

école —————
normale —————
supérieure —————
paris — saclay —————



RAPPORT DE STAGE DU MASTER 1 HADAMARD DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE PARIS-SACLAY

Homologie Persistante Appliquée à la Reconnaissance de Genres Musicaux

Paul Lascabettes

Stage réalisé à l'IRMA à Strasbourg sous la direction de :

Moreno ANDREATTA

Corentin GUICHAOUA

9 Avril - 27 Juillet 2018

Résumé

L'objectif de ce stage était de comprendre les caractéristiques qu'il est possible d'extraire d'un morceau de musique à partir des outils d'un domaine des mathématiques bien précis : l'Homologie Persistante. Il s'agissait de pouvoir extraire suffisamment d'informations sur un fichier audio pour pouvoir déterminer son genre musical. Autrement dit, à partir d'une liste de morceaux, on aimerait pouvoir les classer par genre musical.

Le travail s'effectue avec des fichiers MIDI qui constituent une bonne approximation de fichiers audio. Il est préférable d'utiliser un fichier MIDI car ce dernier est moins lourd qu'un fichier audio et bien plus malléable (il est possible d'enlever un instrument ou de changer le tempo ou la tonalité).

Pour extraire des informations d'un fichier MIDI grâce à l'homologie persistante, deux étapes sont nécessaires :

- *Construire un objet géométrique* à partir du fichier MIDI. Cet objet devra respecter certaines contraintes pour être un complexe simplicial, par exemple être composé d'un nombre fini de simplexes.
- *Etudier les propriétés de cet objet*, par exemple le nombre de composantes connexes ou le nombre de trous. Pour cela on utilise une fonction de filtration qui permettra de trouver les caractéristiques du complexe simplicial.

Il est très important de comprendre qu'il existe plusieurs manières de construire le complexe simplicial et de le filtrer. Ainsi, durant ce stage j'ai cherché à améliorer les méthodes existantes de construction et de filtration.

Premièrement, il s'agit de construire le complexe dont les sommets seront les douze notes de la gamme tempérée du piano modulo une identification enharmonique : $Do, Do^\# = Re^b, Re, Re^\# = Mi^b, Mi, Fa, Fa^\# = Sol^b, Sol, Sol^\# = La^b, La, La^\# = Si^b, Si$. Une méthode intuitive serait d'activer les notes ou les accords qui sont joués dans le morceau. Dans ce cas, le complexe simplicial obtenu est un objet de dimension onze bien trop compliqué à visualiser et à étudier. Il faut réussir à obtenir quelque chose de plus simple, c'est pourquoi nous allons travailler dans un espace où les liaisons entre notes ne sont pas toutes possibles : le Tonnetz. Un des aspects sur lequel j'ai le plus travaillé durant ce stage est l'étude des différents Tonnetz, d'essayer de comprendre leur structure et d'en avoir une représentation spatiale. J'ai abouti à la conclusion qu'il existait douze Tonnetz dont neuf fondamentalement différents. Ce sont respectivement des tores, cylindres, collier de tétraèdres et triangles... En travaillant dans des espaces comme ceux-ci on visualise beaucoup mieux le complexe simplicial, de plus lors des calculs d'homologie nous devons seulement calculer les trois premiers nombres de Betti.

Dans un second temps, il faut réussir à filtrer correctement ce complexe pour extraire les données pertinentes. Pour cela, il est possible de regarder la proportion de chaque note et accord dans le morceau puis définir une valeur de seuil pour garder ce qui nous intéresse. Cette méthode n'est pas appropriée, car elle n'est pas invariante par changement de structure du morceau. En effet, rajouter un refrain ne doit pas changer le style du morceau, mais va changer les proportions. C'est pourquoi il est préférable de travailler sur chaque mesure au lieu de regarder la totalité du morceau. Un autre point du stage a été de créer un programme Python qui détermine la structure d'un fichier MIDI pour en extraire les mesures les plus importantes, ce qui nous permet alors directement de se concentrer sur ces mesures.

En travaillant sur une mesure, la tonalité générale importe peu. Il faut alors trouver un moyen d'identifier

les accords qui sont dans une tonalité différente. Le nombre d'accords étant $\text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})) = 4096$, il est nécessaire de réduire ce nombre en identifiant des accords différents en un seul et même accord. Pour cela, il est possible d'utiliser le lemme de Burnside, en particulier l'action du groupe diédral \mathbb{D}_{12} sur l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$. Cela nous a permis de réduire ce nombre à seulement 224 orbites. De plus, cette action conserve les nombres de Betti.

Finalement, pour étudier un morceau de musique avec l'homologie persistante, il faut commencer par trouver son fichier MIDI respectif. Ensuite, on peut construire le complexe en travaillant dans le Tonnetz en considérant uniquement les 224 classes d'équivalences. Il faut ensuite filtrer sur une mesure par rapport au temps et cela nous permet d'obtenir un code barre ou un diagramme de persistance qui permettent de représenter les caractéristiques issues de l'homologie persistante. Ce diagramme de persistance peut être comparé avec le diagramme de persistance d'un autre morceau grâce à la distance Bottleneck ou la distance de Hausdorff. Ainsi, à partir d'une liste de morceaux nous pouvons alors commencer à les classer pour déterminer leurs genres musicaux.

Abstract

The goal of this internship was to understand which data we can extract from a song thanks to the Persistent Homology. The final goal was to extract enough information about an audio file to be able to determine its musical genre. That is to say, from a list of pieces of music, we would like to do a clustering.

We will be using MIDI files, which give a good approximation of audio files. We prefer using MIDI file because it is lighter and more editable than an audio file.

In order to extract information from a MIDI file with persistent homology, two steps are needed :

- *Build a geometrical object* from a MIDI file. This object should respect some constraints to be a simplicial complex : for instance, it has to be composed of a finite number of simplex
- *Analyze the properties of this object*, for example the number of connected components or the number of holes. In order to do so, we use a filtration function in order to discover some properties of the simplicial complex.

It is important to understand that several ways exist in order to build and filtrate our simplicial complex. Thus, during this internship, I sought to improve actual methods of construction and filtration.

First of all, it is necessary to build a simplicial complex whose vertices are the twelve musical notes : $Do, Do^\#, Re, Re^\#, Mi, Fa, Fa^\#, Sol, Sol^\#, La, La^\#, Si$. An intuitive way would be to active notes or chords which are played in the song. However, in this case the simplicial complex would be too hard to visualize and examine. We have to obtain something simpler ; that is why we will consider a space in which the connections between notes are not all possible : the Tonnetz. During this internship I have studied all the different Tonnetz ; I have tried to understand their structure and to get a spacial representation. I have eventually concluded that there were twelve Tonnetz, of which nine are basically distinct. There can respectively be torus, cylinder, or union of tetrahedrons and triangles... By working in these spaces, we were able to visualize the simplicial complex much better. Moreover, we had to calculate only the first three numbers of Betti.

On the other hand, it is crucial to find a satisfying filtration to extract appropriate information. Observing the proportion of each note or chord in the piece of music would be conceivable. But this method is not appropriate because adding a refrain would change the proportion of notes but not the musical genre. For that reason, it is favored to work on each measure instead of looking at the whole piece. Hence, I designed a Python program which determined the structure from a MIDI file and export the most important measures, so that we could focus on these measures directly.

Since we are working on a measure the global tone does not matter. Consequently, we can identify chords that are in a different tone. Thus, it is necessary to reduce the number of chords which is $card(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})) = 4096$. For this purpose it is possible to use Burnside's lemma, notably by looking the action of the dihedral group \mathbb{D}_{12} on the set $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$. This allows us to reduce this number to 224 orbits.

Finally, in order to study a piece of music with persistent homology we must start by finding its respective MIDI file. Then, we have to build the simplicial complex in the Tonnetz considering the 224 equivalence classes. Therefore, it is indispensable to filtrate on a measure and this allows us to get a barcode or a persistent diagram. This object can be compared with another persistent diagram from another song with the Bottleneck distance or the Hausdorff distance. Consequently, from a list of pieces of music we are able to start doing a clustering and to find their musicals genre.

Contexte

Ce stage de quatre mois à été réalisé au sein de l'Université de Strasbourg à l'IRMA (Institut de Recherche Mathématique Avancée) dans le cadre du projet SMIR (Structural Music Information Research)¹. Cette équipe de recherche formée de mathématiciens, informaticiens et musicologues travaille sur une analyse musicale à partir d'outils mathématiques et informatiques.

Dans mon cas, ce fut l'Homologie Persistante qui est une branche de la topologie algébrique. Ce domaine étudie l'évolution de la structure topologique d'un espace. Cet espace sera dans notre étude un complexe simplicial qui est une collection de simplexes (généralisation du triangle). Ainsi, pour voir comment le complexe simplicial évolue, il est filtré grâce à une fonction de filtration puis étudié avec l'homologie pour en déduire ses caractéristiques.

L'objectif principal est d'appliquer à la musique les outils issus de l'homologie persistante (Nombres de Betti, Diagrammes de Persistance...). En effet, à partir d'un morceau de musique, on peut construire un complexe simplicial. On peut alors extraire suffisamment d'informations avec l'homologie persistante pour déterminer le genre musical du morceau en question. Il s'agit de l'un des domaines de recherche du projet SMIR pour lesquels il y a déjà une thèse de doctorat, celle de Mattia Giuseppe Bergomi [1] a été pour moi une source d'inspiration précieuse dans la phase de démarrage du stage. L'objectif était d'essayer d'approfondir son travail avec l'aide de Corentin Guichaoua, chercheur postdoctoral.

Je tiens à remercier Moreno Andreatta, Directeur de recherche au CNRS, pour m'avoir accueilli à l'IRMA et encadré tout au long de mon stage.

J'aimerais aussi remercier l'équipe du projet SMIR, plus particulièrement Corentin Guichaoua, José-Luis Besada et Sonia Cannas pour leur disponibilité et les connaissances qu'ils m'ont apportées.

1. Voir la page du projet pour les différents axes de recherche en cours : <http://repmus.ircam.fr/moreno/smir>

Table des matières

1	Introduction à l'Homologie Persistante	11
1.1	Premières notions d'Homologie	11
1.1.1	Quelques définitions pour commencer	11
1.1.2	Groupe d'Homologie et Application Frontière	12
1.1.3	Nombres de Betti	13
1.2	Diagrammes de Persistance et Codes Barres	15
1.2.1	Filtration	15
1.2.2	Diagrammes de Persistance et Interprétations	15
1.2.3	Codes Barres	17
1.3	L'espace des Diagrammes de Persistance	18
1.3.1	Distance entre deux diagrammes	18
1.3.2	L'espace (D_p, W_p^∞)	19
2	Applications à la Musique	21
2.1	Application pour la Classification du Genre Musical	21
2.2	Une Première Méthode Intuitive	21
2.3	Etude à partir du Tonnetz	23
2.3.1	Présentation du Tonnetz $T[3,4,5]$	23
2.3.2	Méthode avec le Tonnetz	23
3	Etude des Différents Tonnetz	25
3.1	Combien existe-t-il de Tonnetz ?	25
3.1.1	Bien définir un Tonnetz	25
3.1.2	Enumération des différents Tonnetz	26
3.2	Caractérisation des 12 Tonnetz	27
3.2.1	$T[1,2,9]$, $T[1,3,8]$, $T[1,4,7]$, $T[2,3,7]$, $T[3,4,5]$	28
3.2.2	$T[1,1,10]$, $T[2,5,5]$, $T[2,2,8]$	30
3.2.3	$T[1,5,6]$ et $T[2,4,6]$	30
3.2.4	$T[3,3,6]$ et $T[4,4,4]$	30
3.2.5	Récapitulatif	32
4	Actions de Groupe	33
4.1	Quelques rappels d'Algèbre	33
4.2	Applications à l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$	34
4.2.1	Action de \mathbb{Z}_{12} sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$	34
4.2.2	Action de \mathbb{D}_{12} sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$	35
4.2.3	Action de Aff_{12} sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$	37
5	Conclusion	39

Chapitre 1

Introduction à l'Homologie Persistante

1.1 Premières notions d'Homologie

1.1.1 Quelques définitions pour commencer

Avant de parler d'homologie persistante, il faut introduire la notion d'homologie et bien définir le simplexe qui est une généralisation du triangle et du tétraèdre. Notre étude se basera sur la thèse de Mattia Giuseppe Bergomi [1].

