

# Master ATIAM - Modèles mathématiques pour l'informatique musicale

Partie II (Moreno Andreatta)

(27 février 2008)

Cette partie sera notée sur la moitié de la note finale. Tous les documents sont autorisés. Durée complète de l'épreuve (comportant deux parties) : 2 heures.

## Question 1 : Quelques propriétés de la structure intervallique

Rappelons que dans le cas de la division de l'octave en 12 parties égales, la structure intervallique d'un accord  $A$  est l'ensemble  $SI(A) = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  représentant les intervalles successifs entre les notes de  $A$  (avec la propriété que  $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 12$ ). Par exemple, la structure intervallique associée à la gamme diatonique majeure  $A = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$  est  $SI(A) = (2, 2, 1, 2, 2, 2, 1)$ .

- (i) Montrer que la structure intervallique est invariante par transposition, i.e. si  $B = T_d(A)$  alors  $SI(A) = SI(B)$  où  $T_d(x) = d + x \pmod{12}$  est, comme d'habitude, l'opération de transposition [1pt].
- (ii) Montrer que toute symétrie axiale  $I_n$  induit une rétrogradation de la structure intervallique d'un accord, i.e. si  $B = I_n(A)$  et  $SI(A) = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  alors  $SI(B) = (a_k, a_{k-1}, \dots, a_1)$  où  $I_n(x) = T_n I = n - x \pmod{12}$  est, comme d'habitude, l'inversion généralisée [1pt].

## Question 2 : Périodicité et factorisations

Considérons le pattern rythmique suivant  $R = \{0, 1, 4, 5, 8, 9\}$  dans  $\mathbb{Z}_{12}$

- (i) Montrer que  $R$  est périodique modulo un sous-groupe, i.e.  $\exists H$  sous-groupe de  $\mathbb{Z}_{12}$  tel que  $H + R = R$  [1pt].
- (ii) Soit  $S$  le sous-ensemble de  $\mathbb{Z}_{12}$  tel que  $R \oplus S = \mathbb{Z}_{12}$ . Utiliser  $R$  et  $S$  pour construire un sous-ensemble  $R^*$  de  $\mathbb{Z}_{12}$  tel que  $R^* \oplus H = \mathbb{Z}_{12}$ , où  $H$  est un sous-groupe [1pt].
- (iii) Soit  $R(X)$  le polynôme à coefficients 0 et 1 associé à l'ensemble  $R$ . Montrer que  $R$  est divisible par un polynôme du type  $1 + X^k + X^{2k} + \dots$  [2pts].
- (iv) Quelle est la relation entre l'entier  $k$  et la périodicité de  $R$ ? [1pt]

## Question 3 : Isographies fortes et isographies positives

Rappelons qu'à partir d'un K-net du type :

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\varphi} & y \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \delta \\ w & \xrightarrow{\psi} & z \end{array} \quad (1)$$

1

où  $\varphi$  et  $\psi$  sont des opérations de transpositions et  $\gamma$  et  $\delta$  sont des inversions généralisées, un isomorphisme de réseau est une opération  $F$  qui transforme le diagramme précédent dans le K-net suivant :

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{F\varphi F^{-1}} & F(y) \\ F\gamma F^{-1} \downarrow & & \downarrow F\delta F^{-1} \\ F(w) & \xrightarrow{F\psi F^{-1}} & F(z) \end{array} \quad (2)$$

Considérons les deux réseaux associés à l'ensemble  $R=\{0, 1, 4, 5, 8, 9\}$  de la question précédente.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{T_4} & 4 \\ I_1 \downarrow & & \downarrow I_9 \\ 1 & \xrightarrow{T_4} & 5 \end{array} \quad (3)$$

$$\begin{array}{ccc} 4 & \xrightarrow{T_4} & 8 \\ I_9 \downarrow & & \downarrow I_5 \\ 5 & \xrightarrow{T_4} & 9 \end{array} \quad (4)$$

- (i) Montrer que les deux diagrammes sont commutatifs et montrer que pour chaque diagramme il y a 12 réseaux en relation d'isographie forte (i.e. même configuration de flèches) [**1pt**].  
(ii) Considérons les nouveaux diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} T_2(0) & \xrightarrow{T_k} & T_2(4) \\ I_m \downarrow & & \downarrow I_n \\ T_2(1) & \xrightarrow{T_h} & T_2(5) \end{array} \quad (5)$$

$$\begin{array}{ccc} T_2(4) & \xrightarrow{T_{k'}} & T_2(8) \\ I_{m'} \downarrow & & \downarrow I_{n'} \\ T_2(5) & \xrightarrow{T_{h'}} & T_2(9) \end{array} \quad (6)$$

Trouver les bonnes valeurs de transposition et d'inversion et montrer que les nouveaux K-nets sont en relation d'isographie positive avec les diagrammes (3) et (4) [**2pts**].