



*Mémoire de Master 1 de mathématiques fondamentales*

---

**THÉORÈME DE L'HEXACORDE**  
**DÉMONSTRATIONS, GÉNÉRALISATIONS, DÉVELOPPEMENTS**

---

*écrit par*

Corentin BAYETTE

*encadré par*

Corentin GUICHAOUA et Moreno ANDREATTA

2018

---

## *Table des matières*

---

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduction</b>  | <b>4</b>  |
| <b>1 Un exemple pour illustrer</b>   | <b>6</b>  |
| <b>2 Set theory : définitions mathématiques des notions musicales</b>            | <b>10</b> |
| 2.1 Représentation et écriture des éléments musicaux . . . . .                   | 10        |
| 2.1.1 Classes de hauteur . . . . .   | 10        |
| 2.1.2 Classes d'intervalles et contenu intervallique . . . . .                   | 12        |
| 2.2 Les transformations élémentaires d'ensembles de classes de hauteur . . . . . | 13        |
| 2.2.1 La transposition . . . . .   | 13        |
| 2.2.2 L'inversion . . . . .  | 15        |
| 2.2.3 La composition des deux transformations . . . . .                          | 16        |
| 2.3 Les relations ensemblistes entre ensembles de classes de hauteur . . . . .   | 17        |
| <b>3 Plusieurs démonstrations du théorème de l'hexacorde</b>                     | <b>18</b> |
| 3.1 Approches algébriques . . . . .  | 18        |
| 3.1.1 Deux preuves en apparence similaires : Fox et Chemillier . . . . .         | 18        |
| 3.1.2 Démonstration «générale» de Lewin . . . . .                                | 23        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 3.1.3    | Démonstration de Blau . . . . .  | 26        |
| 3.2      | Approche analytique . . . . .  | 29        |
| 3.2.1    | Transformées de Fourier discrètes . . . . .                              | 29        |
| 3.2.2    | Lien entre la musique et les transformées de Fourier discrètes . . . . . | 31        |
| 3.2.3    | Démonstration du théorème de l'hexacorde . . . . .                       | 32        |
| 3.2.4    | Généralisation . . . . .   | 32        |
| 3.3      | Approche géométrique . . . . .   | 33        |
| 3.3.1    | Théorème des notes communes . . . . .                                    | 34        |
| 3.3.2    | Théorème des accords complémentaires . . . . .                           | 37        |
| 3.3.3    | Démonstration du théorème de l'hexacorde . . . . .                       | 39        |
| 3.4      | Conclusion . . . . .   | 40        |
| <b>4</b> | <b>Développements</b>  | <b>41</b> |
| 4.1      | Homométrie et Z-relation . . . . .                                       | 41        |
| 4.1.1    | Notions mathématiques essentielles . . . . .                             | 41        |
| 4.1.2    | Définitions et propriétés . . . . .                                      | 42        |
| 4.1.3    | Généralisation du théorème de l'hexacorde . . . . .                      | 44        |
| 4.2      | Une ouverture : le canon rythmique . . . . .                             | 44        |
|          | <b>Annexes</b>   | <b>46</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>   | <b>49</b> |

---

## *Introduction*

---

*La musique est un exercice caché d'arithmétique, l'esprit n'ayant pas conscience qu'il est en train de compter.*  
Leibniz, 1712

Alors que les mathématiques sont considérées comme une science, la musique est aujourd'hui plutôt vue, à l'inverse, comme un art. Cependant, ça n'a pas toujours été le cas. Elle est même considérée par Pythagore, au VI<sup>e</sup> siècle avant J.C., comme étant une science mathématique, au même titre que l'arithmétique, l'astronomie et la géométrie. Elle fait également partie de l'enseignement scientifique, et non artistique, d'un érudit selon Rabelais<sup>1</sup>. Le lien entre la musique et les mathématiques est en effet très ancien. Par exemple, pour écrire *Christ lag in Todesbanden* (1707), Jean-Sébastien Bach utilise des notions de symétrie<sup>2</sup>. Plus récemment, Iannis Xenakis (compositeur et ingénieur) a utilisé le nombre d'or pour composer *Metastasis* (1955), une oeuvre entièrement déduite de règles et de procédures mathématiques.