Définition 1.1 *Etant donné un ensemble de points distincts $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ de \mathbb{R}^p , on définit le **simplexe** $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_n]$ comme :*

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i \mid \alpha_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

*Un simplexe est défini à partir de $n+1$ points donc il peut être représenté dans un espace à n dimensions, on dira que c'est un **n -simplexe**.*

Exemple. Nous avons représenté un 0,1,2 et 3-simplexe en figure 1.1.

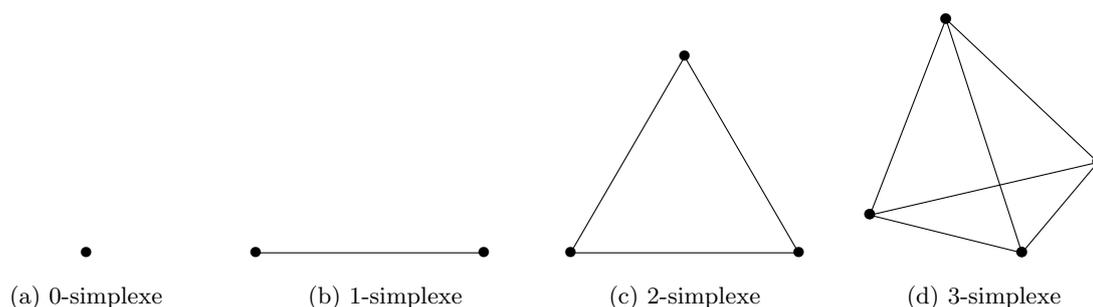


FIGURE 1.1 – Exemple de simplexes

Définition 1.2 *Soit une famille finie de n -simplexes $(\sigma_i)_{0 \leq i \leq m}$ et une famille de coefficients $(\gamma_i)_{0 \leq i \leq m}$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On définit alors le **n -simplexe de chaîne** à partir de ces deux familles comme :*

$$\sum_{i=0}^m \gamma_i \sigma_i$$

Définition 1.3 *Un **complexe simplicial** K est une collection finie de simplexe tels que $\forall \sigma, \sigma' \in K : \sigma \cap \sigma'$ est vide ou une face des deux simplexes et si τ est une face de σ alors $\tau \in K$.*

Dans notre étude, les coefficients $(\gamma_i)_{0 \leq i \leq m}$ du n-simplexe de chaîne sont dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, comme dans la thèse de Mattia Giuseppe Bergomi [1]. Néanmoins, on peut aussi choisir de prendre ces coefficients dans \mathbb{Q} comme dans le récent article de Kathlén Kohn et Ernst Ulrich Deuker [6].

Exemple. Soit trois 2-simplexes $\sigma_1 = [A, B, C]$, $\sigma_2 = [B, C, D]$ et $\sigma_3 = [C, D, E]$ que nous avons représenté en figure 1.2. Si $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$ on obtient le 2-simplexe de chaîne suivant :

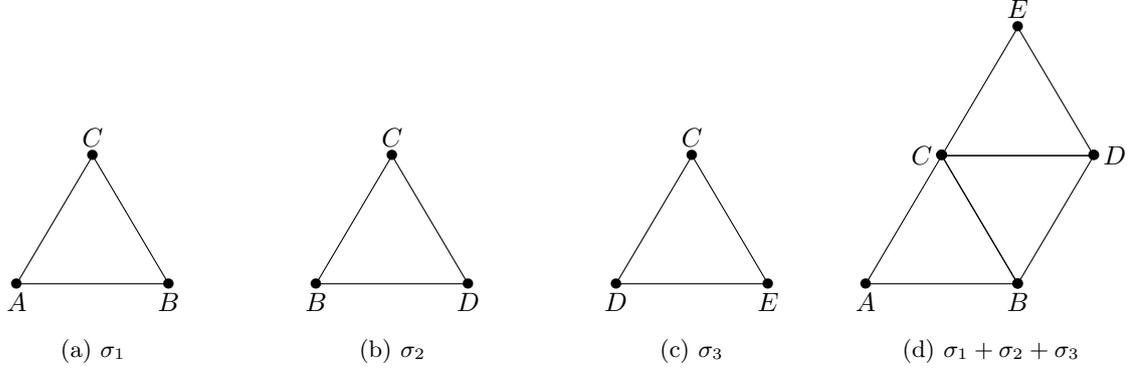


FIGURE 1.2 – Exemple de simplexes

Soit deux n-simplexes de chaîne $a = \sum_{i=0}^m \alpha_i \sigma_i$ et $b = \sum_{i=0}^m \beta_i \sigma_i$ on définit alors une opération de somme entre ces deux n-simplexes de chaîne :

$$a + b = \sum_{i=0}^m (\alpha_i + \beta_i) \sigma_i$$

L'ensemble des n-simplexes de chaîne muni de l'addition définie au dessus forment le **groupe des n-chaînes** : $(C_n, +)$. L'élément neutre sera 0, l'inverse de $a \in C_n$ sera $-a = a$ car $a + a = 0$ et l'associativité provient de la somme dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. De plus, ce groupe est abélien car l'addition dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est commutative.

1.1.2 Groupe d'Homologie et Application Frontière

Nous allons maintenant définir un homomorphisme ∂_n entre l'espace C_n et C_{n-1} . Tout d'abord, soit $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_n]$ un n-simplexe, on note $[v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ le (n-1)-simplexe tel que :

$$[v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] = [v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$$

Définition 1.4 La frontière de $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_n]$ un n-simplexe, noté $\partial_n(\sigma)$, sera définie comme la somme de ses (n-1) faces.

Ainsi, l'application frontière est un homomorphisme de groupe : $\partial_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ telle que :

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$$

Par suite, si $a = \sum_{i=0}^m \alpha_i \sigma_i$ est un n-simplexe de chaîne, on a : $\partial_n(a) = \sum_{i=0}^m \alpha_i \partial_n(\sigma_i)$

En effet, étant donné deux n-simplexes de chaîne $a = \sum_{i=0}^m \alpha_i \sigma_i$ et $b = \sum_{i=0}^m \beta_i \sigma_i$, on a :

$$\partial_n(a + b) = \partial_n\left(\sum_{i=0}^m (\alpha_i + \beta_i) \sigma_i\right) = \sum_{i=0}^m (\alpha_i + \beta_i) \partial_n(\sigma_i) = \sum_{i=0}^m \alpha_i \partial_n(\sigma_i) + \sum_{i=0}^m \beta_i \partial_n(\sigma_i) = \partial_n(a) + \partial_n(b)$$

Ainsi, la suite de groupes abéliens $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ munie de la famille d'homomorphismes d'applications frontières :

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

telle que $\partial_0 = 0$ est appelée un **complexe de chaîne**.

Définition 1.5 Le noyau de ∂_n est noté Z_n et ses éléments sont des **n-cycles**.

Définition 1.6 L'image de ∂_{n+1} est notée B_n et ses éléments sont des **n-frontières**.

Ainsi, $\text{Ker}(\partial_n) = Z_n$ et $\text{Im}(\partial_{n+1}) = B_n$ sont de sous-groupes de C_n .

Propriété 1.1 $\forall n \in \mathbb{N}, \partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$

Démonstration. Soit a un $(n+1)$ -simplexe de chaîne. Alors en composant par $\partial_n \circ \partial_{n+1}$ chacune de ses $(n-1)$ faces est obtenue deux fois et on aura $\partial_n \circ \partial_{n+1}(a) = 0$ car les coefficients sont dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On peut détailler le point précédent sur un $(n+1)$ -simplexe $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_{n+1}]$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \partial_n \circ \partial_{n+1}([v_0, v_1, \dots, v_{n+1}]) &= \partial_n \left(\sum_{i=0}^{n+1} [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{n+1}] \right) = \sum_{i=0}^{n+1} \partial_n([v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{n+1}]) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0, j \neq i}^{n+1} [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{n+1}] = 2 \sum_{i,j=0, i < j}^{n+1} [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{n+1}] = 0 \end{aligned}$$

Par cette propriété, on déduit que $B_n \subset Z_n$ et on va alors passer au quotient.

Définition 1.7 Le **n-ième groupe d'homologie** est le quotient :

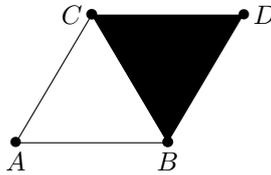
$$H_n = Z_n / B_n$$

1.1.3 Nombres de Betti

Définition 1.8 Le **n-ième nombre de Betti** β_n est la dimension de l'espace H_n .

Ainsi on a clairement : $\beta_n = \dim(H_n) = \dim(Z_n) - \dim(B_n)$.

Exemple. Prenons par exemple cette figure ci dessous, et déterminons les nombres de Betti correspondant.



Commençons par déterminer β_0 . On rappelle : $\beta_0 = \dim(Z_0) - \dim(B_0)$. Ainsi, par définition de σ_0 , $Z_0 = C_0$ et donc $\dim(Z_0) = \text{nombre de points} = 4$. De plus, il suffit d'avoir 3 segments pour engendrer n'importe quel segment de B_0 , par exemple : $[AB]$, $[AC]$ et $[BD]$ suffisent. Donc, $\beta_0 = 4 - 3 = 1$.

Déterminons β_1 : il existe deux boucles de segments indépendantes que l'on peut faire qui sont respectivement : ABC et BDC . Cela implique que $\dim(Z_1) = 2$. Le seul élément de C_2 est $[BDC]$, or $B_1 = \text{Im}(\sigma_2)$ donc cela implique que $\dim(B_1) = 1$. Il vient : $\beta_1 = 1$.

Il reste à déterminer β_2 . Puisque $\sigma([BDC]) \neq 0$ alors on déduit que $\dim(Z_2) = 0$. De même, $C_3 = 0$

donc $\dim(B_2) = 0$ et on a : $\beta_2 = 0$.

Puisqu'il n'y a pas n-simplexe pour $n \geq 3$ alors les autres nombres de Betti seront nuls.

Propriété 1.2 β_0 est le nombre de composantes connexes de l'ensemble.

Démonstration. On a $\beta_0 = \dim(Z_0) - \dim(B_0)$.

Or, $Z_0 = C_0$ et donc $\dim(Z_0) = \dim(C_0)$ qui est le nombre de points.

De plus, $\dim(B_0)$ est le nombre de segments nécessaires pour engendrer les autres.

Puisque n points sont liés par $n - 1$ segments indépendants, on en déduit que la différence entre le nombre de points et le nombre le segments indépendants sera le nombre de composantes connexes.

Propriété 1.3 β_1 est le nombre de trous de l'ensemble.

Démonstration. On a $\beta_1 = \dim(Z_1) - \dim(B_1)$.

Or, $\dim(Z_1)$ est le nombre de boucles indépendantes en restant sur les segments.

De plus, $\dim(B_1)$ est égal au nombre de boucles pleines.

Ainsi, la différence donnera le nombre de boucles creuses donc le nombre de trous de l'ensemble.

On peut donc interpréter β_0 comme le nombre de composantes connexes de l'espace entier, β_1 comme le nombre de trous et de la même manière β_2 comme le nombre de cavités enclavées... En général, β_n sera le nombre de trous de dimensions n . Par conséquent,

$$\beta_n(\mathbb{S}^k) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0, k = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0, k = 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \text{ ou } k, k > 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \text{ ou } k, k > 0 \end{cases}$$

Si on pose :

$$\tilde{\beta}_n = \begin{cases} \beta_n & \text{si } n \neq 0 \\ \beta_n - 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

On a :

$$\tilde{\beta}_n(\mathbb{S}^k) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\tilde{\beta}_n$ est appelé le n^e nombre de Betti réduit.

1.2 Diagrammes de Persistance et Codes Barres

1.2.1 Filtration

Dans cette section, \mathbb{X} sera un complexe simplicial et $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qu'on nommera **fonction de mesure** ou **filtration**. Nous verrons que le choix de la filtration f permettra d'extraire des informations géométriques sur la nature de l'espace \mathbb{X} .

Définition 1.9 On pose $\mathbb{X}_u = f^{-1}(] - \infty; u])$ *l'ensemble de sous-niveau* de la fonction f pour $u \in \mathbb{R}$.

On a ainsi défini une collection d'espaces \mathbb{X}_u inclus dans \mathbb{X} tel que $\mathbb{X}_u \subseteq \mathbb{X}_v$ pour $u \leq v$.

On va maintenant s'intéresser à un certain type de filtration : les fonctions tames.

Définition 1.10 $a \in \mathbb{R}$ est une **valeur régulière** de f si :

$$\exists \epsilon > 0 : \forall u < v \in [a - \epsilon; a + \epsilon] \quad \text{l'inclusion } \mathbb{X}_u \rightarrow \mathbb{X}_v \text{ soit un isomorphisme}$$

Si ce n'est pas le cas, on dira que a est une **valeur critique** de f .

