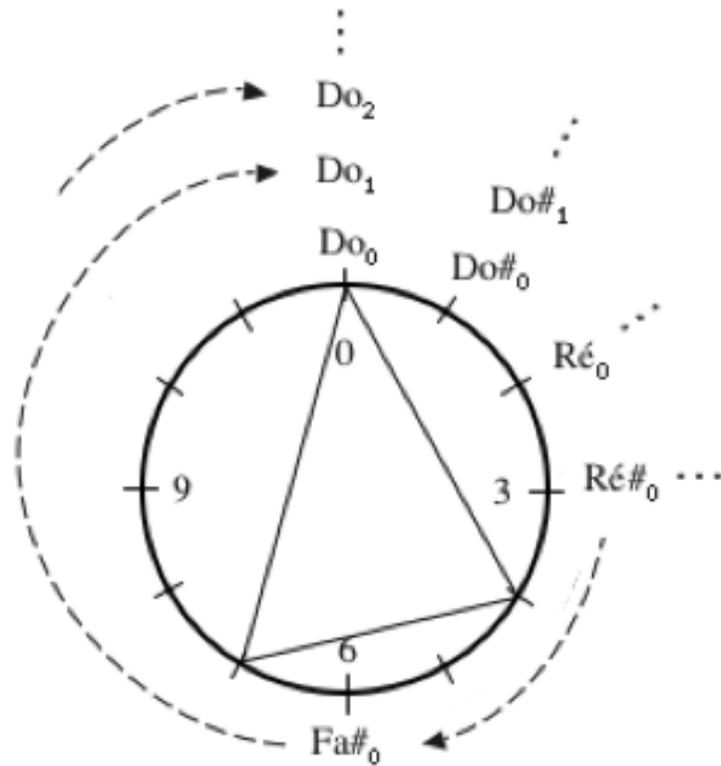
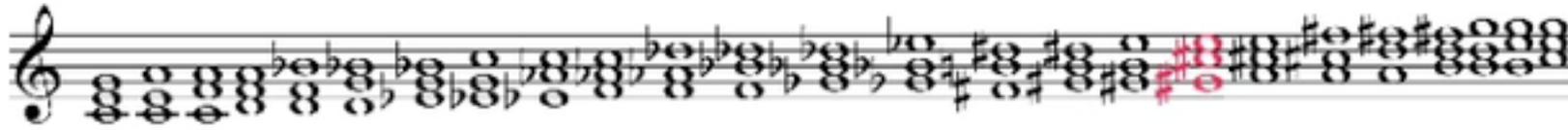
Soit  $\tau = \{T_i ; i \in G\}$  le groupe des transpositions

$$\text{GIS} = (S, G, \text{int}) \Leftrightarrow \tau \times S \rightarrow S \text{ telle que } (T_i, s) \rightarrow T_i(s)$$

Terminologies équivalentes :

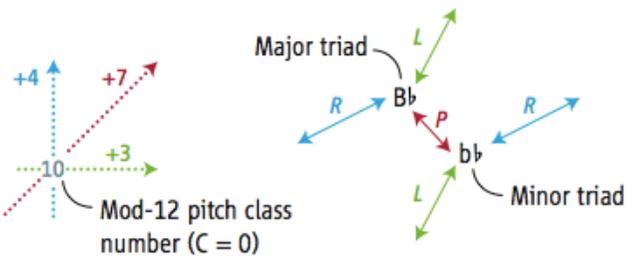
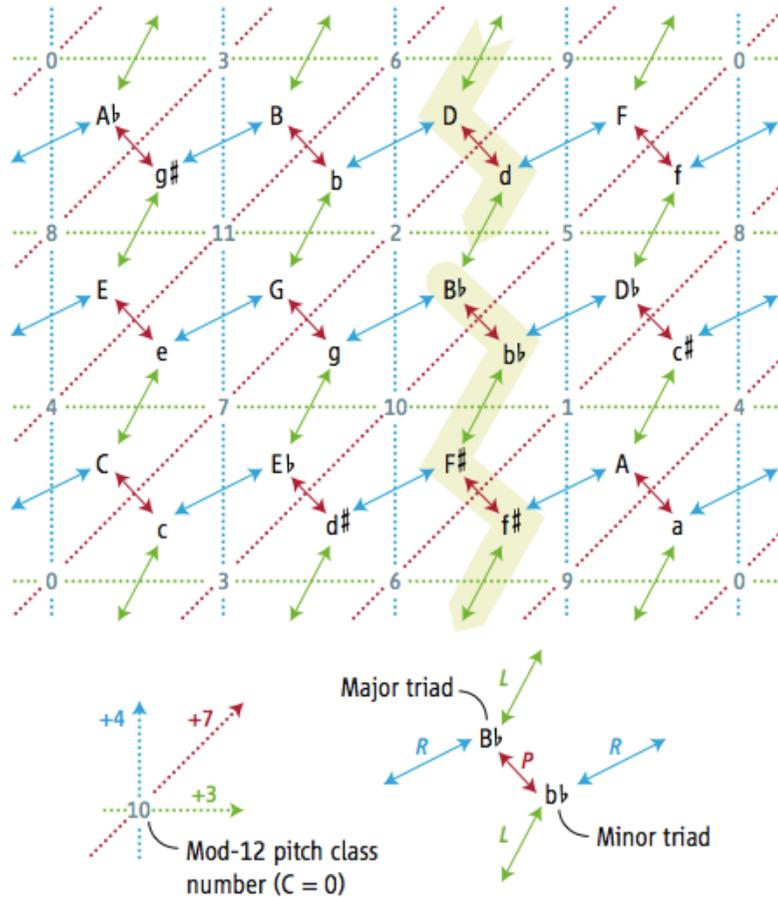
- Un GIS est un  $G$ -torseur à gauche
- $S$  est un ensemble principal homogène [Bourbaki]

# Le Tonnetz d'Oettingen/Riemann



[J. Hook 06]

# Le Tonnetz en tant que GIS



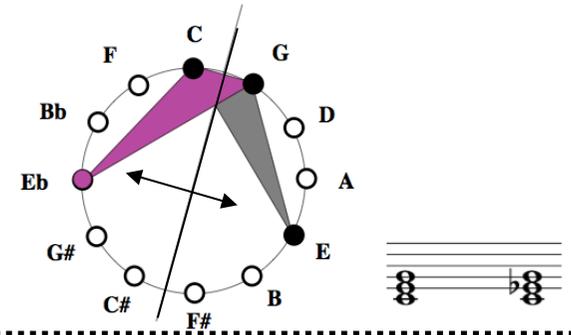
$$\rho = \langle L, R \mid L^2 = (LR)^{12} = 1 ; LRL = L(LR)^{-1} \rangle$$

•  $\rho$  opère de façon simplement transitive sur l'ensemble  $S$  des 24 triades consonantes

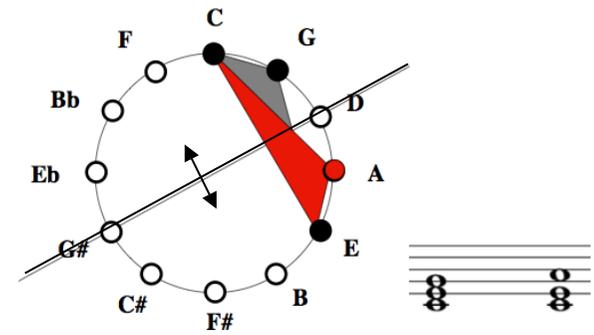
$\Rightarrow (S, \rho, \text{int})$  est un GIS

(Neo-)Riemannian Operation P = „Parallel“

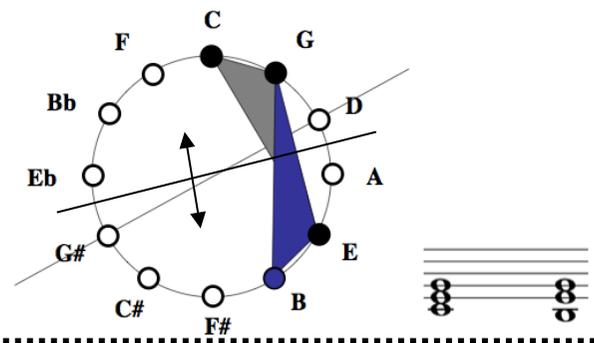
[Noll04]



(Neo-)Riemannian Operation R = „Relative“



(Neo-)Riemannian Operation L = „Leading-Tone“



# Une autre structure de GIS sur l'espace $S$

L	R	RL	$I_{11}$
C → e	C → a	C → G	C → e
c → A $\flat$	c → E $\flat$	c → f	c → E
D $\flat$ → f	D $\flat$ → B $\flat$	D $\flat$ → A $\flat$	D $\flat$ → e $\flat$
c $\sharp$ → A	c $\sharp$ → E	c $\sharp$ → f $\sharp$	c $\sharp$ → E $\flat$
D → f $\sharp$	D → b	D → A	D → d
d → B $\flat$	d → F	d → g	d → D
E $\flat$ → g	E $\flat$ → c	E $\flat$ → B $\flat$	E $\flat$ → c $\sharp$
d $\sharp$ → B	d $\sharp$ → F $\sharp$	d $\sharp$ → g $\sharp$	d $\sharp$ → C $\sharp$
E → g $\sharp$	E → c $\sharp$	E → B	E → c
e → C	e → G	e → a	e → C
F → a	F → d	F → C	F → b
f → D $\flat$	f → A $\flat$	f → B $\flat$	f → B
F $\sharp$ → a $\sharp$	F $\sharp$ → d $\sharp$	F $\sharp$ → C $\sharp$	F $\sharp$ → B $\flat$
f $\sharp$ → D	f $\sharp$ → A	f $\sharp$ → b	f $\sharp$ → B $\flat$
G → b	G → e	G → D	G → a
g → E $\flat$	g → B $\flat$	g → c	g → A
A $\flat$ → c	A $\flat$ → f	A $\flat$ → E $\flat$	A $\flat$ → a $\flat$
g $\sharp$ → E	g $\sharp$ → B	g $\sharp$ → c $\sharp$	g $\sharp$ → G $\sharp$
A → c $\sharp$	A → f $\sharp$	A → E	A → g
a → F	a → C	a → d	a → G
B $\flat$ → d	B $\flat$ → g	B $\flat$ → F	B $\flat$ → f $\sharp$
a $\sharp$ → F $\sharp$	a $\sharp$ → C $\sharp$	a $\sharp$ → d $\sharp$	a $\sharp$ → F $\sharp$
B → e $\flat$	B → g $\sharp$	B → F $\sharp$	B → f
b → G	b → D	b → e	b → F

[Satyendra 2004]

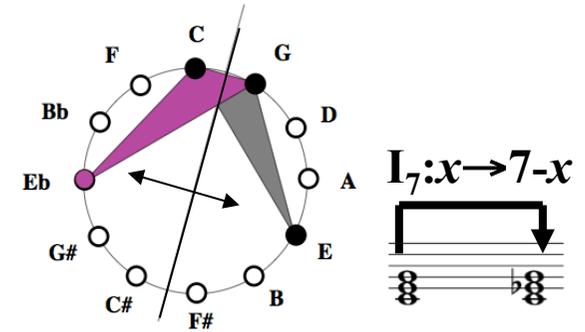
$$D_{12} = \langle I, T \mid I^2 = T^{12} = 1 ; ITI = I(IT)^{-1} \rangle$$

- $D_{12}$  opère de façon simplement transitive sur l'ensemble  $S$  des 24 triades consonantes

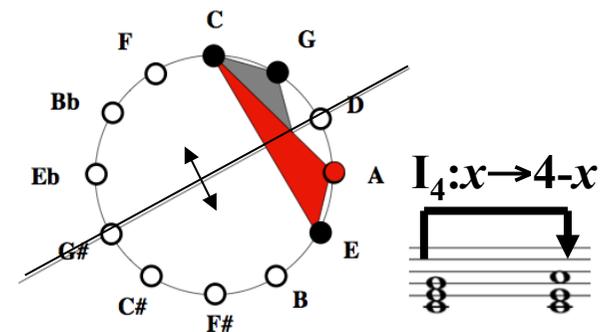
$\Rightarrow (S, D_{12}, \text{int})$  est un GIS

(Neo-)Riemannian Operation P = „Parallel“

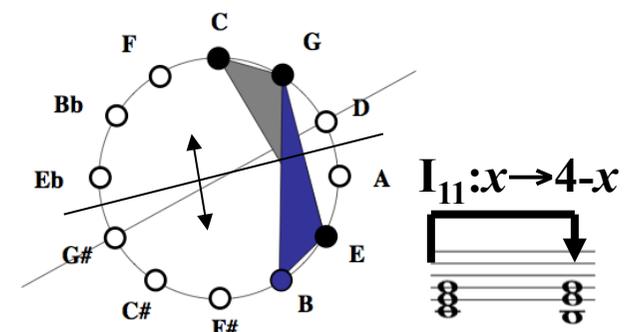
[Noll04]



(Neo-)Riemannian Operation R = „Relative“



(Neo-)Riemannian Operation L = „Leading-Tone“



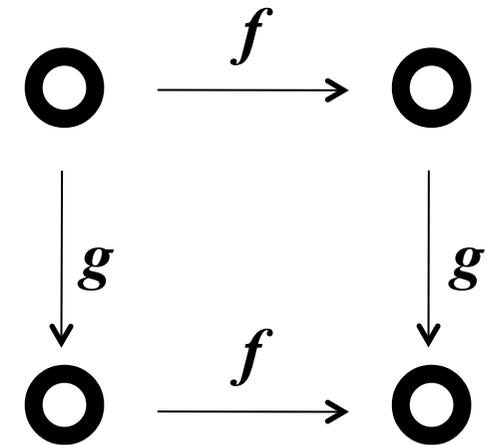
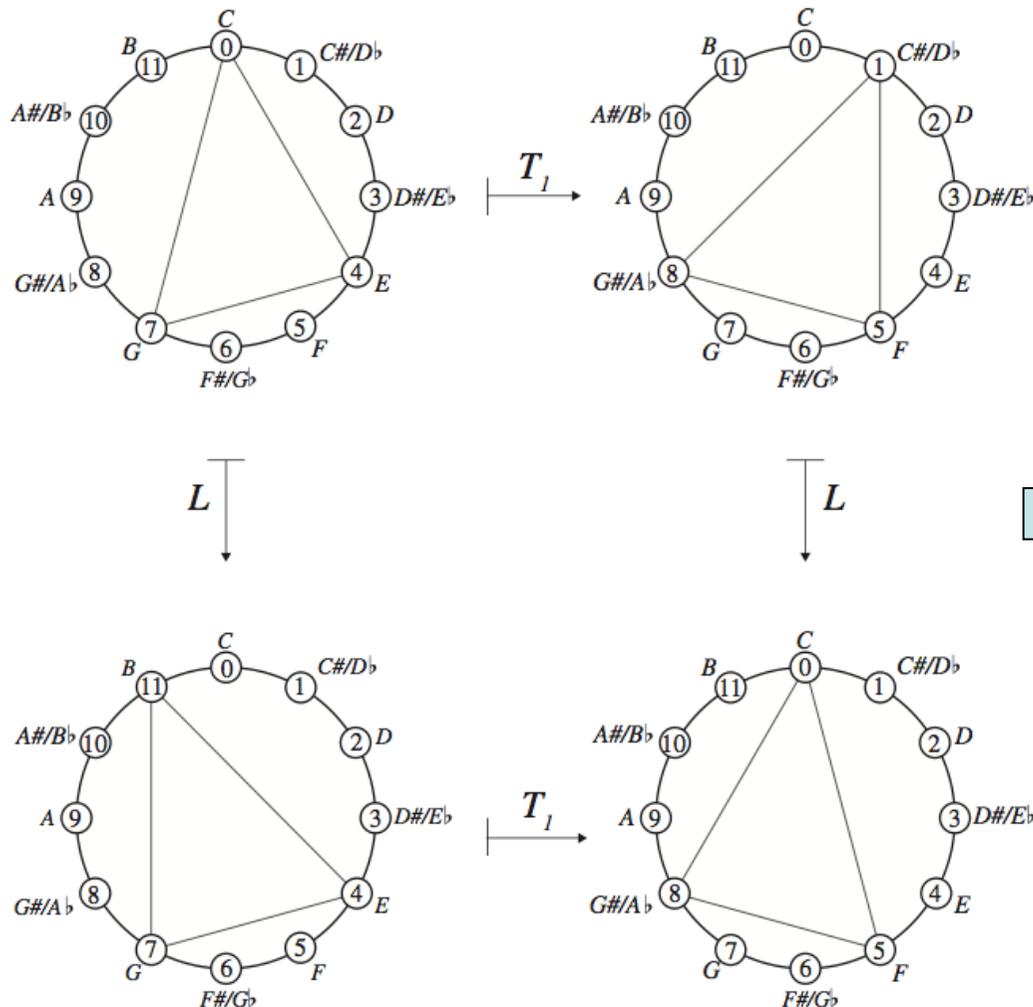
# Dualité entre $(S, \rho, \text{int})$ et $(S, D_{12}, \text{int})$

$$\rho = \langle L, R \mid L^2 = (LR)^{12} = 1 ; LRL = L(LR)^{-1} \rangle$$

$\Leftrightarrow$

$$D_{12} = \langle I, T \mid I^2 = T^{12} = 1 ; ITI = I(IT)^{-1} \rangle$$

$\Rightarrow \rho$  et  $D_{12}$  sont l'un le *centralisateur* de l'autre (dans le groupe symétrique  $\text{Sym}(S)$ )



Tout diagramme commute

$$\forall f \in D_{12}$$

$$\forall g \in \rho$$

# Fonction Intervallique IFUNC dans un GIS

$\text{GIS} = (S, G, \text{int})$

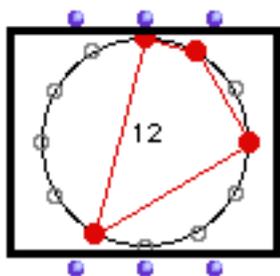
$S$  ensemble

$H$  et  $H'$  dans  $S$

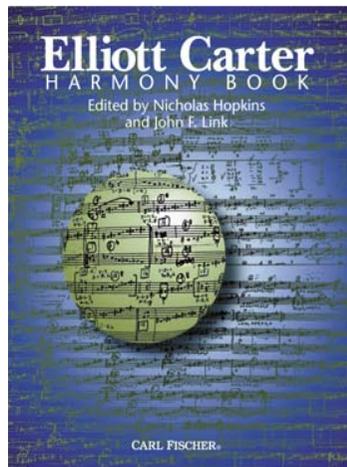
$$\text{IFUNC}(H, H')(i) = \#\{(a, b) \in H \times H' \mid \text{int}(a, b) = i\}$$

$$\text{IFUNC}(H, H')(2) = 4$$

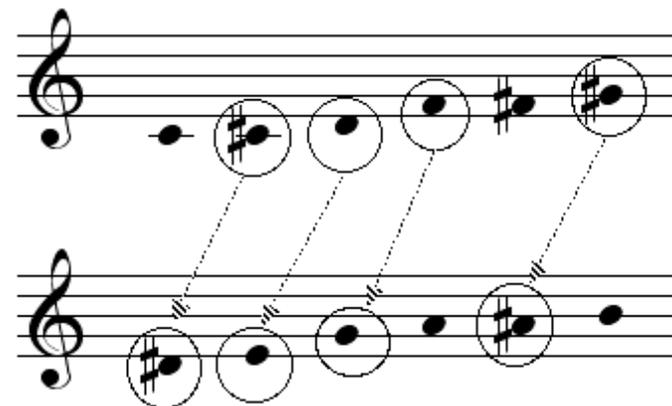
23



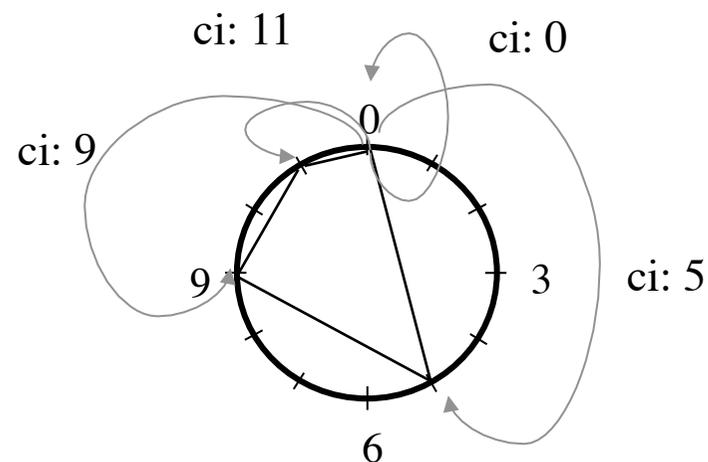
$$VI = [111111]$$



$$H = \{0, 1, 2, 5, 6, 8\}$$

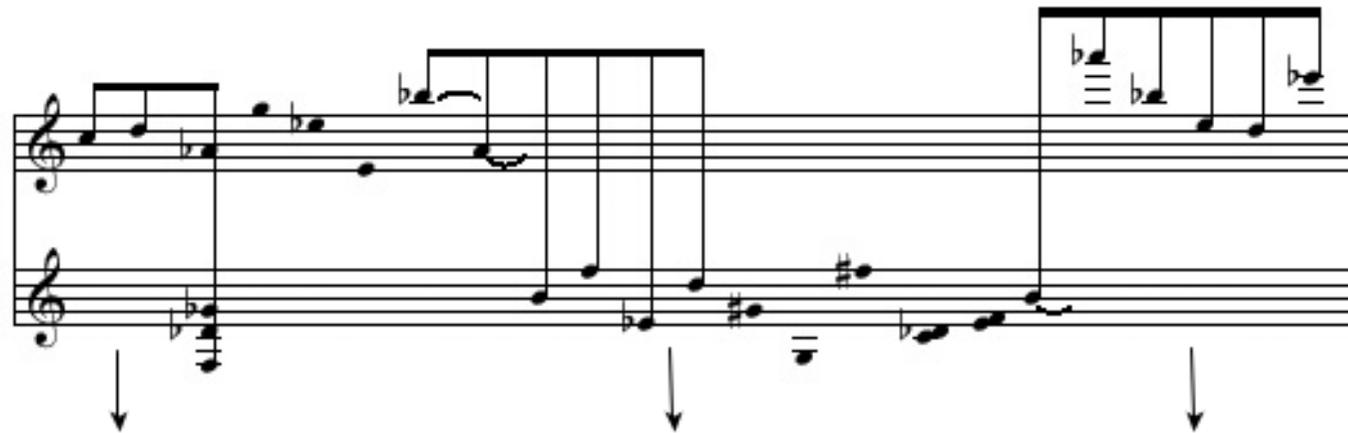


$$H' = \{3, 4, 7, 9, 10, 11\}$$

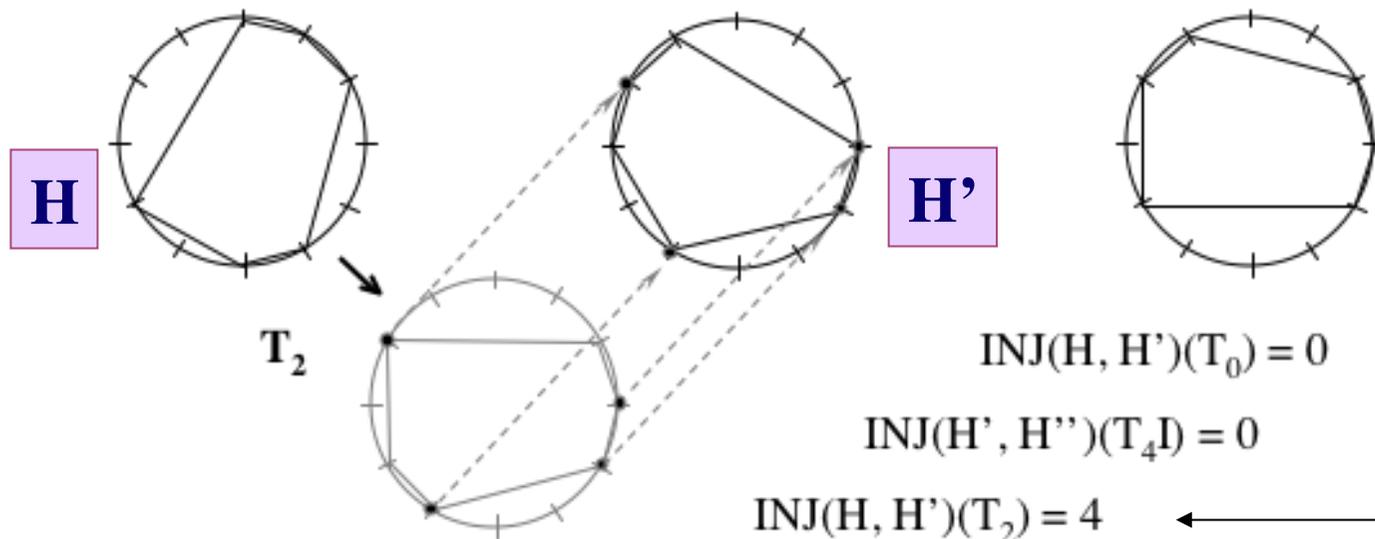


$$A = \{0, 5, 9, 11\} \Rightarrow IC_A(k) = 1 \forall k$$

# Fonction d'Injection comme généralisation de relation d'inclusion



$$H = \{0, 1, 2, 5, 6, 8\} \quad H' = \{3, 4, 7, 9, 10, 11\} \quad H'' = T_4 I(H) = \{2, 3, 4, 8, 10, 11\}$$

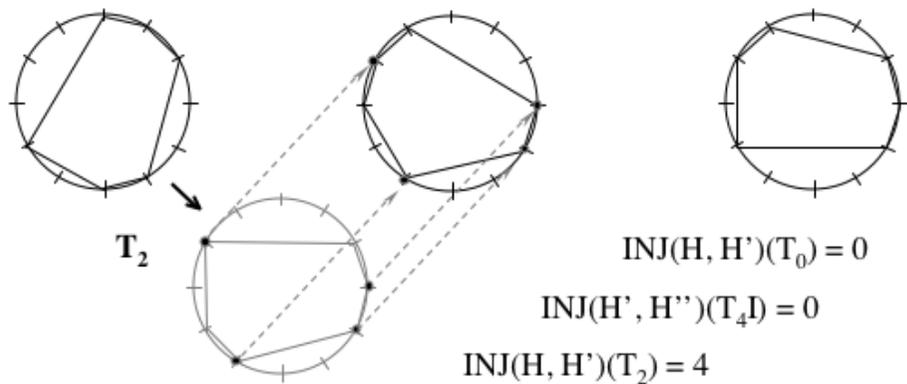


$$\text{INJ}(H, H')(T_i) = \#\{a \in H \mid T_i(a) \in H'\}$$

$i=2$

# Fonction d'Injection (INJ) et fonction intervallaire (IFUNC)

$H = \{0, 1, 2, 5, 6, 8\}$      $H' = \{3, 4, 7, 9, 10, 11\}$      $H'' = T_4 I(H) = \{2, 3, 4, 8, 10, 11\}$



$INJ(H, H')(T_i) =$   
 nombre d'éléments  $a$   
 de  $H$  tels que  $T_i(a) \in H'$

||

**H**

**H'**

$IFUNC(H, H')(i) =$   
 nombre d'éléments  
 $(a, b)$  dans  $H \times H'$  tels  
 que  $int(a, b) = i$

« *Here the basic hierarchical scope of the (twelve-tone) system is contained essentially in the simple theorem that:*

**Given a collection of pitches (pitch classes), the multiplicity of occurrence of any interval (...) determines the number of common pitches between the original collection and the transposition by the interval »**

*(Milton Babbitt, Past and Present Concepts, 1961)*

« *...on peut remplacer entièrement le concept d'intervalle dans un GIS avec le concept de transposition dans un espace »*

**« ...on peut remplacer le concept même de GIS avec l'idée d'un espace S sur lequel on a un groupe d'opérations qui opère »**

*(David Lewin, Generalized Musical Intervals and Transformations, 1987)*

**Babbitt**

↕  $GIS = Z_{12}$

↕  $GIS$

**Lewin**

$$\mathbf{INJ}(A, B)(T_i) = \mathbf{IFUNC}(A, B)(i)$$

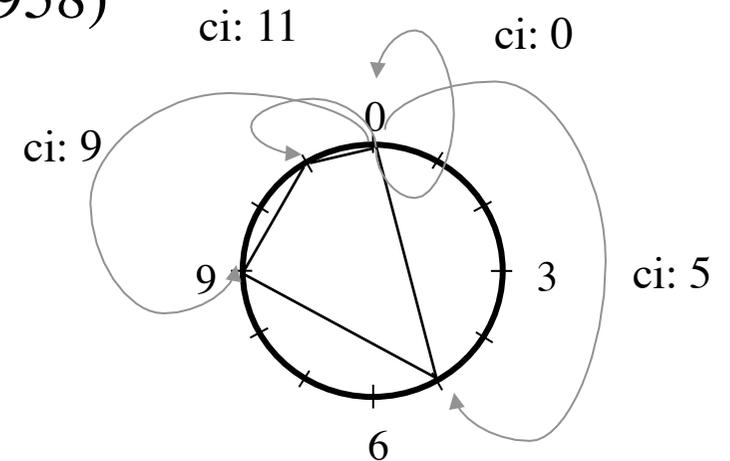
# Approche transformationnelle et théorie de l'homométrie

$$\text{INJ}(A, B)(T_k) = \text{IFUNC}(A, B)(k)$$

- Dans le cas du GIS  $Z_{12}$  si  $A = B$  on obtient la définition de “contenu intervallique” d'un accord
- Le contenu intervallique est équivalent à un produit de convolution de fonctions caractéristiques (Lewin, *JMT*, 1958)

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

Diagram illustrating musical sets B and C on a staff and their corresponding chromatic circle diagrams. Set B is represented by the interval set  $(0, 1, 4, 6)$  and Set C by  $(0, 1, 3, 7)$ . The chromatic circle diagrams show the 12 notes of the circle with red dots indicating the members of sets B and C.



$$A = \{0, 5, 9, 11\} \Rightarrow IC_A(k) = 1 \forall k$$

$$B = \{0, 1, 4, 6\}$$

$$C = \{0, 1, 3, 7\}$$

$$\Rightarrow IC_B(k) = IC_C(k) = IC_A(k) = 1 \forall k$$

# Approche transformationnelle et théorie de l'homométrie

$$\text{INJ}(A, B)(T_k) = \text{IFUNC}(A, B)(k)$$

- Dans le cas du GIS  $Z_{12}$  si  $A = B$  on obtient la définition de “contenu intervallique” d'un accord
- Le contenu intervallique est équivalent à un produit de convolution de fonctions caractéristiques (Lewin, *JMT*, 1958)