A l'inverse, de nombreux mathématiciens se sont aussi intéressés à la musique avec un point de vue mathématique, des théoriciens ont en effet tenté de la traduire à l'aide de notions et formules mathématiques. Mais il convient de préciser ce qu'on entend par « mathématiques » : les propositions et théorèmes découverts et énoncés par les mathématiciens sont plutôt une *approche scientifique rigoureuse* du fait musical. Le vocabulaire utilisé peut parfois être issu des mathématiques, parfois de la musique, ou encore du vocabulaire courant. Parmi eux, citons notamment, Milton Babbitt (1916-2011), Allen Forte (1926-2014), ou encore David Lewin (1933-2003).

---

1. « J'entends et veux que tu apprennes les langues parfaitement [...] Des arts libéraux, géométrie, arithmétique et musique, je t'en donnai quelque goût quand tu étais encore petit [...], poursuis le reste, et d'astronomie saches-en tous les canons. [...] Du droit civil, je veux que tu saches par coeur les beaux textes et me les confères avec philosophie.», *Pantagruel* (Chap VIII), Rabelais, 1534

2. La cantate est divisée en sept strophes : chœur – duo – solo – chœur – solo – duo – chœur

Dans ce document, nous allons nous intéresser au *théorème de l'hexacorde* ou *théorème de Milton Babbitt* découvert par Milton Babbitt en 1955 et prouvé, entre autres, par David Lewin dans les années 80. Ce théorème sera énoncé puis démontré de plusieurs manières.

Nous commencerons dans une première partie par un exemple illustrant le théorème. Dans la deuxième partie, nous introduirons les notions mathématiques nécessaires à la définition des concepts musicaux utilisés. Nous démontrerons alors dans la troisième partie le théorème de l'hexacorde suivant trois approches : algébrique, analytique et géométrique. Des généralisations seront également données. La quatrième partie sera consacrée à deux développements du théorème : l'homométrie, une notion dont le théorème de l'hexacorde est un cas particulier, et le canon rythmique.

## Partie 1

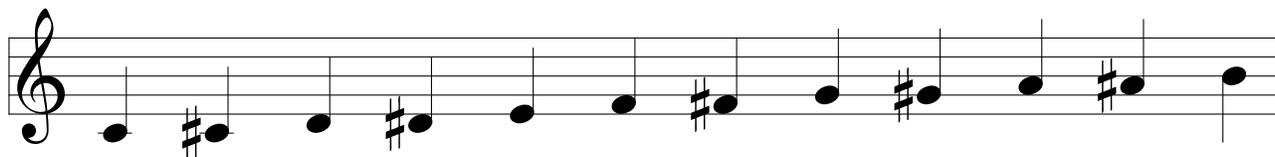
---

### Un exemple pour illustrer

---

Afin d'illustrer le lien entre la musique et les mathématiques, nous allons commencer ce document par un exemple. En effet, le théorème étudié peut être expliqué de manière très graphique. Les notions et concepts mathématiques utilisés ici seront définis, expliqués et démontrés plus loin dans ce document.

Pour cela, considérons la gamme chromatique<sup>1</sup> à 12 notes : *do*, *do#*, *ré*, *ré#*, *mi*, *fa*, *fa#*, *sol*, *sol#*, *la*, *la#*, *si* représentée ci-dessous.



En musique, l'intervalle entre deux notes du même nom est appelé octave. Pour représenter la gamme chromatique, nous allons utiliser la notion d'équivalence à l'octave. Ainsi, l'intervalle entre un *do* (médium) et un *mi* (aigu) représentant une octave plus une tierce majeure sera équivalent à une tierce majeure. Cette nature cyclique de la gamme par rapport à l'octave nous permet de la représenter par un cercle. Chaque arc de cercle entre deux notes consécutives représente un demi-ton (par exemple entre *do* et *do#* ou *mi* et *fa*). De manière analogue à une horloge, nous écrivons alors le *do* à la place du 12 (ici considéré comme 0), *do#* à la place du 1, jusqu'au *si* à la place du 11. On obtient ainsi le cercle ci-contre :