Définition 1.11 $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction **tame** si elle a un nombre fini de valeurs critiques et que l'espace $H_n(\mathbb{X}_u)$ est de dimension finie $\forall u \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$.

Etant donné $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction tame, elle possède un nombre fini de valeurs critiques $\{c_0, c_1, \dots, c_n\}$. On choisit $\{r_0, r_1, \dots, r_n\}$ valeurs régulières telles que : $r_{i-1} \leq c_i \leq r_i$. On peut rajouter $r_{-1} = -\infty$ et $r_{n+1} = +\infty$ pour avoir :

$$\emptyset = \mathbb{X}_{-1} \subseteq \mathbb{X}_0 \subseteq \mathbb{X}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{X}_n \subseteq \mathbb{X}_{n+1} = \mathbb{X}$$

Puisque pour $u \leq v$, $\mathbb{X}_u \subseteq \mathbb{X}_v$ on a un homomorphisme : $i_k^{u,v} : H_n(\mathbb{X}_u) \rightarrow H_n(\mathbb{X}_v)$.

Définition 1.12 Le n^e **module de persistance** $H_n^{u,v}$ est défini comme l'image de l'application $i_k^{u,v}$, c'est à dire :

$$H_n^{u,v} = \text{Im}(i_k^{u,v})$$

On va alors définir les **nombre de Betti persistants**. Ils sont présents dans l'article de Marc Ethier sur l'homologie persistante avec application à la suspension topologique [4]. Cela sera une définition analogue à celle donnée dans la partie précédente.

Définition 1.13 Soit f une fonction tame, le n^e **nombre de Betti persistant** est :

$$\beta_{f,n}^{u,v} = \dim(H_n^{u,v})$$

On peut essayer de donner une interprétation plus intuitive des nombres de Betti persistants. $\beta_{f,n}^{u,v}$ sera le nombre de n -simplexes qui existent dans \mathbb{X}_u et qui existent toujours dans \mathbb{X}_v . Autrement dit, ce sont les composantes de dimension n qui sont nées au temps u ou avant u , et qui meurent plus tard que v .

1.2.2 Diagrammes de Persistance et Interprétations

Nous allons voir que les nombres de Betti persistants peuvent être représentés sous une forme beaucoup plus claire : par un diagramme de persistance. Ce diagramme sera composé par un ensemble de points et de droites, un exemple d'un diagramme de persistance est en fig. 1.3. Une classe qui apparaît au temps u et qui meurt au temps v sera représentée par le point (u, v) dans le diagramme de persistance. Une classe qui apparaît au temps u et qui ne meurt jamais sera représentée par une droite verticale passant par le point (u, u) .

Puisqu'une classe doit d'abord naître avant de mourir, on a nécessairement $u < v$ donc l'ensemble des points du diagramme de persistance sont dans $\Delta^+ = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u < v\}$.

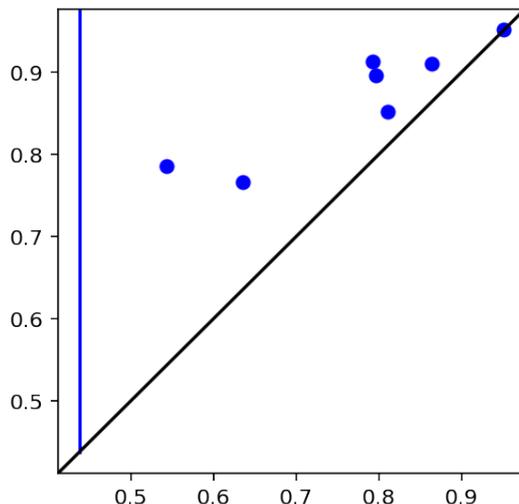


FIGURE 1.3 – Exemple d'un Diagramme de Persistance

Les classes qui meurent très vite, c'est à dire qui ont une durée de vie très courte sont considérées comme étant du **bruit**. Ainsi, un point (u, v) est du bruit si v est proche de u . Graphiquement, le bruit sera proche de la diagonale.

Définition 1.14 Soit (u, v) un point de Δ^+ . On définit la **multiplicité** de ce point $\mu(u, v)$ comme étant le minimum sur $\epsilon > 0$ avec $u + \epsilon < v - \epsilon$ de :

$$\beta_{f,n}^{u+\epsilon, v-\epsilon} + \beta_{f,n}^{u-\epsilon, v+\epsilon} - \beta_{f,n}^{u-\epsilon, v-\epsilon} - \beta_{f,n}^{u+\epsilon, v+\epsilon}$$

C'est à dire, en notant $\beta_{f,n}^{u,v} = \beta(u, v)$:

$$\mu(u, v) = \min_{\epsilon > 0, u+\epsilon < v-\epsilon} \{ \beta(u + \epsilon, v - \epsilon) + \beta(u - \epsilon, v + \epsilon) - \beta(u - \epsilon, v - \epsilon) - \beta(u + \epsilon, v + \epsilon) \}$$

Si $\mu(u, v) > 0$ on dira que (u, v) est un **point propre**, ce sont les points qui sont représentés sur le diagramme de persistance.

Définition 1.15 Dans le cas d'une droite verticale passant par (u, u) on définit sa multiplicité $\mu(u)$ comme :

$$\mu(u) = \min_{\epsilon > 0, u+\epsilon < v-\epsilon} \{ \beta(u + \epsilon, \frac{1}{\epsilon}) - \beta(u - \epsilon, \frac{1}{\epsilon}) \}$$

De la même façon que précédemment, si $\mu(u) > 0$, alors la droite verticale passant par (u, u) sera appelée un **point à l'infini**, et on la représentera sur le diagramme de persistance.

Finalement, lorsque la dimension n et la filtration f sont données, le **diagramme de persistance** sera l'ensemble des points propres et des points à l'infini comptés avec leur ordre de multiplicité. Il sera noté par la suite $D_n(f)$.

1.2.3 Codes Barres

Tout comme le diagramme de persistance, le code barre permet de mieux visualiser les nombres de Betti. Ainsi, la mort et la naissance de chaque classe d'homologie sont clairement représentées sur un code barre. Les codes barres sont présentés de façon plus détaillée dans l'article de Robert Ghrist qui s'intitule "Barcodes : The Persistent Topology of Data [5]".

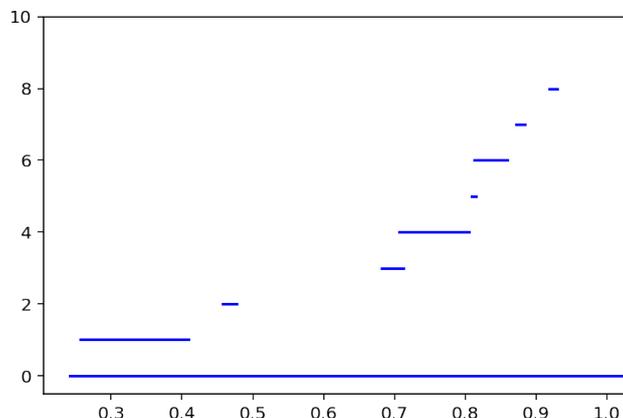


FIGURE 1.4 – Exemple d'un Code Barre

L'axe des abscisses représente le temps (c'est à dire au fur et à mesure que l'on filtre \mathbb{X} , de \mathbb{X}_0 jusqu'à \mathbb{X}_{n+1}) tandis que l'axe des ordonnées est un indice.

Ainsi, une classe qui apparaît en u et disparaît en v sera représentée par une barre horizontale allant de u à v . La hauteur de cette barre dépendra de l'ordre d'apparition par rapport aux autres barres. Si une classe apparaît en u et ne disparaît pas, elle sera représentée par une barre horizontale commençant au temps u et ne finissant pas.

Le **bruit** qui était un point près de la diagonale pour le diagramme de persistance sera représenté ici par des barres d'une longueur très courte.

On représente en fig. 1.5 un diagramme de persistance et son code barre associé. On remarque que les deux points qui sont proches de la diagonale sur le diagramme de persistance sont bien représentés par deux barres de petites tailles sur le code barre.

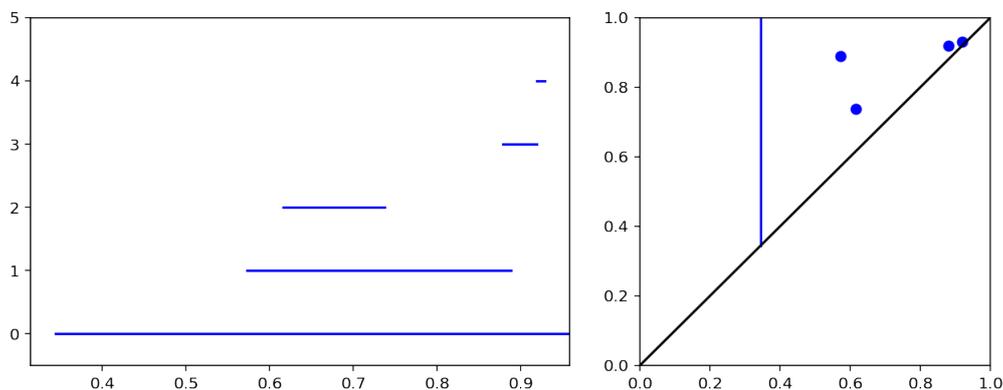


FIGURE 1.5 – Diagramme de Persistance et son Code Barre associé

On retrouve les codes barres dans de nombreux domaines d'applications comme l'analyse d'image dans l'article "Algebraic topology for computer vision" de Daniel Freedman et Chao Chen [3].

1.3 L'espace des Diagrammes de Persistance

1.3.1 Distance entre deux diagrammes

On va voir que l'on peut munir l'espace des diagrammes de persistance d'une distance. Cela va être utile pour déterminer la proximité entre deux diagrammes et pouvoir conclure s'ils se ressemblent ou non.

On rappelle quelques définitions : $\forall x = \sum_{i=0}^n x_i, y = \sum_{i=0}^n y_i \in \mathbb{R}^n, f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction continue,

$$d_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=0}^n |x_i - y_i|^p} = \|x - y\|_p, \quad d_\infty(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = \|x - y\|_\infty, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{X}} |f(x)|$$

Soient deux diagrammes de persistance X et Y , c'est donc la donnée de deux ensembles de points. On peut définir un isomorphisme $\phi : X \rightarrow Y$ qui à chaque point de X associe un point de Y ou le point le plus proche de la diagonale si X et Y n'ont pas le même cardinal. La distance entre ces deux diagrammes sera alors définie grâce à un isomorphisme de ce type. L'article de Michael Kerber, Dmitriy Morozov, Arnur Nigmatov [8] présente avec un peu plus de détails comment comparer deux diagrammes de persistances.

Définition 1.16 Soient deux diagrammes de persistance X et Y , on va utiliser la norme $\|\cdot\|_q$ (où q peut être l^∞) pour définir la p^e **distance Wasserstein** entre X et Y :

$$W_p^q(X, Y) = \inf_{\phi: X \rightarrow Y} \left(\sum_{x \in X} \|x - \phi(x)\|_q^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Définition 1.17 La distance qui va nous intéresser sera la **distance Bottleneck** qui est un cas particulier de la distance Wasserstein lorsque $p = \infty$, c'est à dire :

$$W_\infty^q(X, Y) = \inf_{\phi: X \rightarrow Y} \left(\sup_{x \in X} \|x - \phi(x)\|_q \right)$$

On va maintenant définir une autre distance qui permettra d'approcher la distance Wasserstein. l'intérêt de cette distance est qu'il n'est pas nécessaire de trouver le bon isomorphisme ϕ entre X et Y . Ainsi, cette distance sera beaucoup plus rapide à calculer.

Définition 1.18 Soient X et Y deux ensembles de points d'un espace métrique où la distance est d . Alors la **distance de Hausdorff** sera :

$$H(d)(X, Y) = \max \left(\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y) \right)$$

Théorème 1.4 Soient \mathbb{X} et \mathbb{Y} deux complexes simpliciaux et $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions tames. On note X_f et Y_g leur diagramme de persistance respectif, on a alors l'inégalité suivante :

$$W_\infty^\infty(X_f, Y_g) \leq \|f - g\|_\infty$$

On peut interpréter ce résultat en disant qu'une petite variation d'une fonction de filtration engendrera seulement une faible variation du diagramme de persistance ce qui est très pratique. Une démonstration de ce théorème est présente dans la thèse d'Elizabeth Munch ([9], p.17).

