

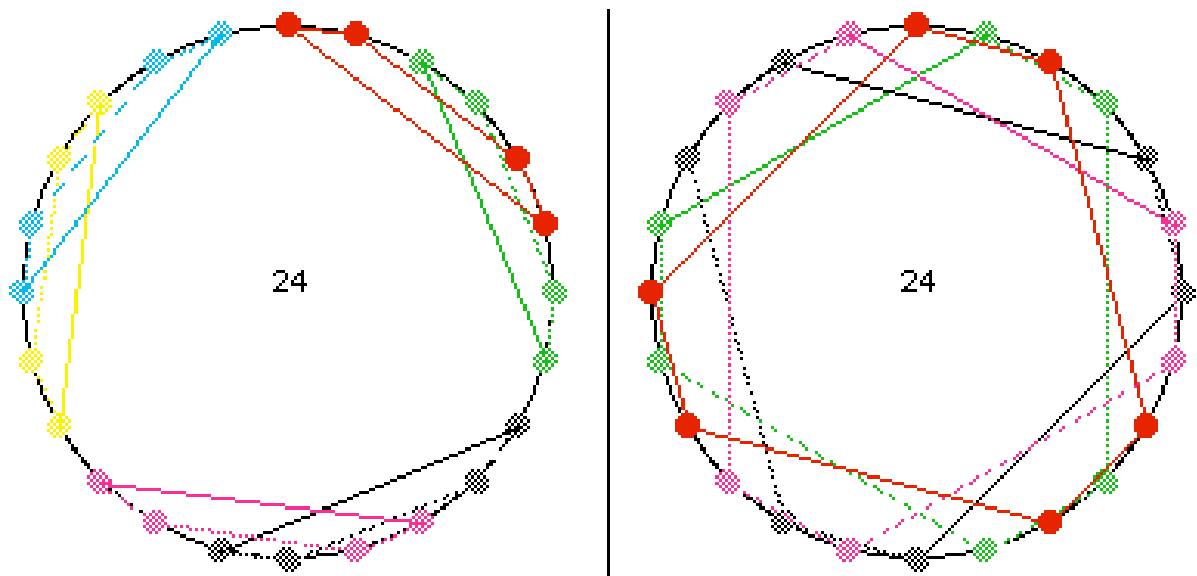
MMIM : Modèles mathématiques pour l'informatique musicale

Partie II : Méthodes algébriques

Moreno Andreatta

Cette partie sera également notée sur la moitié de la note finale. Tous les documents sont autorisés. Durée complète de l'épreuve (comportant deux parties) : 2 heures.

Cet examen a pour but d'étudier quelques propriétés de l'isomorphisme hauteurs/rythmes dans un espace tempéré par rapport à la construction des canons mélodico-rythmique ayant la propriété de pavage. Pour cela on s'appuiera sur les deux représentations circulaires suivantes :



Question 1

La grille mélodico-rythmique suivante représente un exemple de « canon de pavage »

**1a-** Donner une description du **canon rythmique** comme factorisation du groupe cyclique  $\mathbf{Z}_{24}$  en somme directe de deux sous-ensembles A et B i.e. trouver  $A, B \subset \mathbf{Z}_{24}$  tels que :

$$\mathbf{Z}_{24} = A \oplus B$$

(où A représente le pattern rythmique d'une voix du canon et B représente le pattern rythmique des entrées des voix du canon)

**1b-** Exprimer le **canon rythmique** comme produit direct de deux polynômes  $A(x)$  et  $B(x)$  à coefficients 0 et 1, i.e. trouver les polynômes  $A(x)$  et  $B(x)$  à coefficients 0 et 1 tels que :

$$1+x+x^2+\dots+x^{23} = A(x) \otimes B(x)$$

**1c-** Vérifier que le polynôme  $A(x)$  peut s'exprimer comme un produit de deux polynômes cyclotômiques parmi ceux de la liste suivante :

$$\phi_2 = 1+x$$

$$\phi_3 = 1+x+x^2$$

$$\phi_4 = 1+x^2$$

$$\phi_6 = 1-x+x^2$$

$$\phi_8 = 1+x^4$$

$$\phi_{12} = 1-x^2+x^4$$

$$\phi_{24} = 1-x^4+x^8$$

**1d-** Exprimer le **pattern mélodique** de la première voix du canon comme un sous-ensemble  $V_1$  du groupe cyclique  $\mathbf{Z}_{12}$  d'ordre 12 et en donner sa structure intervallique (Vieru) et une des possibles représentations via la théorie des cribles (Xenakis).

