Master ATIAM
Modèles mathématiques pour l'informatique musicale

Partie II : formalisation algébrique
Moreno Andreatta

(*28 février 2013*)

Cette partie sera notée sur la moitié de la note finale. Tous les documents sont autorisés. Durée complète de l'épreuve (comportant deux parties) : 2 heures.

Question 1 : Structures bien reparties et propriétés du vecteur d'intervalles

Rappelons qu'une structure bien repartie (ou *ME-set*) est un sous-ensemble A de $\mathbb{Z}_n$) dont la distribution d'éléments approxime le mieux un polygone régulier inscrit dans le cercle. Considérons les six rythmes "clave-bell" $A_i \subseteq \mathbb{Z}_{16}$ représentés en figure suivante :

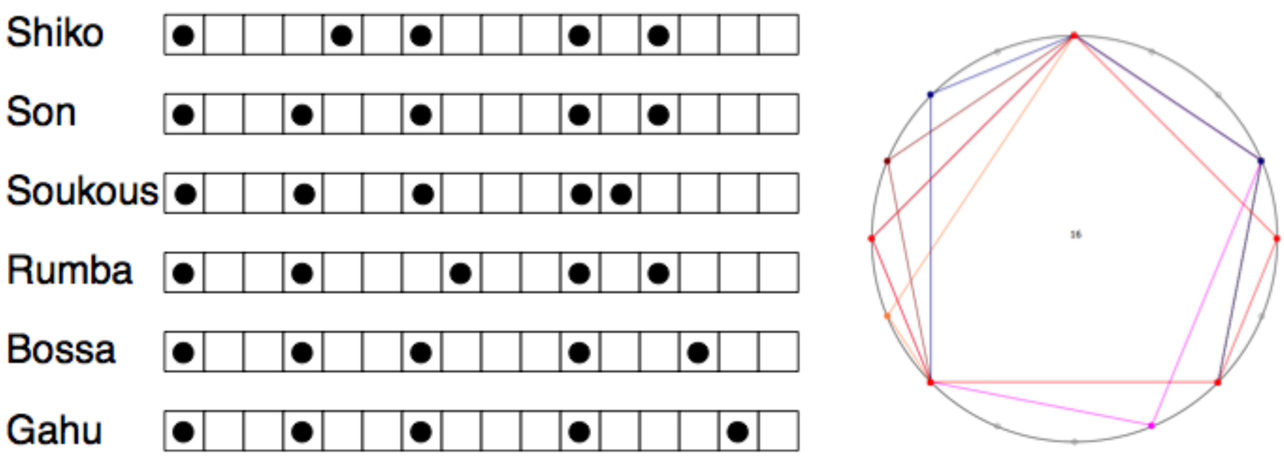

Figure 1.

On indique avec $IC_{A_j} = [x_1, x_2, ..., x_8]$ le vecteur d'intervalles de l'un des rythmes précédents i.e. le vecteur où chaque entrée exprime la multiplicité d'occurrence de chaque intervalle i, de i=1 jusquà $i = 8$. Par exemple, pour le rythme Shiko A_1 on obtient $IC_{A_1} = [0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 1]$

(i) Montrer qu'aucun rythme clave-bell ne réalise un pavage de $\mathbb{Z}_{16}$ par translation
(ii) Trouver le *ME-set* $\tilde{A}$ parmi les rythmes A_i précédents
(iii) Soit $IC_{\tilde{A}} = [x_1, x_2, ..., x_8]$ le vecteur d'intervalles du rythme bien reparti $\tilde{A}$. Montrer que $\sum_{j=1}^{8}(x_j) = 10$
(iv) Montrer que la somme des valeurs x_j du vecteur d'intervalles IC_{A_i} de chaque rythme clave-bell A_i est constante

Question 2 : Canons rythmiques mosaïques

Rappelons qu'un rythme périodique R de $\mathbb{Z}_{kh}$ de cardinalité h est *k-asymétrique* si R factorise $\mathbb{Z}_{kh}$ avec un sous-groupe S de $\mathbb{Z}_{kh}$ de cardinalit k. Considérons le sous-ensemble $A = \{0, 1, 6, 7\}$ de $\mathbb{Z}_{12}$ et son polynôme associé $A(x)$ à coefficients 0-1.

(i) Montrer que A est 3-asymétrique et trouver le sous-groupe B de $\mathbb{Z}_{kh}$ tel que $A \oplus B = \mathbb{Z}_{12}$

(ii) En s'appuyant sur la liste suivante des polynômes cyclotomiques :

$\phi_2(x) = 1 + x$
$\phi_3(x) = 1 + x + x^2$
$\phi_4(x) = 1 + x^2$
$\phi_6(x) = 1 - x + x^2$
$\phi_{12}(x) = 1 - x^2 + x^4$

et en sachant que que le polynôme $A(x)$ est divisible par ϕ_4 et ϕ_{12}, trouver le polynôme cyclotomique ϕ_s tel que $A(x) = \phi_s \times \phi_4 \times \phi_{12}$

(iii) Montrer que $A = A' \oplus q\mathbb{Z}_{12}$ et $B = B' \oplus r\mathbb{Z}_{12}$ où q et r sont respectivement la période de A et B

(iv) Calculer la fonction intervallique IFUNC(A,B)(k) avec $k = 0, ..., 11$

Question 3 : Automorphismes intérieurs du groupe diédral et K-nets

On considère les deux familles $[\varphi_a]$ et $[\psi_b]$ d'isographies entre K-nets (Figure 2), où $T_k(x) = k + x$ (mod 12) et $I_m(x) = m - x$ (mod 12) sont, comme d'habitude, les opérations de transposition et inversion (généralisée),

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "T_k"] \arrow[d, "I_m"'] & x_2 \arrow[d, "I_n"] \arrow[r, "{[\varphi_a]}"] & x'_1 \arrow[r, "T_{k'}"] \arrow[d, "I_{m'}"'] & x'_2 \arrow[d, "I_{n'}"] \\
x_3 \arrow[r, "T_h"] & x_4 \arrow[r, "{[\psi_b]}"] & x'_3 \arrow[r, "T_{h'}"] & x'_4
\end{tikzcd}$$

Figure 2.

où les $[\varphi_a]$ et $[\psi_b]$ sont définies de la façon suivante :

$$[\varphi_a] : \begin{aligned} T_m &\to T_m \\ I_m &\to I_{2a+m} \end{aligned} \qquad\qquad [\psi_b] : \begin{aligned} T_m &\to T_{-m} \\ I_m &\to I_{2b-m} \end{aligned}$$

Figure 3.

(i) Calculer $[\varphi_a] \circ [\varphi_b]$ et $[\psi_a] \circ [\psi_b]$

(ii) Trouver les valeurs de a et b telles que les deux types d'isographies commutent, i.e. $[\varphi_a] \circ [\psi_b] = [\varphi_b] \circ [\psi_a]$.