Lemme 1.5 Soit \mathbb{X} un complexe simplicial fini de \mathbb{R}^p alors la fonction $d_{\mathbb{X}} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $d_{\mathbb{X}} = \inf_{x \in \mathbb{X}} \|x - a\|_p$ est une fonction tame.

Démonstration. Puisque \mathbb{X} est un complexe simplicial fini alors $d_{\mathbb{X}}$ ne peut pas avoir qu'un nombre fini de valeurs critiques et son groupe d'homologie ne peut pas être de dimension infini.

En appliquant ce lemme au dernier théorème on a alors le corollaire suivant :

Corollaire 1.6 Soient \mathbb{X} et \mathbb{Y} deux complexes simpliciaux finis de \mathbb{R}^p , on note X et Y leur diagramme de persistance respectif pour les mesures de filtration $d_{\mathbb{X}}$ et $d_{\mathbb{Y}}$, alors :

$$W_{\infty}^{\infty}(X, Y) \leq \|d_{\mathbb{X}} - d_{\mathbb{Y}}\|_{\infty}$$

La proposition suivante nous affirme que lorsque les complexes simpliciaux sont finis alors la distance de Hausdorff peut être vu d'une autre façon.

Propriété 1.7 Soient \mathbb{X} et \mathbb{Y} deux complexes simpliciaux finis de \mathbb{R}^p , de la même façon on note X et Y leur diagramme de persistance respectif pour les mesures de filtration $d_{\mathbb{X}}$ et $d_{\mathbb{Y}}$, alors on a l'égalité :

$$H(d_{\infty})(X, Y) = \|d_{\mathbb{X}} - d_{\mathbb{Y}}\|_{\infty}$$

Cela nous donne le corollaire immédiat :

Corollaire 1.8 Soient \mathbb{X} et \mathbb{Y} deux complexes simpliciaux finis de \mathbb{R}^p , on note X et Y leur diagramme de persistance respectif pour les mesures de filtration $d_{\mathbb{X}}$ et $d_{\mathbb{Y}}$, on a alors :

$$W_{\infty}^{\infty}(X, Y) \leq H(d_{\infty})(X, Y)$$

Ce corollaire permet de contrôler la distance de Wassertstein par la distance de Hausdorff qui est beaucoup plus simple à calculer.

1.3.2 L'espace (D_p, W_p^{∞})

On a vu qu'on pouvait munir les diagrammes de persistance de la p^e distance de Wasserstein. On va alors s'intéresser à une certaine famille de diagramme. Dans cette section d représentera un diagramme de persistance, à ne pas confondre avec une éventuelle distance.

On rappelle qu'un diagramme de persistance est un ensemble de points de \mathbb{R}^2 comptés avec leur ordre de multiplicité et de la diagonale $\Delta = \{ (x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \}$ où chaque point de Δ à une multiplicité infinie.

Définition 1.19 On va définir le **diagramme de persistance vide** d_{\emptyset} comme le diagramme contenant uniquement la diagonale Δ .

Ainsi, on définit l'espace des diagrammes de persistance D_p comme l'ensemble des diagrammes qui seront à une distance finie du diagramme vide.

Définition 1.20 Ainsi, l'espace des diagrammes de persistance est :

$$D_p = \{ d \mid W_p^{\infty}(d, d_{\emptyset}) < \infty \}$$

On peut aussi définir d'une autre manière cet espace.

Pour cela, on pose : $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$pers(x) = x_2 - x_1$$

On remarque que :

$$pers(x) = 2 \inf_{z \in \Delta} \|x - z\|_{\infty}$$

Donc :

$$W_p^\infty(d, d_0)^p = \sum_{x \in d} \|x - \Delta\|_\infty^p = \sum_{x \in d} \left(\frac{1}{2} \text{pers}(x) \right)^p$$

On définit la **persistance** d'un diagramme comme :

$$\text{Pers}_p(d) = \sum_{x \in d} \left(\frac{1}{2} \text{pers}(x) \right)^p$$

Par suite D_p sera aussi défini comme l'ensemble des diagrammes dont la persistance est finie.

$$D_p = \{ d \mid W_p^\infty(d, d_0) < \infty \} = \{ d \mid \text{Pers}_p(d) < \infty \}$$

Théorème 1.9 D_p est complet et séparable.

Ce théorème provient de la thèse D'Elizabeth Munch : Applications of Persistent Homology to Time Varying Systems [9]. D'autres résultats fondamentaux sont présents dans la section 3.3.

Chapitre 2

Applications à la Musique

2.1 Application pour la Classification du Genre Musical

En identifiant les 12 notes de musique à des points de \mathbb{R}^n pour n assez grand, on peut directement appliquer les notions du chapitre précédent à la musique. On va alors utiliser les outils de l'homologie persistante pour comparer des morceaux de musique. Cela permet de déterminer si certains morceaux de musique se ressemblent ou non. Ainsi, à partir d'un répertoire de musique, on peut obtenir une classification des morceaux qui se ressemblent. Si le répertoire de musique est assez grand, on classe les morceaux par genres musicaux! L'homologie persistante va alors nous aider pour déterminer le genre d'un morceau de musique sur des critères rigoureux et bien définis.

Notre étude se fera à partir d'un fichier MIDI qui est une bonne approximation d'un fichier audio. A la différence d'un fichier audio, un fichier MIDI ne résulte pas d'une numérisation du son. C'est à dire, un fichier MIDI ne contient aucun son mais une série de consignes que seul un instrument compatible MIDI peut comprendre, et qu'il va suivre pour savoir quel son jouer à quel moment. Ce n'est donc pas le fichier MIDI qui produit directement le son, c'est l'instrument MIDI d'après les consignes contenues dans le fichier MIDI. On va alors baser notre étude sur des fichiers MIDI parce que les données MIDI sont incroyablement plus légères et malléables que les données audio qui sont beaucoup plus lourdes et figées.

Par conséquent, une fois avoir choisi notre morceau de musique, il faut trouver la version MIDI de ce morceau et l'étude peut commencer! Cela se fait en deux étapes fondamentales : la construction du complexe et la filtration. Il a plusieurs manières de construire le complexe et de filtrer. On va alors présenter différentes méthodes et voir leurs avantages et leurs inconvénients.

2.2 Une Première Méthode Intuitive

La plupart des morceaux que l'on connaît sont joués avec les douze notes de la gamme chromatique avec l'identification enharmonique, ce sont les douze notes du clavier d'un piano c'est à dire :

$$Do, Do^\# = Re^b, Re, Re^\# = Mi^b, Mi, Fa, Fa^\# = Sol^b, Sol, Sol^\# = La^b, La, La^\# = Si^b, Si$$

On utilisera la notation anglaise :

$$C, C^\#, D, D^\#, E, F, F^\#, G, G^\#, A, A^\#, B$$

Dans cette première approche, on représentera une note par un point de \mathbb{R}^n pour n assez grand. On va s'intéresser à la fréquence d'apparition de chacune des notes et des accords de notes, c'est à dire des k -tuples de notes où $k \in \{0, \dots, 12\}$. Par exemple, en fig. 2.1 le C est joué 40 pour-cent du temps on indiquera alors 0,4 à côté de C pour l'indiquer, l'accord C-E est joué 20 pour-cent du temps donc on

indiquera 0,2 et ainsi de suite. Si un accord n'est pas joué on ne le représentera pas. Il faut imaginer qu'il est possible d'obtenir des accords composés de k notes où $k \in \{0, \dots, 12\}$ ce qui complexifie grandement le complexe et sa représentation.

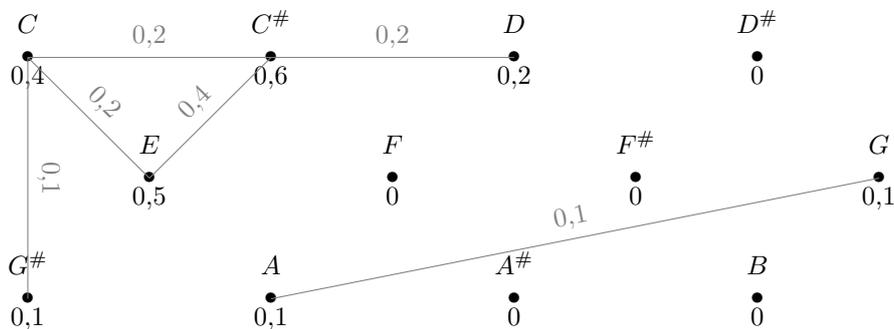


FIGURE 2.1 – Exemple de complexe construit à partir d'un morceau

On définit alors une valeur de seuil en dessous duquel les k -tuples de notes seront effacés, par exemple 0,15, on obtient alors le complexe suivant en fig. 2.2.

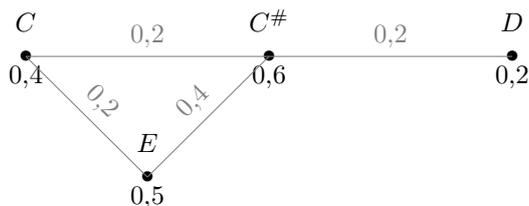


FIGURE 2.2 – Complexe après filtrage

On détermine alors les onze premiers nombres de Betti pour le complexe obtenu, ici on obtient $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$ et $\beta_k = 0$ pour $k \in \{2, \dots, 11\}$. On fait alors varier la valeur de seuil ce qui permet de faire de l'homologie persistante. Ceci permet d'obtenir un diagramme de persistance puis de le comparer avec d'autres morceaux grâce à la distance Bottleneck. Néanmoins, cette méthode présente plusieurs inconvénients.

Premièrement, on aimerait avoir l'invariance par changement de structure du morceau. En effet, ajouter un refrain ou un couplet ne devrait pas changer le genre musical. Néanmoins, si l'on rajoute un refrain ou un couplet, cela va directement changer les proportions d'apparition de chaque note donc changer le complexe final. Il est donc pertinent de réduire notre étude sur un intervalle de temps plus court pour éviter ces problèmes. Nous travaillerons maintenant sur une mesure. Un des aspects du stage a été de créer un programme Python permettant de mettre en évidence la structure d'un morceau à partir d'un fichier MIDI. Cela permet d'extraire les mesures les plus importantes du morceau. Ainsi, au lieu de travailler indépendamment sur la centaine de mesures que contient un morceau, il suffit d'étudier au plus la dizaine de mesures les plus importantes.

De plus, regarder la durée d'une note n'est pas vraiment pertinent. En effet, notre perception de la musique retient nettement mieux l'apparition d'une note que sa durée (nous voyons peu de différences si une note est jouée une ou deux secondes). Il est donc nécessaire de se concentrer sur le moment où la note apparaît plutôt que de regarder sa durée.

2.3 Etude à partir du Tonnetz

2.3.1 Présentation du Tonnetz $T[3,4,5]$

Le Tonnetz a été introduit en 1739 par Leonard Euler et correspond à un graphe dont les sommets sont les 12 notes de la gamme chromatique. On représentera une note par un nombre de \mathbb{Z}_{12} . Ainsi, C sera représenté par 0, $C^\#$ par 1, D par 2... Les notes sont organisées selon des axes qui représentent des intervalles musicaux. La direction des axes est indiquée en fig. 2.3.

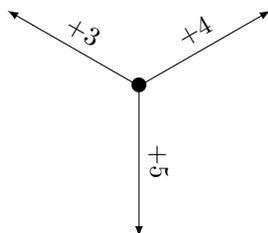


FIGURE 2.3 – Directions des axes

Voici une représentation du Tonnetz en fig. 2.4. Cette image provient du logiciel Hexachord que j'ai utilisé presque quotidiennement durant ce stage. Le logiciel, conçu par Louis Bigo dans le cadre de sa thèse [2] de doctorat consacrée aux rapports entre analyse musical et calcul spatial, est disponible à l'adresse : <http://www.lacl.fr/lbigo/hexachord>. C'est un logiciel interactif qui permet de visualiser les notes jouées dans le Tonnetz lors de l'écoute d'un morceau. De plus, on peut brancher un instrument avec une sortie MIDI comme un piano pour visualiser instantanément sur le Tonnetz les notes que l'on joue.

