Master ATIAM - Modèles mathématiques pour l'informatique musicale

Partie II (Moreno Andreatta)

(*21 février 2011*)

Cette partie sera notée sur la moitié de la note finale. Tous les documents sont autorisés. Durée complète de l'épreuve (comportant deux parties) : 2 heures.

Question 1 : quelques propriétés de symétrie des séries dodécaphoniques

Considérons la série dodécaphonique en fig. 1

Figure 1.

(i) Montrer que la transposition au triton (T_6) de la série coïncide avec sa propre rétrogradation.
(ii) Montrer que si la transposition T_k d'une série dodécaphonique coïncide avec sa propre rétrogradation alors $k = 6$.

Question 2 : partitionnement des séries dodécaphoniques et K-nets

Considérons le partitionnement de la série précédente en trois tetracordes B_1={0, 2, 7, 5}, B_2={10, 9, 3, 4} et B_3={11, 1, 8, 6} (Fig. 2).

En correspondance de chaque tetracordes B_i construire un K-net du type:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "T_h"] \arrow[d, "I_a"'] & y \arrow[d, "I_b"] \\ z \arrow[r, "T_m"] & w \end{tikzcd} \tag{1}$$

où x, y, z, w sont des points du tetracorde B_i, $T_k(x) = k + x \pmod{12}$ et $I_a(x) = a - x \pmod{12}$ sont, comme d'habitude, les opérations de transposition et inversion (généralisée).

(i) Construire les K-nets afin de mettre en évidence des relations d'isographie forte.
(ii) Peut-on transformer la relation d'isographie forte dans une relation d'isographie négative ?

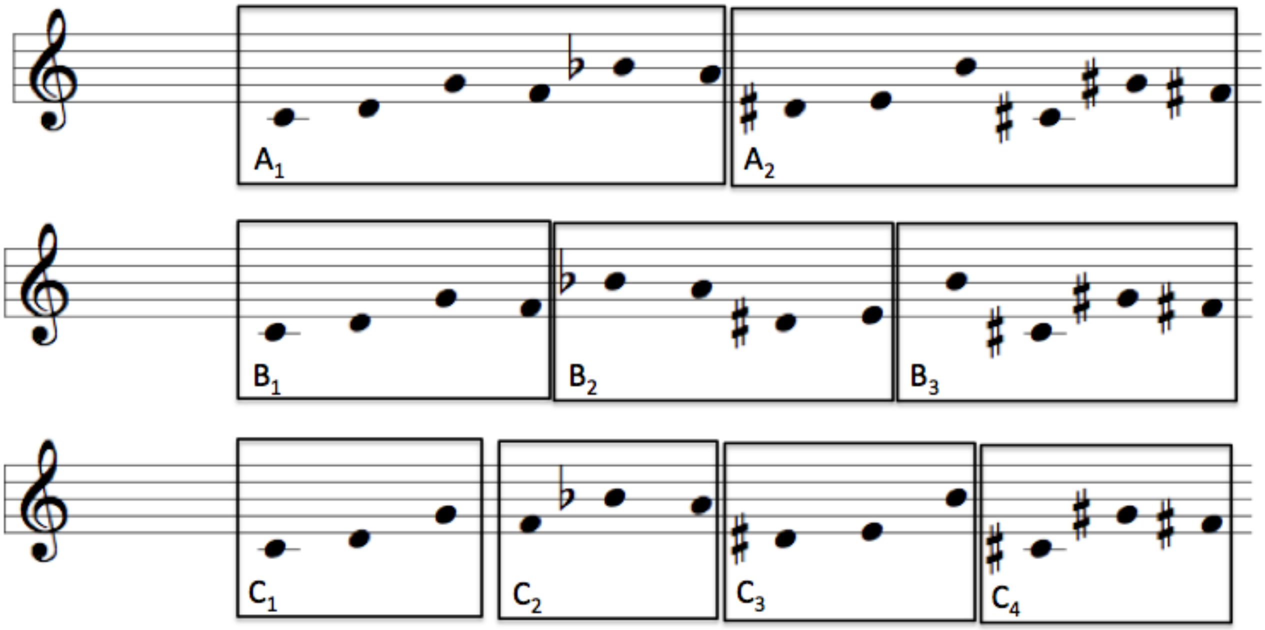

Figure 2.

Question 3 : partitionnement des séries dodécaphoniques et canons rythmiques mosaïques

Considérons le partitionnement de la série par les deux hexacordes A_1 et A_2 et les quatre tricords C_1, C_2, C_3 et C_4.

(i) Soit $A_1(x)$ le polynôme à coefficients 0 et 1 associé à A_1. Montrer qu'il existe $A_1^*(x)$, polynôme à coefficients 0 et 1, tel que $1 + x + ... + x^{11} = A_1(x) \times A_1^*(x)$ toujours mod$x^{12} - 1$.