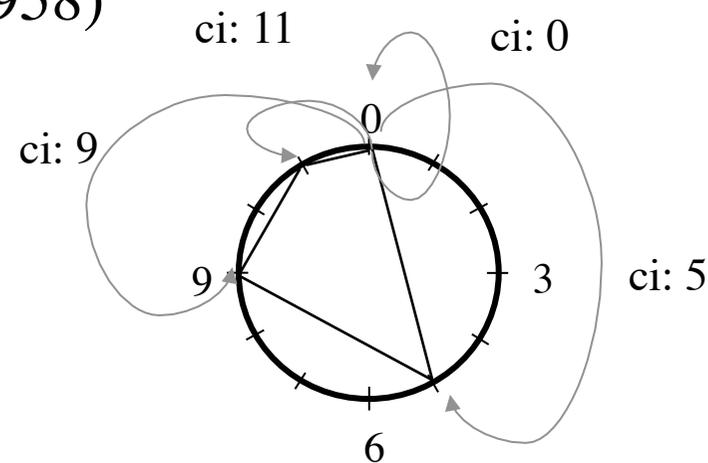
$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

$$1_A \star \tilde{1}_B(k) = \sum_i 1_A(i) \times 1_B(i - k) = \sum_{\substack{i \in A \\ i - k \in B}} 1$$

$$\mathcal{F}(1_A \star \tilde{1}_B) = \mathcal{F}(1_A) \times \mathcal{F}(\tilde{1}_B)$$

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

$$\mathcal{F}(IC_A) = \mathcal{F}_A \times \mathcal{F}_{-A} = |\mathcal{F}_A|^2$$

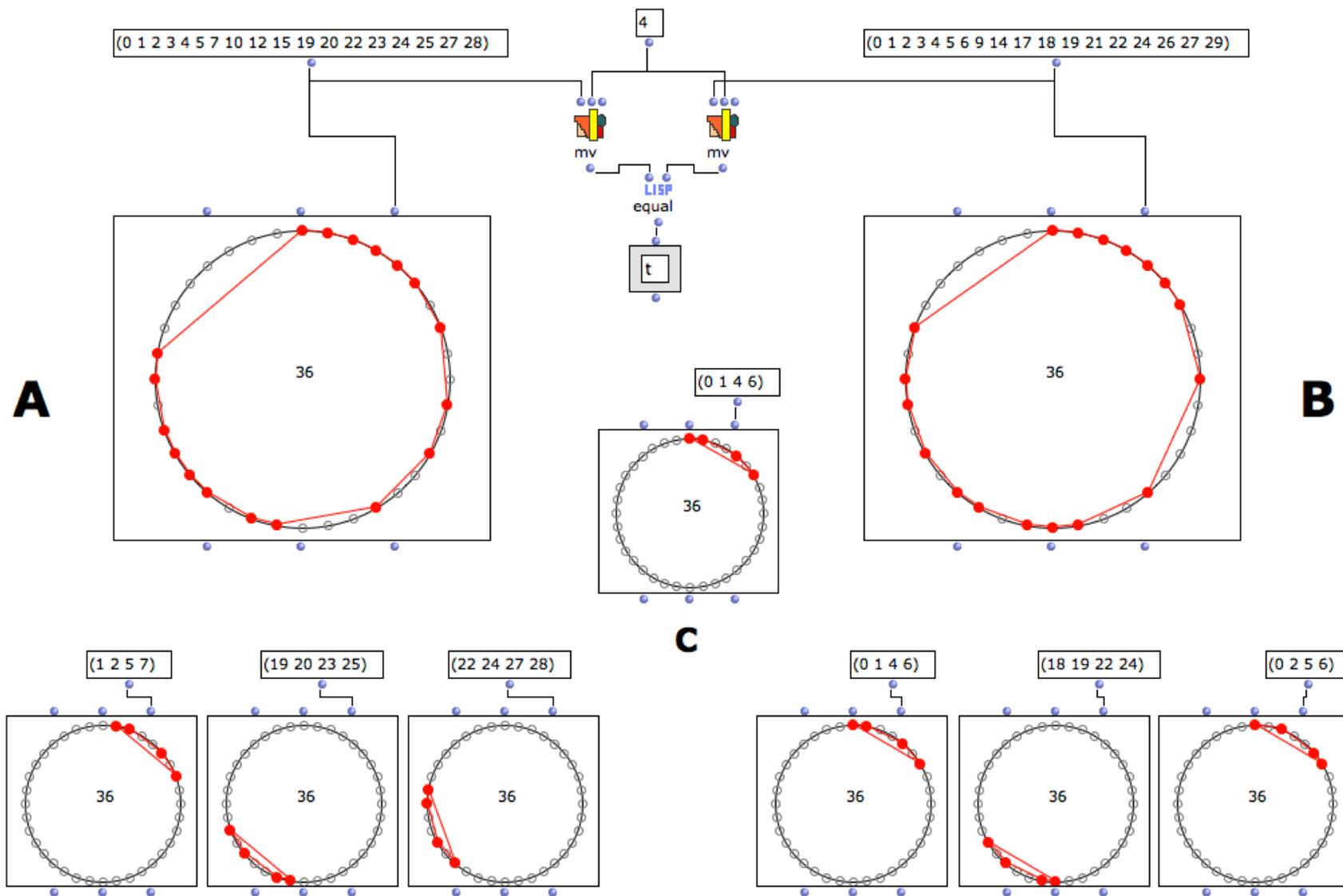


$$A = \{0, 5, 9, 11\} \Rightarrow IC_A(k) = 1 \forall k$$

➔ **Reconstruction de la phase**

Cf. D. Ghisi, J. Mandereau, E. Amiot, C. Agon, M. Andreatta, “Generalized Z-relation and Homometric Theory”, to appear in the *Journal of Mathematics and Music*

# La relation Z généralisée



Cf. D. Ghisi, J. Mandereau, E. Amiot, C. Agon, M. Andreatta, “Generalized Z-relation and Homometric Theory”, to appear in the *Journal of Mathematics and Music*

# Approche transformationnelle et théorème de l'hexacorde

$$\text{INJ}(A, B)(T_k) = \text{IFUNC}(A, B)(k)$$

- Dans le cas du GIS  $\mathbb{Z}_{12}$  si  $A = B$  on obtient la définition de “contenu intervallique” d’un accord
- Le contenu intervallique est équivalent à un produit de convolution de fonctions caractéristiques (Lewin, *JMT*, 1958)

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

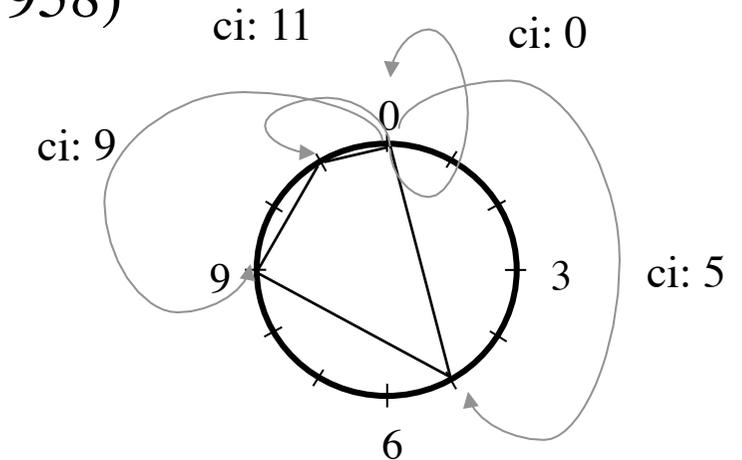
$$1_A \star \tilde{1}_B(k) = \sum_i 1_A(i) \times 1_B(i - k) = \sum_{\substack{i \in A \\ i - k \in B}} 1$$

$$\mathcal{F}(1_A \star \tilde{1}_B) = \mathcal{F}(1_A) \times \mathcal{F}(\tilde{1}_B)$$

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

$$\mathcal{F}(IC_A) = \mathcal{F}_A \times \mathcal{F}_{-A} = |\mathcal{F}_A|^2$$

$$\forall k \mathcal{F}(IC_{\mathbb{Z}_c \setminus A})(k) = \mathcal{F}(IC_A)(k)$$

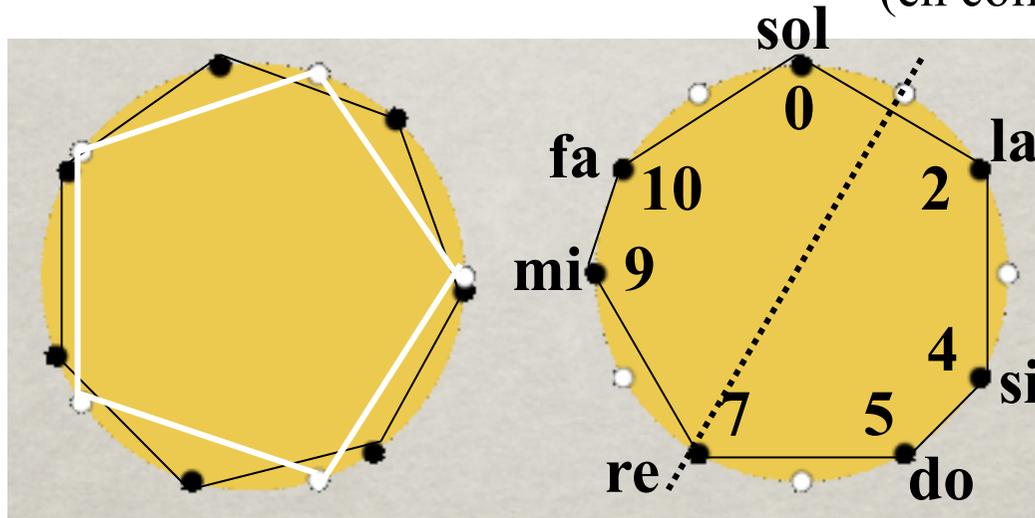


$$A = \{0, 5, 9, 11\} \Rightarrow IC_A(k) = 1 \forall k$$

➔ **Théorème de l'hexacorde**

# Maximally-Even Sets (ME-sets)

(en collaboration avec Emmanuel Amiot)

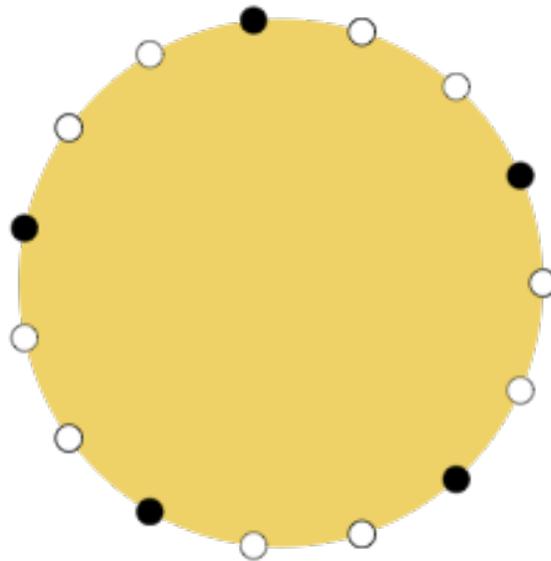


Gamme diatonique:

$\{0, 2, 4, 5, 7, 9, 10\}$

Gamme pentatonique:

$\{1, 3, 6, 8, 11\}$

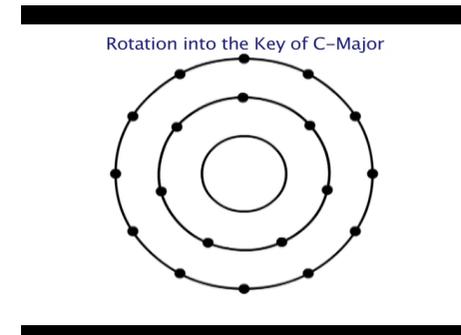
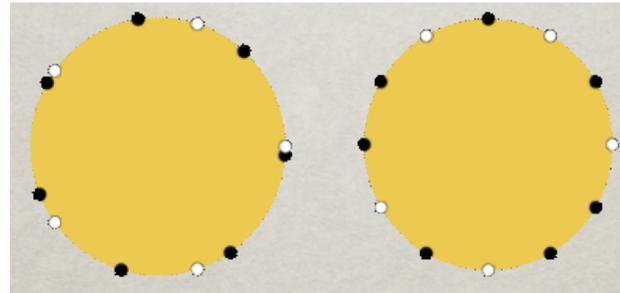


$$\text{fourier}(\text{set}, t) := \sum_{k \in \text{set}} e^{2i\pi kt/12}$$

$$|F_A(5)| = 1+1+1+1+1 = 5$$

En général,  $|F_A(t)| \leq \#A$

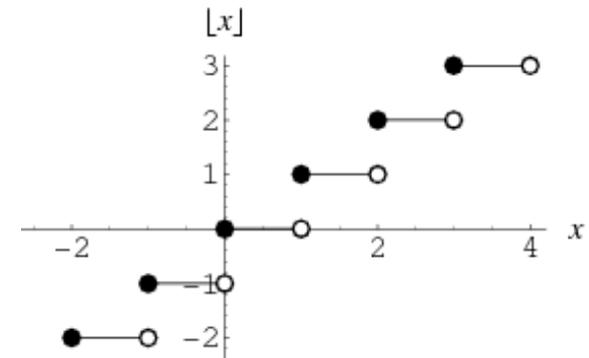
# Nouvelle définition des ME sets



**Definition** (Clough-Myerson-Douthett) A set  $A$  with cardinality  $d$  in a given equal tempered space  $\mathbf{Z}_c$  is maximally even if  $A = \{a_k\}$

$$a_k = J_{c,d}^\alpha(k) = \left\lfloor \frac{kc + \alpha}{d} \right\rfloor$$

where  $\alpha \in \mathbf{R}$   
 $\lfloor x \rfloor$  is the integer part of  $x$



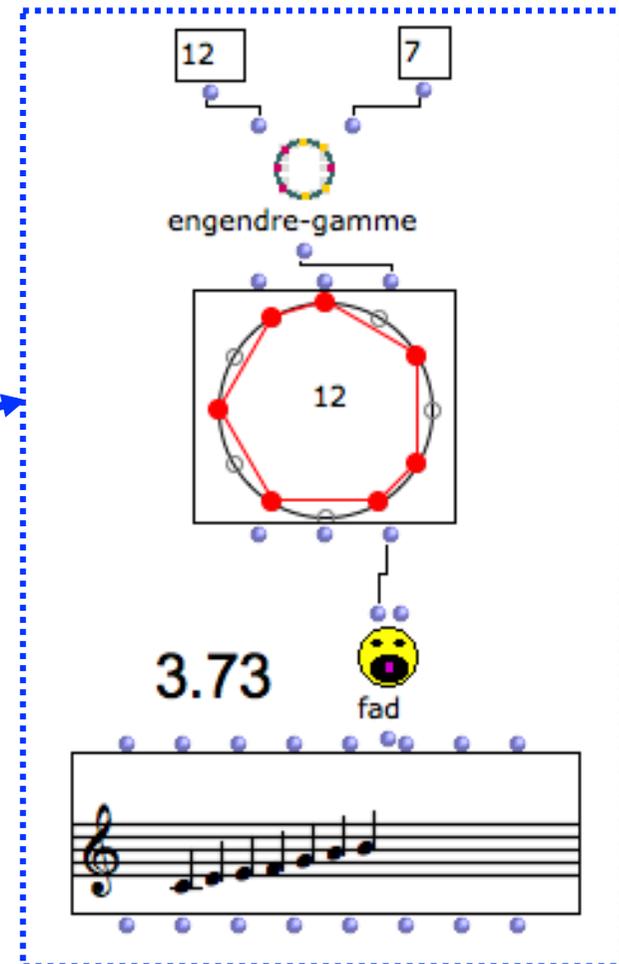
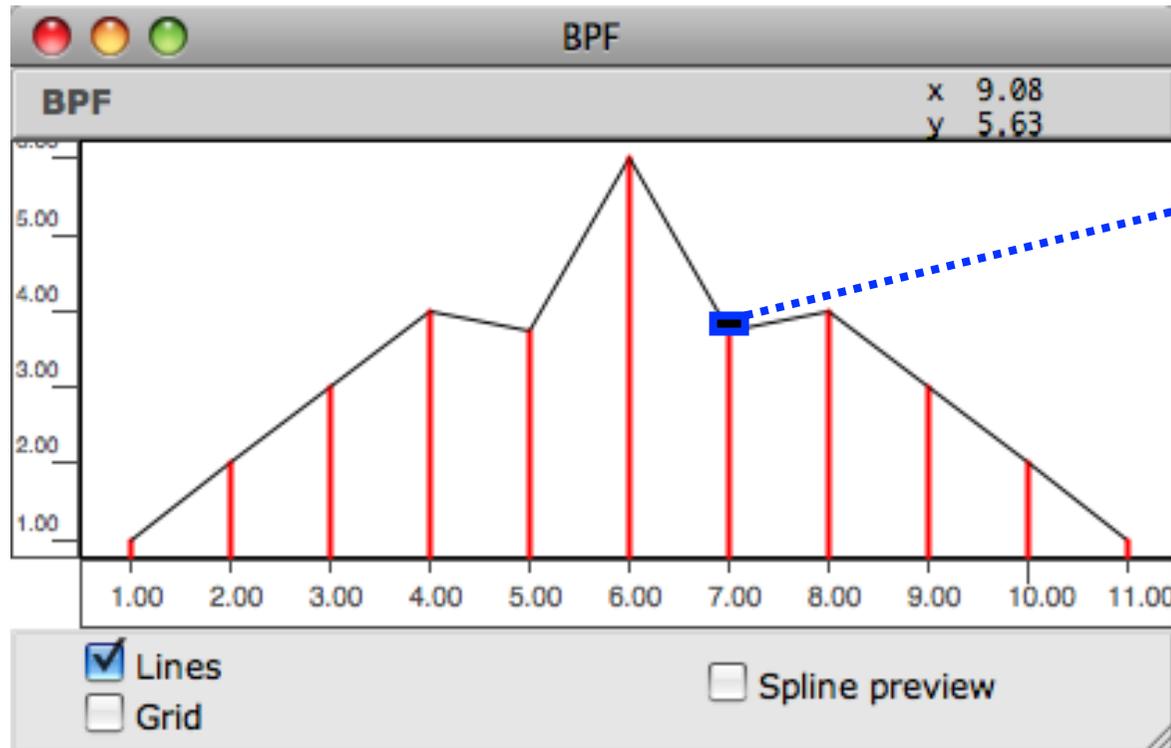
$$J_{12,7}^5 = \left\{ \left\lfloor \frac{12k + 5}{7} \right\rfloor \right\}_{k=0}^6 = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$$

**Definition** (Amiot, 2005) A set  $A$  with cardinality  $d$  given equal tempered space  $\mathbf{Z}_c$  is maximally even if  $|F_A(d)| \geq |F_B(d)|$  for all subsets  $B$  of cardinality  $d$  in  $\mathbf{Z}_c$ .

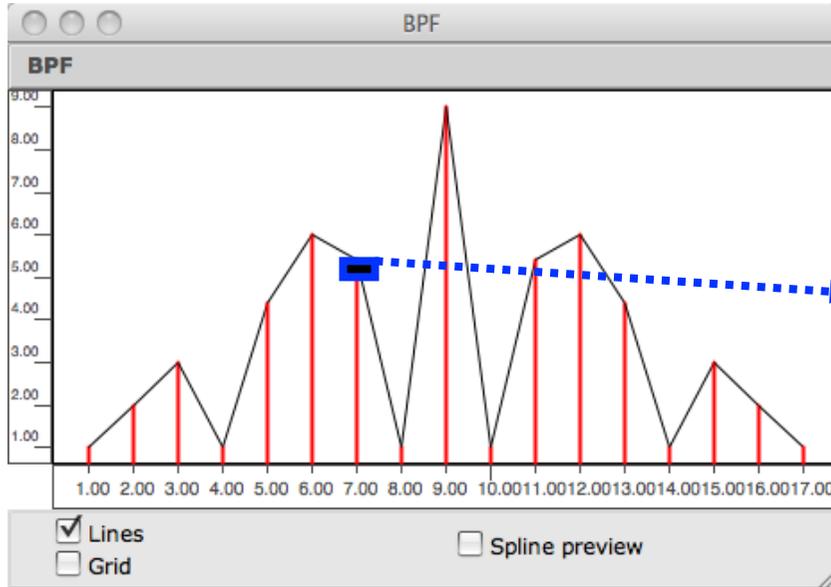
$$\text{where } F_{set}(t) := \sum_{k \in set} e^{2i\pi kt/12}$$

# Nouvelle classification des structures musicales à l'aide de la DFT

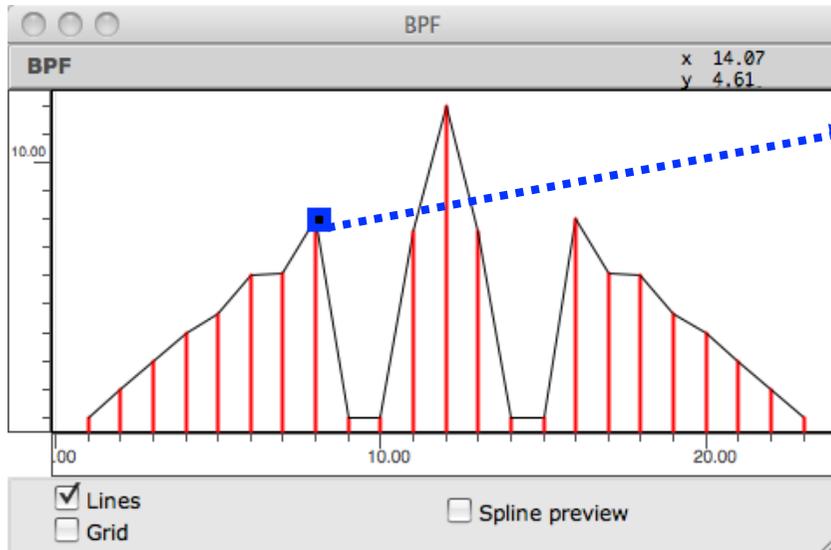
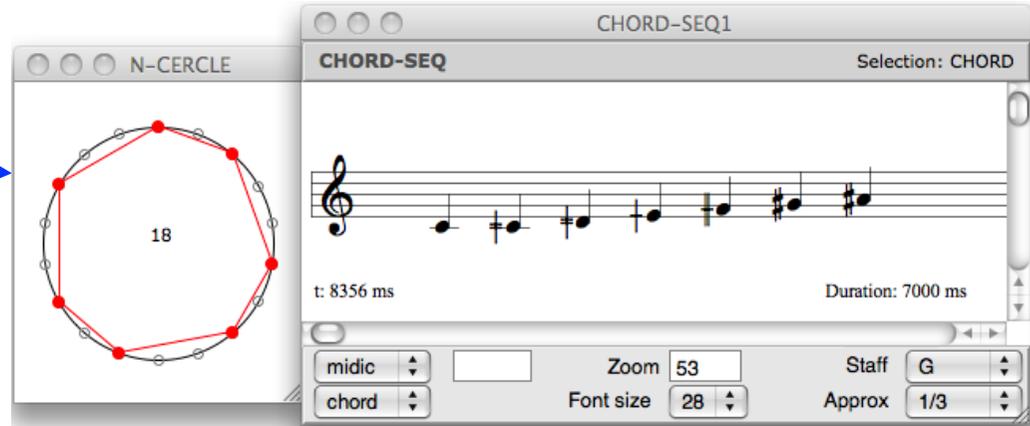
$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$



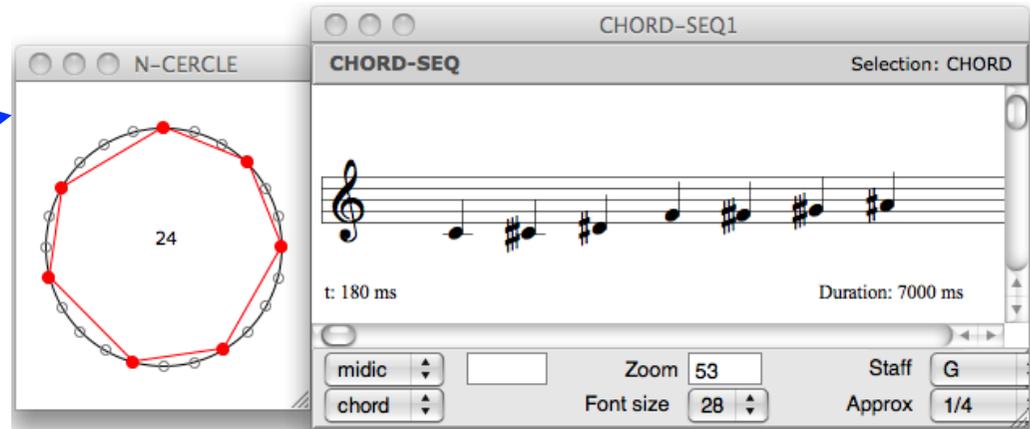
# Classification des structures microtonales à l'aide de la DFT



*Systeme en tiers de ton*



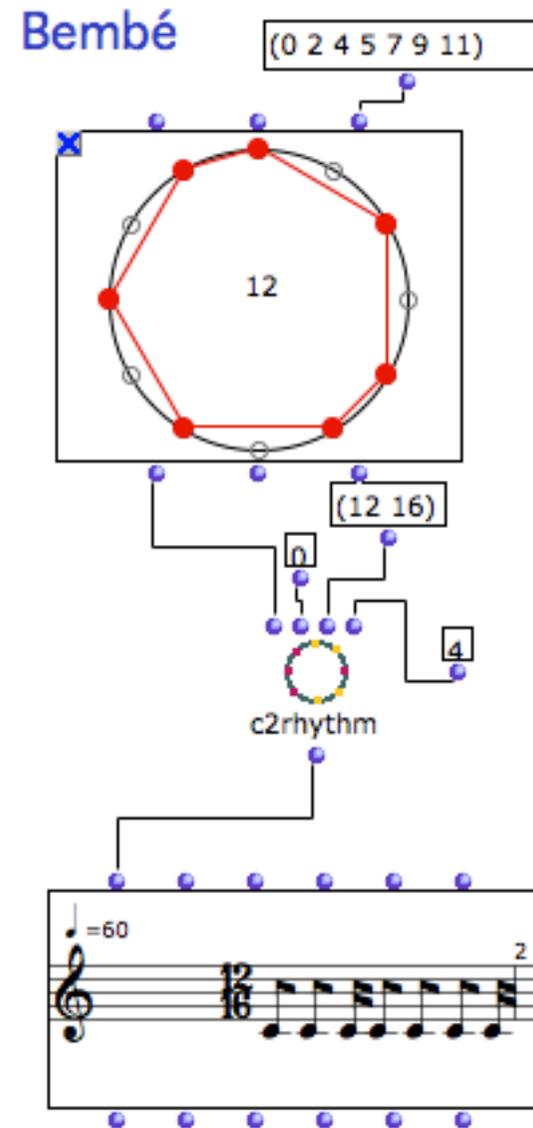
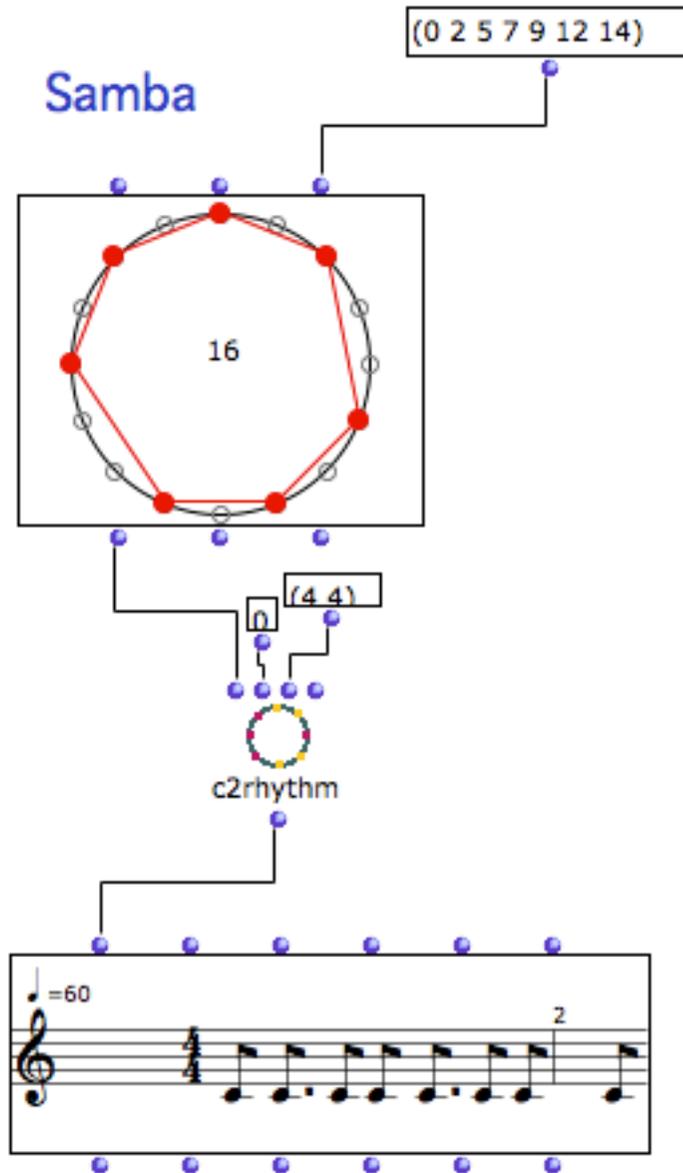
*Systeme en quarts de ton*



**Le problème du pavage en musique**

**Les canons rythmiques mosaïques :  
de Minkowski à Fuglede...  
...en passant par Messiaen**

# Théorie du rythme périodique



# Canons rythmiques et pavage de l'espace



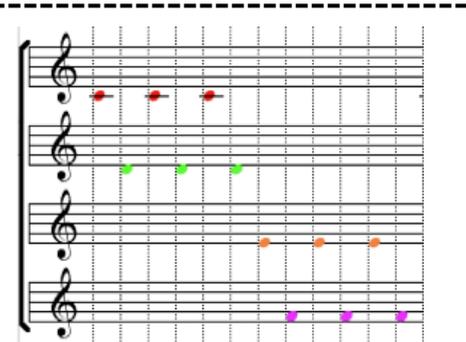
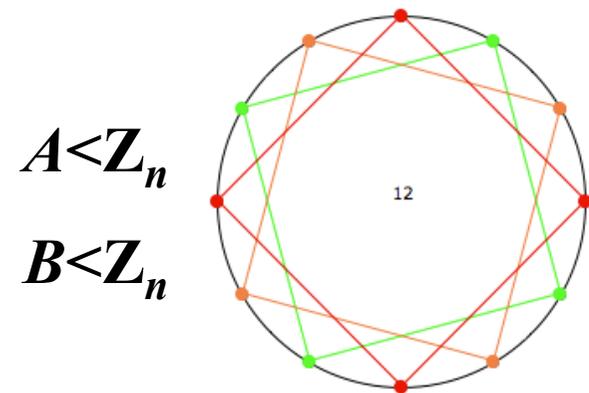
*Harawi (1945)*