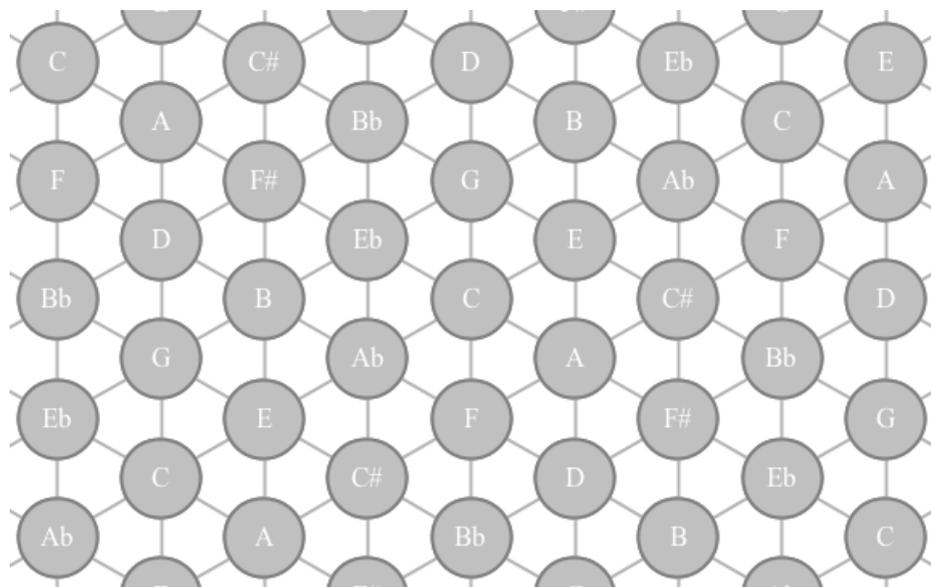


FIGURE 2.4 – Représentation du Tonnetz $T[3,4,5]$

2.3.2 Méthode avec le Tonnetz

On va alors reprendre la méthode précédente, mais en travaillant dans le Tonnetz comme dans la thèse de Mattia Giuseppe Bergomi [1]. C'est à dire deux notes peuvent être liées seulement si elles le sont déjà dans le Tonnetz. Si deux notes sont jouées ensemble mais qu'elles ne sont pas liées dans le Tonnetz (par exemple C et $C^\#$), elles apparaîtront comme deux composantes connexes à la différence de ce qu'on

a vu dans la méthode précédente. Ceci implique qu'une fois avoir construit notre complexe, il suffit d'étudier seulement les trois premiers nombres de Betti β_0 , β_1 et β_2 . En effet, tous les autres nombres de Betti seront nuls. On peut aussi déformer le Tonnetz (c'est à dire le pondérer de coefficients) comme le montre Mattia G. Bergomi, Adriano Baratè, and Barbara Di Fabio dans l'article qui s'intitule Towards a Topological Fingerprint of Music [7] mais nous n'utiliserons pas cette méthode.

Néanmoins, on sait qu'il existe d'autres Tonnetz. Pourquoi privilégier le Tonnetz $T[3,4,5]$? Combien en existe-t-il? Quelle est la nature de chacun de ses Tonnetz?

Chapitre 3

Etude des Différents Tonnetz

3.1 Combien existe-t-il de Tonnetz ?

3.1.1 Bien définir un Tonnetz

On a introduit au chapitre précédent le Tonnetz $T[3,4,5]$. Mais pourquoi nous utilisons les nombres 3, 4 et 5 ? En réalité, on définit le Tonnetz grâce à trois nombres a, b, c de \mathbb{Z}_{12} et on le note $T[a, b, c]$. De la même manière que précédemment, les notes sont toujours disposées sur des axes (voir fig. 3.1) qui représentent des intervalles musicaux.

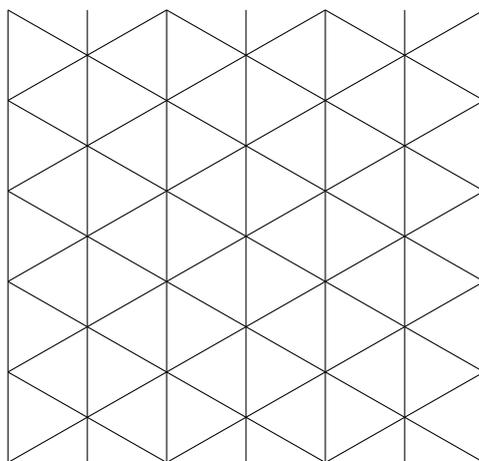


FIGURE 3.1 – Axes du Tonnetz

On garde les mêmes directions que précédemment qui sont représentées en fig. 3.2.

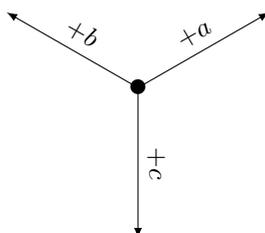


FIGURE 3.2 – Directions des axes

Il y a trois axes mais étant dans un plan de dimension 2, un des trois axes se déduit des deux autres. En effet, on doit avoir la relation de Chasles :

$$a + b + c = 0 \quad [12]$$

Nous allons alors étudier les différents Tonnetz possibles.

Lemme 3.1 *Si $T[a, b, c]$ est un Tonnetz, alors en choisissant les représentants de a', b', c' de a, b, c dans $\{0, 1, 2, 3, \dots, 11\} \subset \mathbb{N}$ on peut supposer sans perte de généralités que :*

$$a' \leq b' \leq c'$$

Démonstration. Premièrement, en effectuant une rotation de $\frac{\pi}{3}$ du Tonnetz on obtient que $T[a, b, c] = T[b, c, a]$. De plus une symétrie par rapport à l'axe vertical permet de montrer que $T[a, b, c] = T[b, a, c]$. Ainsi, le Tonnetz est invariant par permutation des nombres a, b, c .

Lemme 3.2 *Si $T[a, b, c]$ est un Tonnetz tel que a', b', c' soient les représentants de a, b, c dans $\{0, 1, 2, 3, \dots, 11\}$, alors on peut supposer que :*

$$0 < a' \leq b' \leq 5$$

Démonstration. D'après le lemme précédant on peut supposer que : $a' \leq b' \leq c'$. Par définition du Tonnetz : $a + b + c = 0 \quad [12]$, or $11 + 11 + 11 = 33 < 36$ donc $0 < a' + b' + c' < 36$ donc $a' + b' + c' = 12$ ou 24.

Supposons que $a' + b' + c' = 24$, en effectuant une symétrie par rapport à l'axe horizontal on obtient le Tonnetz $T[-a, -b, -c]$ qui admet comme représentant $12 - a', 12 - b', 12 - c'$ dans $\{0, 1, 2, \dots, 11\}$.

Or : $(12 - a') + (12 - b') + (12 - c') = 36 - (a' + b' + c') = 12$

Ainsi, on peut choisir a, b, c tels que $a' + b' + c' = 12$. Par suite, si $b' \geq 6$ alors $c' \geq 6$ donc $a' + b' + c' \geq 12 + a > 12$ ce qui est absurde donc $0 < a' \leq b' \leq 5$.

3.1.2 Enumération des différents Tonnetz

On va énumérer les différents Tonnetz $T[a, b, c]$ sous les trois contraintes :

$$(1) : 0 < a' \leq b' \leq 5 \quad (2) : a + b + c = 0 \quad [12] \quad (3) : a' \leq b' \leq c'$$

Si ces trois conditions sont respectées pour certaines valeurs de a, b, c alors $T[a, b, c]$ existe et est bien défini, on peut alors énumérer les Tonnetz en table 3.1.

On peut ainsi énumérer les 12 Tonnetz existants et vérifier qu'ils sont bien indépendants :

$$\begin{array}{cccccc} T[1, 1, 10] & T[1, 2, 9] & T[1, 3, 8] & T[1, 4, 7] & T[1, 5, 6] & T[2, 2, 8] \\ T[2, 3, 7] & T[2, 4, 6] & T[2, 5, 5] & T[3, 3, 6] & T[3, 4, 5] & T[4, 4, 4] \end{array}$$

On va étudier la connexité d'un Tonnetz.

Lemme 3.3 $T[a, b, c]$ est connexe $\iff \exists (k, k') \in \mathbb{Z}_{12}^2 : ka + k'b = 1 \quad [12]$

Démonstration. \Rightarrow Montrons d'abord l'implication, si $T[a, b, c]$ est connexe alors il existe un chemin reliant 0 à 1 en passant par les axes a ou b . Ce chemin passe k fois par l'axe a et k' fois par l'axe b donc $\exists (k, k') \in \mathbb{Z}_{12}^2 : ka + k'b = 1 \quad [12]$.

\Leftarrow Pour la réciproque, on suppose l'existence de $(k, k') \in \mathbb{Z}_{12}^2 : ka + k'b = 1 \quad [12]$. Alors, $\forall N \in \mathbb{Z}_{12}$, il existe un chemin reliant 0 à N , en effet il suffit de passer Nk fois par l'axe a et Nk' fois par l'axe b .

Lemme 3.4 *Soit $T[a, b, c]$ un Tonnetz tel que $0 \leq a' \leq b' \leq c' \leq 11$ soient les représentants de a, b, c dans \mathbb{Z} avec $b' \leq 5$. Alors :*

$$T[a, b, c] \text{ est connexe } \iff a' \text{ et } b' \text{ sont premiers entre eux}$$

TABLE 3.1 – Enumération des Tonnetz possibles

si $a = 1$		
Valeurs de b d'après (1)	Valeurs de c en respectant (2)	Respect de (3)
1	10	Oui
2	9	Oui
3	8	Oui
4	7	Oui
5	6	Oui

si $a = 2$		
Valeurs de b d'après (1)	Valeurs de c en respectant (2)	Respect de (3)
2	8	Oui
3	7	Oui
4	6	Oui
5	5	Oui

si $a = 3$		
Valeurs de b d'après (1)	Valeurs de c en respectant (2)	Respect de (3)
3	6	Oui
4	5	Oui
5	4	Non

si $a = 4$		
Valeurs de b d'après (1)	Valeurs de c en respectant (2)	Respect de (3)
4	4	Oui
5	3	Non

si $a = 5$		
Valeurs de b d'après (1)	Valeurs de c en respectant (2)	Respect de (3)
5	2	Non

Démonstration. \Rightarrow Pour montrer l'implication, on va montrer la contraposée, c'est à dire :

a' et b' ne sont pas premiers entre eux $\Rightarrow T[a, b, c]$ n'est pas connexe

Par hypothèse, $b' \leq 5$ donc $a' \leq 4$ car $a' = b' = 5$ induit $c' = 2$ ce qui est absurde. De plus, a' et b' ne sont pas premiers entre eux donc $PGCD(a', b') = 2, 3$ ou 4 . Soient $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ alors :

$ka' + k'b' = k(PGCD(a', b')a'') + k'(PGCD(a', b')b'') = PGCD(a', b') \times N$ où $N \in \mathbb{Z}$. Puisque $PGCD(a', b')$ n'est pas premier avec 12, $ka + k'b$ ne pourra jamais être congrus à 1 modulo 12. D'après le lemme précédant, cela implique que le Tonnetz ne pourra jamais être connexe.

\Leftarrow Pour montrer la réciproque, on va utiliser le lemme de Bézout. Si a' et b' sont premiers entre eux alors : $\exists(k, k') \in \mathbb{Z}^2 : ka' + k'b' = 1$. Ainsi $\exists(k, k') \in \mathbb{Z}_{12}^2 : ka + k'b = 1$ [12]. Le lemme précédant permet de conclure que $T[a, b, c]$ est connexe.

Lemme 3.5 Nous pouvons généraliser le résultat précédant, lorsque a, b, c ne sont pas dans \mathbb{Z}_{12} mais dans \mathbb{Z}_n où $n \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$$T[a, b, c] \text{ est connexe} \iff PGCD(a', b', n) = 1 \iff PGCD(a', b', c') = 1$$

3.2 Caractérisation des 12 Tonnetz

L'objectif va être de déterminer la nature de chaque Tonnetz.

Grâce à des outils informatiques, on peut calculer les nombres de Betti de chaque Tonnetz que l'on représente dans la table 3.2.

TABLE 3.2 – Nombres de Betti de chaque Tonnetz

Tonnetz	Nombres de Betti		
	β_0	β_1	β_2
$T[1, 2, 9]$	1	2	1
$T[1, 3, 8]$	1	2	1
$T[1, 4, 7]$	1	2	1
$T[2, 3, 7]$	1	2	1
$T[3, 4, 5]$	1	2	1
$T[1, 1, 10]$	1	1	0
$T[2, 5, 5]$	1	1	0
$T[2, 2, 8]$	2	2	0
$T[1, 5, 6]$	1	1	6
$T[2, 4, 6]$	2	2	6
$T[3, 3, 6]$	3	0	3
$T[4, 4, 4]$	4	0	0

On conclut que les Tonnetz ne sont pas tous identiques. On va alors étudier le complexe simplicial engendré par chaque Tonnetz !

