Master ATIAM - Modèles mathématiques pour l'informatique musicale

Partie II (Moreno Andreatta)

(*22 février 2012*)

Cette partie sera notée sur la moitié de la note finale. Elle est consacrée au rapport entre les applications affines et la théorie transformationnelle. Tous les documents sont autorisés. Durée complète de l'épreuve (comportant deux parties) : 2 heures.

Question 1 : le groupe des applications affines

Soit $Aff = \{f_{a,b} = \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12} | f_{a,b}(x) = ax + b, a \in \{1, 5, 7, 11\}, b \in \mathbb{Z}_{12}\}$ l'ensemble des applications affines sur $\mathbb{Z}_{12}$. Montrer que Aff est un groupe avec comme loi de composition interne la composition d'applications affines, i.e.:

(i) Montrer que $f_{a,b} \circ f_{c,d} \in Aff \ \forall a, c \in \{1, 5, 7, 11\}, \forall b, d \in \mathbb{Z}_{12}$
(ii) Montrer qu'il existe un élément neutre
(iii) Montrer que tout élément $f_{a,b}$ admet un inverse $(f_{a,b})^{-1}$
(iv) Montrer que la propriété associative est satisfaite

Question 2 : un système d'intervalles généralisés sur les "time spans"

Rappelons qu'un GIS est la donnée d'un espace S, d'un groupe d'intervalles $(G, *)$ et d'une fonction intervallique $int : S \times S \to G$ telle que:

(i) $int(a, b) * int(b, c) = int(a, c) \ \forall a, b, c \in S$
(ii) Pour tout $a \in S$, pour tout intervalle $i \in G$ il existe un unique élément $b \in S$ tel que $int(a, b) = i$.

Un GIS est commutatif si son groupe d'intervalles $(G, *)$ est commutatif, i.e. $a * b = b * a \ \forall a, b \in G$. Soit $\tau = \{(a, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$ l'ensemble des "time spans" (laps de temps), i.e. des éléments (a, x) où a indique l'attaque d'un élément musical et x la durée (positive et non nulle) de cet événement. Soit $(G, *) = \{(i, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$ un groupe d'intervalles avec comme lois de composition interne la loi $*$ définie de la façon suivante :

$$(i, p) * (j, q) = (i + pj,\ pq)$$

Soit int la fonction intervallique définie de la façon suivante :

$$int((a, x), (b, y)) = (\frac{b - a}{x}, \frac{y}{x})$$

(i) Montrer que (τ, G, int) est un système d'intervalles généralisés
(ii) (τ, G, int) est-il commutatif ?

Question 3 : isographies affines

En suivant le principe des isographies positives $< T_k >$ et négatives $< I_k >$, on peut définir sur les K-nets à valeur dans $\mathbb{Z}_{12}$ deux sortes d'isographies affines :

(i) L'isographie "des quartes" $< M_5 >$ qui transforme toute transposition T_k dans la transposition T_{5k} et toute inversion I_m dans l'inversion I_{5m}

(ii) L'isographie "des quintes" $< M_7 >$ qui transforme toute transposition T_k dans la transposition T_{7k} et toute inversion I_m dans l'inversion I_{7m}

Considérons le K-net suivant:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{T_1} & 1 \\ {\scriptstyle I_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle I_4} \\ 2 & \xrightarrow{T_1} & 3 \end{array} \tag{1}$$

où $T_k(x) = k+x \pmod{12}$ et $I_a(x) = a-x \pmod{12}$ sont, comme d'habitude, les opérations de transposition et inversion.

(i) Montrer que le diagramme précédent (1) est en relation $< M_5 >$ avec le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} M_5(0) & \xrightarrow{T_k} & M_5(1) \\ {\scriptstyle I_a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle I_b} \\ M_5(2) & \xrightarrow{T_h} & M_5(3) \end{array} \tag{2}$$

où $M_5(x) = 5x \pmod{12}$

(ii) Montrer que le diagramme initial (1) est en relation $< M_7 >$ avec le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} M_7(0) & \xrightarrow{T_{k'}} & M_7(1) \\ {\scriptstyle I_{a'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle I_{b'}} \\ M_7(2) & \xrightarrow{T_{h'}} & M_7(3) \end{array} \tag{3}$$

où $M_7(x) = 7x \pmod{12}$

(iii) Quelle est la relation isographique entre les deux diagrammes (2) et (3) ?