[Rappelons que, par exemple, la structure intervallique de la gamme diatonique

$$D = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\} \text{ est égale à } (2\ 2\ 1\ 2\ 2\ 2\ 1)$$

et que, selon la théorie des cribles,  $1_0$  indique la gamme chromatique et que, par exemple :

$$1_0 = 2_0 \cup 2_1 \ ]$$

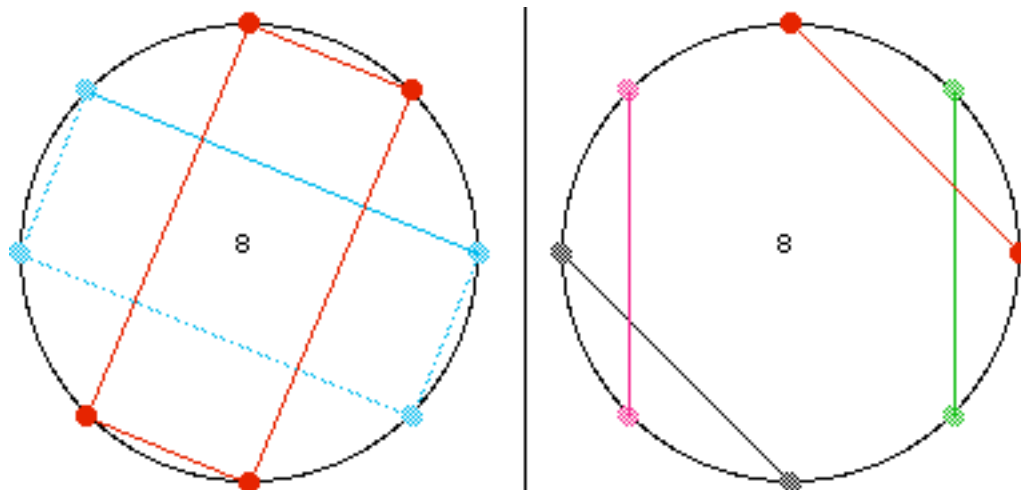
**1e-** A l'aide de la structure intervallique, décrire quelques propriétés d'invariance de l'ensemble  $V_1$  par rapport à l'opération de transposition (i.e. discuter son caractère de 'mode à transpositions limitées') et d'inversion et montrer que  $V_1$  est un *sous-groupe* de  $\mathbf{Z}_{12}$  (c'est-à-dire un sous-ensemble de  $\mathbf{Z}_{12}$  qui est également un groupe par rapport à l'addition modulo 12).

**1f-** A l'aide de la théorie des cribles, expliciter le rapport de transposition entre la première voix du canon et les autres voix  $V_2, V_3 \dots V_6$ .

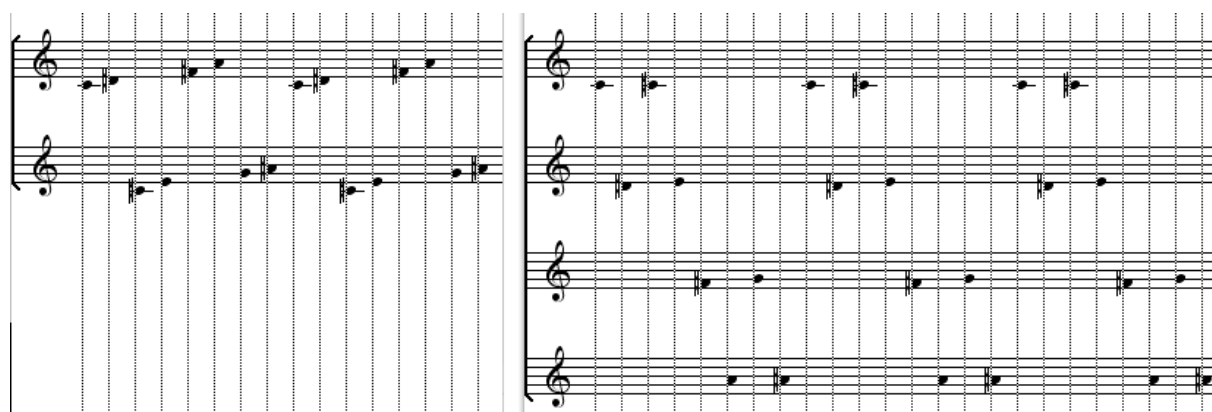


### Question 3

Les deux représentations circulaires suivantes montrent la réduction modulo 8 des deux cercles initiaux :



Elles correspondent aux deux canons mélodico-rythmiques suivants :



**3a** – Exprimer les deux nouvelles factorisations du groupe cyclique d'ordre 8 en somme directe des deux sous ensembles A et B (figure à gauche) et A' et B' (figure à droite).

**3b** – Mettre en évidence, dans les deux factorisations, la propriété d'invariance par rapport à la transposition (i.e. modes à transpositions limitées de Messiaen) de l'un des facteurs et justifier la 'nécessité structurale' de cette propriété (par rapport au groupe cyclique  $\mathbf{Z}_8$ ).

**3c** – Donner les polynômes  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $A'(x)$ ,  $B'(x)$  à coefficients 0 et 1 correspondants aux deux factorisations précédentes et vérifier que :

$$1+x+x^2+\dots+x^7 = A(x) \otimes B(x) = A'(x) \otimes B'(x)$$

**3d** – Vérifier que  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $A'(x)$ ,  $B'(x)$  peuvent (cette fois !) s'exprimer comme produit des polynômes cyclotomiques  $\phi_2, \phi_4, \phi_8$ .