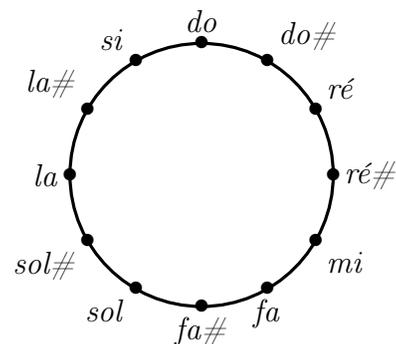


FIGURE 1.1 – Représentation de la gamme

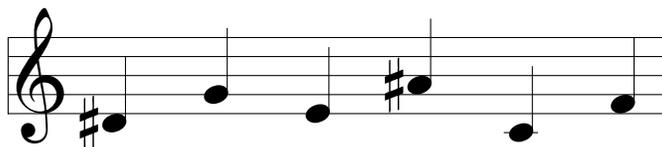
---

1. Voir Annexe 2 page 48 pour une définition plus précise.

Définissons dès maintenant la notion d'hexacorde.

**Definition 1.0.1** (Hexacorde). *On appelle hexacorde un sous-ensemble de la gamme composé de 6 notes.*

Maintenant, choisissons au hasard<sup>2</sup> parmi les 12 notes de la gamme chromatique six notes. Considérons l'ensemble  $\mathcal{H} = \{\text{ré}\#, \text{sol}, \text{mi}, \text{la}\#, \text{do}, \text{fa}\}$ .



Représentons alors ces 6 notes dans le cercle et relier-les entre elles. On obtient ainsi un polygone à 6 cotés inscrit dans le cercle.

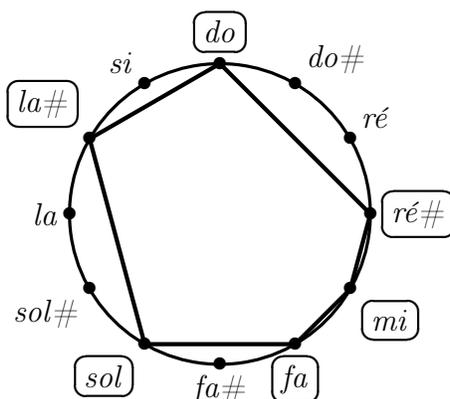


FIGURE 1.2 – Hexagone des 6 notes choisies

Ensuite, nous décidons de compter le nombre de fois où chaque intervalle<sup>3</sup> (octave, seconde mineure, seconde majeure, ..., septième majeure) est présent entre ces six notes.

Il y a 6 octaves puisqu'il y a 6 notes.

Il y a 2 secondes mineures : une entre  $\text{ré}\#$  et  $\text{mi}$  et une entre  $\text{mi}$  et  $\text{fa}$ .

Il y a 3 secondes majeures : entre  $\text{ré}\#$  et  $\text{fa}$ , entre  $\text{fa}$  et  $\text{sol}$  et entre  $\text{la}\#$  et  $\text{do}$ .

Par un comptage similaire, nous recueillons les résultats pour tous les intervalles. Nous plaçons alors ces chiffres dans un vecteur, appelé **contenu intervallique**  $IC$  où le premier terme correspond au nombre d'octaves (c'est-à-dire le nombre d'unissons, ou de notes), le deuxième à celui des secondes mineures, etc. ; on obtient finalement :

$$IC_{\mathcal{H}} = [6, 2, 3, 3, 2, 4, 2, 4, 2, 3, 3, 2].$$

On remarque que, le premier terme à part, le contenu intervallique est symétrique. La nature cyclique de la gamme explique ce phénomène : l'écart entre deux notes peut être

2. J'ai effectivement choisi ces 6 notes au hasard lors de la rédaction.

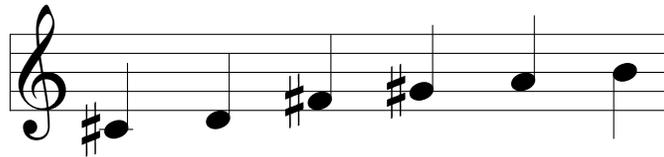
3. Voir Annexe 1 page 47 pour une liste complète.