(ii) Soit $C_i(x)$ le polynôme à coefficients 0 et 1 associé à C_i. En s'appuyant sur la liste suivante des polynômes cyclotomiques :

$\phi_2(x) = 1 + x$
$\phi_3(x) = 1 + x + x^2$
$\phi_4(x) = 1 + x^2$
$\phi_6(x) = 1 - x + x^2$
$\phi_{12}(x) = 1 - x^2 + x^4$

Determiner l'ensemble C_j tel que $1 + x + ... + x^{11} = C_j(x) \times C_j^*(x)$ où $C_j^*(x) = \prod \phi_i(x)$, avec $i \in \{2, 4, 6, 12\}$.

SOLUTIONS

Question 1

(i) Soit $S = (0, 2, 7, 5, 10, 9, 3, 4, 11, 1, 8, 6)$ la série. $T_6(S) = (6, 8, 1, 11, 4, 3, 9, 10, 5, 7, 2, 0) = R(S)$ où R indique la retrogradation.

(ii) Soit $S = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12})$ une série dodécaphonique générique. Si $T_k(S) = R(S)$ alors $(a_1 + k, a_2 + k, a_3 + k, a_4 + k, a_5 + k, a_6 + k, a_7 + k, a_8 + k, a_9 + k, a_10 + k, a_11 + k, a_12 + k) = (a_{12}, a_{11}, a_{10}, a_9, a_8, a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1)$. Donc $k = a_{12} - a_1 = a_{11} - a_2 = a_{10} - a_3 = a_9 - a_4 = a_8 - a_5 = a_7 - a_6 = a_6 - a_7 = a_5 - a_8 = a_4 - a_9 = a_3 - a_{10} = a_2 - a_{11} = a_1 - a_{12}$. Donc $k = -k$, d'où $2k = 0 \bmod 12$. Puisque $k \neq 0$ on a $k = 6$.

Question 2

(i) Soient B_1={0, 2, 7, 5}, B_2={10, 9, 3, 4} et B_3={11, 1, 8, 6}. On remarque que B_1 et B_3 appartiennent à la même orbite (modulo l'action du groupe cyclique).

On peut associer aux trois tetracordes les K-nets suivants :

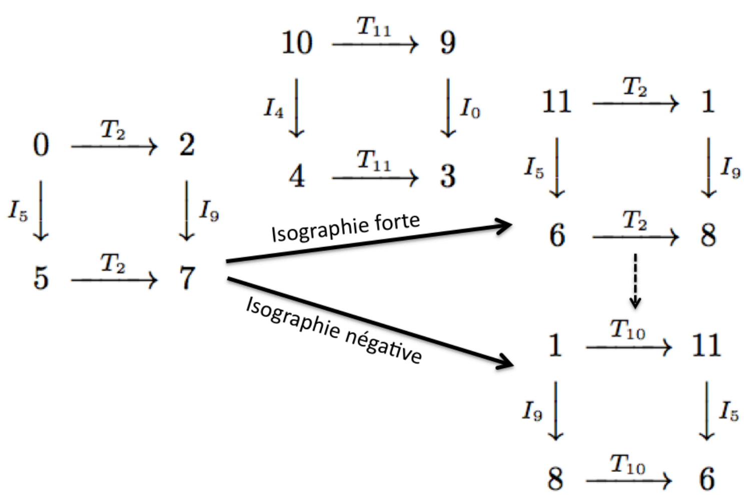

Figure 3.

(ii) Isographies fortes et négatives comme dans la figure précédente.

Question 3

(i) $A_1^*(x) = 1 + x^6$.

(ii) Il suffit de prendre C_j=C_1={0,2,7}. On vérifie aisément que $1 + x^3 + x^6 + x^9 = \prod \phi_i(x)$, avec $i \in \{2, 4, 6, 12\}$ et que $1 + x + ... + x^{11} = C_1(x) \times (1 + x^3 + x^6 + x^9)$. Les deux pavages sont montrés en figure 4.

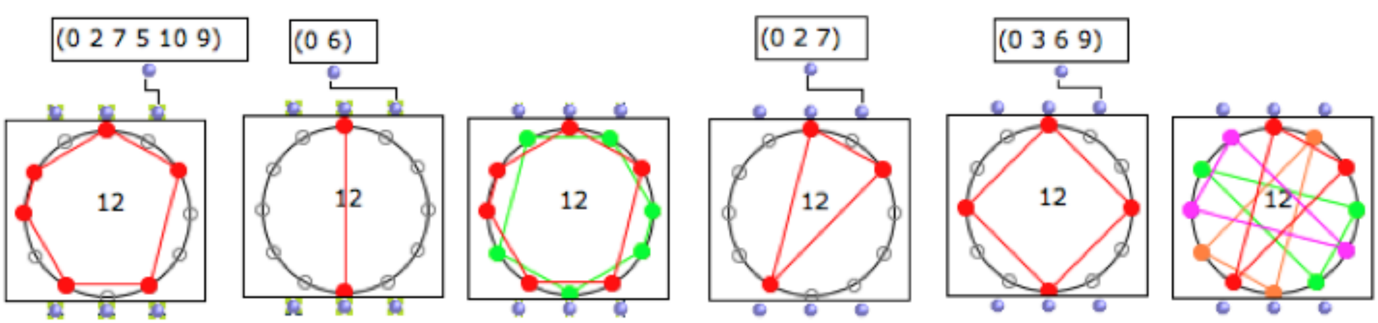

Figure 4.