*Visions de l'Amen (1943)*

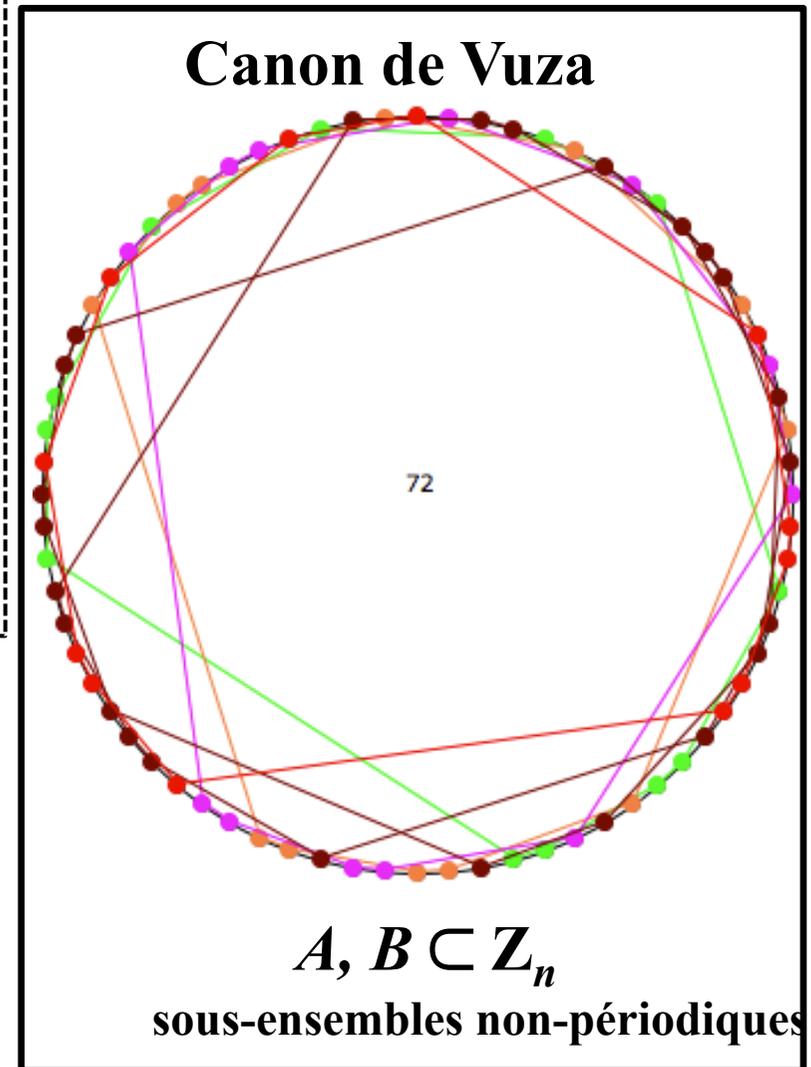
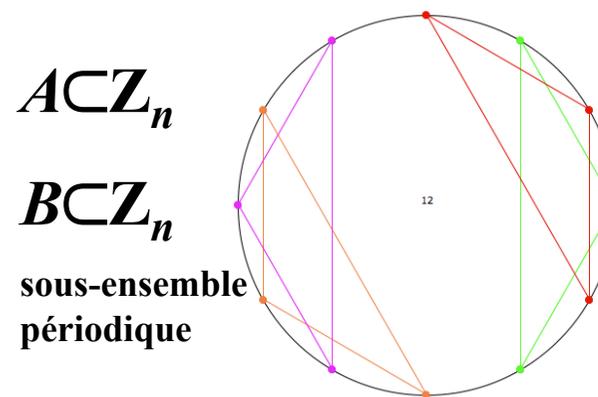
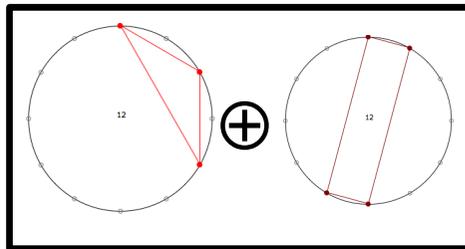
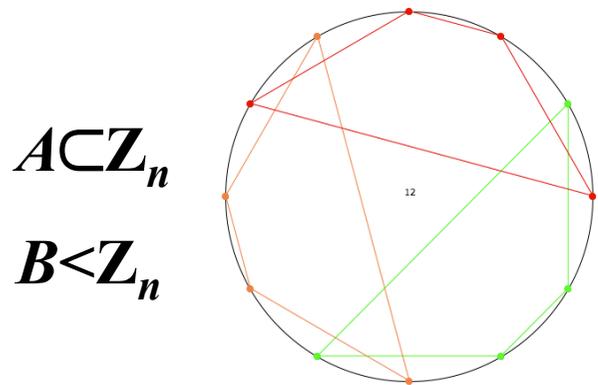
**Modèle  
rythmique**

« ...il résulte de tout cela que les différentes sonorités se mélangent ou s'opposent de manières très diverses, jamais au même moment ni au même endroit [...]. C'est du désordre organisé »

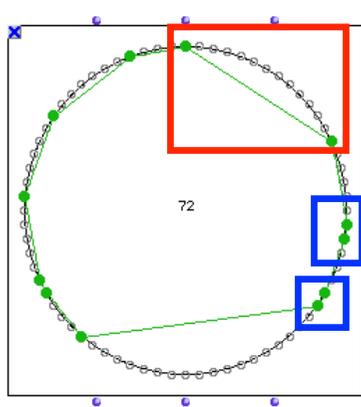
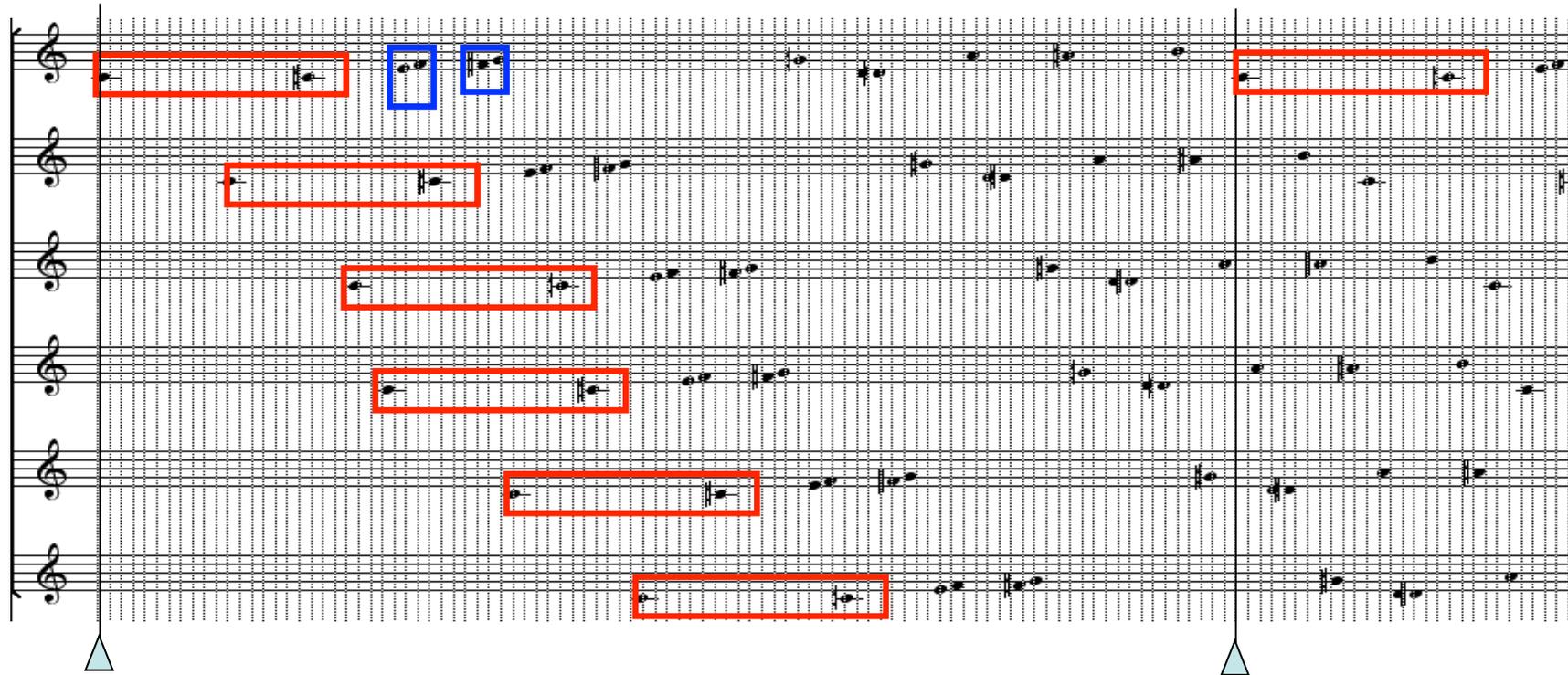
# Quatre types de canons rythmiques mosaïques



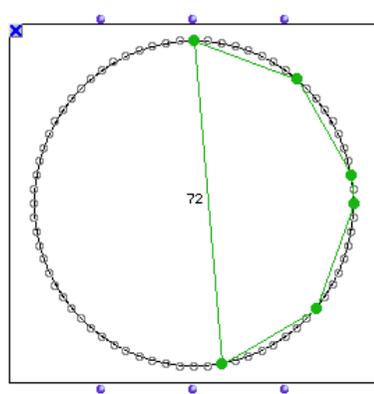
$$\mathbb{Z}_n = A \oplus B$$



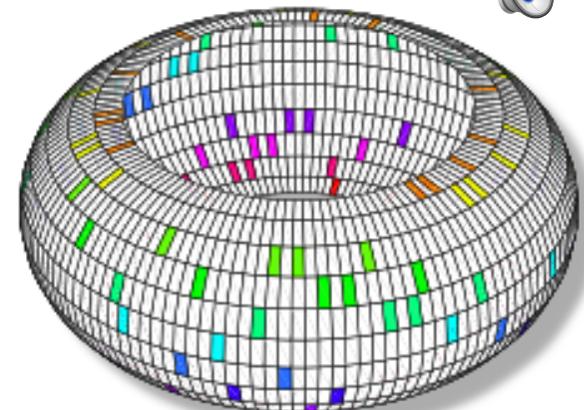
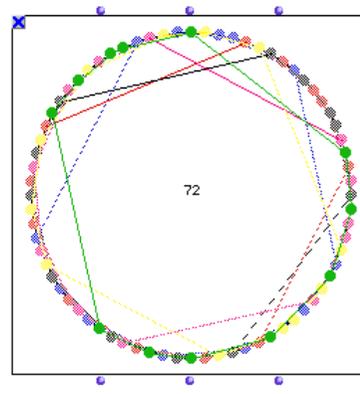
# Vuza Canons : canons mosaïques sans périodicité interne



+



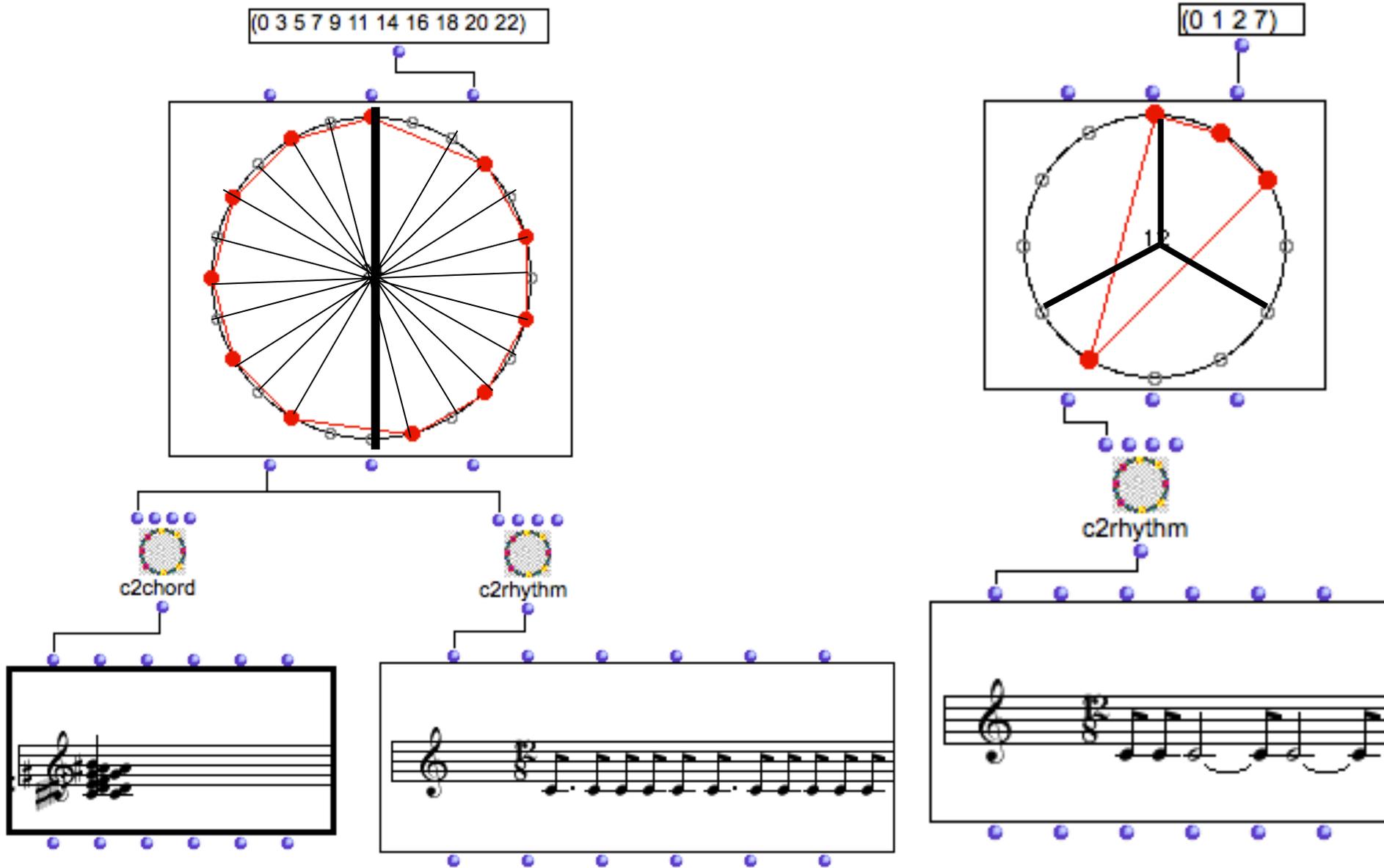
=



# Propriété d'imparité rythmique et ses généralisations

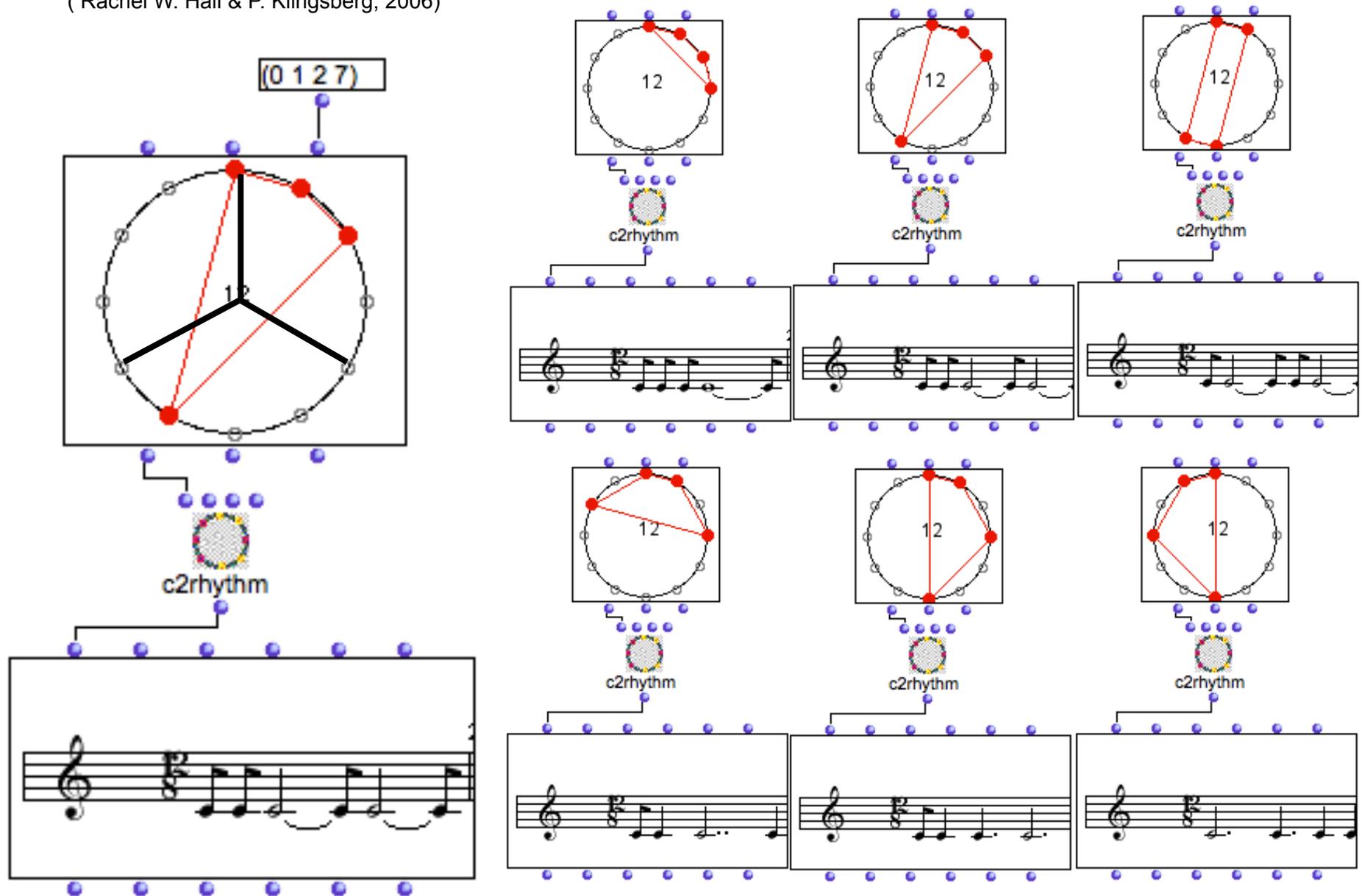
( Simha Arom & Marc Chemillier)

(R. W. Hall & P. Klingsberg, Asymmetric rhythms and tiling canons.  
American Mathematical Monthly 113 (2006), no.10, 887-896)



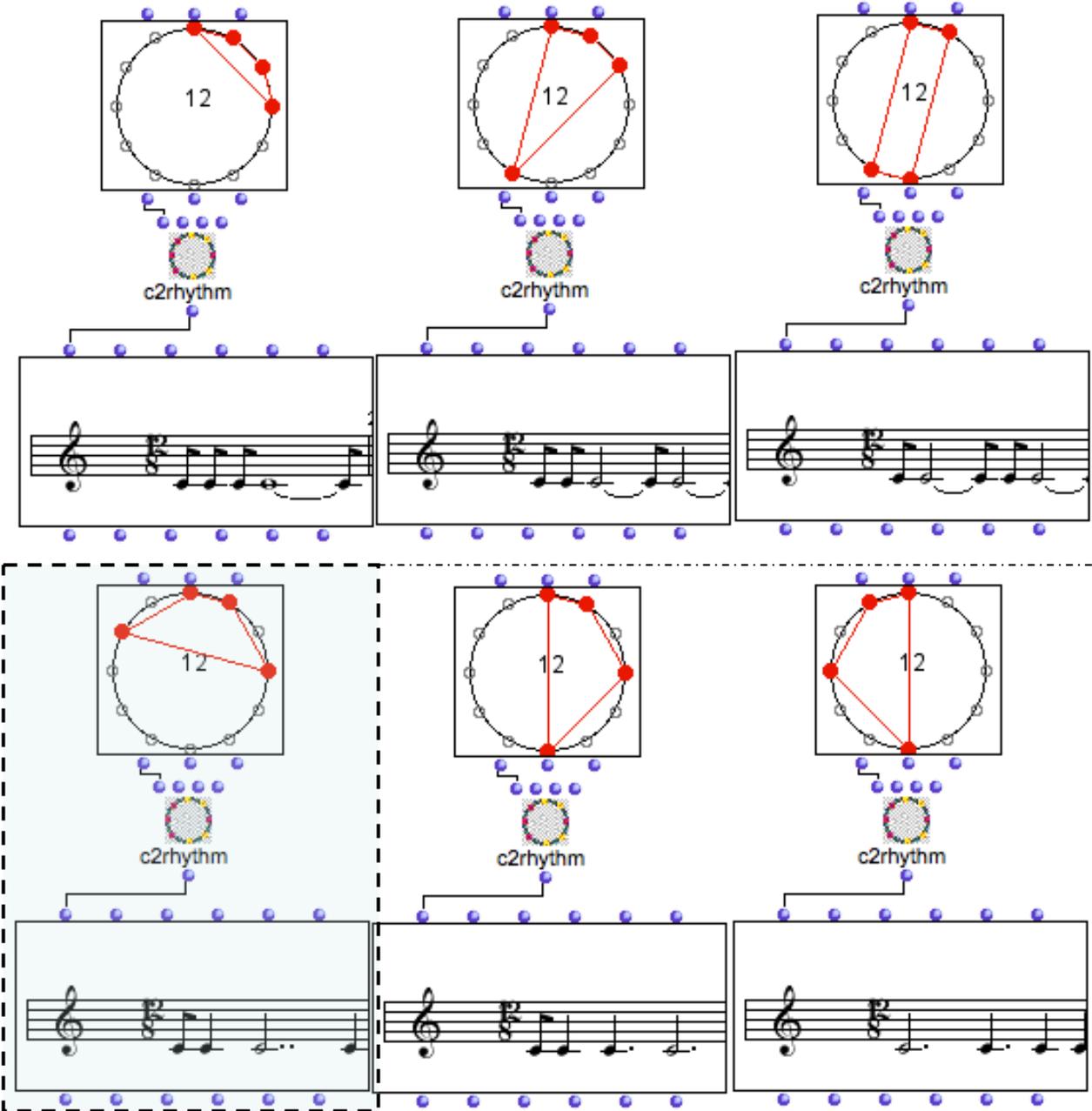
# Rythmes 3-asymétriques

( Rachel W. Hall & P. Klingsberg, 2006)



# Rythmes 3-asymétriques et pavages

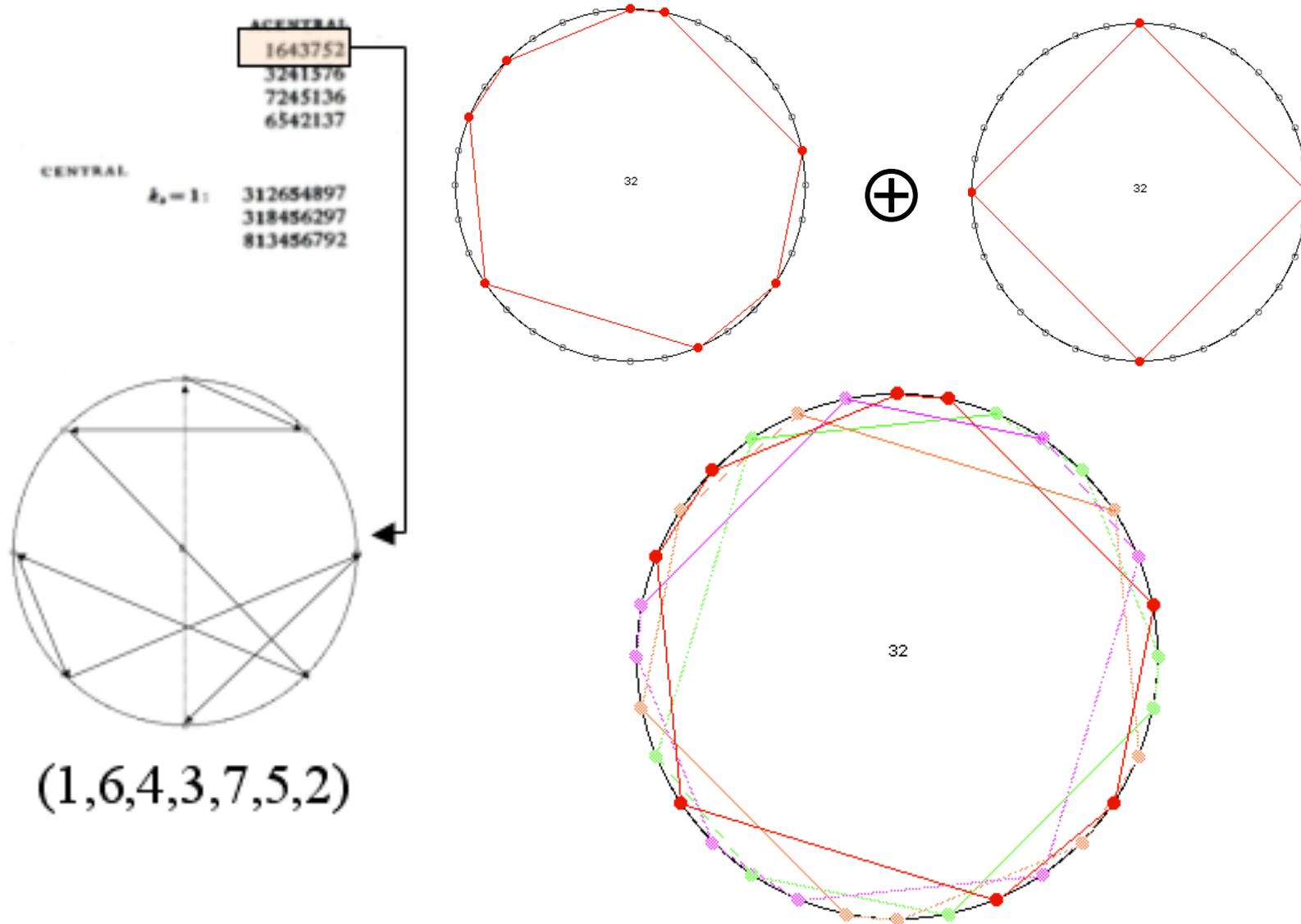
( Rachel W. Hall & P. Klingsberg, 2006)



=> *OpenMusic*

# Rythmes 4-asymétriques et séries tous-intervalles

Thorvald Ötterstrom, *A Theory of Modulation*, Chicago UP, 1935



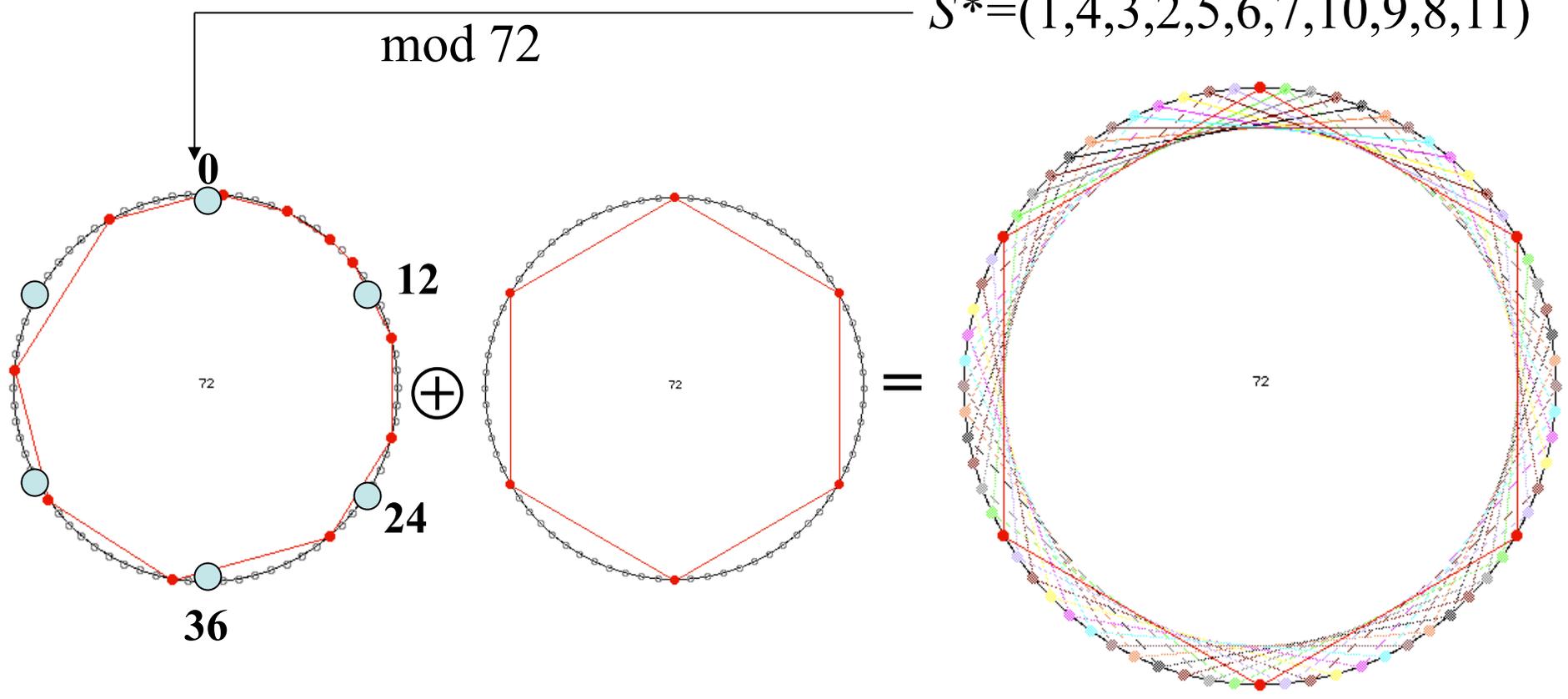
# Canons rythmiques mosaïques et séries tous-intervalles

...  
 ...  
 36 25  
 24 13  
 12

The musical staff shows a sequence of notes with various accidentals. An arrow points from the staff to a circular diagram representing a 72-note scale. The diagram features a vertical dashed line and several chords (triads and dyads) connected by lines, illustrating the intervallic structure of the scale.