mesuré sur l'horloge dans les sens des aiguilles d'une montre, ou dans l'autre sens. Le nombre de secondes mineures est donc égal au nombre de septièmes majeures, etc. , le nombre de quarts justes est le même que celui des quintes justes. Après ce constat, nous décidons de noter le contenu intervallique ainsi :

$$IC_{\mathcal{H}} = [6, 2, 3, 3, 2, 4, 2].$$

Revenons un peu en arrière, et considérons les six autres notes de la gamme, celles que nous n'avons pas choisies précédemment.

Considérons ainsi l'ensemble  $\mathcal{K} = \{do\#, ré, fa\#, sol\#, la, si\}$ , complémentaire à  $\mathcal{H}$  par rapport à la gamme entière.



Nous les plaçons également sur le cercle et les relient entre elles afin d'obtenir le polygone inscrit dans le cercle. Nous pouvons comparer avec le cercle précédent.

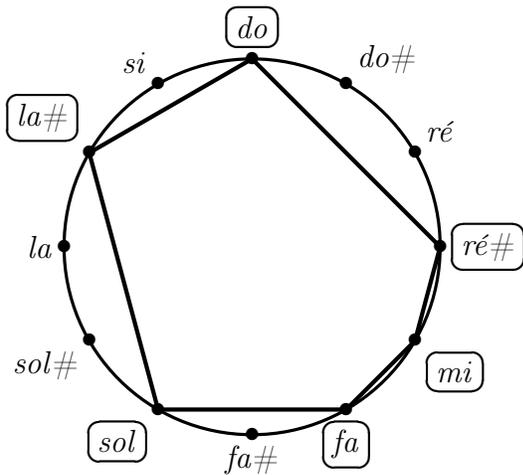


FIGURE 1.3 – Hexagone des 6 notes choisies au début

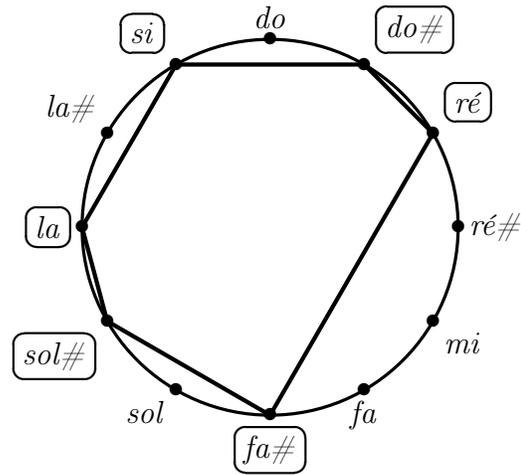


FIGURE 1.4 – Hexagone des 6 notes non choisies au début

Nous remarquons que les deux hexagones sont différents. Recensons toutefois le nombre de fois où chaque intervalle apparaît. De même que précédemment, il y a 6 octaves. De plus, il y a 2 secondes mineures ( $do\# ré$  et  $sol\# la$ ), 3 secondes majeures ( $fa\# sol\#, la si$  et  $si do\#$ ), etc. Par suite, on trouve au final comme contenu intervallique :

$$IC_{\mathcal{K}} = [6, 2, 3, 3, 2, 4, 2].$$

On se rend compte que, bien que les hexagones soient différents, les deux contenus interval-  
liques sont égaux :

$$IC_{\mathcal{H}} = IC_{\mathcal{K}}$$

Ce résultat n'est ni une chance, ni un cas particulier qui résulterait du fait que les notes ont «bien» été choisies. Ce résultat est une conséquence du **théorème de l'hexacorde** ou **théorème de Milton Babbitt**. Nous pouvons alors énoncer ce théorème qui sera rigoureusement défini et démontré dans ce document :

