Master ATIAM - Modèles mathématiques pour l'informatique musicale

Partie II (Moreno Andreatta)

(*27 février 2007*)

Cette partie sera notée sur la moitié de la note finale. Le candidat peut choisir trois questions parmi les quatre proposées. Tous les documents sont autorisés. Durée complète de l'épreuve (comportant deux parties) : 2 heures.

Question 1 : Quelques propriétés combinatoires de la division de l'octave en 8 parties égales

Rappelons que dans le cas de la division de l'octave en 12 parties égales, un mode à transpositions limitées de Messiaen (en abrégé, mode TL) est un sous-ensemble A de $\mathbb{Z}_{12}$ tel qu'il existe une transposition T_k avec $k \neq 0$, telle que $T_k(A) = A$.

Par exemple, le mode octotonique A={0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10} est un célèbre mode TL.

(i) Etablir le catalogue des modes TL dans le cas de la division de l'octave en 8 parties par rapport à l'action du groupe cyclique $\mathbb{Z}_8$ sur lui-même.

(ii) Montrer que tous les modes TL qui ne sont pas des sous-groupes de $\mathbb{Z}_8$ peuvent s'exprimer comme somme directe d'un sous-ensemble de $\mathbb{Z}_8$ et d'un sous-groupe de $\mathbb{Z}_8$.

(iii) Etudier l'action du groupe dihédrale D_8 d'ordre 16 et du groupe affine Aff d'ordre 32 sur la famille des modes à TL de $\mathbb{Z}_8$

Question 2 : Séries tous-intervalles en $\mathbb{Z}_8$

Rappelons que dans le cas de la division de l'octave en 12 parties égales, une série tous-intervalles est une série dodécaphonique dont la suite des intervalles successifs est elle aussi une série dodécaphonique.

Par exemple, la série du premier mouvement (*Allegretto gioviale*) de la *Suite Lyrique* d'Alban Berg S={0, 11, 7, 4, 2, 9, 3, 8, 10, 1, 5, 6} est une série tous-intervalles car la suite des intervalles successifs est égale à $(11, 8, 9, 10, 7, 6, 5, 2, 3, 4, 1)$. On indiquera avec S^* la suite des intervalles. Une série tous-intervalles est *centrée* si l'intervalle de triton (i.e. l'intervalle égale à 6 ou bien à $\frac{n}{2}$ dans le cas d'une séries à valeurs dans $\mathbb{Z}_n$) occupe la position centrale de la suite S^* correspondante. Elle est en forme *normale* si la première entrée de la S^* correspondante est égale à 1 (la série de Berg est centré mais elle n'est pas en position normale. Pour la "normaliser" il suffit de faire une inversion, cf. fig. 1).

(i) Trouver les deux séries tous intervalles *centrées* et en *forme normale* de $\mathbb{Z}_8$ (modulo l'action du groupe de Klein. Autrement dit une série est équivalente à ses transpositions, ses inversions et ses rétrogradations).

(ii) Montrer que dans les deux cas, l'intervalle entre la dernière note de la série et la note initiale est égale à 4.

(iii) Démontrer que la propriété précédente est vrai également pour les séries tous-intervalles non centrées et qui ne sont pas en position normale.

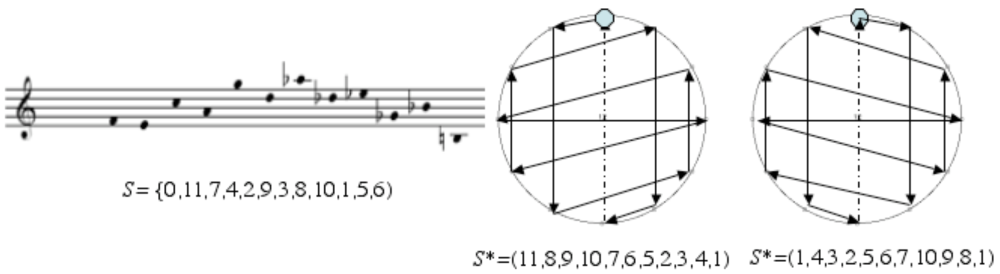

Figure 1.

Question 3 : Canons mosaïques en $\mathbb{Z}_{32}$ et en $\mathbb{Z}_8$

Rappelons qu'un sous-ensemble R de $\mathbb{Z}_{kh}$ est un rythme *k-asymétrique* si lorsqu'une attaque de R occupe la position x, toutes les autres positions y telles que $y \sim x$ mod h ne correspondent pas à des attaques du rythme R.

Soit R={0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28} un sous-ensemble de $\mathbb{Z}_{32}$.

(i) Montrer que R est périodique de période $m = 32$
(ii) Trouver le sous-ensemble B de $\mathbb{Z}_{32}$ tel que $\mathbb{Z}_{32} = R \bigoplus B$ et déduire que R est un rythme 4-asymétrique.
(iii) Soit $A = \{0, 1, 3, 6\}$ un sous-ensemble de $\mathbb{Z}_8$ et soit $A(x)$ le polynôme à coefficients 0-1 associé au sous-ensemble A. En s'appuyant sur la liste suivante des polynômes cyclotomiques :
$\phi_2(x) = 1 + x$
$\phi_4(x) = 1 + x^2$
$\phi_8(x) = 1 + x^4$
et en utilisant la propriété $1+x+...+x^7 = \prod \phi_d(x)$ avec $d|8$ et $d \neq 1$, montrer que $1+x+...+x^7 = A(x) \times \phi_k(x)$ avec $k \in \{2, 4, 8\}$ mais que $A(x)$ n'est pas le produit des polynômes cyclotomiques restants.

Question 4 : Quelques K-reseaux "dodécaphoniques"

Considérons le K-net associé à la série dodécaphonique S_0={0, 1, 3, 6, 2, 7, 5, 4} à valeurs en $\mathbb{Z}_8$

$$\begin{tikzcd} S_0 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "M_7"'] & S_1 \arrow[d, "M_7"] \\ S_2 \arrow[r, "f"] & S_3 \end{tikzcd} \tag{1}$$

où $\sigma(\{a_1, a_2, ..., a_8\}) = \{a_8, a_7, ..., a_1\}$ est la rétrogradation de la série et M_k est l'application affine définie par $M_k(\{a_1, a_2, ..., a_8\}) = \{ka_1\text{mod}8,\ ka_2\text{mod}8,\ ...,\ ka_8\text{mod}8\}$.

(i) Trouver l'application f qui rend le diagramme commutatif.
(ii) Soit $M_3(S_0) = \tilde{S}_0$. Trouver l'application h qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \tilde{S}_0 \arrow[r, "M_5"] \arrow[d, "M_7"'] & S'_1 \arrow[d, "h"] \\ S'_2 \arrow[r, "M_3"] & S'_3 \end{tikzcd} \tag{2}$$

(iii) Soit $\tilde{S}_0 = M_3(S_0) = \{x_1, x_2, ..., x_8\}$. Montrer que $(x_{i+1} - x_i)\text{mod}8 \neq (x_{j+1} - x_j)\text{mod}8\ \forall i \neq j$. Cette propriété reste-elle vrai pour les séries S'_1, S'_2 et S'_3?