$S = \{0, 1, 3, 6, 7, 9, 8, 10, 11, 2, 4, 5\}$

$S^* = (1, 4, 3, 2, 5, 6, 7, 10, 9, 8, 11)$



# Séries dodécaphoniques et rythmes k-asymétriques

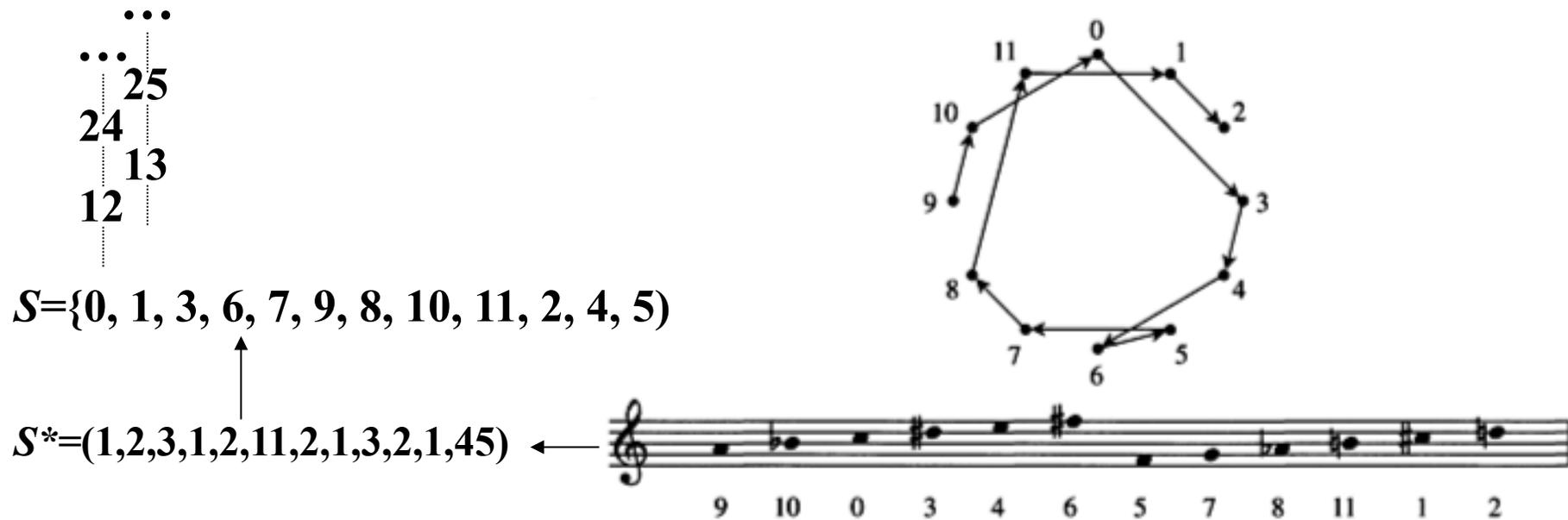
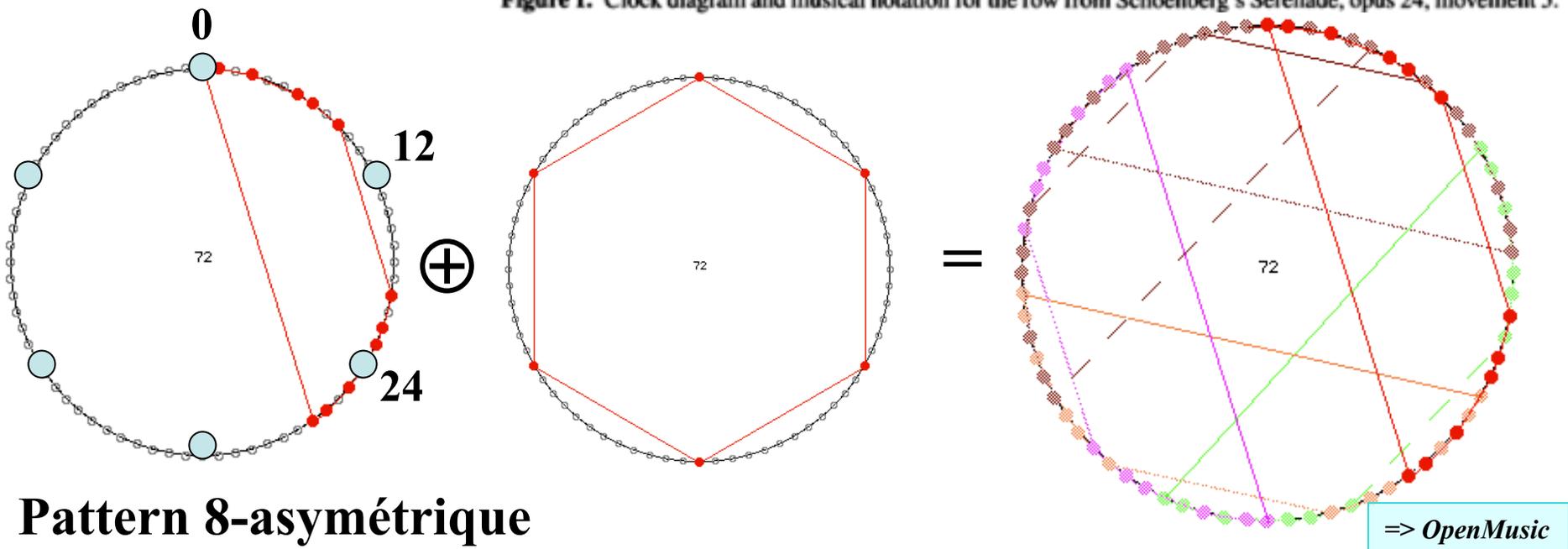
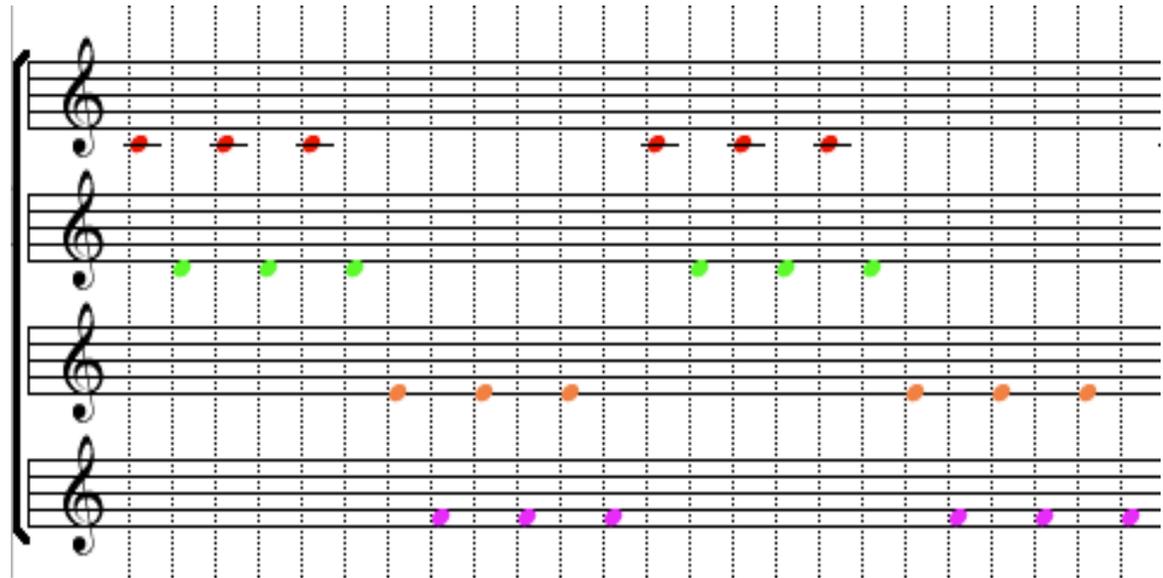
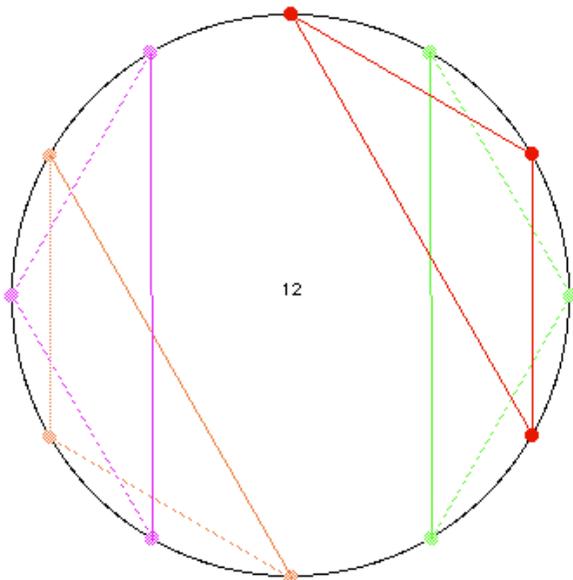


Figure 1. Clock diagram and musical notation for the row from Schoenberg's Serenade, opus 24, movement 5.



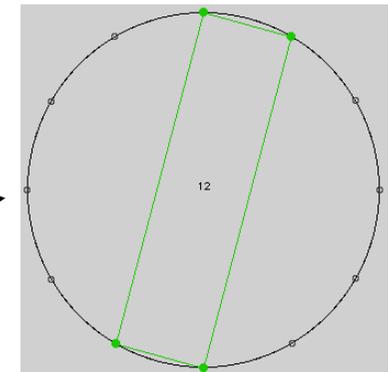
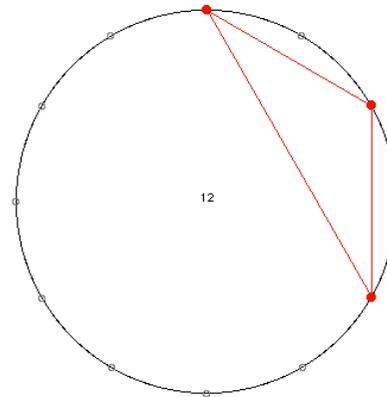
# Canons mosaïques avec symétrie transpositionnelle



$$\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} = \{0, 2, 4\}$$

$$\mathbf{B} = \{0, 1, 6, 7\}$$



# Les canons rythmiques mosaïques comme un problème « mathémusical »

---

- Les canons rythmiques selon Olivier Messiaen (*Traité*, 2<sup>ème</sup> Tome)
- Le modèle des canons RCMC de Dan Tudor Vuza (*Perspectives of New Music*, 1991-1993)
- Le modèle computationnel des canons de Vuza et premier catalogue des solutions (Agon&Andreatta, 1999)
- Applications compositionnelles (Fabien Levy, Georges Bloch, ..., Mauro Lanza)
- Enumération et classification des canons de Vuza (Fripertinger, Amiot, Noll, Andreatta, Jedrzejewski, ...)
- Le modèle des canons augmentés par Thomas Noll
- Les canons parfaits de Tom Johnson
- Le modèles des canons cyclotomiques (Amiot, Agon, Andreatta)
- L'environnement *MathTools* en *OpenMusic* (Version 5.0 et successives, Agon&Andreatta)

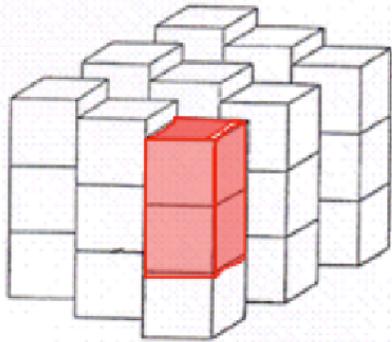
## Pavage de l'espace par des cubes unité

- La Conjecture de Minkowski (1896/1907) et ses versions « faibles » (Keller, Furtwängler)
- La solution algébrique de G. Hajos (1942)
- La classification des groupes de Hajos (Hajos, de Bruijn, Sands, ...)
- *Problèmes ouvert* :
  - La conjecture semi-périodique de Hajos (1950)
  - Conjecture de Keller pour  $n=7$

## Pavage de la ligne et du plan $\mathbf{R}^2$

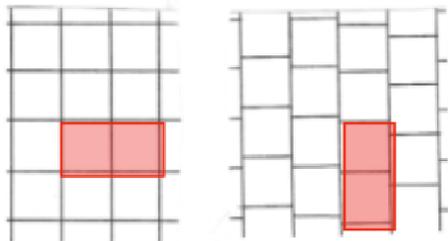
- Conjecture spectrale (Fuglede, Tijdeman, Lagarias, Laba, Coven-Meyerowitz, Kolountzakis...)
- Lien avec le pavage du cercle (Hajos 1949)
- Lien entre la conjecture spectrale et les canons de Vuza (Amiot, 2010)
- *Problèmes ouverts* :
  - les conditions de Coven-Meyerowitz sont-elles nécessaire et suffisantes ?
  - Conjecture spectrale en dimension  $n=1$  et  $n=2$ .

# De la Conjecture de Minkowski aux groupes de Hajos



## Conjecture de Minkowski (1896/1907)

Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à  $n$  dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension  $n-1$ .



(Cf. S. Stein, S. Szabó : *Algebra and Tiling*, 1994)

## *Théorème de Hajós (1942)*

Soit  $G$  un groupe abélien fini et soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$   $n$  éléments de  $G$ . Si l'on suppose que le groupe admet comme factorisation la somme directe des sous-ensembles  $A_1 \dots A_n$

$$A_1 = \{1, a_1, \dots, a_1^{m_1-1}\}, A_2 = \{1, a_2, \dots, a_2^{m_2-1}\}, \dots, A_n = \{1, a_n, \dots, a_n^{m_n-1}\}$$

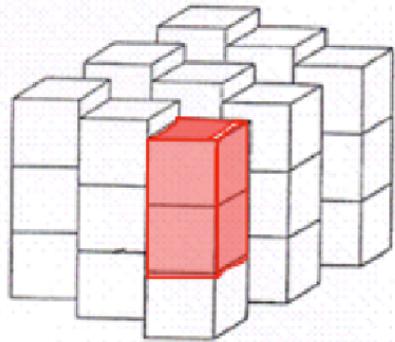
avec  $m_i > 0$  pour tout  $i=1, 2, \dots, n$ , alors un des  $A_i$  est un groupe

## *Groupes de Hajos (good groups)*

Rédei 1947	$(p, p)$	Sands 1962	$(p, 3, 3)$
Hajós 1950	$\mathbb{Z}$		$(p, 2^2, 2)$
De Bruijn 1953	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n=p^\alpha$		$(p, 2, 2, 2, 2)$
	$(p^\alpha, q)$		$(p^2, 2, 2, 2)$
	$(p, q, r)$		$(p^3, 2, 2)$
Sands 1957	$(p^2, q^2)$		$(p, q, 2, 2)$
	$(p^2, q, r)$		
	$(p, q, r, s)$	Sands 1964 Q	
Sands 1959	$(2^2, 2^2)$		$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
	$(3^2, 3)$		$\mathbb{Q} + \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
	$(2^n, 2)$		

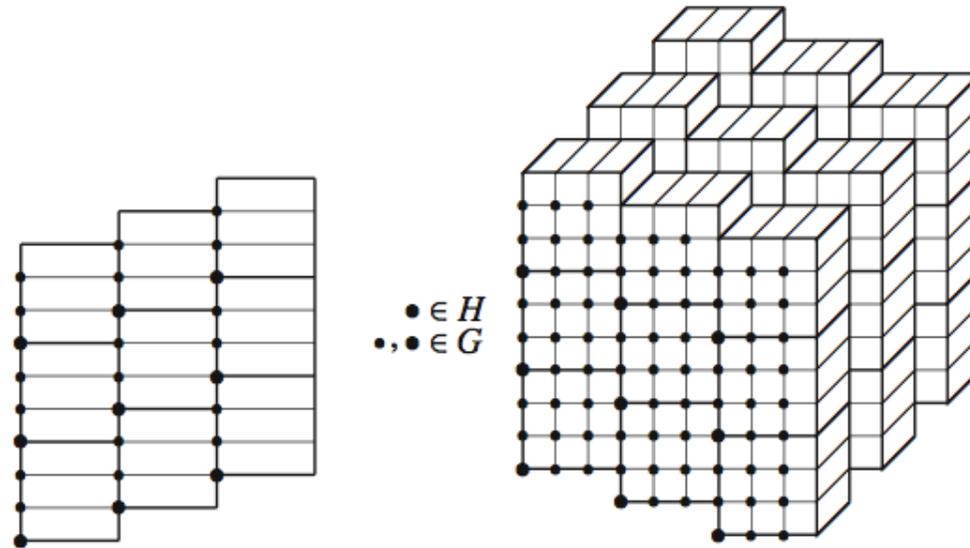
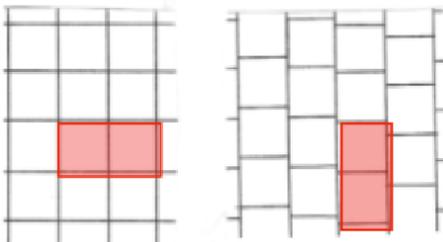
# Conjecture de Minkowski et formalisation algébrique

G. Fidanza, *Canoni ritmici a mosaico*, tesi di laurea, 2006/2007



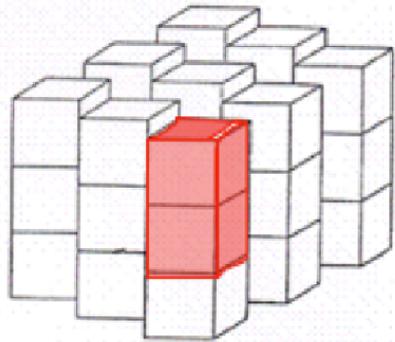
## Conjecture de Minkowski (1896/1907)

Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à  $n$  dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension  $n-1$ .



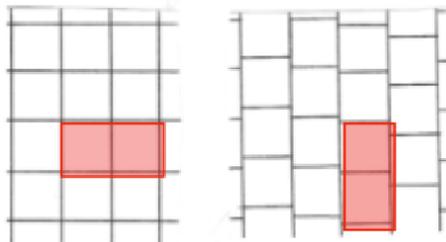
- $H$  = réseau formé des sommets de coordonnées inférieures (à valeurs dans  $\mathbf{Q}$  sans perte de généralité, Hajos 1938)
- $G$  = sommets de coordonnées inférieures qui divisent chaque cube dans un nombre fini de tranches
- $H < G$
- $\exists \{a_1, \dots, a_n\}$  basa de  $G$  telle que  $m_i a_i = e_i \forall i=1, \dots, n$  où  $m_i$  est le nombre de tranches dans lequel chaque cube est divisé tout au long de la  $i$ -ème coordonnée
- On construit le quotient  $G/H$  et pour chaque  $i$  on considère l'ensemble  $A_i = \{0, a_i, 2a_i, \dots, (m_i-1)a_i\}$
- $G/H = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n$

# Quelques versions faibles de la conjecture de Minkowski



## Conjecture de Minkowski (1896/1907)

Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à  $n$  dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension  $n-1$ .



- *Les quatre conditions de la Conjecture de Minkowski*
  - [1] Les cubes sont tous obtenus par translation
  - [2] Les vecteurs de translations forment un réseau [lattice]
  - [3] Les parties internes des cubes sont disjointes
  - [4] Tout point de l'espace qui n'est pas dans le bord d'un cube est contenu exactement dans un cube
- *Conjecture de Keller (1930) = Minkowski – [2]*
  - Vraie pour  $n \leq 6$  (Perron, 1940)
  - Fausse pour  $n \geq 10$  (Lagarias et Shor, 1992)
  - Fausse pour  $n=8$  et  $n=9$  (Mackey, 2000)
  - Ouverte pour  $n=7$
- *Conjecture de Furtwangler = Minkowski – [4] + nouvelle condition :*
  - [4'] Tout point de l'espace qui n'est pas dans le bord de chaque cube est contenu dans exactement  $k$  cubes
    - La conjecture est vraie ssi  $n \leq 3$  (Hajos 1941)
- *Conjecture semi-périodique de Hajos (1950) : toute factorisation d'un groupe  $G = A+B$  est semipériodique i.e.  $B=B_1, \dots, B_m$  et s'il existe un sousgroupe  $G' = \{g_1, \dots, g_m\}$  telle que  $A+B_i = g_i + A+B_1$ .*

# Groupes non Hajós et Canons de Vuza

## Groupes non-Hajós (bad groups)

72  
 108 120 144 168 180  
 200 216 240 252 264 270 280 288  
 300 312 324 336 360 378 392 396  
 400 408 432 440 450 456 468 480  
 500 504 520 528 540 552 560 576 588 594  
 600 612 616 624 648 672 675 680 684 696  
 700 702 720 728 744 750 756 760 784 792  
 800 810 816 828 864 880 882 888...

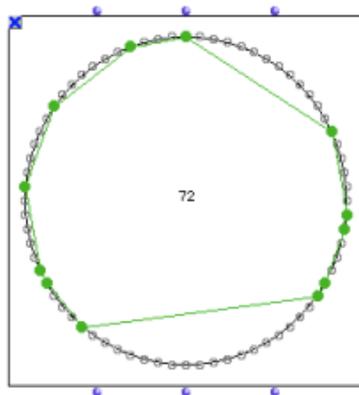
## Groupes Hajós (good groups)

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  avec

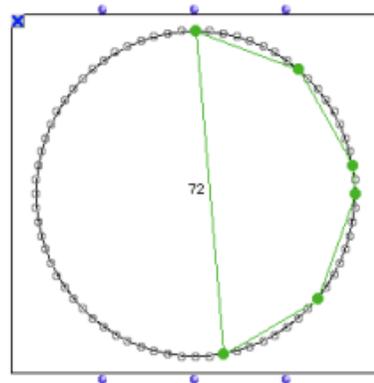
$n \in \{p^\alpha, p^\alpha q, pqr, p^2q^2, p^2qr, pqrs\}$

où  $p, q, r, s$ , sont des nombres premiers distincts

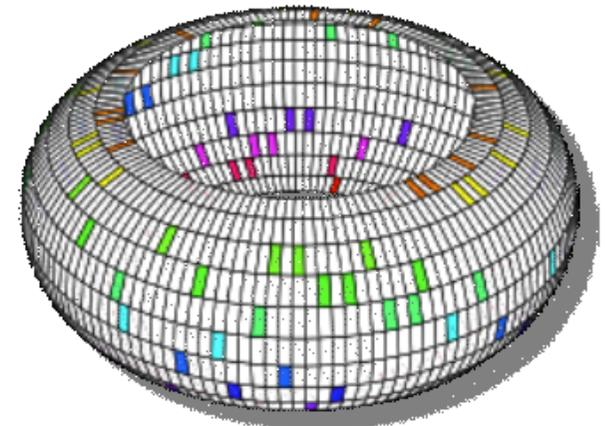
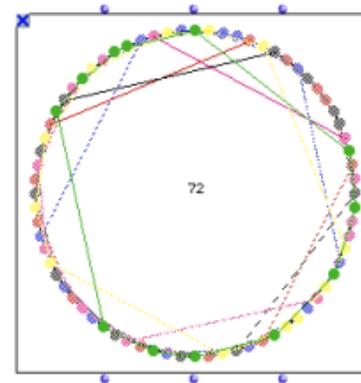
**Problème ouvert : Trouver un algorithme qui permet d'obtenir toutes les factorisations d'un groupe cyclique non-Hajós en somme directe de deux sous-ensembles non périodiques (i.e. classifier tous les Canons de Vuza).**



+



=



# Classification paradigmaticque des canons de Vuza ( $n=72$ )

Résultat :  
 uniquement  
 deux « types »  
 de canons  
 différents (à  
 une  
*transformatio  
 n affine* près,  
 i.e.  
 $f: \mathbb{Z}_{72} \rightarrow \mathbb{Z}_{72}$   
 t.q.  
 $f(x) = ax + b$   
 avec  $a \in (\mathbb{Z}_{72})^*$   
 et  $b \in \mathbb{Z}_{72}$

$\{Z_n\}$   
 R (1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)  
 (20 3 1 5 6 9 4 11 6 3 3 1)  
 (1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)  
 (6 13 4 7 6 6 1 4 19 1 4 1)  
 (1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)  
 (3 3 17 4 3 6 6 5 4 15 5 1)

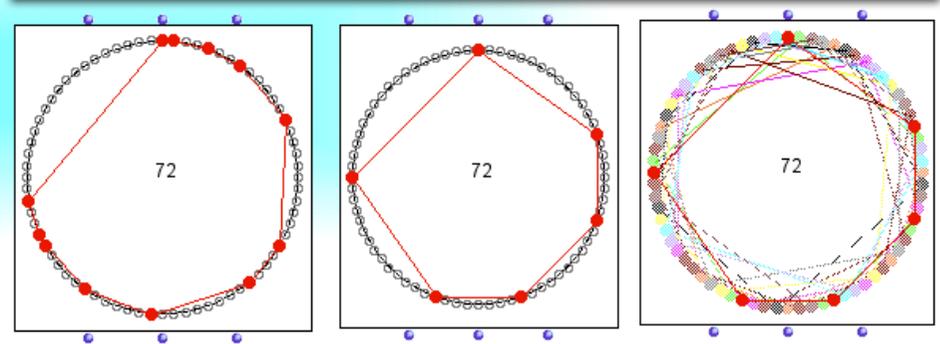
S (8 8 2 8 8 38)  
 (16 2 14 2 16 22)  
 (14 8 10 8 14 18)

$\{D_n\}$   
 R (1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)  
 (1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)  
 (1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)

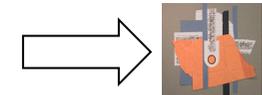
S (8 8 2 8 8 38)  
 (16 2 14 2 16 22)  
 (14 8 10 8 14 18)

$\{Af_n\}$   
 R (1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)  
 (1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)

S (14 8 10 8 14 18)



- R. Tijdeman: “Decomposition of the Integers as a direct sum of two subsets”, *Number Theory*, Cambridge University Press, 1995.  
 The fundamental Lemma:  $R \text{ pave } \mathbb{Z}_n \Rightarrow aR \text{ pave } \mathbb{Z}_n \langle a, n \rangle = 1$



# Pavage de la ligne et conjecture spectrale

Un domaine de  $\mathbb{R}^n$  est spectral  $\Leftrightarrow$  A pave  $\mathbb{R}^n$  par translation

**Conjecture de Fuglede (1974) :**

« **Commuting Self-Adjoint Partial Differential Operators and a Group Theoretic Problem** », *J. Func. Anal.* 16, 101-121, 1974.



(Conjecture fautive en dimension  $n \geq 3$  ouverte en dimension 1 et 2)

**DEFINITION 6** A subset  $A$  of some vector space (say  $\mathbb{R}^n$ ) is spectral iff it admits a Hilbert base of exponentials, i.e. if any map  $f \in L^2(A)$  can be written

$$f(x) = \sum f_k \exp(2i\pi \lambda_k \cdot x)$$

for some fixed family of vectors  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  where the maps  $e_k : x \mapsto \exp(2i\pi \lambda_k \cdot x)$  are mutually orthogonal (i.e.  $\int_A \bar{e}_k e_j = 0$  whenever  $k \neq j$ ).

WOLFRAM RESEARCH

mathworld.wolfram.com

## Fuglede's Conjecture

CONTRIBUTE  
TO THIS ENTRY

# Conjecture de Fuglede et canons rythmiques mosaïques

WOLFRAM RESEARCH

mathworld.wolfram.com

## Fuglede's Conjecture

CONTRIBUTE  
TO THIS ENTRY

Portions of this entry contributed by *Emmanuel Amiot*

Fuglede (1974) conjectured that a domain  $\Omega$  admits an **operator spectrum** iff it is possible to tile  $\mathbb{R}^d$  by a family of **translates** of  $\Omega$ . Fuglede proved the conjecture in the special case that the tiling set or the spectrum are lattice subsets of  $\mathbb{R}^d$  and Iosevich *et al.* (1999) proved that no smooth symmetric convex body  $\Omega$  with at least one point of nonvanishing **Gaussian curvature** can admit an orthogonal basis of exponentials.

Using complex **Hadamard matrices** of orders 6 and 12, Tao (2003) constructed counterexamples to the conjecture in some small Abelian groups, and lifted these to counterexamples in  $\mathbb{R}^5$  or  $\mathbb{R}^{11}$ .

However, the conjecture has been proved in a great number of special cases (e.g., all convex bodies) and remains an open problem in small dimensions. For example, it has been shown in dimension 1 that a nice algebraic characterization of finite sets tiling  $\mathbb{Z}$  indeed implies one side of Fuglede's conjecture (Coven-Meyerowitz 1998). Furthermore, it is sufficient to prove these conditions when the tiling gives a factorization of a non-Hajós cyclic group (Amiot).