3.2.1 $T[1,2,9]$, $T[1,3,8]$, $T[1,4,7]$, $T[2,3,7]$, $T[3,4,5]$

Commençons par étudier les cinq Tonnetz dont les trois premiers nombres de Betti sont $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$ et $\beta_2 = 1$.

Ces cinq Tonnetz sont tous des tores, mais on peut pousser l'étude un peu plus loin.

On remarque que $T[1, 2, 9]$ et $T[2, 3, 7]$ sont isomorphes. En effet, dans \mathbb{Z}_{12} , 1, 2, 9 sont d'ordre 12, 6, 4, et 2, 3, 7 sont d'ordre 6, 4, 12. Ceci implique l'existence d'un isomorphisme entre ces deux espaces. De la même manière, $T[1, 3, 8]$ et $T[3, 4, 5]$ sont isomorphes car 1, 3, 8 sont d'ordre 12, 4, 3 et 3, 4, 5 sont d'ordre 4, 3, 12. On a donc trois tores différents qui sont représentés en fig. 3.3, fig. 3.4 et fig. 3.5.

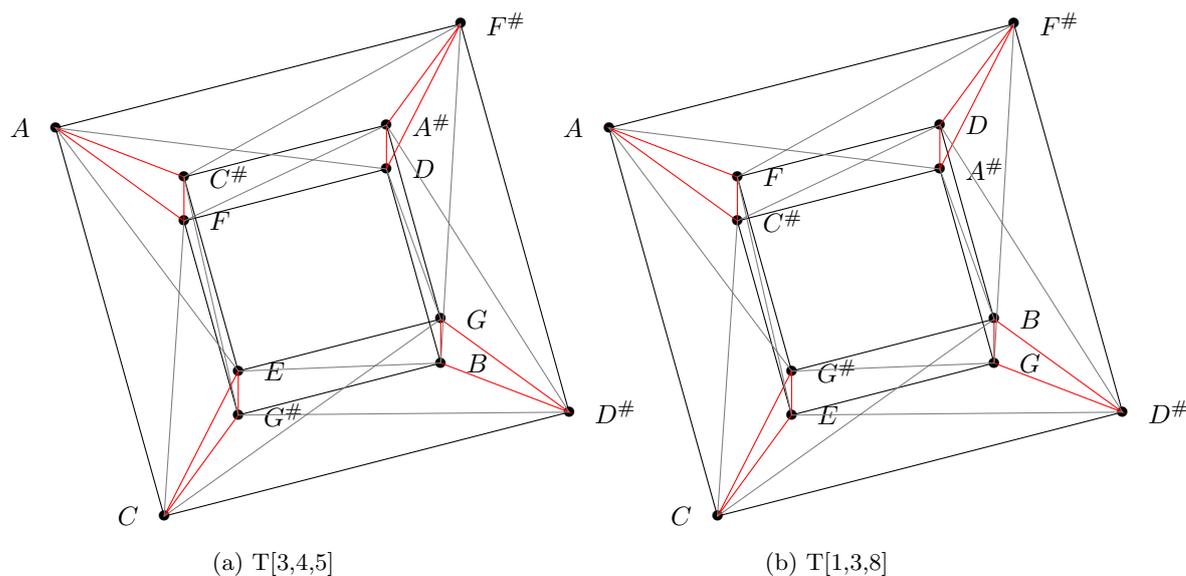


FIGURE 3.3 – Représentation spatiale de $T[3,4,5]$ et $T[1,3,8]$

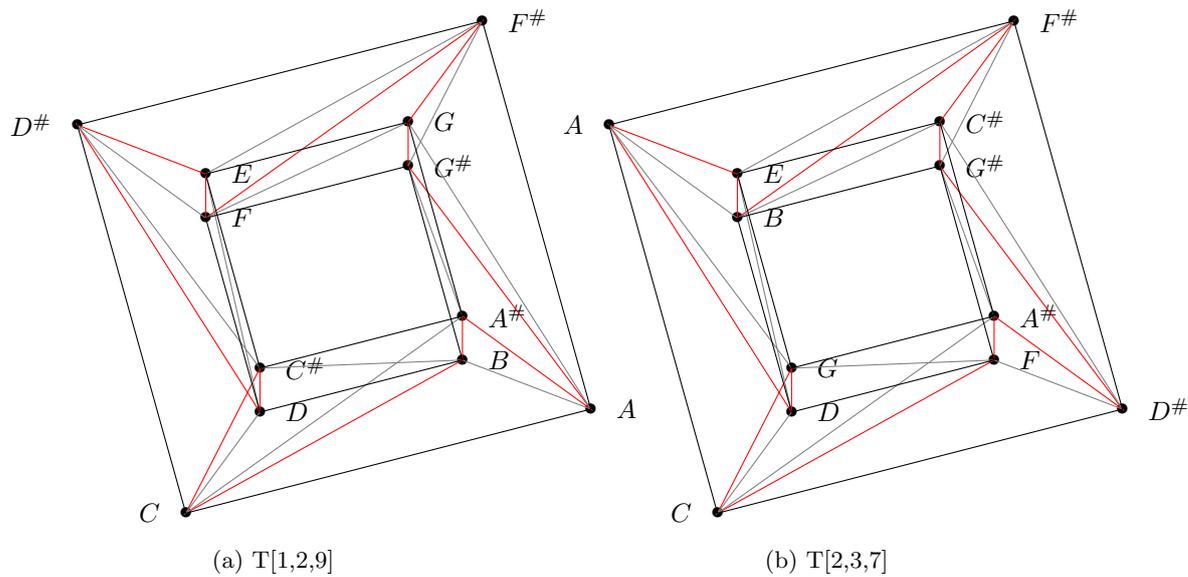


FIGURE 3.4 – Représentation spatiale de $T[1,2,9]$ et $T[2,3,7]$

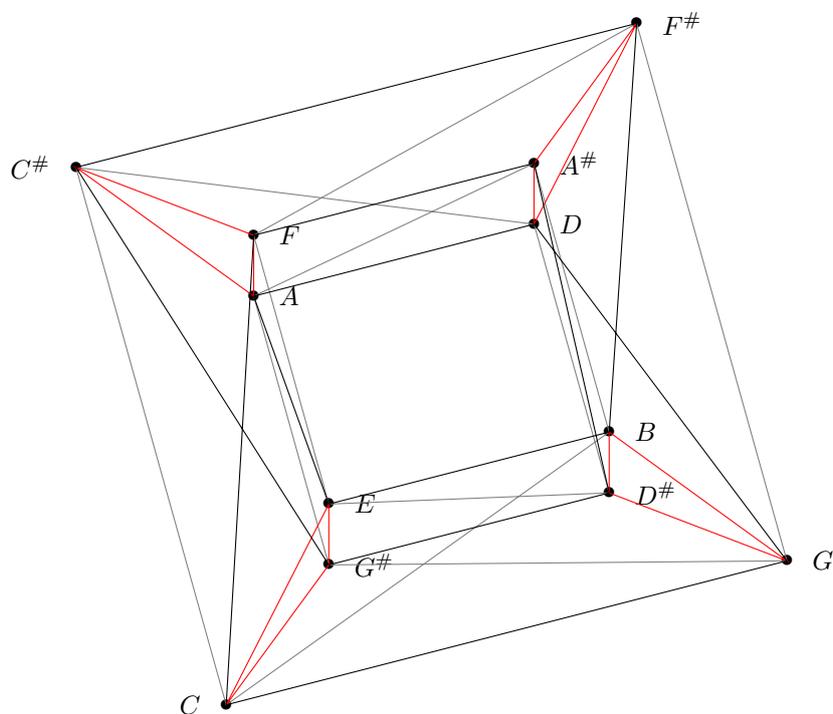


FIGURE 3.5 – Représentation spatiale de $T[1,4,7]$

3.2.2 $T[1,1,10]$, $T[2,5,5]$, $T[2,2,8]$

De la même manière que précédemment, on remarque que $T[1, 1, 10]$ et $T[2, 5, 5]$ sont isomorphes car 1 et 10 sont d'ordre 12 et 6 comme 5 et 2. Ces deux Tonnetz seront alors exactement le même objet mathématique. On peut représenter explicitement dans le plan en fig. 3.6 ces trois Tonnetz, $T[1, 1, 10]$ et $T[2, 5, 5]$ sont des cylindres tandis que $T[2, 2, 8]$ est composé de deux cylindres.

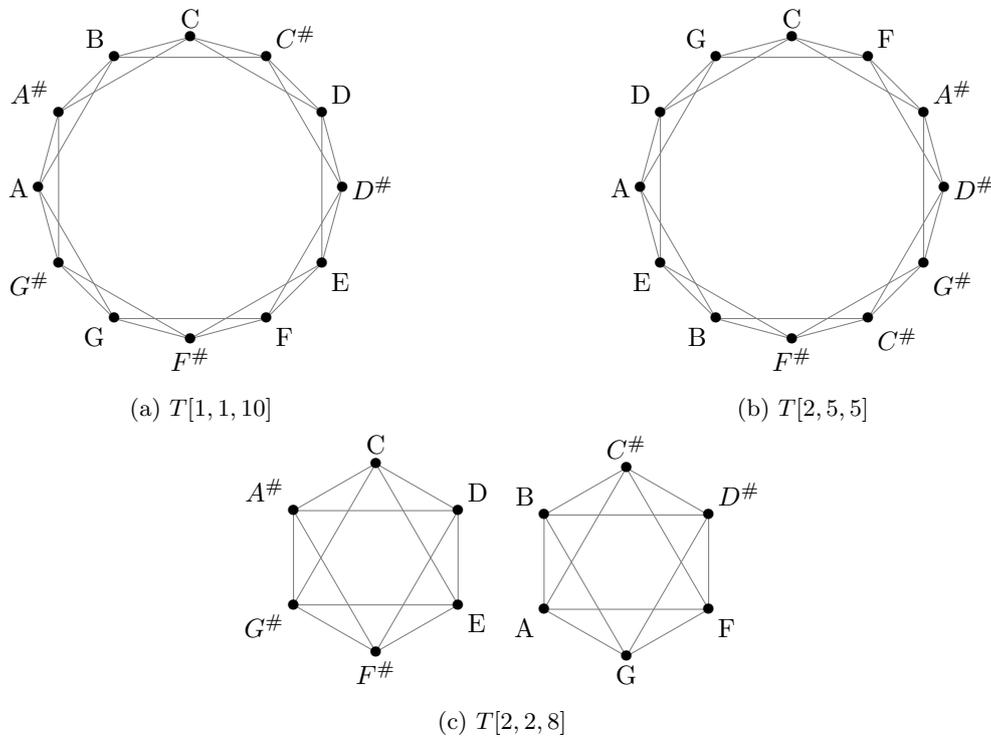


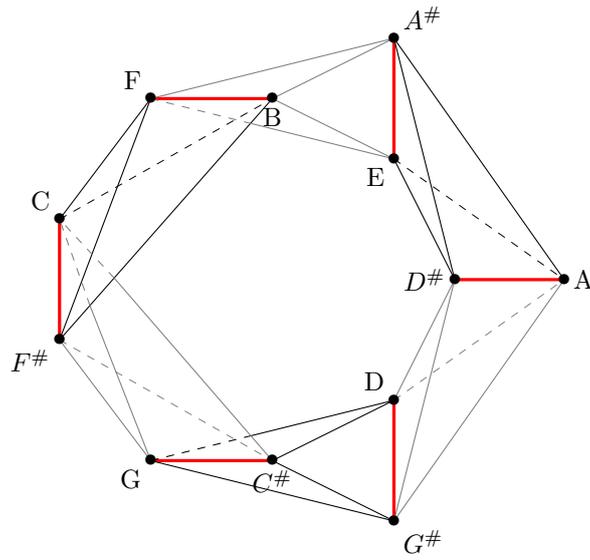
FIGURE 3.6 – Représentation des Tonnetz $T[1, 1, 10]$, $T[2, 5, 5]$ et $T[2, 2, 8]$

3.2.3 $T[1,5,6]$ et $T[2,4,6]$

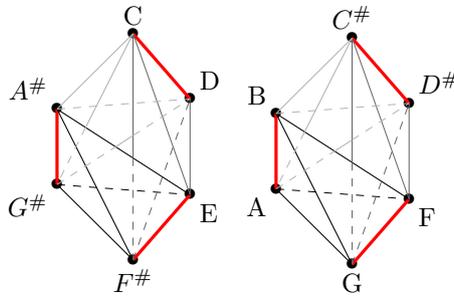
On va maintenant étudier les Tonnetz $T[1, 5, 6]$ et $T[2, 4, 6]$ qui sont des colliers de tétraèdres. En particulier, $T[1, 5, 6]$ est un collier de six tétraèdres qui forment une boucle tandis que $T[2, 4, 6]$ est composé de deux colliers de trois tétraèdres que nous représentons en fig. 3.7.