**Théorème de l'hexacorde :** *Soient  $\mathcal{H}$  un hexacorde et  $\mathcal{H}^c$  son complémentaire. Alors ils possèdent le même contenu intervallique :  $IC_{\mathcal{H}} = IC_{\mathcal{H}^c}$*

## *Partie 2*

---

# *Set theory : définitions mathématiques des notions musicales*

---

Avant de débiter les démonstrations, il convient de définir mathématiquement et de manière rigoureuse toutes les notions musicales utilisées. C'est le but de cette partie où nous introduisons la notion de *Set Theory*<sup>1</sup> d'après les livres de Lewin [8] en 1987, de Rahn [12] en 1980 et d'un article de Andreatta [3] en 2003.

Très étudiés et utilisés en Amérique du Nord, les notions et principes de la *Set Theory* restent peu connus en Europe. Dès les années soixante, des compositeurs comme Milton Babbitt ou Iannis Xenakis se sont intéressés au lien entre musique et mathématique. Leurs recherches ont permis de formaliser des notions musicales grâce à des outils mathématiques tels que l'inclusion, la complémentarité ou encore la transformation.

Le concept de *Set Theory* peut être défini comme une proposition de formalisation de la musique pour des applications à des fins mathématiques.

## **2.1 Représentation et écriture des éléments musicaux**

### **2.1.1 Classes de hauteur**

La première notion utilisée dans la *Set Theory* est la notion de **classes de hauteur (CH)**. Cette notion permet de simplifier doublement la représentation des notes :

---

1. Ce terme a été introduit par les musicologues, il est donc à différencier de la *théorie des ensembles* purement mathématique.

- Premièrement, comme pour les touches noires d'un piano, la différence musicale entre une note baissée d'un *bémol* ( $b$ ) et une note augmentée d'un *dièse* ( $\sharp$ ) n'est pas retenue ici<sup>2</sup>. Ainsi,  $ré\sharp = mi\flat$  par exemple.
- Deuxièmement, aucune différence n'est faite entre un *do* grave et un *do* aigu

Ainsi, des 88 notes présentes sur un piano, nous n'en conservons que 12 pour représenter l'ensemble des notes. Ces 12 notes sont les 12 classes de hauteur : *do*, *do* $\sharp$ , *ré*, *ré* $\sharp$ , *mi*, *fa*, *fa* $\sharp$ , *sol*, *sol* $\sharp$ , *la*, *la* $\sharp$ , *si*<sup>3</sup>. Numériquement, ces classes sont écrites de la manière suivante :  $do=0$ ,  $do\sharp=1$  jusqu'à  $si=11$ . Mathématiquement, ces classes peuvent être vues comme des classes de congruence modulo 12. C'est le principe d'*équivalence à l'octave*.

C'est pourquoi, nous nous placerons dans le groupe cyclique  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{12}$ , pour les calculs dans la suite de ce document.

Un **ensemble de classes de hauteur (ECH)** est une collection de notes (accords, arpèges, etc.). Autrement dit, une liste de notes est représentée par une liste de classes de hauteur sans considération d'ordre ou de fréquence d'apparition. On le note entre crochets. Par exemple, l'accord *do-mi-sol* s'écrit  $\{0,4,7\}$  et *sol-si-ré* s'écrit  $\{7,11,2\}$  ou  $\{2,7,11\}$ .

**Definition 2.1.1** (Cardinalité). *Le nombre d'éléments d'un ECH est appelé cardinalité, toujours compris entre 1 et 12. L'ensemble vide  $\emptyset$  est de cardinalité 0.*

Visuellement, un ECH peut être représenté par une **horloge des classes de hauteur** : les classes de hauteur sont écrites dans le sens des aiguilles d'une montre, en commençant par placer le *do* au niveau du 12 (vu ici comme 0 modulo 12) et où chaque arc de cercle entre deux notes consécutives représente un demi-ton. C'est donc un moyen graphique qui nous permet d'obtenir le contenu intervallique assez facilement. On obtient alors la figure ci-dessous.