Un domaine de  $\mathbb{R}^n$  est spectral  $\Leftrightarrow$  A pave  $\mathbb{R}^n$  par translation

- Fausse pour  $n \geq 3$
- Ouverte pour  $n=1$  et  $n=2$

# Les conjectures de Minkowski/Fuglede et les canons rythmiques

Dans le prolongement de la Conjecture de Minkowsky

• R. Tijdeman: “Decomposition of the Integers as a direct sum of two subsets”, *Number Theory*, Cambridge University Press, 1995. The fundamental Lemma:  
A tiles  $\mathbf{Z}_n \Rightarrow pA$  tiles  $\mathbf{Z}_n$  when  $\langle p, n \rangle = 1$

• E. Coven & A. Meyerowitz: “Tiling the integers with translates of one finite set”, *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999  
T1 + T2  $\Rightarrow$  tile  
Tile  $\Rightarrow$  T1

Dans le prolongement de la Conjecture de Fuglede

• I. Laba : “The spectral set conjecture and multiplicative properties of roots of polynomials”, *J. Lond Math Soc*, 2002  
T1 + T2  $\Rightarrow$  spectral  
T2  $\Rightarrow$  spectral  
spectral  $\Rightarrow$  T1

• E. Amiot : “A propos des canons rythmiques”, *Gazette des Mathématiciens*, n° 106, Octobre 2005.  
if A tiles with period  $n$  and  $\mathbf{Z}_n$  is Hajos  $\Rightarrow$  A has T2 ( $\Rightarrow$  A is spectral)

Si A pave mais il n'est pas spectral  $\Rightarrow$  A est le rythme d'un canon de Vuza

# Racines de l'unité et polynômes cyclotomiques

---

Racines  $n$ -ièmes de l'unité :  $z^n = 1$

$$n=3 \longrightarrow \left\{ 1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$n=4 \longrightarrow \{1, +i, -1, -i\}$$

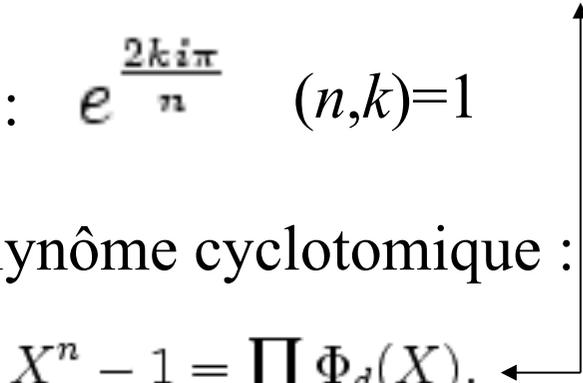
Les racines  $n$ -ièmes de l'unité peuvent s'écrire sous la forme :

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k, n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq k < n)$$

Elles sont exactement les racines du polynôme :  $P(X) = X^n - 1$

Les racines  $n$ -ièmes primitives de l'unité :  $e^{\frac{2ki\pi}{n}} \quad (n,k)=1$

Elles sont exactement les racines du polynôme cyclotomique :

$$\Phi_n(X) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)} (X - z_k) \longleftrightarrow X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$


# Pavage de la ligne et polynômes cyclotomiques

$$\Phi_n(X) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)} (X - z_k) \longleftrightarrow X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

$$\Phi_1(X) = X - 1 \quad \longleftrightarrow \quad (-1, 1)$$

$$\Phi_2(X) = 1 + X \quad \longleftrightarrow \quad (1, 1)$$

$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2 \quad \longleftrightarrow \quad (1, 1, 1)$$

$$\Phi_4(X) = 1 + X^2 \quad \longleftrightarrow \quad (1, 0, 1)$$

$$\Phi_5(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 \quad \longleftrightarrow \quad (1, 1, 1, 1, 1)$$

$$\Phi_6(X) = 1 - X + X^2 \quad \longleftrightarrow \quad (1, -1, 1)$$

$$\Delta_n = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} = \prod_{\substack{d|n \\ d \neq 1}} \Phi_d(X)$$

$$\Delta_4 = 1 + X + X^2 + X^3 = \Phi_2(X) \times \Phi_4(X)$$

$$A(x) \times B(x) = (A \oplus B)(x) \equiv 1 + x + \dots + x^{n-1} \pmod{X^n - 1}$$

# Bonnes et mauvaises factorisations

$$\Delta_n = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} = \prod_{\substack{d | n \\ d \neq 1}} \Phi_d(X)$$

$\Phi_2(X) = 1 + X$	←-----→	(1, 1)
$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$	←-----→	(1, 1, 1)
$\Phi_4(X) = 1 + X^2$	←-----→	(1, 0, 1)
$\Phi_6(X) = 1 - X + X^2$	←-----→	(1, -1, 1)

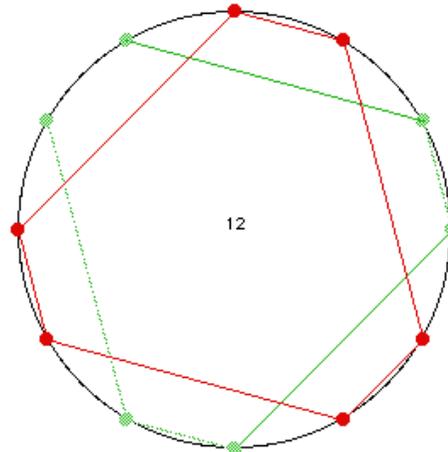
$$\Delta_{12} = 1 + X + \dots + X^{11} = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_4 \times \Phi_6 \times \Phi_{12}$$

$$A(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12} = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9$$

$$B(X) = \Phi_4 = 1 + X^2$$

$$S = \{0, 2\}$$

$$R = \{0, 1, 4, 5, 8, 9\}$$



$$A^*(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_{12}$$

$$B^*(X) = \Phi_4 \times \Phi_6$$

Cette décomposition ne marche pas

# Les conditions de Coven-Meyerowitz

---

- E. Coven & A. Meyerowitz : “Tiling the integers with translates of one finite set”, *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999

There is no loss of generality in restricting attention to translates of a finite set  $A$  of *nonnegative* integers. Then  $A(x) = \sum_{a \in A} x^a$  is a polynomial such that  $\#A = A(1)$ . Let  $S_A$  be the set of prime powers  $s$  such that the  $s$ -th cyclotomic polynomial  $\Phi_s(x)$  divides  $A(x)$ . Consider the following conditions on  $A(x)$ .

(T1)  $A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1)$ .

(T2) If  $s_1, \dots, s_m \in S_A$  are powers of distinct primes, then  $\Phi_{s_1 \dots s_m}(x)$  divides  $A(x)$ .

**Theorem A.** *If  $A(x)$  satisfies (T1) and (T2), then  $A$  tiles the integers.*

**Theorem B1.** *If  $A$  tiles the integers, then  $A(x)$  satisfies (T1).*

**Theorem B2.** *If  $A$  tiles the integers and  $\#A$  has at most two prime factors, then  $A(x)$  satisfies (T2).*

**Corollary.** *If  $\#A$  has at most two prime factors, then  $A$  tiles the integers if and only if  $A(x)$  satisfies (T1) and (T2).*

# Les conditions de Coven-Meyerowitz

---

$$(T1) A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1).$$

(T2) If  $s_1, \dots, s_m \in S_A$  are powers of distinct primes, then  $\Phi_{s_1 \dots s_m}(x)$  divides  $A(x)$ .

**Theorem A.** *If  $A(x)$  satisfies (T1) and (T2), then  $A$  tiles the integers.*

$$A(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12} = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9$$

$$\Phi_2(X) = 1 + X$$

$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$$

$$(T1) A(1) = 6 = \Phi_2(1) \times \Phi_3(1) = 2 \times 3$$

$$(T2) \Phi_2 \mid A(X) \text{ et } \Phi_3 \mid A(X) \Rightarrow \Phi_{2 \times 3} \mid A(X)$$

**Theorem B1.** *If  $A$  tiles the integers, then  $A(x)$  satisfies (T1).*

$$A^*(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_{12} = 1 + 2X + 2X^2 - X^3 - X^4 + X^5 + 2X^6 + X^7$$

$$A^*(1) = 7 \neq \Phi_2(1) \times \Phi_3(1) = 6$$

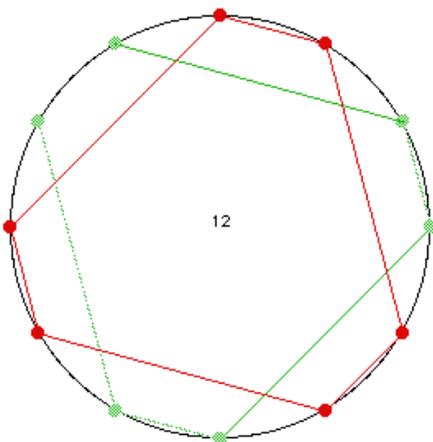
# Conjecture de Fuglede et canons rythmiques mosaïques

• E. Coven & A. Meyerowitz: “Tiling the integers with translates of one finite set”, 1999

Deux conditions de C&M :

T1 + T2 => pavage

pavage => T1



$$A(X) = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9 = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12}$$

$$\Phi_2(X) = 1 + X$$

$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$$

$$(T1) A(1) = 6 = \Phi_2(1) \times \Phi_3(1) = 2 \times 3$$

$$(T2) \Phi_2 \mid A(X) \text{ et } \Phi_3 \mid A(X) \Rightarrow \Phi_{2 \times 3} \mid A(X)$$

## Canons de Vuza de période $n$

72

108 120 144 168 180

200 216 240 252 264 270 280 288

300 312 324 336 360 378 392 396

400 408 432 440 450 456 468 480

500 504 520 528 540 552 560 576 588 594

600 612 616 624 648 672 675 680 684 696

700 702 720 728 744 750 756 760 784 792

800 810 816 828 864 880 882 888...

VOLUME 3 NUMBER 2 JULY 2009	ISSN 1745-9737
Journal of Mathematics & Music	
Mathematical and Computational Approaches to Music Theory, Analysis, Composition and Performance	
Special Issue on Tiling Problems in Music Guest Editors: Moreno Andreatta and Carlos Agon	
Guest Editors' Foreword Moreno Andreatta and Carlos Agon	63 - 70
New perspectives on rhythmic canons and the spectral conjecture Emmanuel Amiot	71 - 84
Algorithms for translational tiling Mihail N. Kolountzakis and Máté Mátolcsi	85 - 97
Tiling the integers with aperiodic tiles Franck Jedrzejewski	99 - 115

Si  $A$  pave mais il n'est pas spectral =>  $A$  est le rythme d'un canon de Vuza

# Transformée de Fourier discrète et pavage

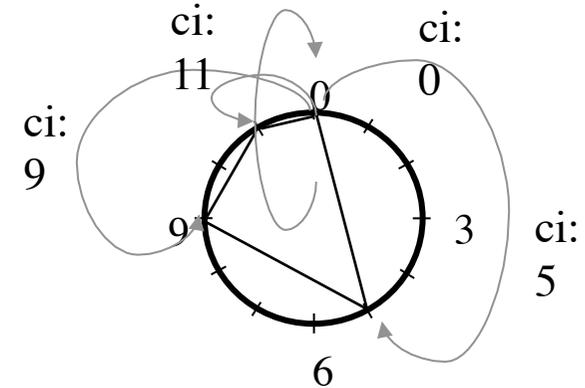
## TILING

Let  $Z_A = \{ t \in \mathbb{Z}_c, F_A(t)=0 \}$

A tiles  $\mathbb{Z}_c$  when equivalently:

- There exists B,  $A \oplus B = \mathbb{Z}_c$
- $1_A \star 1_B = 1$
- $F_A \times F_B(t) = 1 + e^{-2i\pi t/c} + \dots + e^{-2i\pi t(c-1)/c}$  (0 unless  $t=0$ )
- $Z_A \cup Z_B = \{1, 2 \dots c-1\}$  AND  $\text{Card } A \times \text{Card } B = c$
- $IC_A \star IC_B = IC(\mathbb{Z}_c) = c$  and  $\text{Card } A \times \text{Card } B = c$

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$



$$A = \{0, 5, 9, 11\}$$

$$IC_A(k) = 1 \quad \forall k = 1 \dots 11$$

$$IC_A(k) = \text{Card}\{(x, y) \in A \times A \mid x + k = y\}$$

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

**E. Amiot, « New Perspectives on Rhythmic Canons and the Spectral Conjecture », *Journal of Mathematics and Music*, 2009.**



# Pavage et Z-relation (homométrie)

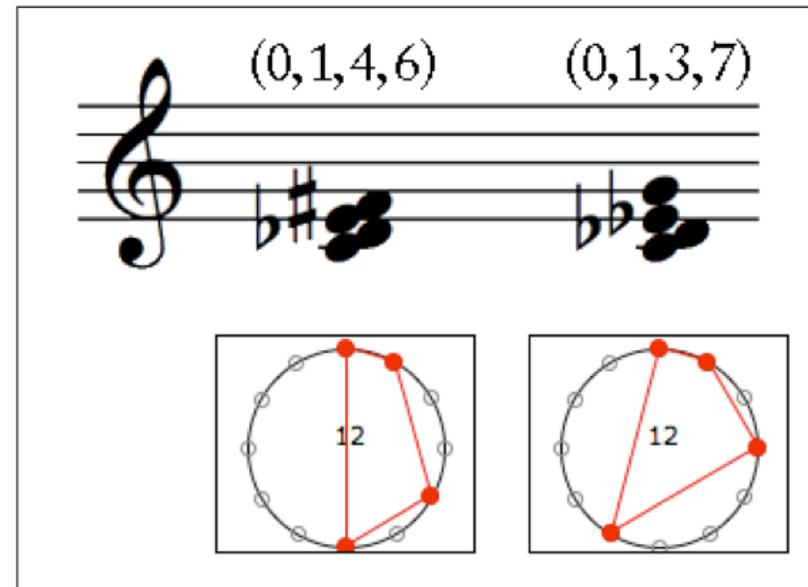
- Deux ensembles sont en Z-relations s'ils ont le même module de la DFT

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

$$\mathcal{F}(IC_A) = \mathcal{F}_A \times \mathcal{F}_{-A} = |\mathcal{F}_A|^2$$

## ➔ Reconstruction de la phase



Cf. D. Ghisi, J. Mandereau, E. Amiot, C. Agon, M. Andreatta, “Generalized Z-relation and Homometric Theory”, paper in progress, to be submitted to the *Journal of Mathematics and Music*

## *A musical offering:*

### ☀ *Theorem:*

If A tiles with B and A' has the same IC, then A' tiles with B, too.



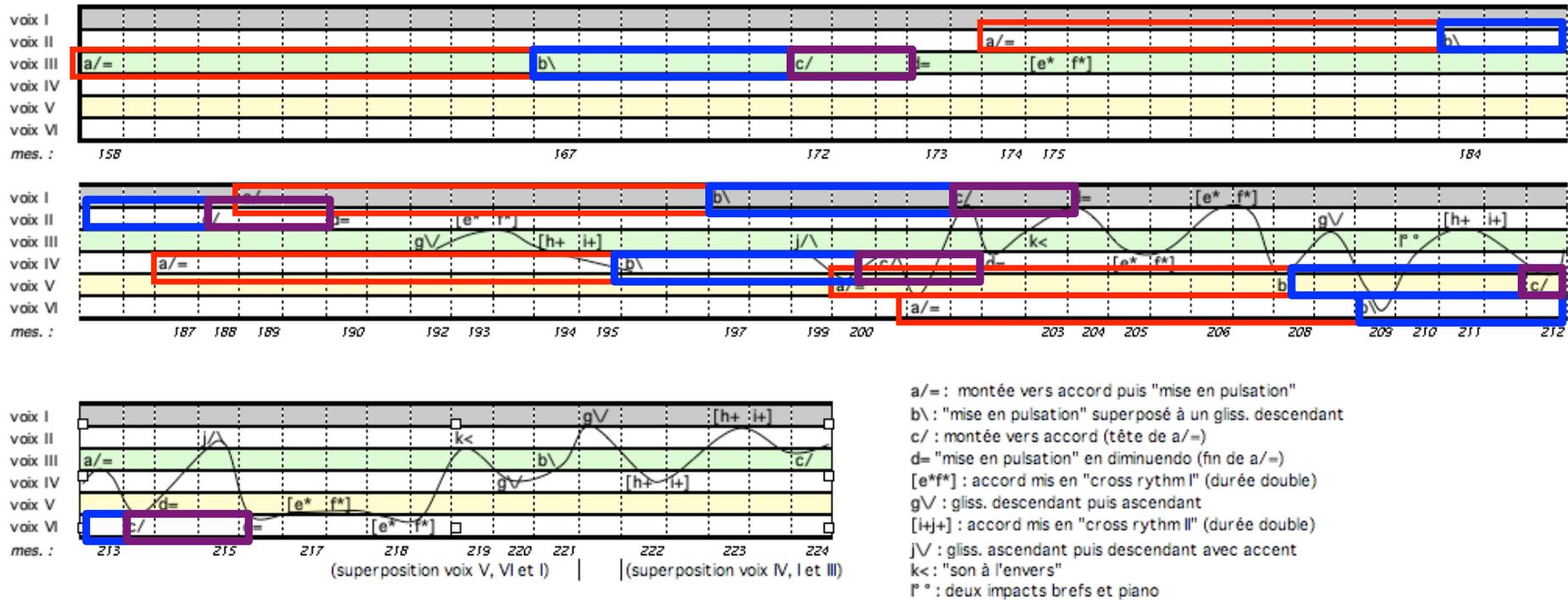
E. Amiot, « New Perspectives on Rhythmic Canons and the Spectral Conjecture », *Journal of Mathematics and Music*, 2009.

# Fabien Lévy

## Canons de Vuza pour une musique « morphologique »



• *Coïncidences* (pour 33 musiciens, 1999-2007)



Coïncidences - Fabien Lévy : déroulement du canon (mes. 158 à 226)  
(chaque impact fait 3 temps)



Interprètes : Tokyo Symphony Orchestra, Dir.: Kazuyoshi Akiyama, 05/09/2007, Suntory Hall, Tokyo, Japon

# Georges Bloch

## Stratégies compositionnelles à partir d'un modèle formel



- Réduction d'un canon par auto-similarité
- Modulations métriques entre canons
- Canons mosaïques et IAO (*OMax*)
- *Projet Beyeler* (2001) 
- *Projet Hitchcock*
- *Visite des tours de la cathédrale de Reims*
- *Noël des Chasseurs*
- *Canons à marcher*
- *Canon à eau*
- *Harawun* (2004)
- *L'Homme du champ* (2005)
- *A piece based on Monk* (2007)
- *Peking Duck Soup* (2008)



73  
V1  
mp  
73  
V2  
mp  
73  
V3  
mp pp  
73  
V4  
mf  
73  
V5  
f  
73  
V6  
pp f

- *A piece based on Monk* (2007)  
(« Well You Need'nt »)

# Mauro Lanza

## Canons de Vuza et périodicités locales



- *La descrizione del diluvio* (Ricordi, 2007-2008)

Canon à 14 voix sur le pattern rythmique :

(1 3 25 27 1 3 11 14 27 1 3 25 27 4 25 27 1 3 25 14 13 1 3 25 27 1 3 52)

No. 1 "Aria"

Local Dynamics :

General Dynamic: *ppppp* - *pp*

*poco a poco crescendo* fino a misura 40 (*ppp* - *mf*)

Electronica

Soprano

Mezzo

Alto

Tenore

Baritono

Basso

♩ = 80

4/4

Local Dynamics details:  
 La - ria e - ra os - cu-ra per la spes - sa  
 pioq - gia pie - ga-ta dal tra - ver - sal-cor - so dei ven - ti

6 voix sont en live et 8 dans l'électronique. L'unité est la double-croche de triolet. Le choix des notes et des durées est fait en cherchant à souligner certaines **quasi-périodicités** du canon de Vuza, et cela donne à chaque voix un caractère beaucoup plus "redondant".



# Mauro Lanza

## Canons de Vuza et périodicités locales

---



- *La descrizione del diluvio* (Ricordi, 2007-2008)

*[...] Le choix des notes et des durées est fait en cherchant à souligner certaines quasi-périodicités du canon de Vuza, et cela donne à chaque voix un caractère beaucoup plus “redondant”.*

**(1 3 25 27 1 3 11 14 27 1 3 25 27 4 25 27 1 3 25 14 13 1 3 25 27 1 3 52)**

**(1 3 25 27 1 3 11 14 27 1 3 25 27 4 25 27 1 3 25 14 13 1 3 25 27 1 3 52)**

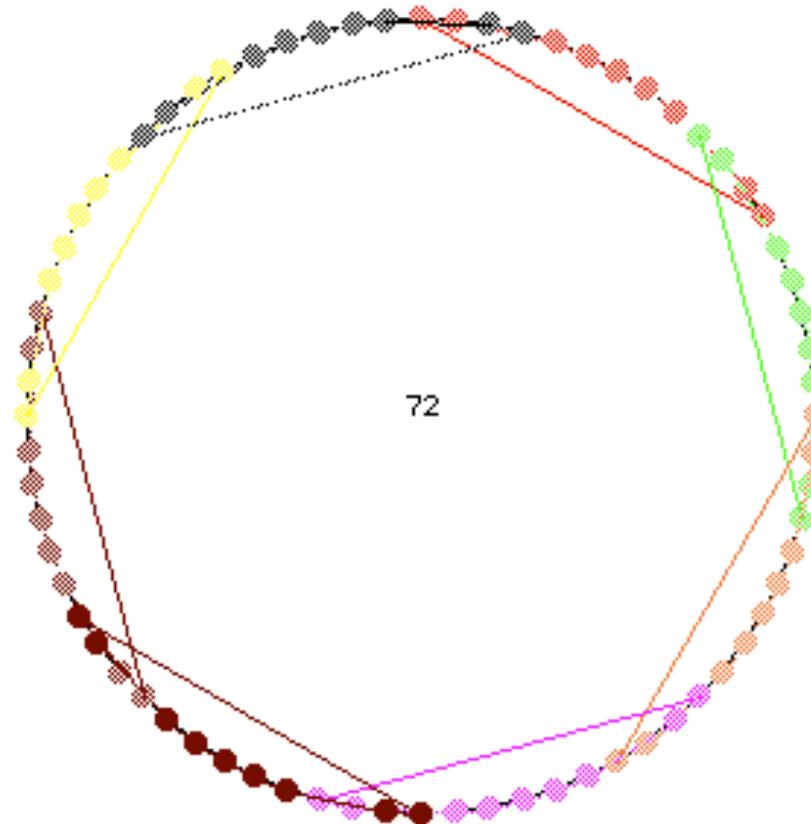
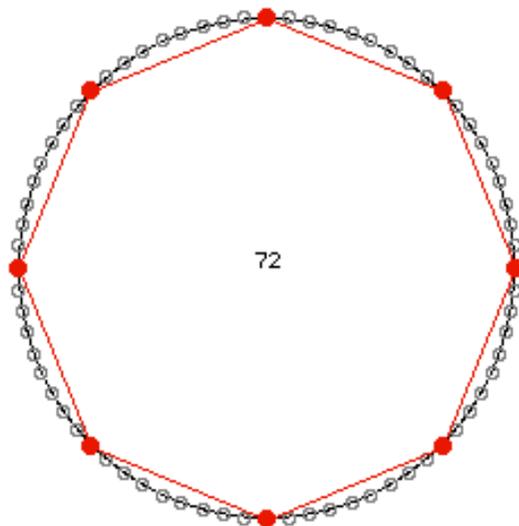
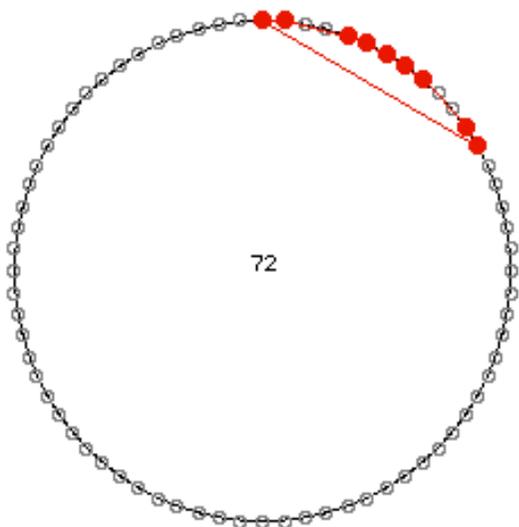
**(1 3 25 27 1 3 11 14 27 1 3 25 27 4 25 27 1 3 25 14 13 1 3 25 27 1 3 52)**

**(1 3 25 27 1 3 11 14 27 1 3 25 27 4 25 27 1 3 25 14 13 1 3 25 27 1 3 52)**

**(1 3 25 27 1 3 11 14 27 1 3 25 27 4 25 27 1 3 25 14 13 1 3 25 27 1 3 52)**

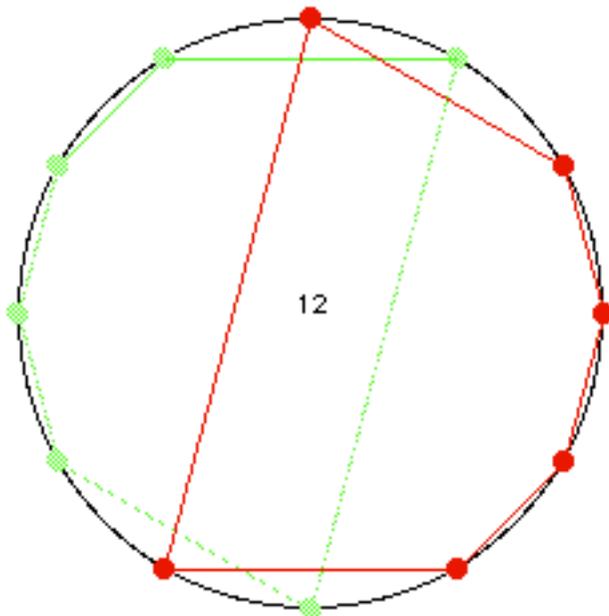
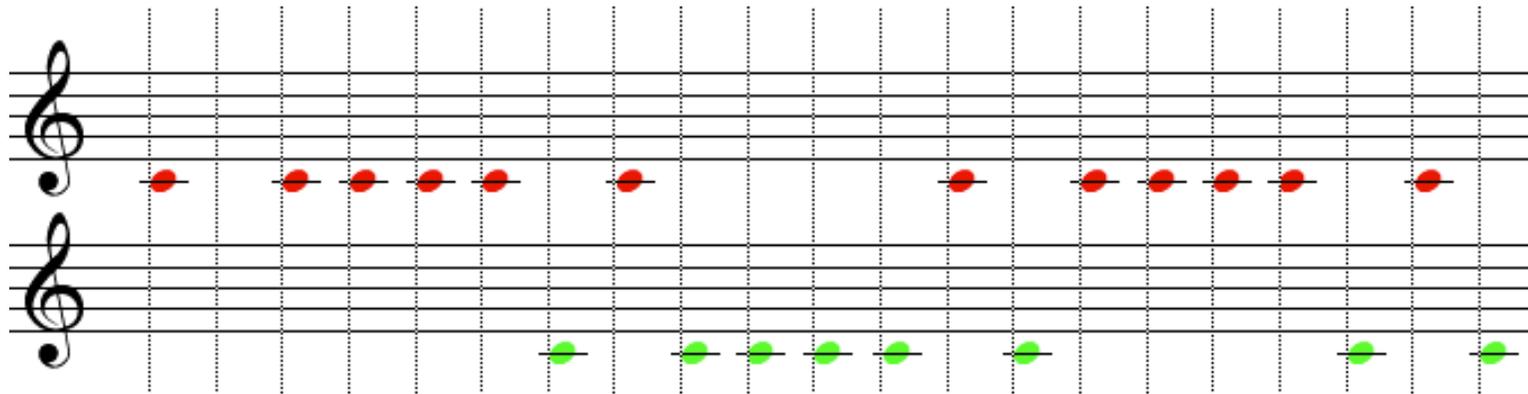
# La famille des « canons cyclotomiques »

---



- E. Amiot, M. Andreatta, C. Agon: « Tiling the (musical) line with polynomial: some theoretical and implementational aspects », *ICMC*, Barcelona, 2005, pp.227-230.

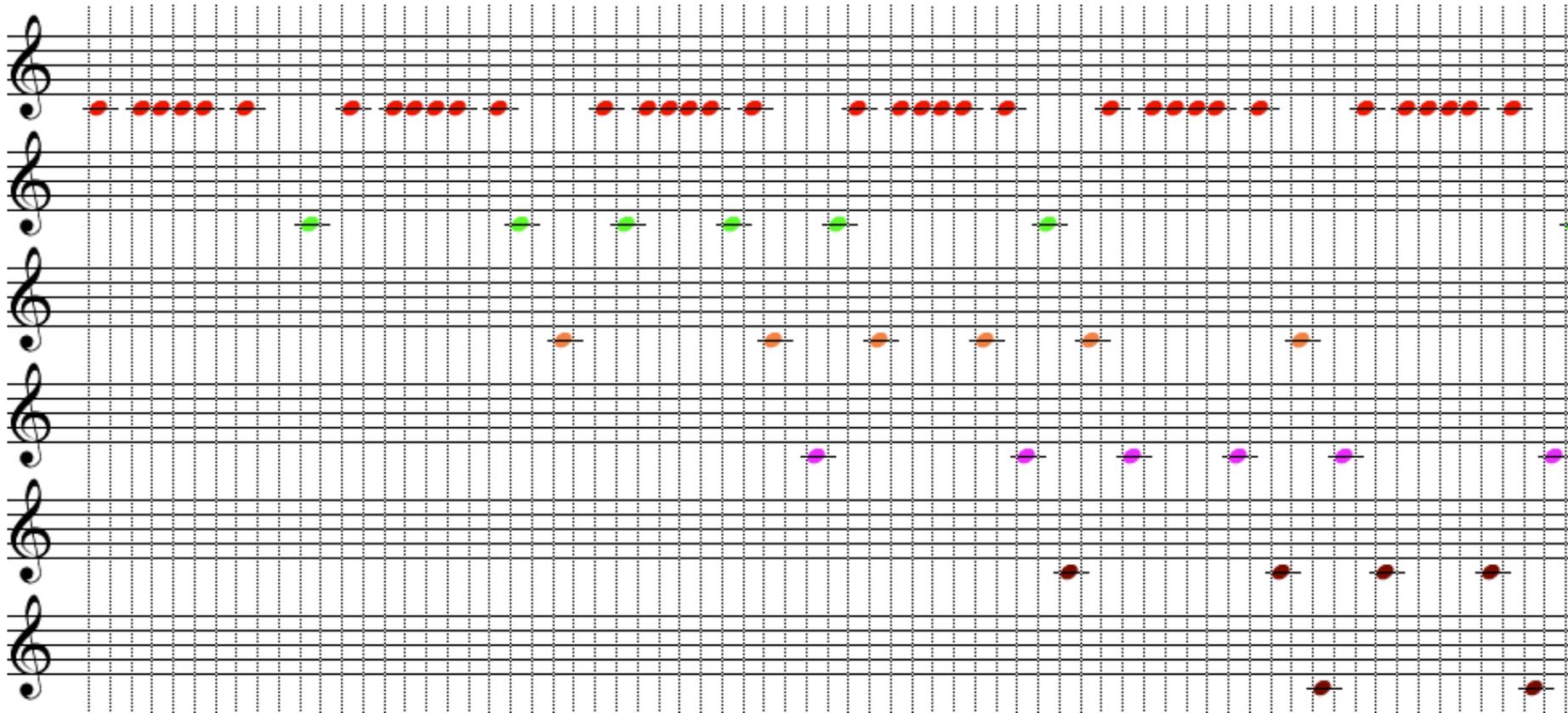
# Canons mosaïques par translation et augmentation



((0 1 2 3 4 6) ((1 11)))  
 ((0 1 2 3 4 5) ((1 11) (1 1)))  
 ((0 1 2 3 5 7) ((1 11) (1 7)))  
 ((0 1 3 4 7 8) ((1 5)))  
 ((0 1 2 3 6 7) ((1 11)))  
 ((0 1 3 4 6 9) ((1 11) (1 5)))  
 ((0 1 3 6 7 9) ((1 11) (1 5)))  
 ((0 1 2 6 7 8) ((1 11) (1 7) (1 5) (1 1)))  
 ((0 1 4 5 8 9) ((1 11) (1 7) (1 5) (1 1)))  
 ((0 1 2 5 6 7) ((1 7) (1 5)))  
 ((0 2 3 4 5 7) ((1 11) (1 7) (1 5) (1 1))) ←  
 ((0 1 4 5 6 8) ((1 11) (1 7)))  
 ((0 1 2 4 5 7) ((1 5)))  
 ((0 1 3 4 5 8) ((1 5) (1 1)))  
 ((0 1 2 4 5 8) ((1 11)))  
 ((0 1 2 4 6 8) ((1 11) (1 7)))  
 ((0 2 3 4 6 8) ((1 11)))  
 ((0 2 4 6 8 10) ((1 11) (1 7) (1 5) (1 1)))

# Augmented Tiling Canons ou l'action du groupe affine

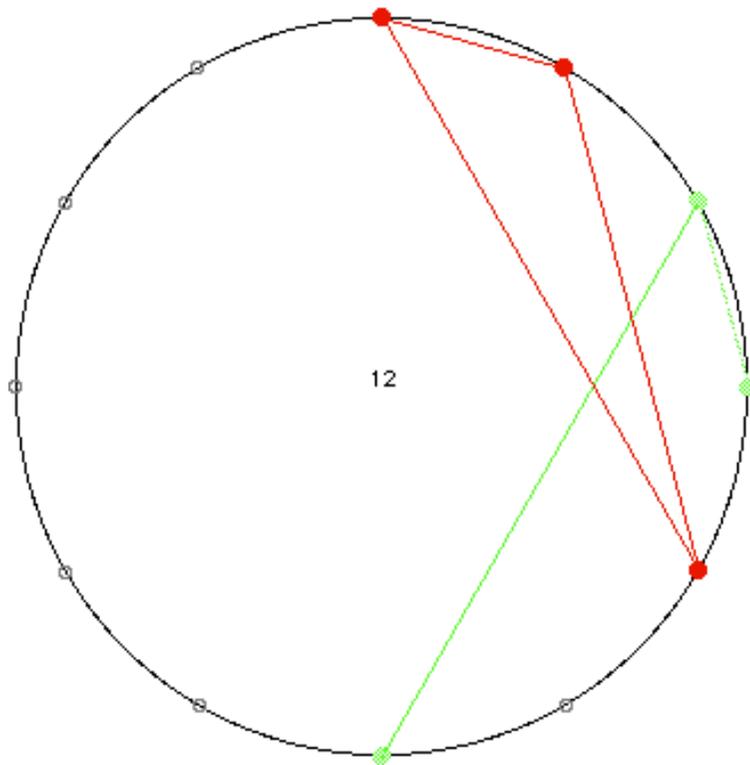
(en collaboration avec Thomas Noll)



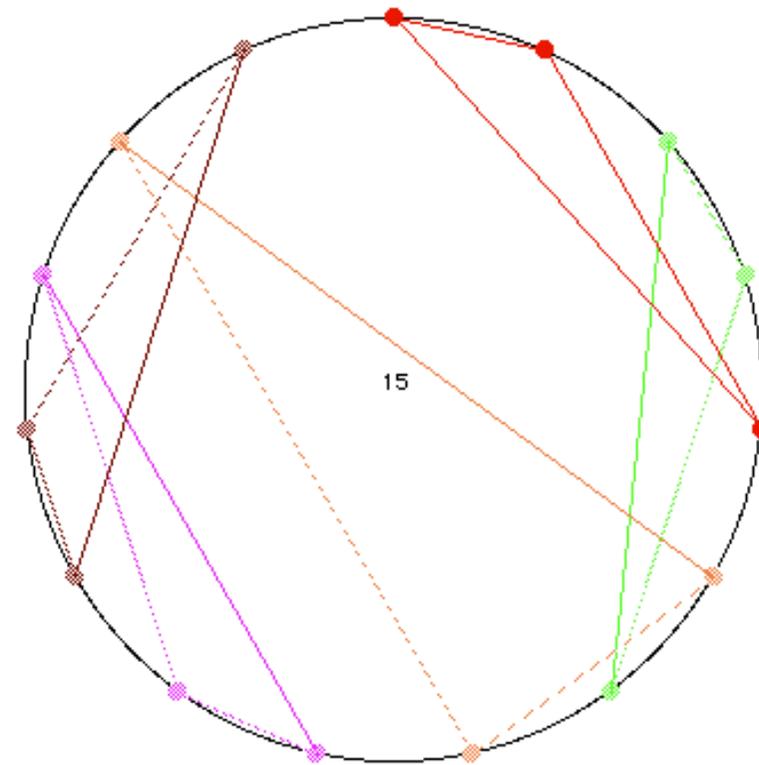
# Tiling the line and/or circle with augmentations

- **Tom Johnson (2001): tiling the line with a given rhythmic pattern**
  - ex. (0 1 4). Does it tile? With augmentations? With which period?