3.2.4 $T[3,3,6]$ et $T[4,4,4]$

Les deux derniers Tonnetz sont respectivement trois tétraèdres et quatre triangles, ces deux Tonnetz sont représentés en fig. 3.8.

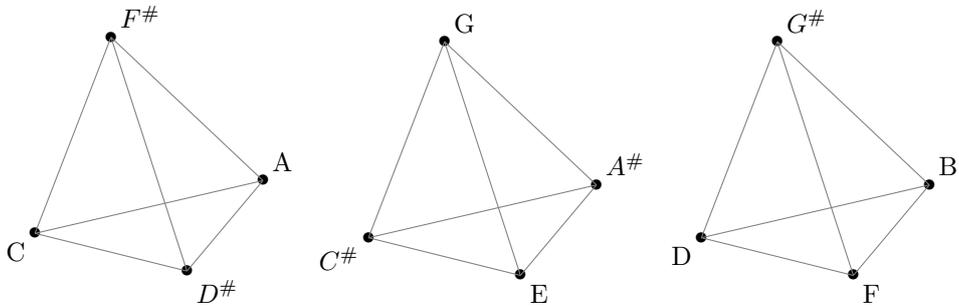


(a) $T[1, 5, 6]$

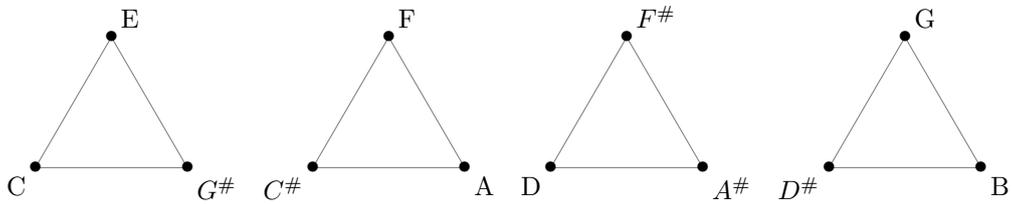


(b) $T[2, 4, 6]$

FIGURE 3.7 – Représentation des Tonnetz $T[1, 5, 6]$ et $T[2, 4, 6]$



(a) $T[3, 3, 6]$



(b) $T[4, 4, 4]$

FIGURE 3.8 – Représentation des Tonnetz $T[3, 3, 6]$ et $T[4, 4, 4]$

3.2.5 Récapitulatif

TABLE 3.3 – Nature de chaque Tonnetz

Tonnetz	Objet Géométrique	Visualisation
$T[1, 3, 8]$ et $T[3, 4, 5]$	Tore	
$T[1, 2, 9]$ et $T[2, 3, 7]$	Tore	
$T[1, 4, 7]$	Tore	
$T[1, 1, 10]$ et $T[2, 5, 5]$	Cylindre	
$T[2, 2, 8]$	2 Cylindres	
$T[1, 5, 6]$	Collier de 6 Tétraèdres	
$T[2, 4, 6]$	2 Colliers de 3 Tétraèdres	
$T[3, 3, 6]$	3 Tétraèdres	
$T[4, 4, 4]$	4 Triangles	

Chapitre 4

Actions de Groupe

Toujours dans l'objectif d'appliquer les outils de l'homologie persistante à un fichier MIDI, on va alors modifier la manière dont on construit le complexe simplicial. En effet, deux complexes différents peuvent être très proches musicalement et il faut pouvoir les identifier en un seul et même complexe. Pour cela, on définit un accord $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ comme un sous-ensemble de \mathbb{Z}_{12} , ses éléments a_i seront appelés des notes. Ainsi, l'ensemble des accords sont les parties de \mathbb{Z}_{12} , de cardinal $2^{12} = 4096$. L'objectif est de réduire ce nombre, on va regarder l'action de différents groupes sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$. Puisque les orbites forment une partition de cet ensemble, on pourra se concentrer sur les classes d'équivalences engendrées par les orbites.

4.1 Quelques rappels d'Algèbre

Dans ce paragraphe, $(G, *)$ sera un groupe et X sera un ensemble. L'élément neutre de G sera noté e_G .

Définition 4.1 On dit que G agit sur X si l'application

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

vérifie les deux propriétés suivantes :

- $\forall x \in X, \quad e_G \cdot x = x$
- $\forall g, g' \in G, \quad \forall x \in X, \quad g \cdot (g' \cdot x) = (g * g') \cdot x$

Définition 4.2 Pour un élément x de X , l'**orbite de x** , notée \mathcal{O}_x est définie par :

$$\mathcal{O}_x = \{y \in X : \exists g \in G : y = g \cdot x\}$$

On remarque que la relation $x \sim y$ définie par x est dans la même orbite que y est une relation d'équivalence. Les orbites sont donc des classes d'équivalences et forment une partition de X .

Définition 4.3 Pour un élément g de G , le **fixateur de g** , noté Fix_g est défini par :

$$Fix_g = \{x \in X : g \cdot x = x\}$$

Lemme de Burnside

Soit $(G, *)$ un groupe agissant sur X un ensemble. On note ω le nombre d'orbite. Alors :

$$\omega = \frac{1}{\text{card}(G)} \sum_{g \in G} \text{card}(Fix_g)$$

4.2 Applications à l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$

Nous allons alors considérer l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$ qui est de cardinal 4096. L'objectif va être de trouver une partition de cet ensemble. Pour cela, on va regarder l'action de trois groupes sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$ ce qui nous donnera trois partitions différentes.

4.2.1 Action de \mathbb{Z}_{12} sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$

On va regarder l'action du groupe $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ sur l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$ par :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{12} \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12}) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12}) \\ (\rho, \{a_0, a_1, \dots, a_n\}) &\mapsto \{a_0 + \rho, a_1 + \rho, \dots, a_n + \rho\} \end{aligned}$$

Musicalement, cela revient à identifier les accords qui sont joués à une hauteur différente, c'est à dire plus grave ou plus aigu. En travaillant sur une mesure, cela simplifie l'étude d'un morceau.

C'est bien une action de groupe, car l'élément neutre de $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ est 0 et par définition \mathbb{Z}_{12} est stable par la loi $+$. On va chercher à déterminer le nombre d'orbites ω , on a d'après le lemme de Burnside :

$$\omega = \frac{1}{12} \sum_{\rho \in \mathbb{Z}_{12}} \text{card}(\text{Fix}_\rho)$$

Pour tout ρ appartenant à \mathbb{Z}_{12} il faut alors déterminer $\text{card}(\text{Fix}_\rho)$ que l'on représente en table 4.1.

TABLE 4.1 – Valeurs de $\text{card}(\text{Fix}_\rho)$ pour $\rho \in \mathbb{Z}_{12}$

$\rho \in \mathbb{Z}_{12}$	Cycles	$\text{card}(\text{Fix}_\rho)$
0	(0)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)	$2^{12} = 4096$
1	(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11)	$2^1 = 2$
2	(0,2,4,6,8,10)(1,3,5,7,9,11)	$2^2 = 4$
3	(0,3,6,9)(1,4,7,10)(2,5,8,11)	$2^3 = 8$
4	(0,4,8)(1,5,9)(2,6,10)(3,7,11)	$2^4 = 16$
5	(0,5,10,3,8,1,6,11,4,9,2,7)	$2^1 = 2$
6	(0,6)(1,7)(2,8)(3,9)(4,10)(5,11)	$2^6 = 64$
7	(0,7,2,9,4,11,6,1,8,3,10,5)	$2^1 = 2$
8	(0,8,4)(1,9,5)(2,10,6)(3,11,7)	$2^4 = 16$
9	(0,9,6,3)(1,10,7,4)(2,11,8,5)	$2^3 = 8$
10	(0,10,8,6,4,2)(1,11,9,7,5,3)	$2^2 = 4$
11	(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11)	$2^1 = 2$

Si $\rho = 0$, il est clair que pour tout accord $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ appartenant à $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$, on a : $\{a_0 + \rho, a_1 + \rho, \dots, a_n + \rho\} = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$.

Donc $A \in \text{Fix}_0$, par suite $\text{card}(\text{Fix}_0) = \text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})) = 2^{12} = 4096$.

Si $\rho \neq 0$, la formule qui permet d'obtenir $\text{card}(\text{Fix}_\rho)$ est donnée par :

$$\text{card}(\text{Fix}_\rho) = 2^{\text{PGCD}(\rho, 12)}$$

Ainsi : $\sum_{\rho \in \mathbb{Z}_{12}} \text{card}(\text{Fix}_\rho) = 4224$

En appliquant le lemme de Burnside, on trouve qu'il existe exactement $\frac{4224}{12} = 352$ classes d'équivalence d'accords qui sont invariants par translation.

4.2.2 Action de \mathbb{D}_{12} sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$

On appelle groupe diédral d'ordre 12, que l'on note \mathbb{D}_{12} le groupe des isométries du plan conservant le polygone régulier à 12 côtés, \mathbb{D}_{12} est de cardinal 24. On peut aussi le définir comme :

$$\mathbb{D}_{12} = \langle s, \rho \mid \rho^{12}, s^2, s\rho s^{-1}\rho \rangle$$

On peut voir s et ρ comme des éléments de \mathbb{Z}_{12} , où ρ appartient à \mathbb{Z}_{12} et s appartient à $\{-1,1\}=\{1,11\}$. On va alors regarder l'action du groupe diédral \mathbb{D}_{12} sur l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$ par :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{12} \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12}) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12}) \\ ((s, \rho), \{a_0, a_1, \dots, a_n\}) &\mapsto \{sa_0 + \rho, sa_1 + \rho, \dots, sa_n + \rho\} \end{aligned}$$

Musicalement, on identifie toujours les accords qui sont joués à une hauteur différente et on identifie en plus les accords par transformation L/P/R, qui sont respectivement les transformations musicales de base (Leittonwechsel/Parallèle/Relative).

On définit bien une action de groupe en utilisant la loi $*$ sur \mathbb{D}_{12} tel que :

$$\forall (s, \rho), (s', \rho') \in \mathbb{D}_{12}, (s, \rho) * (s', \rho') = (ss', s\rho' + \rho)$$

On pourra vérifier que $(\mathbb{D}_{12}, *)$ est bien un groupe, l'élément neutre est $(1, 0)$ et on a bien :

$$\forall \{a_0, a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12}), (1, 0) \cdot \{a_0, a_1, \dots, a_n\} = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$$

De plus, soient (s, ρ) et $(s', \rho') \in \mathbb{D}_{12}$, alors : $\forall \{a_0, a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$,

$$\begin{aligned} (s, \rho) \cdot ((s', \rho') \cdot \{a_0, a_1, \dots, a_n\}) &= (s, \rho) \cdot \{s'a_0 + \rho', s'a_1 + \rho', \dots, s'a_n + \rho'\} \\ &= \{s(s'a_0 + \rho') + \rho, \dots, s(s'a_n + \rho') + \rho\} = \{ss'a_0 + s\rho' + \rho, \dots, ss'a_n + s\rho' + \rho\} \\ &= (ss', s\rho' + \rho) \cdot \{a_0, a_1, \dots, a_n\} = ((s, \rho) * (s', \rho')) \cdot \{a_0, a_1, \dots, a_n\} \end{aligned}$$

De la même manière que précédemment, on a déterminé les $card(Fix_{s,\rho})$ pour les 24 (s, ρ) dans \mathbb{D}_{12} en table 4.2.