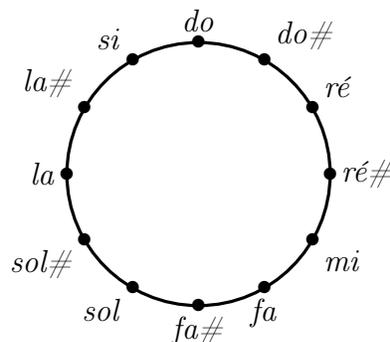


FIGURE 2.1 – Horloge des classes de hauteur

2. C'est le principe de la musique enharmonique (comme sur un piano), voir les travaux de Yves Hellegouarch pour une approche différente : <http://mabboux.pagesperso-orange.fr/hellegouarch.htm>.

3. La notation anglaise est aussi utilisée dans certains documents : C, C $\sharp$ , D, D $\sharp$ , E, F, F $\sharp$ , G, G $\sharp$ , A, A $\sharp$ , B.

**Notation :** Dans la suite du document, nous noterons  $\mathcal{X}$  ou  $\mathcal{Y}$  les ECH quelconques d'un ensemble  $S$  (très souvent la gamme chromatique), alors que les hexacordes (ECH de cardinalité 6) seront représentés par  $\mathcal{H}$  ou  $\mathcal{K}$ .

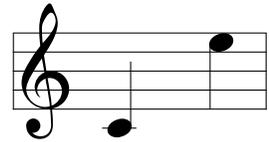
## 2.1.2 Classes d'intervalles et contenu intervallique

Une notion analogue aux classes de hauteur est celle de **classes d'intervalles (CI)** qui consiste à représenter les intervalles musicaux par le nombre de demi-tons qu'ils contiennent<sup>4</sup>. Par exemple, la seconde mineure (*i.e.* un demi-ton) entre *do* et *do#* vaut 1 et une seconde majeure (*i.e.* deux demi-tons) entre *fa* et *sol* vaut 2.

**Definition 2.1.2** (Intervalle). *On appelle intervalle  $i(s, t)$  le nombre de demi-tons dont  $s$  doit être augmenté pour arriver à  $t$ , autrement dit :  $i(s, t) = t - s$ .*

On écrit alors  $i(do, do\#) = i(0, 1) = 1$  et  $i(fa, sol) = i(5, 7) = 2$ .

Puisque nous calculons modulo 12 (en raison de l'équivalence à l'octave), l'intervalle  $i$  représenté ci-contre entre le *do* (médium) et le *mi* (aigu) correspondant à 16 demi-tons est 4 (et pas 16). En effet,  $i(do, mi) = 16 \bmod [12] = 4 \bmod [12]$ .



Plus largement, nous avons donc :  $i(s, t) = (t - s) \bmod [12]$

Définissons alors une fonction nécessaire (et essentielle) pour la suite.

**Definition 2.1.3** (Fonction intervallique). *Soit  $S$  un ensemble de classes de hauteur. La fonction intervallique<sup>5</sup>  $\Phi$  permet de recenser les classes d'intervalles au sein de  $S$ . On peut la définir ainsi :*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{Z}_{12} &\rightarrow \mathbb{Z}_{12} \\ k &\mapsto \Phi(k) = \text{Card} \{(s, t) \in S \times S \mid i(s, t) = k\} \end{aligned}$$

Concrètement, pour un ensemble de classes de hauteur donné,  $\Phi(k)$  donne le nombre d'intervalles de  $k$  demi-ton(s).

Prenons par exemple  $\mathcal{X} = \{do, do\#, ré, ré\#\} = \{0, 1, 2, 3\}$  :  $\Phi(1) = 3$  car il y a 3 demi-tons (entre *do* et *do#*, entre *do#* et *ré*, entre *ré* et *ré#*) ;  $\Phi(2) = 2$  car il y a 2 tons (entre *do* et *ré*, entre *do#* et *ré#*) ;  $\Phi(3) = 1$  (entre *do* et *ré#*), etc.

$\Phi(0)$  correspond au nombre d'unissons, c'est à dire à la cardinalité de l'ECH :  $\Phi(0) = 4$ .