• **Theorem (Amiot, 2002) : Any tiling of the line with the pattern (0 1 4) and its augmentations is periodic and the period is equal to a multiple of 15**



$n = 12$



$n = 15$

# Tom Johnson's « Self-Similar Melodies »

The image displays two systems of musical notation. Each system consists of a treble clef staff and a bass clef staff. The lyrics are written below the treble clef staff.

System 1:  
Trebble clef: *La vie est si cour-te, la mort est si lon-gue. La vie est si cour-te,*  
Bass clef: *La vie est si cour-te, la mort est si lon-gue. La vie est si cour-te,*

System 2:  
Trebble clef: *la mort est si lon-gue. La vie est si cour-te, la mort est si lon-gue.*  
Bass clef: *la mort est si lon-gue. La vie est si cour-te, la mort est si lon-gue.*

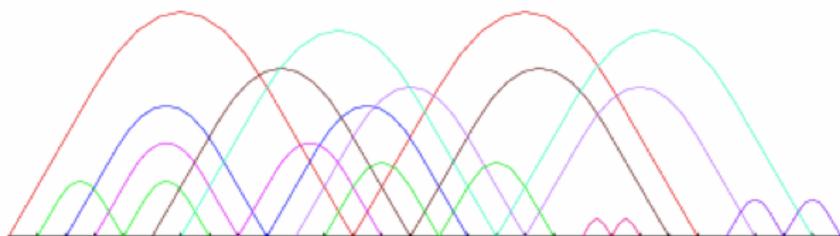
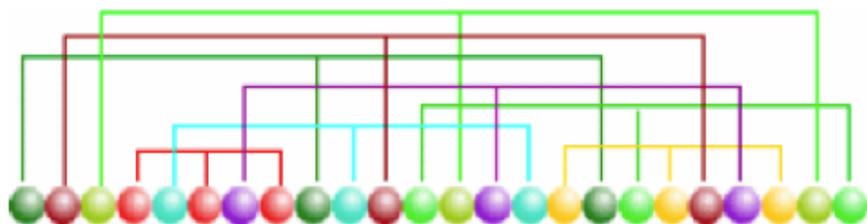
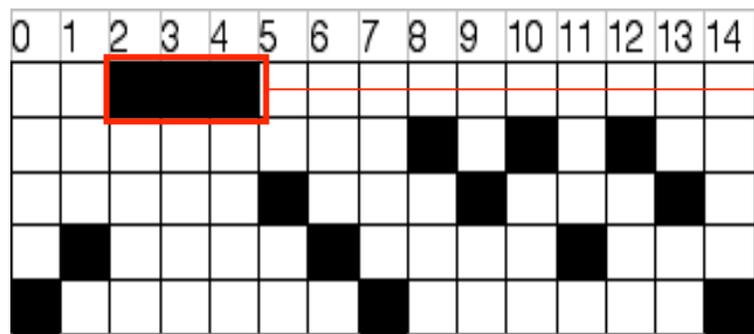
The melody in the treble clef is a simple, repetitive sequence of notes: G4, A4, B4, C5, B4, A4, G4, F4, E4, D4, C4. The bass clef accompaniment consists of a single note per measure: G2, F2, E2, D2, C2.

# Tom Johnson's Perfect Tilings

## Tilework for Piano

perfect triplet tilings, 5th order

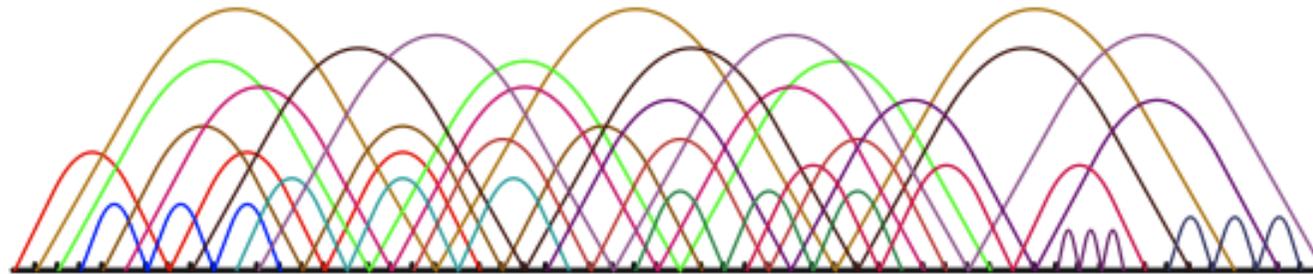
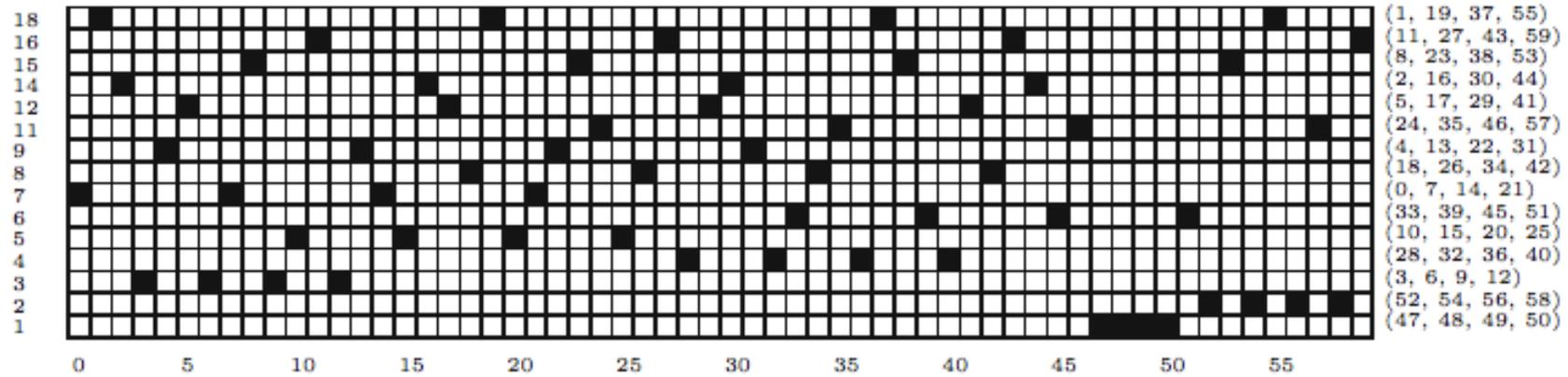
with thanks to Jon Wild and Erich Neuwirth



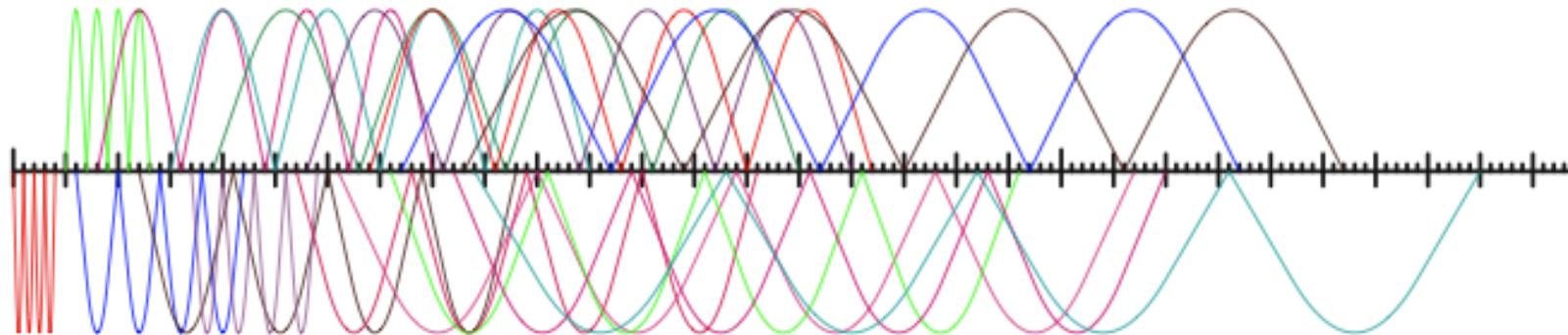
Jean-Paul Davalan, « Perfect Rhythmic Tilings » (to appear in *Perspectives of New Music*, special issue on Tiling Problems in Music, 2011)



# Perfect Rhythmic Tilings and open problems



Does it exist a quintuple perfect tiling canon?



# Séquences périodiques et calcul de différences finies

$$Df(x) = f(x) - f(x-1).$$

$$\begin{aligned}
 f &= 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \dots \\
 Df &= 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \dots \\
 D^2 f &= 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ 10 \ 11 \dots \\
 D^3 f &= 7 \ 5 \ 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \ 1 \ 8 \dots \\
 D^k f &= \dots\dots
 \end{aligned}$$

*dolcissimo*  
*mf*      *mp*      *pp*      *pt*      *pt*  
*p*      *mf*      *mp*      *pp*      *pp*

V	0	3	8	7	11	0	11	10	6	9	0	9	1	2	9	8	4	3	6
VIII	0	0	0	0	3	3	7	2	0	0	0	6	3	3	3	4	8	0	0
IV	3	3	4	4	1	11	11	8	3	3	9	4	1	7	11	8	11	3	9
IX	0	0	0	0	0	3	6	[1]	3	3	3	3	9	0	3	6	[10]	6	6
IV	0	10	3	9	10	0	9	7	0	6	7	9	6	4	9	3	4	6	3

Anatol Vieru: *Zone d'oubli* pour alto (1973)

# Séquences réductibles et séquences reproductibles

=> OpenMusic

$$\begin{array}{rcl}
 f & = & 11 \ 6 \ 7 \ 2 \ 3 \ 10 \ 11 \ 6 \ \dots \\
 Df & = & \begin{array}{c} \diagdown \ \diagup \\ 7 \ 1 \ 7 \ 1 \ 7 \ 1 \ 7 \ 1 \ \dots \end{array} \\
 D^2f & = & \begin{array}{c} \diagdown \ \diagup \\ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \ \dots \end{array} \\
 D^4f & = & \begin{array}{c} \diagdown \ \diagup \\ 0 \ 0 \ 0 \end{array}
 \end{array}$$

Séquences réductibles :  
 $\exists k \geq 1$  tel que  $D^k f = 0$

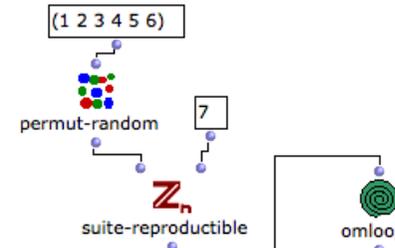
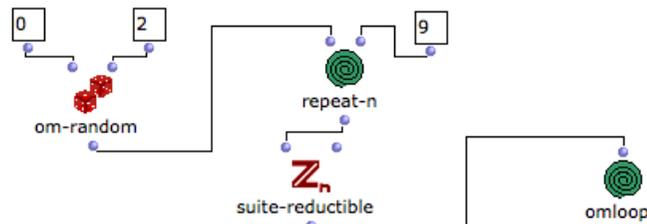
$$\begin{array}{rcl}
 f & = & 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ \dots \\
 Df & = & \begin{array}{c} \diagdown \ \diagup \\ 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \ 1 \ \dots \end{array} \\
 D^2f & = & \begin{array}{c} \diagdown \ \diagup \\ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ \dots \end{array} \\
 D^3f & = & \begin{array}{c} \diagdown \ \diagup \\ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ \dots \end{array} \\
 D^4f & = & 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ \dots \\
 D^5f & = & 1 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 11 \ 1 \ 8 \ \dots \\
 D^6f & = & 7 \ 11 \ 10 \ 11 \ 7 \ 2 \ 7 \ 11 \ \dots
 \end{array}$$

Séquences reproductibles :  
 $\exists k \geq 1$  tel que  
 $D^k f = f$

# Critères de réductibilité et de reproductibilité

Toute séquence de période  $p^n$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est réductible

Toute séquence de  $p-1$  nombres différents à valeurs dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est reproductible

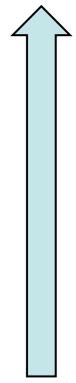


A musical score consisting of ten staves, each containing a sequence of notes with sharp signs, representing a reducible sequence.

A musical score consisting of ten staves, each containing a sequence of notes with sharp signs, representing a reproducible sequence.

# Additions successives à valeurs dans un groupe

---


$$\begin{array}{rcl} A^3 f & = & 0 \quad 1 \quad 5 \quad \dots \\ & & \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \\ A^2 f & = & 1 \quad 4 \quad 9 \quad 4 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 4 \dots \\ & & \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \\ A f & = & 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 1 \quad 3 \quad 5 \dots \\ & & \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \\ f & = & 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array}$$

# Additions successives et prolifération des valeurs

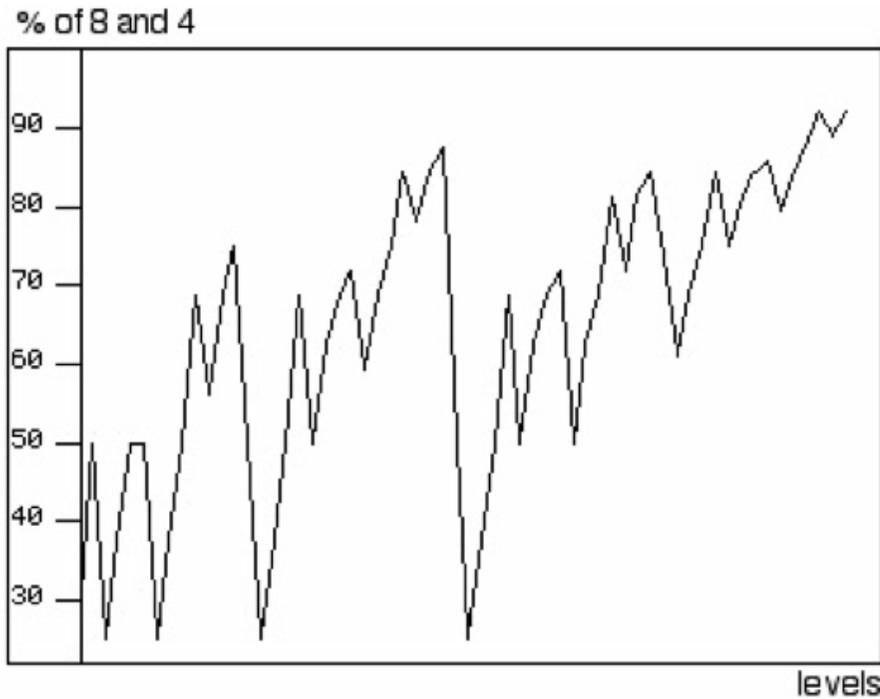
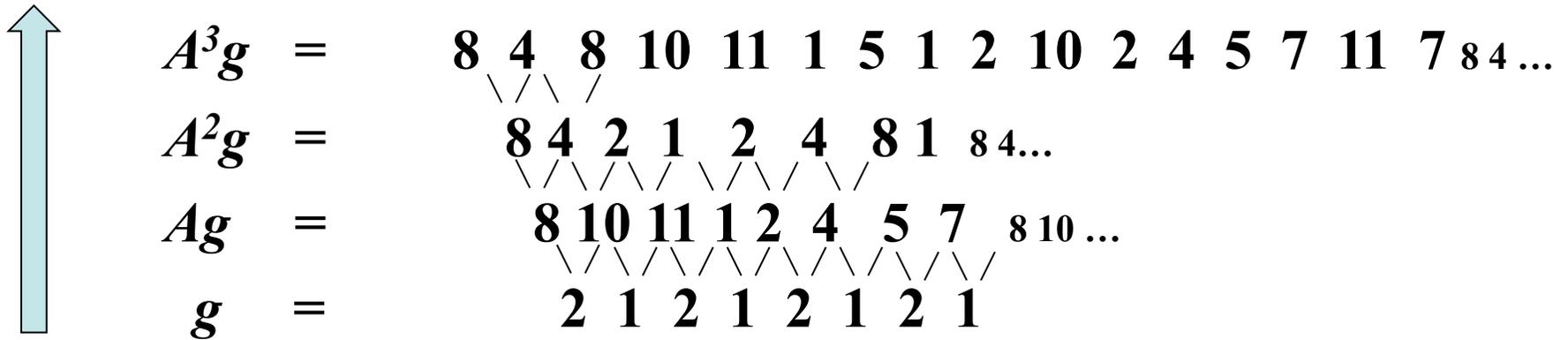


Fig. 11 Initial values equal to 8

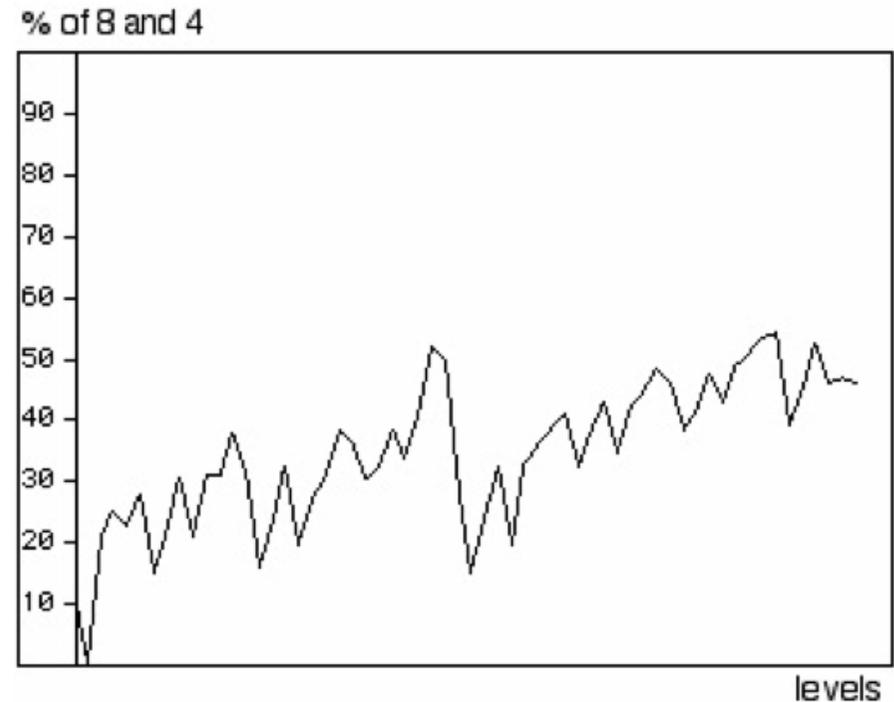
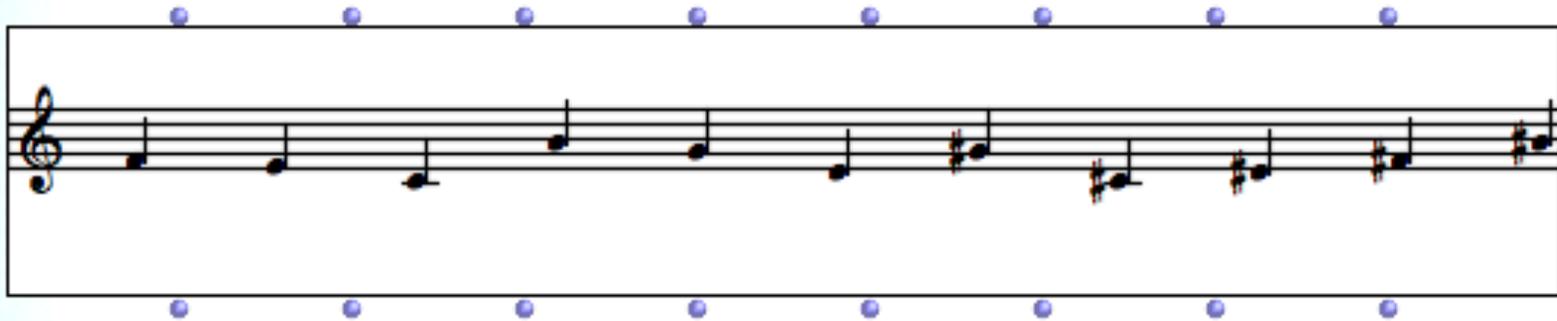


Fig. 15 Initial values equal to 4

# Théorème de décomposition

Toute séquence périodique (à valeurs dans un groupe cyclique  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ ) peut se décomposer de façon unique en somme d'une séquence réductible et d'une séquence reproductible (2001)



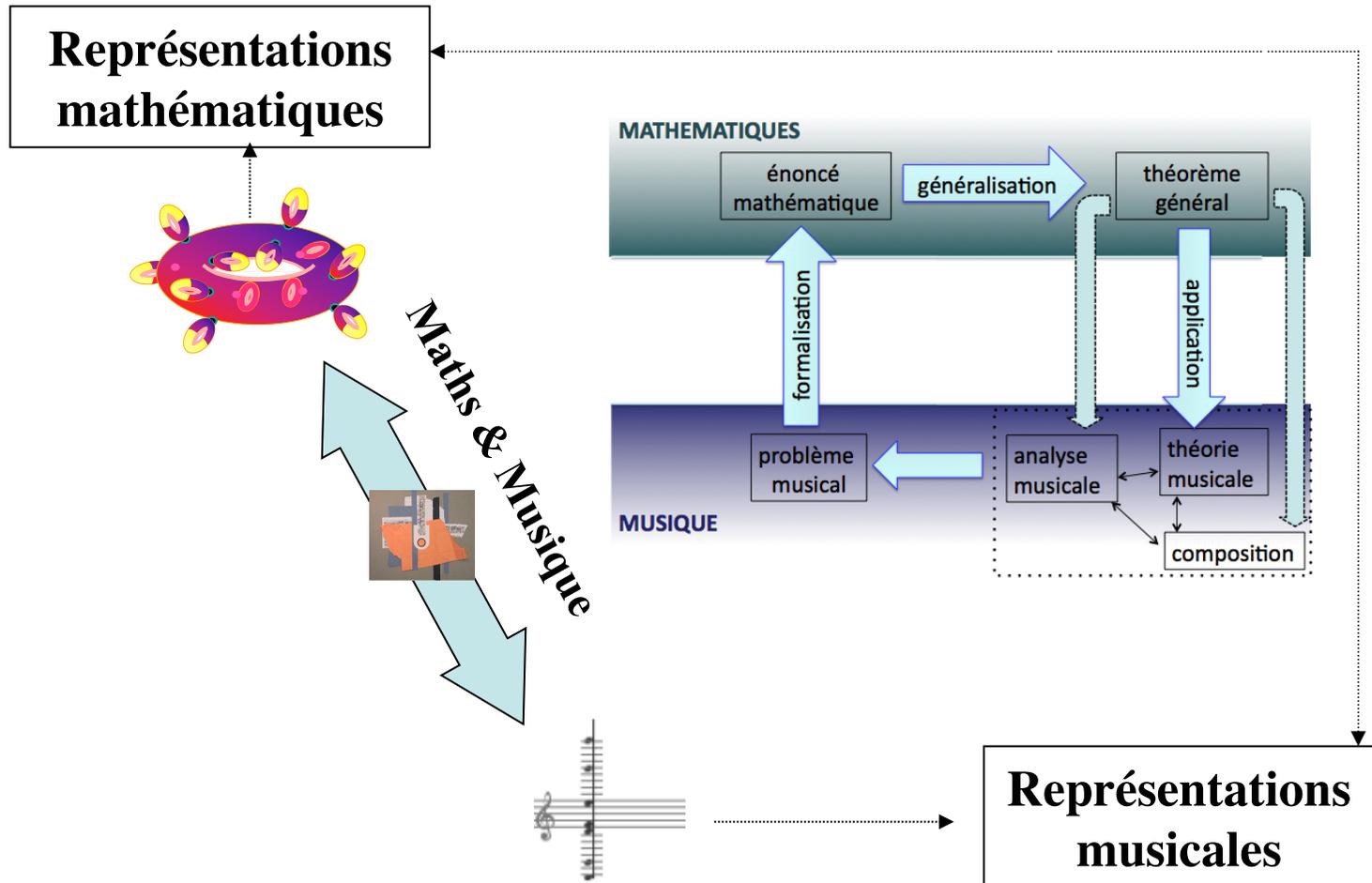
5 4 0 9 7 2 8 1 3 6 10 11

Red 1 4 10 7 1 4 10 7 1 4 10 7

Rep 4 0 2 2 6 10 10 6 2 2 0 4

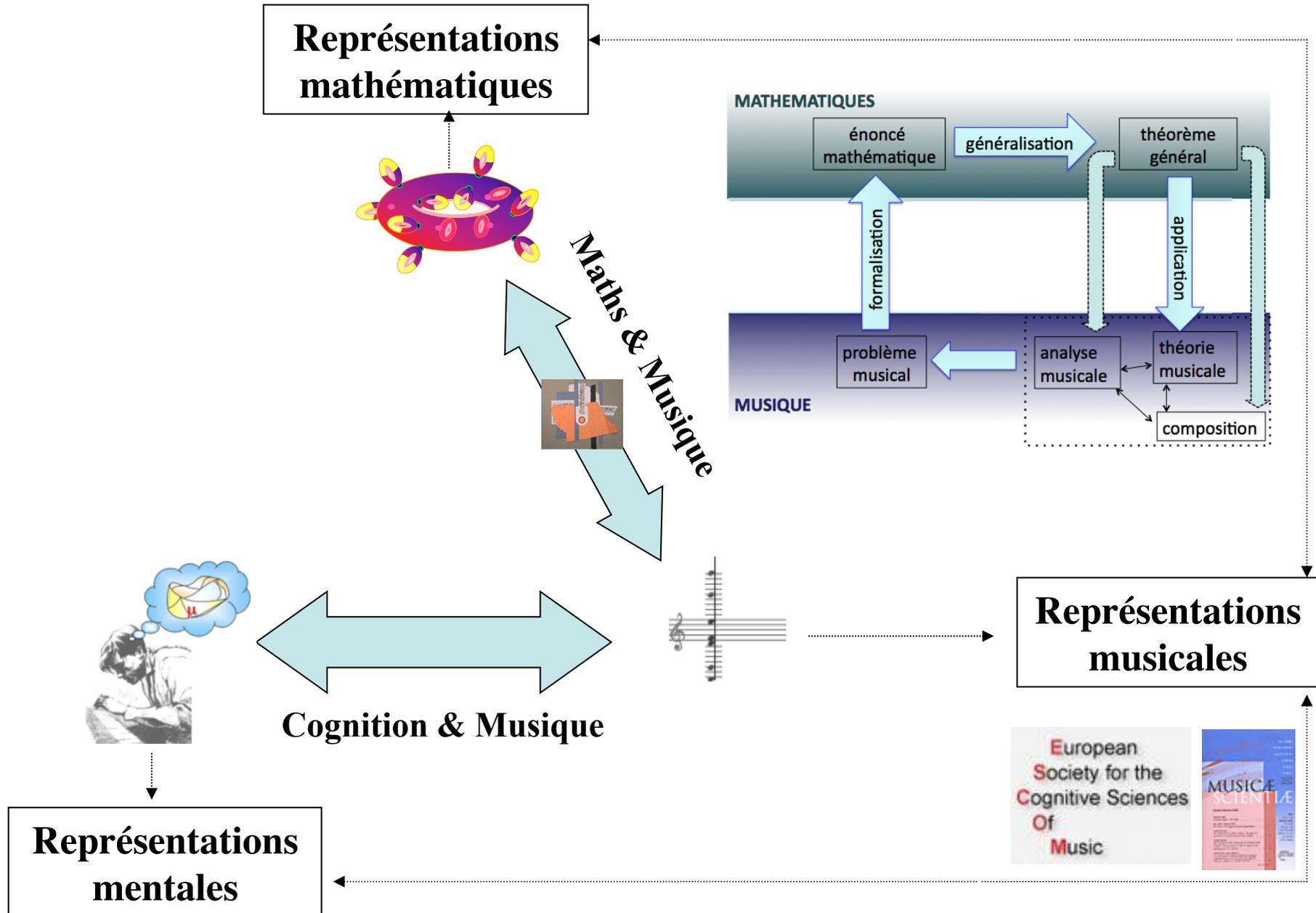
# Quelle est la place de la cognition ?

