Master ATIAM - Modèles mathématiques pour l'informatique musicale

Partie II (Moreno Andreatta)

(*25 février 2009*)

Cette partie sera notée sur la moitié de la note finale. Tous les documents sont autorisés. Durée complète de l'épreuve (comportant deux parties) : 2 heures.

Question 1 : Canons mosaïques en $\mathbb{Z}_{20}$, k-asymétrie et polynômes cyclotomiques

Rappelons qu'un sous-ensemble R de $\mathbb{Z}_{kh}$ est un rythme *k-asymétrique* si lorsqu'une attaque de R occupe la position x, toutes les autres positions y telles que $y \sim x \bmod h$ ne correspondent pas à des attaques du rythme R.

Soit R=$\{0, 2, 5, 7\}$ un sous-ensemble de $\mathbb{Z}_{20}$.

(i) Montrer que R est périodique de période $m = 20$ [**2pt**].

(ii) Trouver le sous-ensemble S de $\mathbb{Z}_{20}$ tel que $\mathbb{Z}_{20} = R \bigoplus S$ et déduire que R est un rythme 5-asymétrique [**2pt**].

(iii) Soit $R(x)$ le polynôme à coefficients 0-1 associé au sous-ensemble R. En s'appuyant sur la liste suivante des polynômes cyclotomiques :

$\phi_2(x) = 1 + x$
$\phi_4(x) = 1 + x^2$
$\phi_5(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$
$\phi_{10}(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$
$\phi_{20}(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8$

et en utilisant la propriété $1+x+...+x^{19} = \prod \phi_d(x)$ avec $d|20$ et $d \neq 1$, montrer que $1+x+...+x^{19} = R(x) \times S(x)$ avec $R(x) = \phi_2(x)\phi_4(x)\phi_{10}(x)$ mais que $S(x)$ est un polynôme à coefficients 0-1 qui n'est pas le produit des polynômes cyclotomiques $\phi_5(x)$ et $\phi_{20}(x)$ [**2pt**].

(iv) Quelles, parmi les conditions de Coven-Meyerowitz, sont-elles vérifiées par $R(x)$? [**2pt**].

Question 2 : K-nets généralisés, passages au complémentaire et isographies

Rappelons qu'un K-net généralisé est un diagramme du type :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \gamma\downarrow & & \downarrow\delta \\ C & \xrightarrow{\psi} & D \end{array} \qquad (1)$$

où A, B, C, et D sont des sous-ensembles de $\mathbb{Z}_{12}$, φ, ψ, γ et δ sont des tranformations de transpositions, inversions généralisées ou multiplications affines (i. e. respectivement des éléments de $\mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{D}_{12}$, Aff). Le diagramme est toujours commutatif, i.e. $\delta(\varphi(A)) = \psi(\gamma(A))$. Un isomorphisme de réseau est une opération F qui transforme le diagramme précédent dans le K-net suivant :

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{F\circ\varphi\circ F^{-1}} & F(y) \\ F\circ\gamma\circ F^{-1}\downarrow & & \downarrow F\circ\delta\circ F^{-1} \\ F(w) & \xrightarrow{F\circ\psi\circ F^{-1}} & F(z) \end{array} \qquad (2)$$

Rappelons également la notion d'isographie positive et négative. Etant donnés deux K-nets :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{T_m} & B \\ {\scriptstyle I_a}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle I_b} \\ C & \xrightarrow{T_n} & D \end{array} \tag{3}$$

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{T_{m'}} & B' \\ {\scriptstyle I_{a'}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle I_{b'}} \\ C' & \xrightarrow{T_{n'}} & D' \end{array} \tag{4}$$

ces diagrammes sont en relation :

d'isographie positive si $m' = m$, $n' = n$, $a' = a + k$ et $b' = b + k$, où k est une constante.
d'isographie négative si $m' = -m$, $n' = -n$, $a' = -a + k$ et $b' = -b + k$, où k est une constante.

(i) Trouver φ, ψ, γ et δ dans le cas où A=$\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, B=$\{0, 6, 8, 9, 10, 11\}$, C=$\{1, 2, 4, 7, 9, 11\}$ et D=$\{0, 2, 4, 5, 7, 10\}$ pour le K-net généralisé :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ {\scriptstyle \gamma}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \delta} \\ C & \xrightarrow{\psi} & D \end{array} \tag{5}$$

[**4pt**].

(ii) Considérons le K-net complémentaire, i. e. :

$$\begin{array}{ccc} A^C & \xrightarrow{\varphi'} & B^C \\ {\scriptstyle \gamma'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \delta'} \\ C^C & \xrightarrow{\psi'} & D^C \end{array} \tag{6}$$

où X^C est le complémentaire littérale de l'ensemble X (i.e. $X \cup X^C = \mathbb{Z}_{12}$).
Trouver les transformations φ', ψ', γ' et δ' qui rendent le diagramme commutatif [**4pt**].

(iii) Considérons maintenant le K-net classique :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varphi''} & D \\ {\scriptstyle \gamma''}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \delta''} \\ C^C & \xrightarrow{\psi''} & D^C \end{array} \tag{7}$$

et son diagramme isomorphe :

$$\begin{array}{ccc} T_1(C) & \xrightarrow{\varphi'''} & T_1(D) \\ {\scriptstyle \gamma'''}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \delta'''} \\ T_1(C^C) & \xrightarrow{\psi'''} & T_1(D^C) \end{array} \tag{8}$$

Ce diagramme est-il en relation d'isographie (positive ou négative) avec le diagramme (7)? [**4pt**].