**Remarque 2.1.1.** *Pour différencier les calculs de  $\Phi$  dans deux ensembles différents, nous noterons  $\Phi_{\mathcal{X}}(k)$  la fonction donnant le nombre d'intervalles de  $k$  demi-tons dans l'ECH  $\mathcal{X}$ .*

4. Voir Annexe 1 page 47.

5. Lewin utilise le symbole *IFUNC* que nous ne gardons pas dans ce document.

**Definition 2.1.4** (Contenu intervallique). *Le contenu intervallique est le vecteur de taille 7 composé des sept  $\Phi(k)$  pour  $k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket$ . On le note  $IC$  (pour interval content,  $CI$  porterait à confusion avec classes d'intervalles) et entre crochets.*

*Autrement dit,  $IC = [\Phi(0), \Phi(1), \dots, \Phi(6)]$*

**Remarque 2.1.2.** *La définition du contenu intervallique est souvent différente d'un document à l'autre (la cardinalité n'est pas toujours présente, parfois avec 6 termes<sup>6</sup>, parfois avec 12, etc.). Nous garderons la définition ci-dessus tout au long du document.*

*Ce choix s'explique par l'utilité de mettre la cardinalité de l'ensemble de notes en premier terme (plus facile que de compter le nombre de termes à chaque fois) et par la symétrie du contenu intervallique, qui découle de l'équivalence à l'octave (congruence modulo 12).*

*En effet, il faut remarquer que si  $x \xrightarrow{T_k} y$ , alors  $y \xrightarrow{T_{-k}} x$  qui est la même opération que  $y \xrightarrow{T_{12-k}} x$ . Chaque intervalle peut en fait être compté sur l'horloge dans le sens des aiguilles d'une montre, ou dans le sens inverse ; et à l'«intérieur» ou à l'«extérieur» des notes.*

## 2.2 Les transformations élémentaires d'ensembles de classes de hauteur

Pour comparer deux ECH, nous avons besoin de critères et d'outils. Il existe principalement deux transformations élémentaires permettant de mettre en évidence des similarités entre deux ECH : la transposition et l'inversion. Nous les étudions dans cette section.

### 2.2.1 La transposition

Par analogie avec la musique, la transposition<sup>7</sup> de  $k$  demi-tons d'une note  $x$  est la note  $x + k$ . On définit alors :

**Definition 2.2.1** (Transposition). *Soient  $S$  un ECH. Soit  $x$  une classe de hauteur et soit  $k$  un nombre de demi-tons, alors la transposition de  $x$  est définie par :*

$$T_k : S \rightarrow S$$

$$x \mapsto (x + k) \text{ mod } [12]$$

**Remarque 2.2.1.** *Énonçons plusieurs propriétés utiles de la transposition  $T_k$ .*

- *C'est une application bijective. En effet, une note  $x_r$  a une et une seule image (la note  $x_r + k$ ) et une note  $x_s$  a un et un seul antécédent par  $T_k$  (la note  $x_s - k$ )*

---

6. Allen Forte l'appelle le vecteur intervallique (*interval vector*).

7. Mathématiquement, il serait plus correct d'appeler cette opération *translation*. Cependant le terme *transposition* étant utilisé dans tous les documents relatifs au théorème de l'hexacorde, nous le garderons dans ce document.

- Nous pouvons définir l'identité comme étant une transposition de 0 demi-ton.  $Id(x) = T_0(x) = x + 0 = x$
- Dans la suite du document, si l'on souhaite appliquer  $T_k$  à tout un ensemble de notes  $\mathcal{X}$ , nous noterons  $T_k(\mathcal{X})$  pour dire que nous appliquons  $T_k$  à chaque élément de  $\mathcal{X}$  :

$$T_k(\mathcal{X}) = T_k(\{x_1, \dots, x_m\}) = \{T_k(x_1), \dots, T_k(x_m)\} = \{x_1 + k, \dots, x_m + k\}$$

**Proposition 2.2.1.** Quelques propriétés de la transposition sont évidentes :

1.  $T_k T_l = T_{k+l}$
2. L'inverse de  $T_k$  est  $T_{-k}$

*Démonstration.* Pour  $x$  une note (CH) donnée,

1.  $(T_k \circ T_l)(x) = T_k(x + l) = x + (k + l) = T_{k+l}(x)$
2.  $(T_k \circ T_{-k})(x) = T_k(x - k) = x - k + k = x$

□

De manière graphique, une transposition se traduit sur l'horloge par une rotation d'angle égal au nombre de demi-tons  $k$ . Regardons l'exemple suivant : transposons *mi* de trois demi-tons, on obtient *sol*.