TABLE 4.2 – Valeurs de $card(Fix_{s,\rho})$ pour $(s, \rho) \in \mathbb{D}_{12}$

$s = 11$		
$\rho \in \mathbb{Z}_{12}$	Cycles	$card(Fix_{11,\rho})$
0	(0)(1,11)(2,10)(3,9)(4,8)(5,7)(6)	$2^7 = 128$
1	(0,1)(2,11)(3,10)(4,9)(5,8)(6,7)	$2^6 = 64$
2	(0,2)(1)(3,11)(4,10)(5,9)(6,8)(7)	$2^7 = 128$
3	(0,3)(1,2)(4,11)(5,10)(6,9)(7,8)	$2^6 = 64$
4	(0,4)(1,3)(2)(5,11)(6,10)(7,9)(8)	$2^7 = 128$
5	(0,5)(1,4)(2,3)(6,11)(7,10)(8,9)	$2^6 = 64$
6	(0,6)(1,5)(2,4)(3)(7,11)(8,10)(9)	$2^7 = 128$
7	(0,7)(1,6)(2,5)(3,4)(8,11)(9,10)	$2^6 = 64$
8	(0,8)(1,7)(2,6)(3,5)(4)(9,11)(10)	$2^7 = 128$
9	(0,9)(1,8)(2,7)(3,6)(4,5)(10,11)	$2^6 = 64$
10	(0,10)(1,9)(2,8)(3,7)(4,6)(5)(11)	$2^7 = 128$
11	(0,11)(1,10)(2,9)(3,8)(4,7)(5,6)	$2^6 = 64$

La moitié du travail a déjà était fait lorsque $s = 1$ (cf table 4.1) . Il reste à déterminer le cas quand $s = 11$. Si ρ est pair, l'action revient à effectuer une symétrie où deux notes restent invariantes. Dans le cas contraire, toutes les notes varient.

$$\text{Ainsi : } \sum_{(s,\rho) \in \mathbb{D}_{12}} card(Fix_{s,\rho}) = 5376$$

D'après le lemme de Burnside, on trouve qu'il existe exactement $\frac{5376}{24} = 224$ classes d'équivalences.

L'action par le groupe diédral est très intéressante car elle laisse invariant les nombres de Betti. C'est pourquoi nous avons travaillé avec celle là pour le reste du stage. On peut munir cet ensemble d'une loi d'inclusion telle que pour des accords $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ et $B = \{b_0, b_1, \dots, b_m\}$:

$$A \subset B \iff \exists (s, \rho) \in \mathbb{D}_{12} : \forall a_i \in A, sa_i + \rho \in B$$

On représente cet ensemble partiellement ordonné sous la forme d'un diagramme de Hasse en fig. 4.1 ou chaque accord est classé verticalement suivant le nombre de notes qu'il contient. Nous travaillons toujours dans le Tonnetz $T[3,4,5]$, on peut avoir des figures similaires pour les 11 autres Tonnetz.

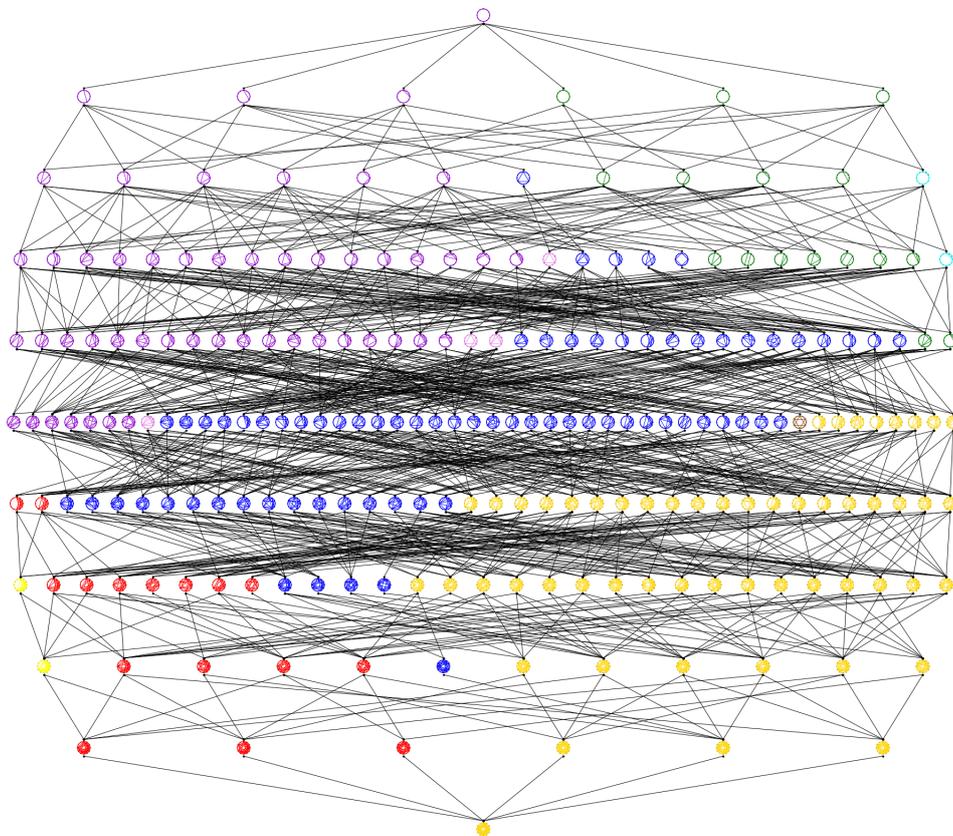


FIGURE 4.1 – Diagramme de Hasse des 224 classes d'équivalences

Cette figure a été codée pendant ce stage. Elle permet de comprendre que faire de l'homologie persistante revient à déterminer un chemin du haut vers le bas dans ce diagramme de Hasse. En effet, lors de l'écoute d'une mesure, chaque nouvelle note est ajoutée, c'est pourquoi on va vers le bas, car l'accord devient de plus en plus riche. Le code couleur utilisé met en évidence les nombres de Betti. Deux accords sont de la même couleur s'ils ont les mêmes nombres de Betti. Ainsi, si on connaît le chemin dans le diagramme de Hasse, on peut trouver les différentes valeurs des nombres de Betti.

4.2.3 Action de Aff_{12} sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$

On appelle groupe affine d'ordre 12, que l'on note Aff_{12} le groupe des transformations affines de \mathbb{Z}_{12} , Aff_{12} est de cardinal 48. On peut aussi le voir comme :

$$\text{Aff}_{12} = \{(s, \rho) \mid s \in \mathbb{Z}_{12}^\times, \rho \in \mathbb{Z}_{12}\}$$

Où $\mathbb{Z}_{12}^\times = \{1, 5, 7, 11\}$. On va alors regarder l'action du groupe affine Aff_{12} sur l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$ par :

$$\begin{aligned} \text{Aff}_{12} \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12}) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12}) \\ ((s, \rho), \{a_0, a_1, \dots, a_n\}) &\mapsto \{sa_0 + \rho, sa_1 + \rho, \dots, sa_n + \rho\} \end{aligned}$$

On définit bien une action de groupe en utilisant comme pour \mathbb{D}_{12} , la loi $*$ sur Aff_{12} tel que :

$$\forall (s, \rho), (s', \rho') \in \text{Aff}_{12}, (s, \rho) * (s', \rho') = (ss', s\rho' + \rho)$$

On a en table 4.3 la valeur de $\text{card}(\text{Fix}_{s,\rho})$ pour $s = 5$ et $s = 7$ et $\rho \in \mathbb{Z}_{12}$, le cas $s = 1$ et $s = 11$ a déjà été traité.

TABLE 4.3 – Valeurs de $\text{card}(\text{Fix}_{s,\rho})$ pour $(s, \rho) \in \text{Aff}_{12}$

$s = 5$		
$\rho \in \mathbb{Z}_{12}$	Cycles	$\text{card}(\text{Fix}_{5,\rho})$
0	(0)(1,5)(2,10)(3)(4,8)(6)(7,11)(9)	$2^8 = 256$
1	(0,1,6,7)(2,11,8,5)(3,4,9,10)	$2^3 = 8$
2	(0,2)(1,7)(3,5)(4,10)(6,8)(9,11)	$2^6 = 64$
3	(0,3,6,9)(1,8,7,2)(4,11,10,5)	$2^3 = 8$
4	(0,4)(1,9)(2)(3,7)(5)(6,10)(8)(11)	$2^8 = 256$
5	(0,5,6,11)(1,10,7,4)(2,3,8,9)	$2^3 = 8$
6	(0,6)(1,11)(2,4)(3,9)(5,7)(8,10)	$2^6 = 64$
7	(0,7,6,1)(2,5,8,11)(3,10,9,4)	$2^3 = 8$
8	(0,8)(1)(2,6)(3,11)(4)(5,9)(7)	$2^8 = 256$
9	(0,9,6,3)(1,2,7,8)(4,5,10,11)	$2^3 = 8$
10	(0,10)(1,3)(2,8)(4,6)(5,11)(7,9)	$2^6 = 64$
11	(0,11,6,5)(1,4,7,10)(2,9,8,3)	$2^3 = 8$

$s = 7$		
$\rho \in \mathbb{Z}_{12}$	Cycles	$\text{card}(\text{Fix}_{7,\rho})$
0	(0)(1,7)(2)(3,9)(4)(5,11)(6)(8)(10)	$2^9 = 512$
1	(0,1,8,9,4,5)(2,3,10,11,3,7)	$2^2 = 4$
2	(0,2,4,6,8,10)(1,9,5)(3,11,7)	$2^3 = 8$
3	(0,3)(1,10)(2,5)(4,7)(6,9)(8,11)	$2^6 = 64$
4	(0,4,8)(1,11,9,7,5,3)(2,6,10)	$2^3 = 8$
5	(0,5,4,9,8,1)(2,7,6,11,10,3)	$2^2 = 4$
6	(0,6)(1)(2,8)(3)(4,10)(5)(7)(9)(11)	$2^9 = 512$
7	(0,7,8,3,4,11)(1,2,9,10,5,6)	$2^2 = 4$
8	(0,8,4)(1,3,5,7,9,11)(2,10,6)	$2^3 = 8$
9	(0,9)(1,4)(2,11)(3,6)(5,8)(7,10)	$2^6 = 64$
10	(0,10,8,6,4,2)(1,5,9)(3,11,7)	$2^3 = 8$
11	(0,11,4,3,8,7)(1,6,5,10,9,2)	$2^2 = 4$

Ainsi : $\sum_{(s,\rho) \in \text{Aff}_{12}} \text{card}(\text{Fix}_{s,\rho}) = 7584$

En appliquant le lemme de Burnside, on trouve qu'il existe exactement $\frac{7584}{48} = 158$ orbites.

Chapitre 5

Conclusion

Ce stage de quatre mois à l'IRMA m'a permis de découvrir le monde de la recherche. J'étais au quotidien avec des chercheurs et j'ai pu observer leur façon de travailler : recherche, conférences, discussions entre chercheurs... Tout au long du stage, j'ai appris à travailler en toute autonomie. En effet, malgré la disponibilité des chercheurs qui étaient présents, je me suis souvent retrouvé seul et cela m'a permis de comprendre comment s'organiser au mieux. Néanmoins, le travail de groupe est aussi quelque chose d'essentiel dans la recherche. Je devais régulièrement synthétiser et expliquer mon travail, écouter les précieuses remarques des personnes qui m'entouraient et comprendre les prochains objectifs à atteindre. Les outils informatiques étaient omniprésents ce qui m'a fait progresser en codage Python. L'écriture des comptes-rendus étaient en \LaTeX ce qui a amélioré ma façon d'écrire.

Par ailleurs, j'ai découvert agréablement la ville de Strasbourg qui m'était inconnue jusqu'alors. J'ai apprécié son architecture et son urbanisme. Le stage permet aussi de changer ses habitudes et de découvrir de nouveaux lieux.

Le sujet du stage était très intéressant. L'algèbre, la topologie et la géométrie sont des domaines qui s'appliquent parfaitement à l'analyse musicale. Mon maître de stage m'a transmis sa passion pour les mathématiques appliquées à la musique. Cela confirme mon choix de continuer dans cette voie. Finalement, au cours de ces quatre mois, j'ai constamment renforcé mes connaissances mathématiques, appris à être rigoureux et à communiquer entre scientifiques.

Bibliographie

- [1] Mattia Giuseppe Bergomi. *Dynamical and topological tools for (modern) music analysis*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2016.
- [2] Louis Bigo. *Représentation symboliques musicales et calcul spatial*. PhD thesis, Université Paris Est Créteil / Ircam, 2013.
- [3] Chao Chen Daniel Freedman. Algebraic topology for computer vision. *Hewlett-Packard Development Company*, December 2009.
- [4] Marc Ethier. Introduction à l'homologie persistante avec application à la suspension topologique. *CaMUS, Vol 3, 1-18*, 2012.
- [5] Robert Ghrist. Barcodes : The persistent topology of data. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 2008.
- [6] Ernst Ulrich Deuker Kathlén Kohn. The complex of non-chromatic scales. *Mitteilungen der DMV*, February 2018.
- [7] Adriano Baratè Mattia G. Bergomi and Barbara Di Fabio. Towards a topological fingerprint of music. *Springer International Publishing Switzerland*, 2016.
- [8] Arnur Nigmatov Michael Kerber, Dmitriy Morozov. Geometry helps to compare persistence diagrams. *SIAM*, January 2016.
- [9] Elizabeth Munch. *Applications of Persistent Homology to Time Varying Systems*. PhD thesis, Department of Mathematics Duke University, 2013.