<http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/Cognition.html>



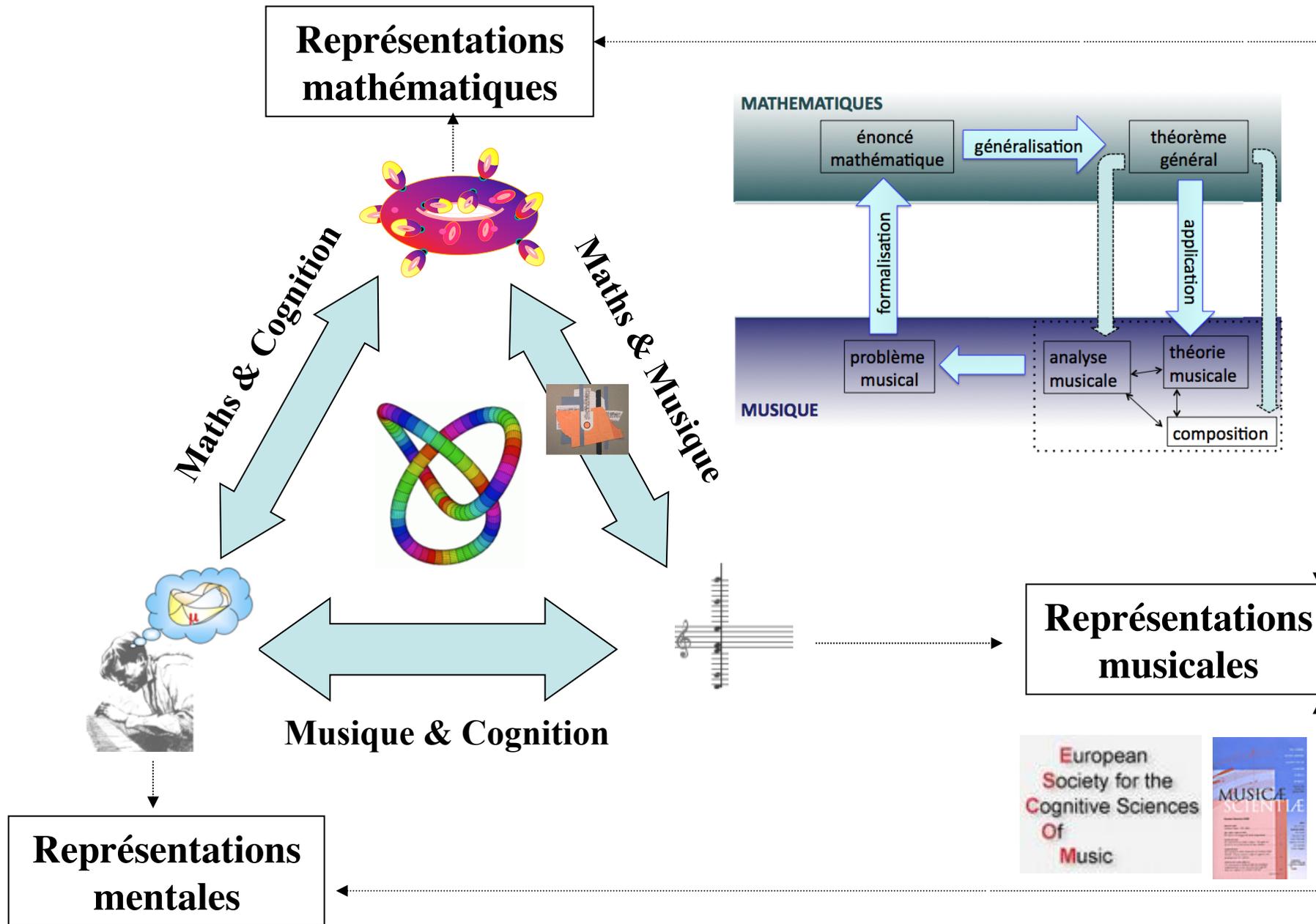
# Quelle est la place de la cognition ?

<http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/Cognition.html>

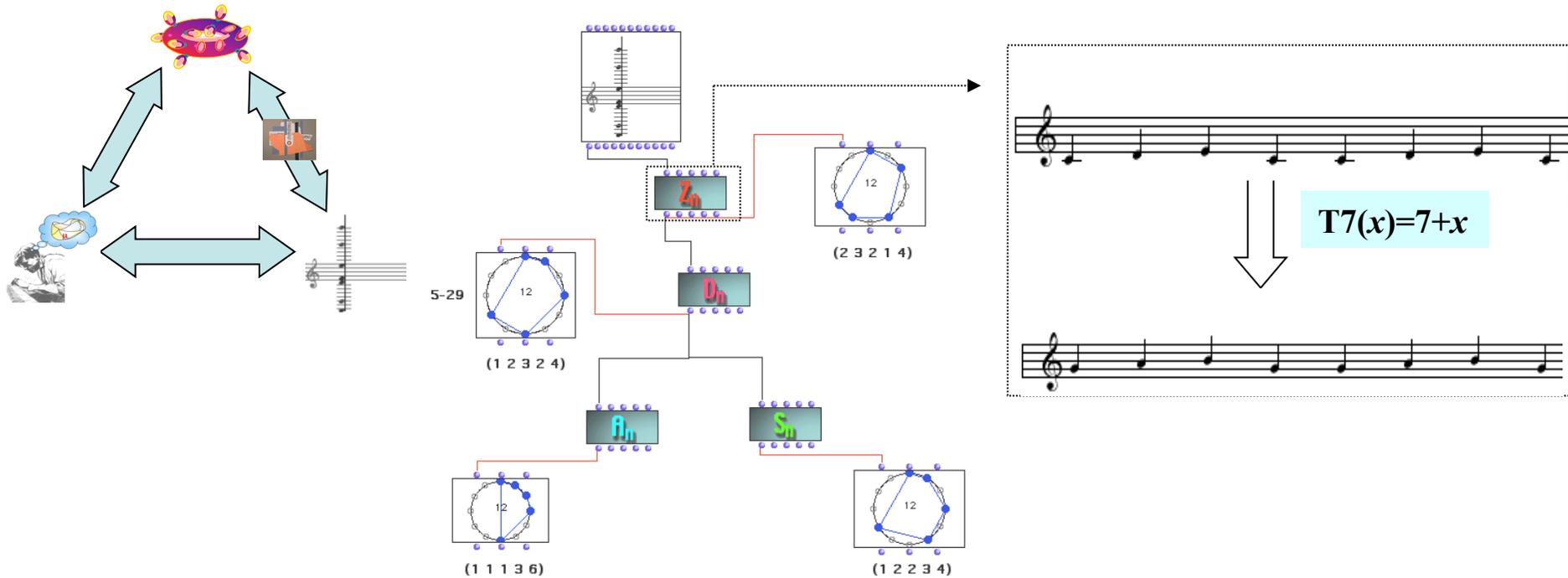


# Quelle est la place de la cognition ?

<http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/Cognition.html>



# Approche paradigmatic et perception



The nature of a given geometry is [...] defined by the *reference* to a determinate group and the way in which spatial forms are related within that type of geometry. [Cf. *Felix Klein Erlangen Program - 1872*][...] We may raise the question whether there are any concepts and principles that are, although in different ways and different degrees of distinctness, necessary conditions for both the *constitution* of the perceptual world and the construction of the universe of geometrical thought. It seems to me that the concept of group and the concept of invariance are such principles.



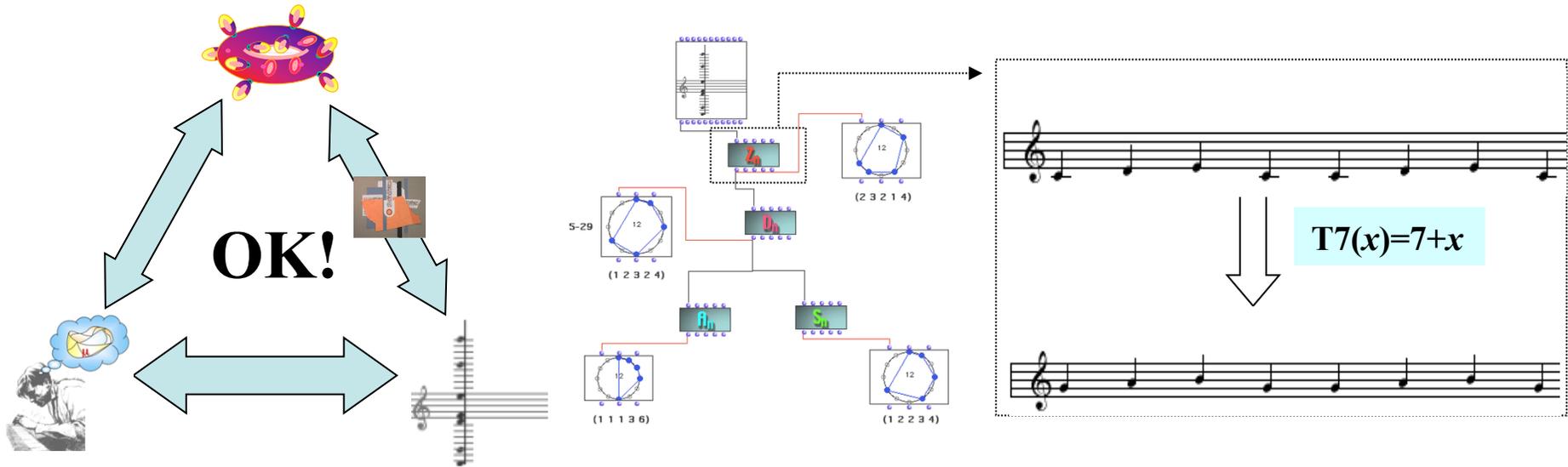
Felix Klein



Ernst Cassirer

E. Cassirer : « The concept of group and the theory of perception », 1944

# Approches diatoniques et perception musicale

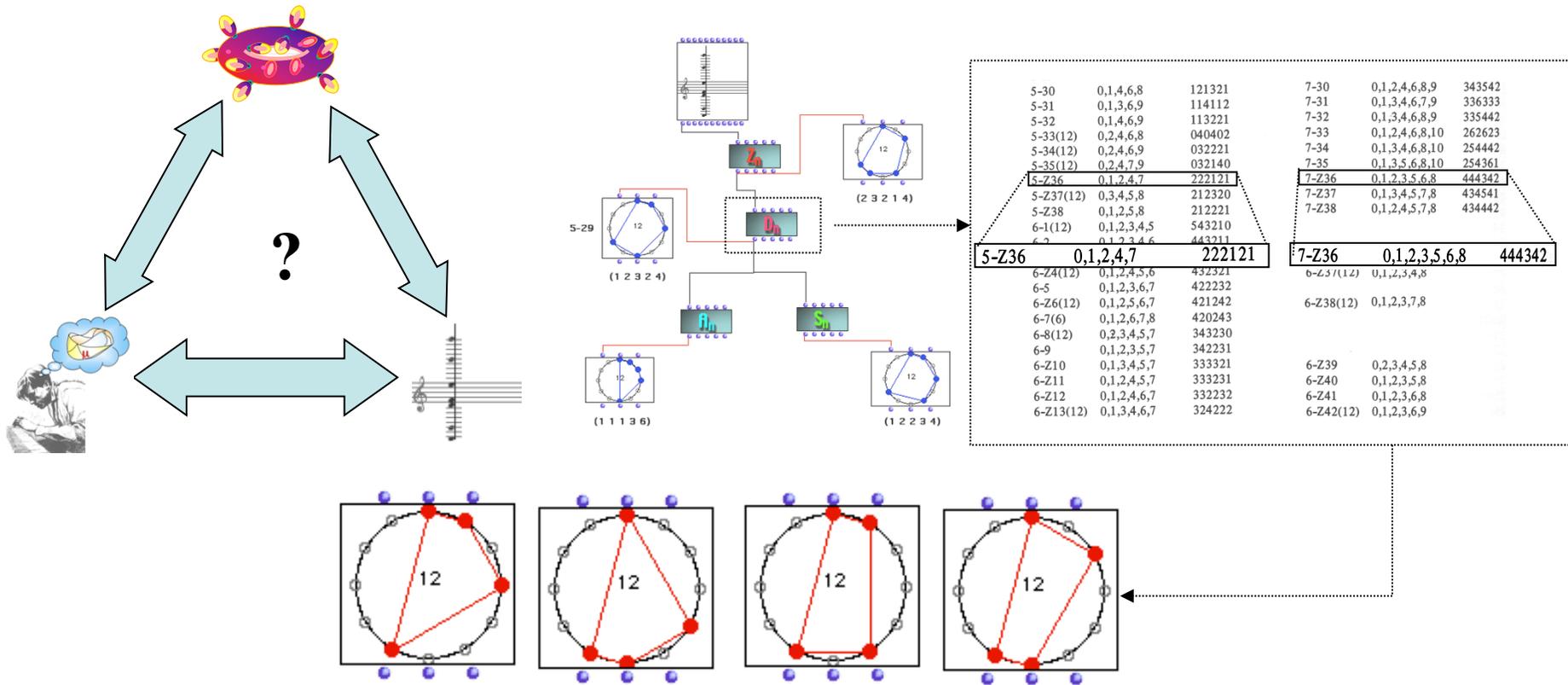


- Gerald Balzano, « The group-theoretic representation of 12-fold and microtonal pitch systems », *CMJ*, 4, 1980
- Gerald Balzano, « The pitch set as a level of description for studying musical pitch perception ». In M. Clynes (éd.), *Music, Mind and Brain*, 1982
- Ian Cross, P. Howell & R. West, « Preferences for scale structure in melodic sequences », *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 9(3), 1983
- René Van Egmond, David Butler, « Diatonic Connotations of Pitch-Class Sets », *Music Perception*, 15(1), 1997
- Ian Cross, « Pitch Schemata », in I. Deliège & J. Sloboda (éd.), *Perception and Cognition of Music*, 1997.

		m3	m3	m3	m3	m3	m3
		↓	↓	↓	↓	↓	↓
M3 →	0	4	8	0	4	8	
M3 →	3	7	11	3	7	11	
M3 →	6	10	2	6	10	2	
M3 →	9	1	5	9	1	5	
M3 →	0	4	8	0	4	8	
M3 →	3	7	11	3	7	11	
M3 →	6	10	2	6	10	2	
M3 →	9	1	5	9	1	5	

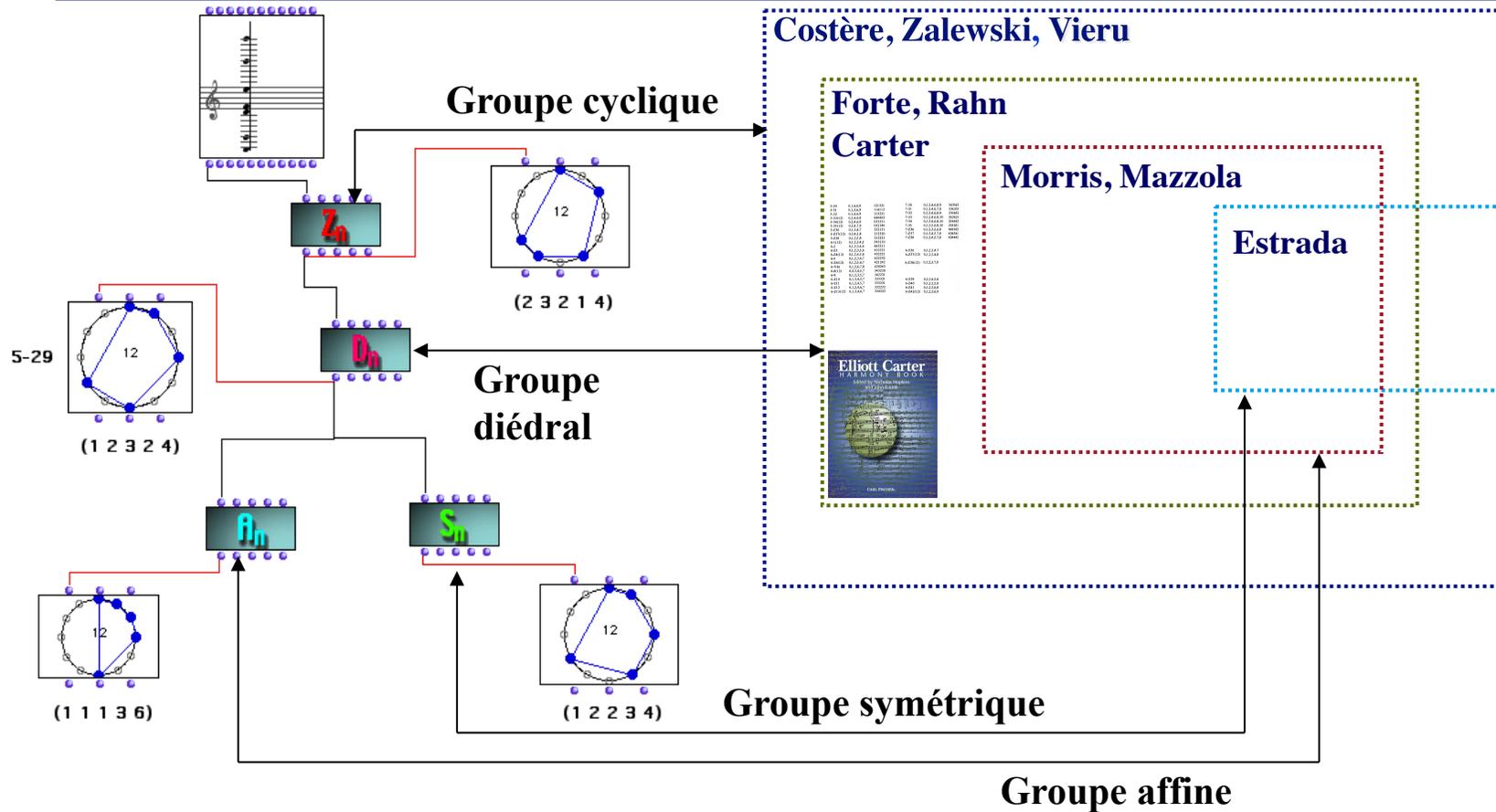
Balzano, *CMJ*, 1980

# Approches « set-théoriques » et perception musicale



« Trained musicians rated the similarity of 24 instances of set classes [0137/0467] and [0157/0267] at three different transposition levels and two different spacing types. [...] The results are consistent with the hypothesis that even musicians with significant experience of atonal music do not use the equivalence relation  $TnI$  in making similarity judgments »

# Architecture paradigmatique et dualité objectale/opératoire



« [C'est la notion de groupe qui] donne un sens précis à l'idée de structure d'un ensemble [et] permet de déterminer les éléments efficaces des transformations en réduisant en quelque sorte à son schéma opératoire le domaine envisagé. [...] L'objet véritable de la science est le système des relations et non pas les termes supposés qu'il relie. [...] Intégrer les résultats - symbolisés - d'une expérience nouvelle revient [...] à créer un canevas nouveau, un groupe de transformations plus complexe et plus compréhensif »

G.-G. Granger : « Pygmalion. Réflexions sur la pensée formelle », 1947



G.-G. Granger

# Approche catégorielle et cognition : de Piaget aux SEM



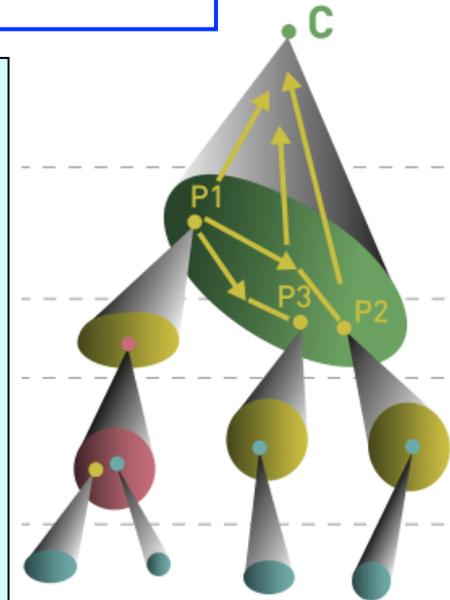
J. Piaget

*« La théorie des catégories est une théorie des constructions mathématiques, qui est macroscopique, et procède d'étage en étage. Elle est un bel exemple d'abstraction réfléchissante, cette dernière reprenant elle-même un principe constructeur présent dès le stade sensori-moteur. Le style catégoriel qui est ainsi à l'image d'un aspect important de la genèse des facultés cognitives, est un style adéquat à la description de cette genèse »*

Jean Piaget, Gil Henriques et Edgar Ascher, *Morphismes et Catégories. Comparer et transformer*, 1990

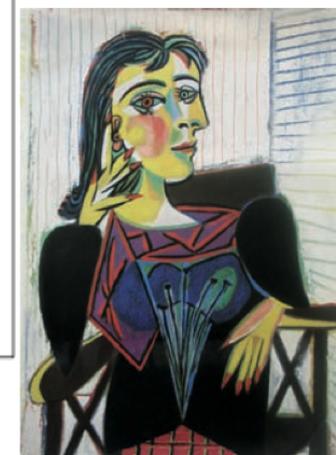
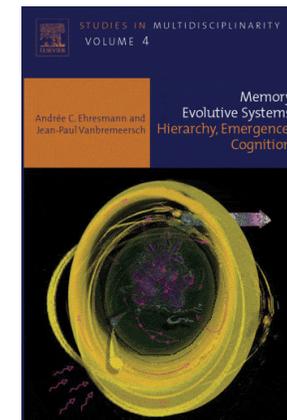
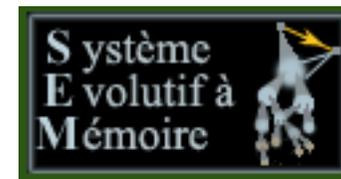
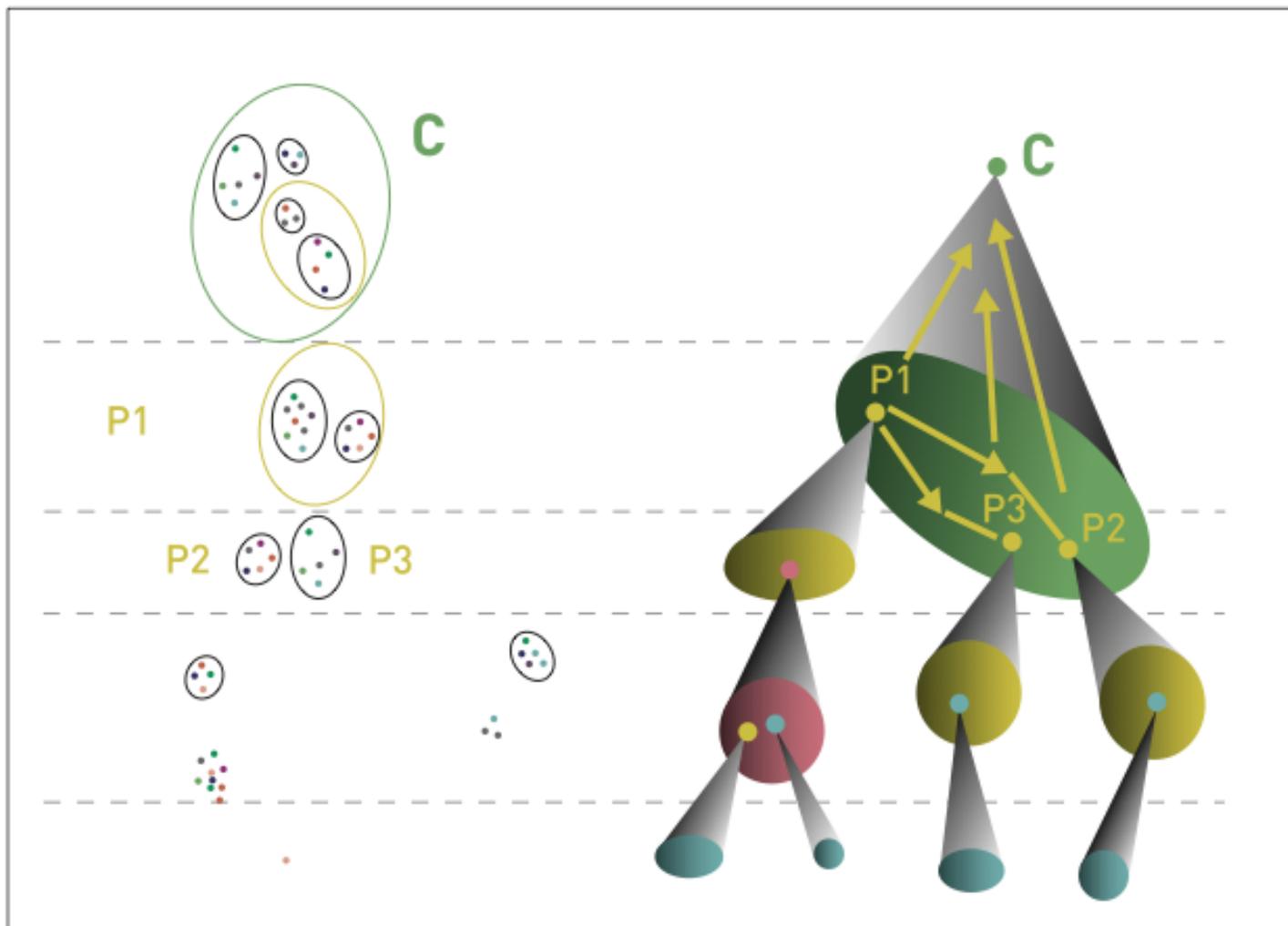
- G. S. Halford & W. H. Wilson, "A Category Theory Approach to Cognitive Development", *Cognitive Psychology*, 12, 1980
- J. Macnamara & G. E. Reyes, *The Logical Foundation of Cognition*, OUP, 1994

*« [...]L'émergence d'une œuvre d'art est l'expression d'une dynamique se développant dans un système hiérarchique de complexité croissante à multiples temporalités. Notamment, dans le cadre de notre modèle mathématique « les systèmes évolutifs à mémoire » (SEM), nous analysons l'existence d'objets multiformes émergeant dans le système sociétal d'un « monde artistique »; il pourrait s'agir de courants artistiques, issus de mouvements de pensée, de mouvements sociaux, culturels, scientifiques, technologiques. » (Colloque « Complexité dan les sciences et dans les arts », Ircam, 8-19 juin 2009)*



A. Ehresmann et J.-P. Vanbremeersch, « Petite mathématique de la création », *L'étincelle*, n° 6, novembre 2009

# Vers une « algèbre des objets mentaux » (Changeux) en musique



Portrait of Odra Maar  
Pablo Picasso  
Huile sur toile, 1937  
© Succession  
Picasso 2009

FIGURE 1 : À GAUCHE, FORMATION PROGRESSIVE D'UN OBJET COMPLEXE C PAR RECOLLEMENT D'OBJETS PLUS SIMPLES. À DROITE MODÈLE CATÉGORIQUE DE LA RAMIFICATION DE C, DÉPLOYÉE « DE HAUT EN BAS ».

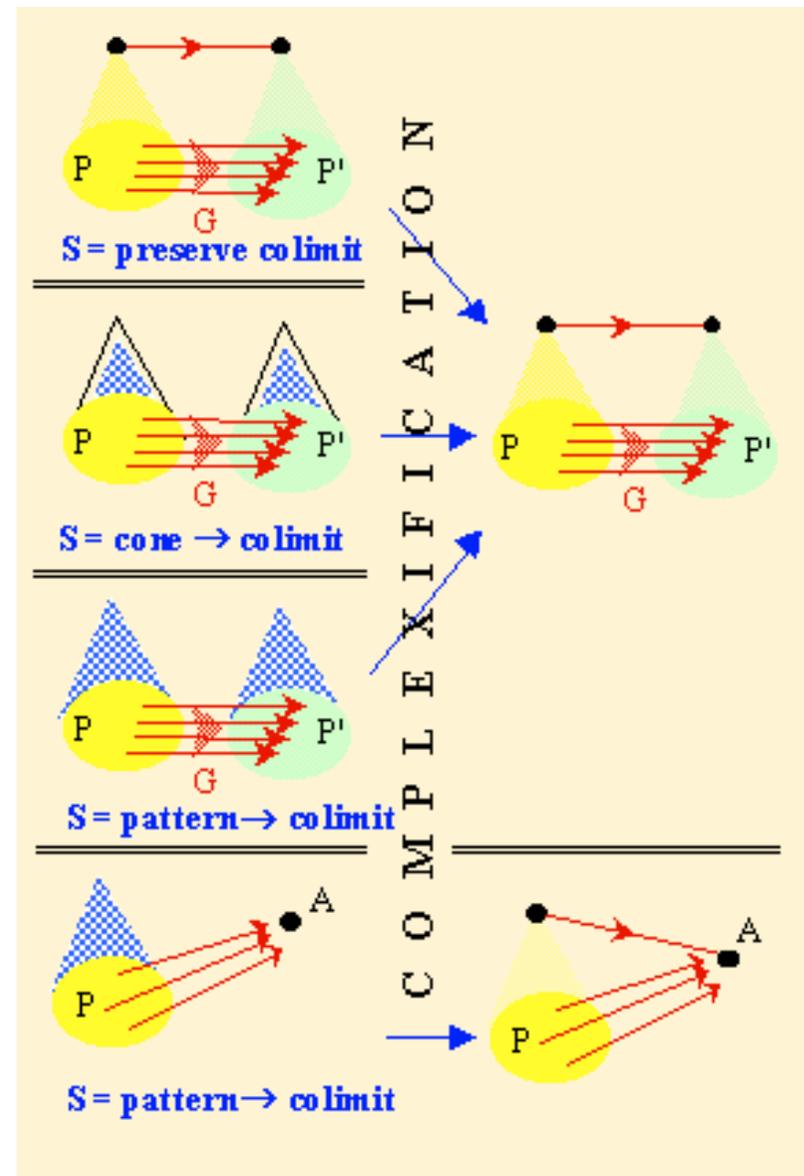
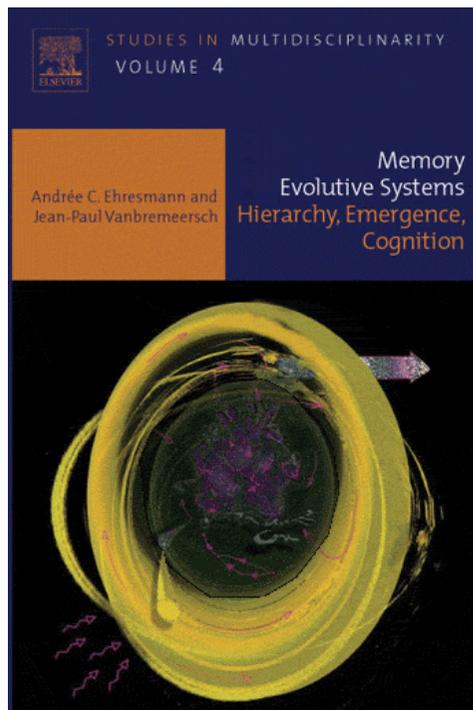
A. Ehresmann et J.-P. Vanbreemsch, « Petite mathématique de la création », *L'étincelle*, n° 6, novembre 2009

# « Memory Evolutive Systems » et neurones catégoriels

<http://pagesperso-orange.fr/vbm-ehr/>

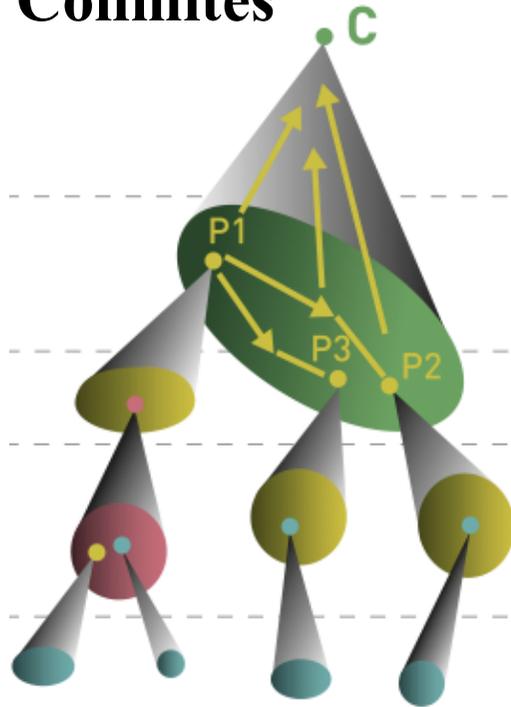


A 'simple' cat-neuron emerges as the colimit in a complexification of Neur of a pattern of neurons which has no colimit neuron in Neur, but acts as a synchronous coherent assembly of neurons in the sense of Hebb. An iteration of the process leads to cat-neurons of order 2 which correspond to a super-assembly (or 'assembly of assemblies') of neurons, which cannot be reduced to a (large) synchronous assembly of simple neurons. Higher order cat-neurons in successive complexifications represent super-super-assemblies, and so on.



# Systemes évolutifs à mémoire et K-réseaux ?

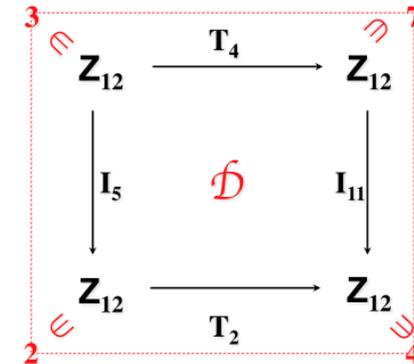
Colimites



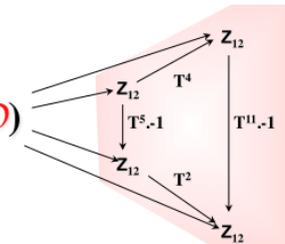
dualité



Limites

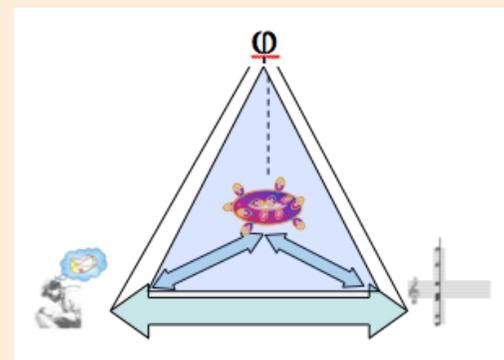


$(3, 7, 2, 4) \in \text{lim}(\mathcal{D})$



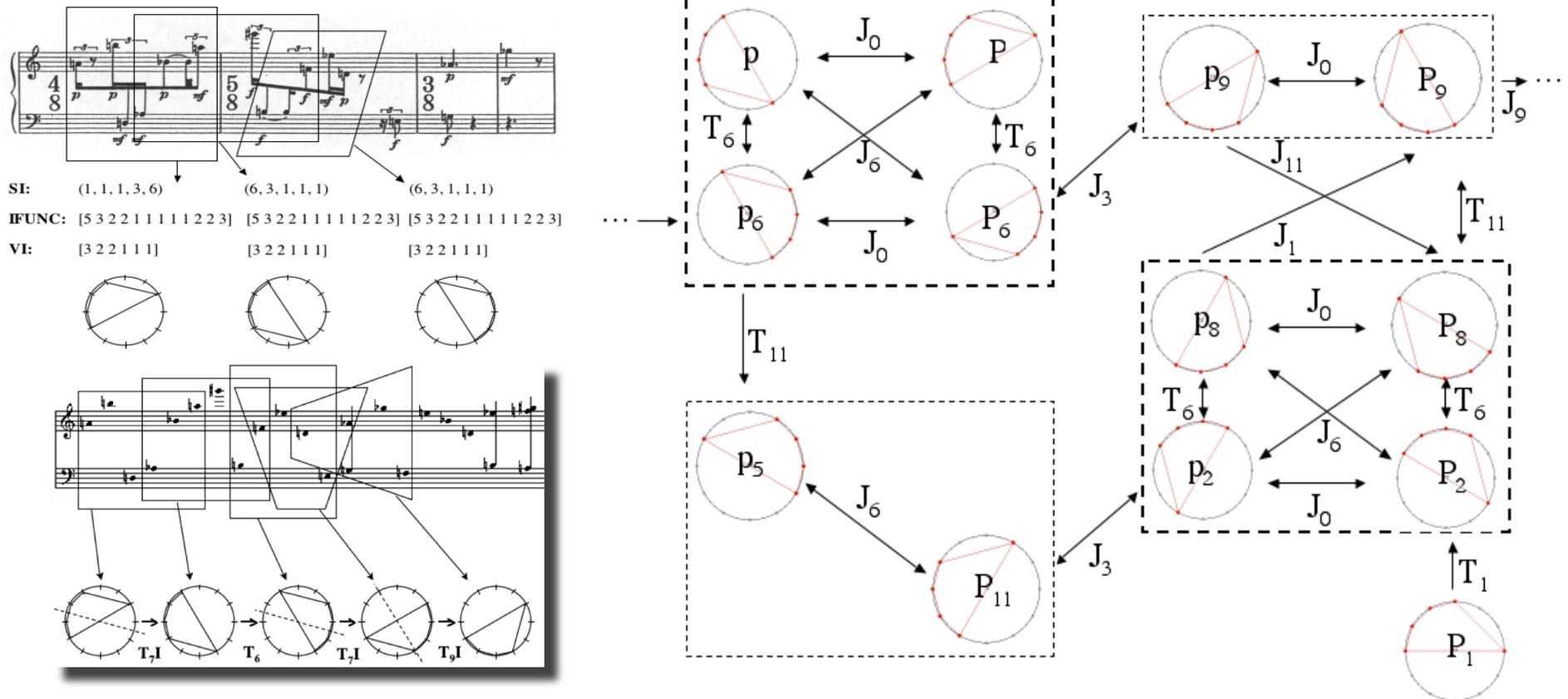
La représentation d'un état mental, tel un processus cognitif complexe, par un catneurone d'ordre supérieur conduit à une nouvelle approche du problème philosophique de l'identité entre états mentaux et états physiques du cerveau.

?



Quelle philosophie pour la recherche mathématique ?

# Formalisation catégorielle de l'analyse transformationnelle



« A rational reconstruction of a work or works, which is a theory of the work or works, is an explanation not, assuredly, of the 'actual' process of construction, but of how the work or works may be construed by a hearer, how the 'given' may be 'taken' »

M. Babbitt : « Contemporary Music Composition and Music Theory as Contemporary Intellectual History », 1972

*Sur les orientations théoriques (et/ou métathéoriques) de la tradition américaine*

B. Boretz et E.T. Cone : *Perspectives on Contemporary Music Theory*, W.W. Norton and Company, New York, 1972.

« The recognition of music-theoretical questions as critical compositional ones is not, of course, unique to the twentieth century, nor to composers. But the uniquely explicit, uniquely consequential, and uniquely exposed contemporary involvement of composers in theory as writers and system builders has given the theoretical-compositional connection unprecedently wide, if not always benign or even accurate, publicity : we live, as every reader of the public musical print knows, in an age of **‘theoretical composition’**. »

« Milton Babbitt, in particular, was the first to suggest that the force of any ‘musical system’ was not as universal constraints for all music but as alternative theoretical constructs, rooted in a communality of shared empirical principles and assumptions **validated** by tradition, experience, and experiment »

# Quelques traits caractéristiques du positivisme logique

James A. Davis : *Positivist Philosophy and the Foundation of Atonal Music Theory*, 1993

- Empiricisme rigide qui mène à une émulation de la science dans sa méthodologie et sa terminologie

- Utilisation de l'analyse linguistique et logique (en particulier le recours à la logique formelle).

- Principe de vérification et reconstruction rationnelle

- Refus de l'interprétation subjective et rejet/élimination de la métaphysique

« There is no field of experience which cannot, in principle, be brought under some form of scientific law, and no type of speculative knowledge about the world which is, in principle, beyond the power of science to give [...] **The propositions of philosophy are not factual, but linguistic in character** – that is, they do not describe the behavior of physical, or even mental, objects ; they express definitions, or the formal consequences of definitions. Accordingly, we may say that **philosophy is a department of logic**. » [AYER, 1952]

« Ce qui caractérise le néopositivisme logistique [...] est la réduction de la philosophie à l'étude syntaxique des énoncés scientifiques »

Albert Lautman : *Les mathématiques, les idées et le réel physique*, Vrin 2006 (en particulier le compte-rendu du Congrès International de philosophie des sciences, 1935)

# Le transfert des idées du positivisme logique en musique

- |   |
|---|
| • Empiricisme rigide qui mène à une émulation de la science dans sa méthodologie et sa terminologie                               |
| • Rejet ou élimination de la métaphysique   |
| • Utilisation de l'analyse linguistique et logique (en particulier le recours à la logique formelle).<br>Principe de vérification |
| • Refus de l'interprétation subjective  |

« For the essential elements of the above characterizations, involving the correlations of the syntactic and semantic domains, the notion of analysis, and – perhaps most significantly – the requirements of linguistic formulation and the differentiation among predicate types, beyond strongly suggesting that the proper object of our assigned investigation may be – in the light of these criteria – a vacuous class, and strongly reminding us of the systematic obligations attending our own **necessarily verbal presentation** and discussion of the presumed subject, provide the important reminder that **there is but one kind of language, one kind of method for the verbal formulation of ‘concepts’ and the verbal analysis of such formulations : ‘scientific’ language and ‘scientific’ method** »

# Le transfert des idées du positivisme logique en musique

- Empiricisme rigide qui mène à une émulation de la science dans sa méthodologie et sa terminologie
- Rejet ou élimination de la métaphysique
- Utilisation de l'analyse linguistique et logique (en particulier le recours à la logique formelle).  
Principe de vérification
- Refus de l'interprétation subjective

« Progressively from the concept to the law (synthetic generality) we arrive at the deductively interrelated system of laws that is a *theory*, statable as a **connected set of axioms, definitions, and theorems, the proof of which are derived by means of an appropriate logic**. A *musical theory* reduces, or should reduce, to such a **formal theory** when uninterpreted predicates and operations are substituted for the terms and operations designating musical observables »

M. Babbitt : « Past and Present Concepts », 1961

Cf. M. Andreatta : « Mathématiques, musique et philosophie dans la tradition américaine : la filiation Babbitt/Lewin »  
(Séminaire *MaMuPhi*, ENS, 18 Novembre 2006)  
[www.diffusion.ens.fr/index.php?res=conf&idconf=1560](http://www.diffusion.ens.fr/index.php?res=conf&idconf=1560)

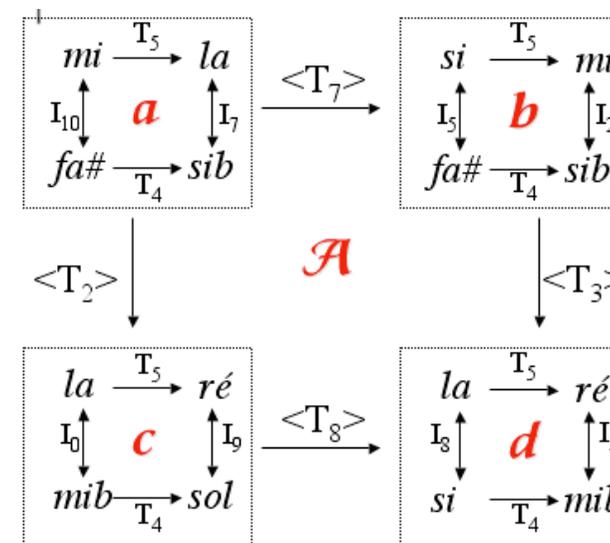
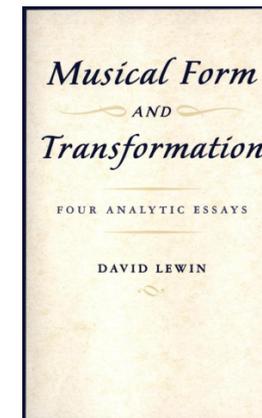
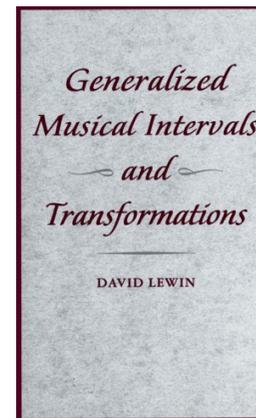
# Vers une démarche structurale-phénoménologique en musique

## Analyse transformationnelle et phénoménologie husserlienne

La théorie de Lewin des réseaux transformationnels construit un méta-modèle de structure sur des bases phénoménologiques. Lewin développe méticuleusement le formalisme adéquat à ses réseaux : des systèmes de points/flèches aux graphes de transformation jusqu'aux réseaux de transformation. Lewin définit aussi des isomorphismes entre des systèmes de points/flèches, entre des graphes de transformations, ainsi que des « isographies » entre des réseaux de transformation (*si et seulement si* leurs graphes de transformation sont isomorphes); et de la même façon, il définit les homomorphismes entre les objets précédents, ainsi que les concepts usuels de relation, et ainsi de suite. L'ouvrage *GMIT* illustre brillamment chaque distinction mathématique par une foultitude d'exemples analytiques musicaux dont certains, comme la théorie néo-riemannienne, sont devenus eux-même des nouveaux secteurs de la théorie musicale. Lewin a convaincu la communauté américaine de la théorie musicale de considérer avec attention ce cadre sous-jacent des réseaux de transformation; et ce, jusqu'à ce que cette conception soit élevée au rang de nouveau paradigme d'« expression » de la pensée musicale.

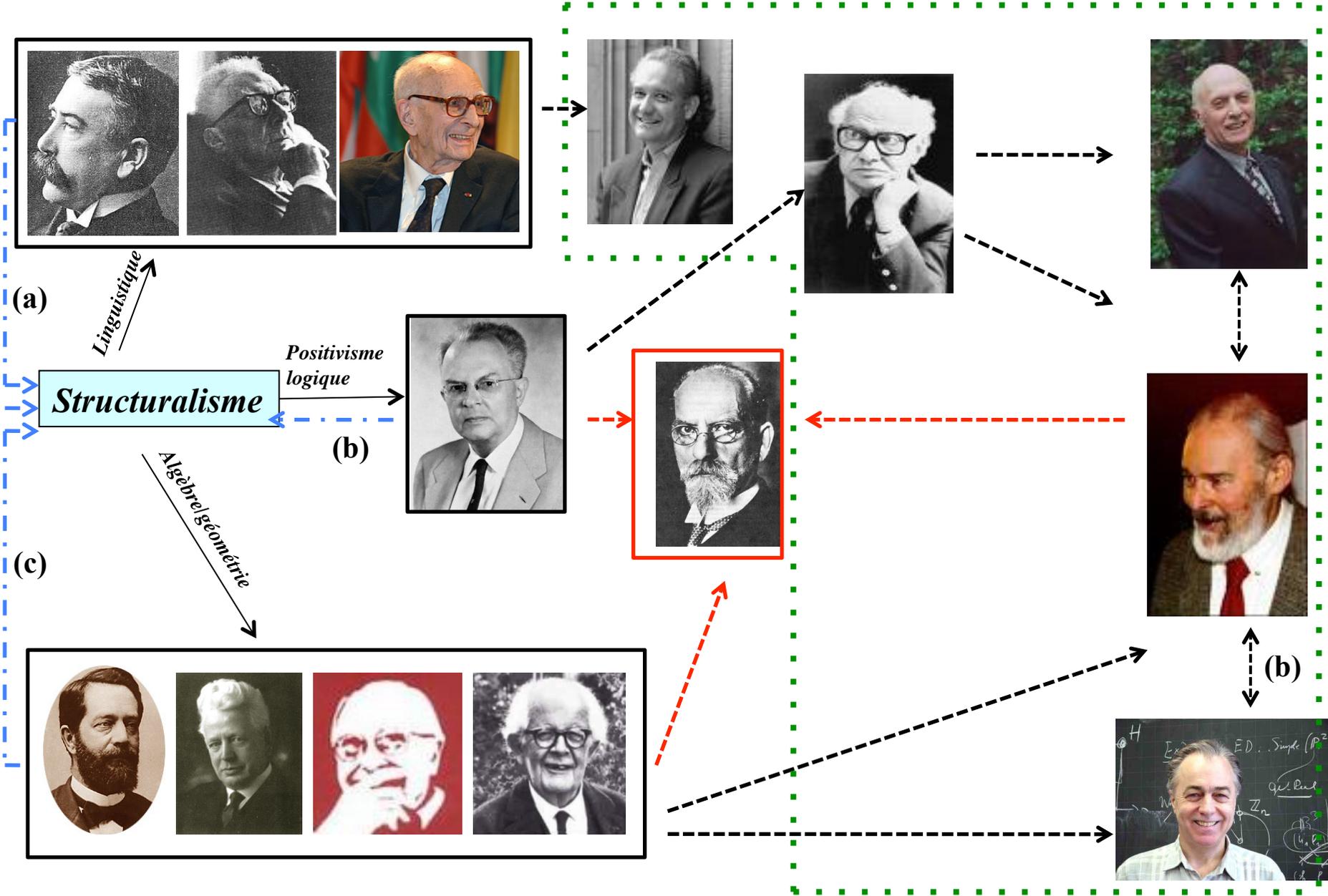
Les réseaux transformationnels de Lewin sont formellement des graphes dont les flèches sont « étiquetées » (*labeled*) dans un demi-groupe, et les nœuds, dans un ensemble quelconque, sur lequel opère un demi-groupe, de telle manière que le diagramme résultant « commute » au sens de la théorie des catégories. Bien entendu, si le demi-groupe dont les éléments étiquettent les flèches possède une identité, le graphe-monoïde se trouvera ainsi lié à une catégorie<sup>17</sup>.

J. Rahn, « La déclinaison et le flot », in *Autour de la Set Theory. Rencontre musicologique franco-américain 15-16 octobre 2003* (dir. M. Andreatta, J.-M. Bardez et J. Rahn), Collection « Musique/Sciences », IRCAM/Delatour, 2008



# Vers un structuralisme-phénoménologique en musique ?

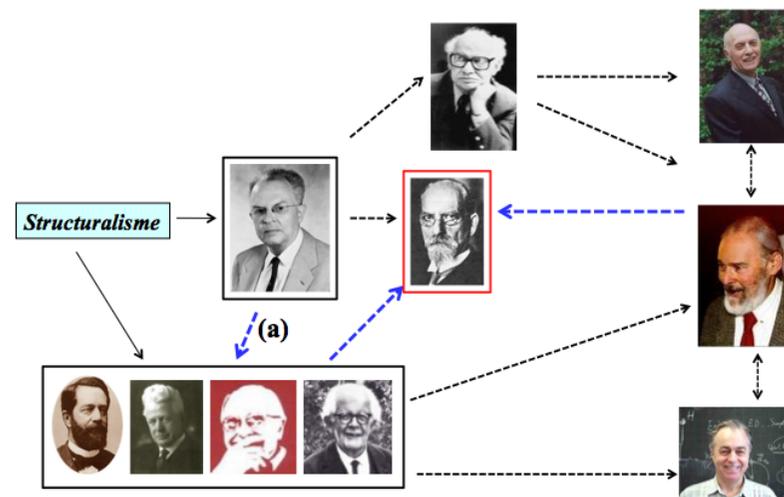
Repenser la généalogie du structuralisme et le rôle des structures



# Vers une démarche structurale-phénoménologique en musique

## (a) Repenser les structures...

« Pour développer le concept de structure qui est au fondement de la théorie de la constitution, nous partons de la différence entre deux types de description des objets d'un domaine quelconque. Nous appelons ces deux types de description, description de propriété et description de relation. [...] »



« La description de relation se trouve au commencement de tout le système de constitution et forme ainsi la base de la science dans son ensemble. En outre, le but de toute théorie scientifique est de devenir une pure description de relation quant à son contenu.

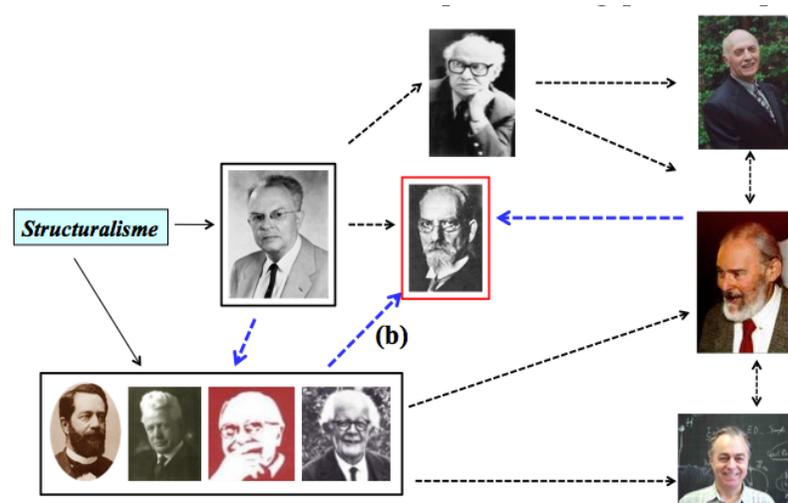
« Pour comprendre ce qu'on entend par la structure d'une relation, pensons au diagramme de flèches suivant : représentons tous les membres de la relation par des points. De chaque point, une flèche va vers les autres points qui lui sont en relation. Une flèche double désigne les paires pour lesquelles la relation vaut dans les deux directions. Une flèche qui retourne à son origine désigne un membre en relation avec lui-même. Si deux relations ont le même diagramme de flèches, on le dit structurellement équivalents, ou isomorphes. Le diagramme de flèches est une représentation symbolique de la structure »

R. Carnap : *La construction logique du monde*, 1928 (tr. Fr. 2002). Cité par F. Patras, « Carnap, l'*Aufbau*, et l'idée mathématique de structure ». In J. Bouveresse & P. Wagner (éds.), *Mathématiques et expérience. L'empirisme logique à l'épreuve (1918-1940)*, p. 33-54, 2008.

# Vers une démarche structurale-phénoménologique en musique

## ...et les mettre en mouvement (b)

« *La phénoménologie husserlienne des mathématiques est structurale en ce qu'elle se fixe sur les invariances (donc ce qui apparaît par variation), dont elle fait le cœur de l'objectivité mathématique, en tant qu'objectivité formelle. Elle est aussi structurale, dans un seul et même engagement, par le fait de privilégier l'opération sur l'objet.* »



« [...] *La pensée catégoriale n'est pas du tout étrangère, dans ses fondements, au type de « structuralisme » qui est celui de la phénoménologie, simplement en en faisant, avec des moyens que la phénoménologie ne pouvait pas soupçonner pour des raisons tenant à l'avancement du savoir mathématique autour de 1900, un structuralisme dynamique qui, par certains cotés, est beaucoup plus phénoménologique [...] que celui-là même que la phénoménologie pouvait proposer. En un certain sens, la pointe du structuralisme, ce n'est pas la structure, mais ce qu'on fait de la structure* »

« [...] *Il nous semble que, aujourd'hui, la théorie mathématique des catégories fournit, peut-être pour la première fois, un cadre théorique à ce que pourrait être une véritable épistémologie phénoménologique des mathématiques, ainsi que, du point de vue philosophique en général, un extraordinaire champ d'application à la phénoménologie. Elle nous donne enfin les moyens de remplir ce qui a toujours été le programme de la phénoménologie, à savoir ne jamais séparer le concept de l'intuition* »

J. Benoist, « Mettre les structures en mouvement: la phénoménologie et la dynamique de l'intuition conceptuelle. Sur la pertinence phénoménologique de la théorie des catégories », dans L. Boi, P. Kerszberg, F. Patras (éd.), *Rediscovering Phenomenology*. Springer, 2007

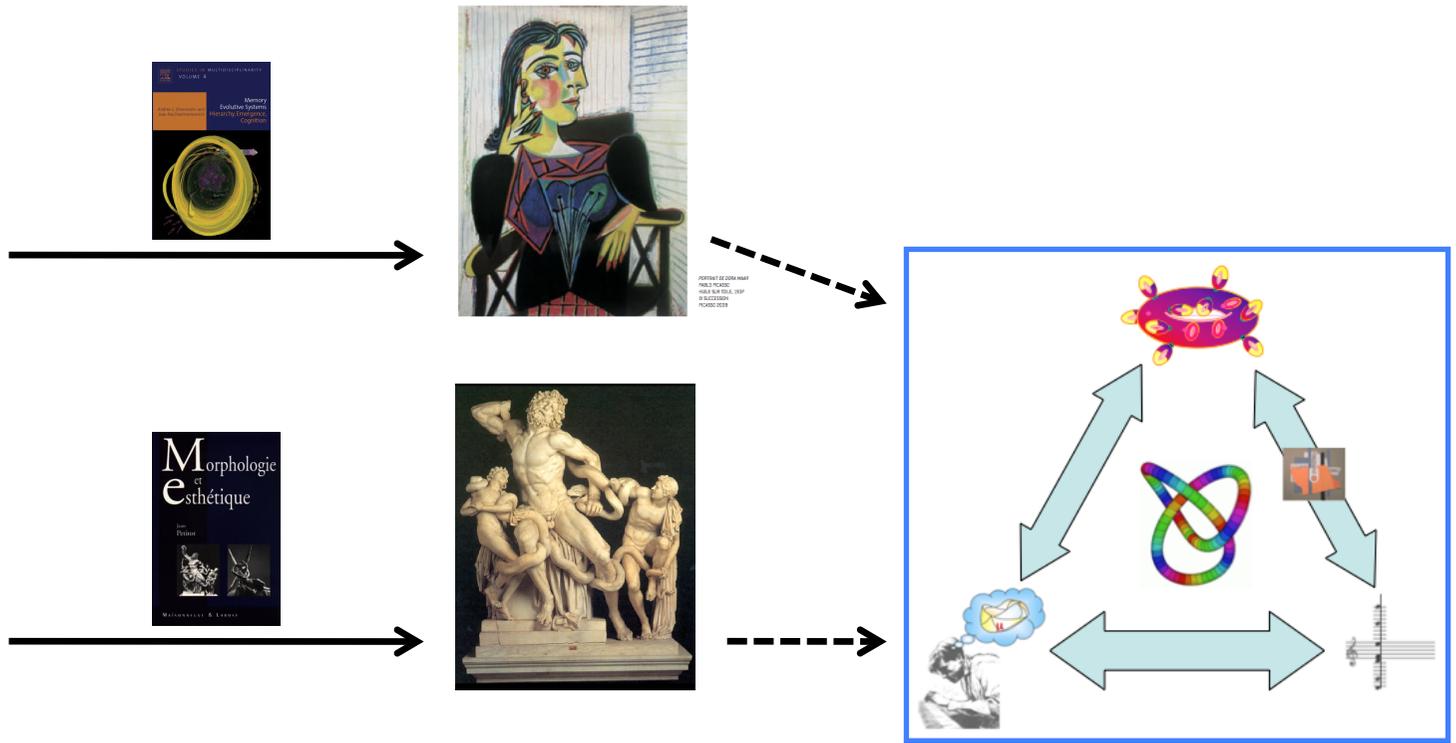
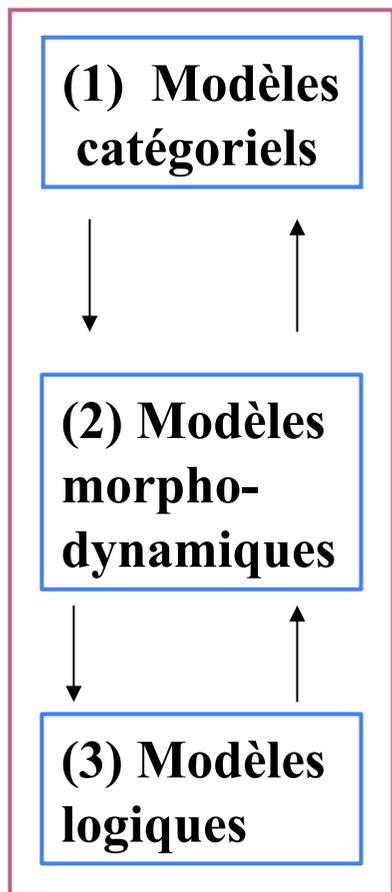
# Vers un structuralisme-phénoménologique en musique ?

## Mathématiques, perception esthétique et cognition/perception musicales

Modèles mathématiques

Perception esthétique

Cognition/perception musicales



<http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/PEPS-GdIM.html>