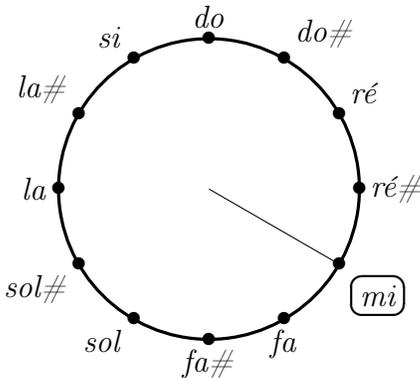


FIGURE 2.2 – *mi* initialement

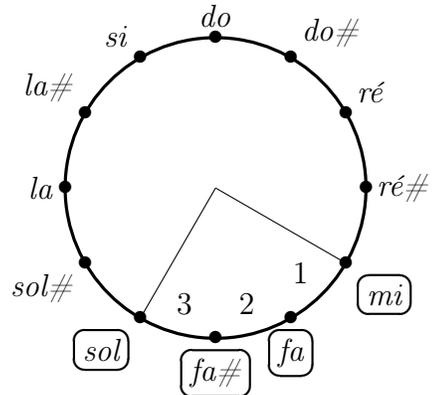


FIGURE 2.3 – *sol* après transposition

**Proposition 2.2.2.** Le contenu intervallique est invariant par transposition.

*Démonstration.* La preuve de cette proposition est évidente grâce à la représentation sur l'horloge des classes de hauteur. L'hexagone obtenu par une transposition  $T_k$  est le même hexagone qu'initialement après une rotation d'angle  $k$  demi-tons : les hexagones sont les mêmes, donc les contenus intervalliques aussi. Prenons comme exemple l'hexacorde de la partie 1 avec  $k = 3$ .

□

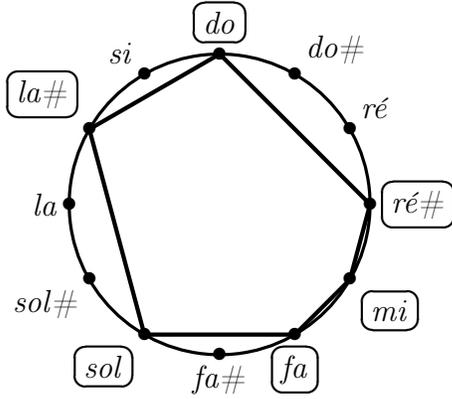


FIGURE 2.4 – Hexagone initial

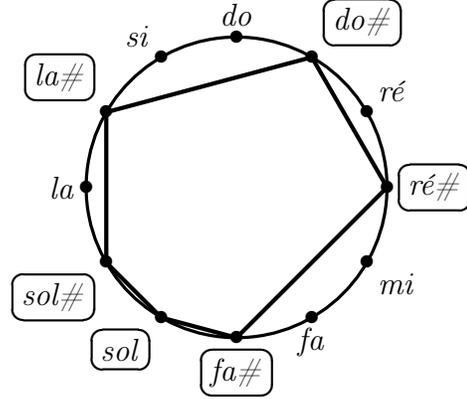


FIGURE 2.5 – Hexagone après  $T_3$

### 2.2.2 L'inversion

L'inversion est définie par rapport à une classe de hauteur donnée, souvent et arbitrairement le  $do$  (CH 0). L'inversion consiste à inverser toutes les classes de hauteur par rapport à l'«axe»  $do-fa\#$ . Ainsi, le  $do\#$  devient  $si$ , ou le  $ré$  devient  $la\#$ .

**Definition 2.2.2** (Inversion). *Soit  $S$  un ECH. Soit  $x$  une classe de hauteur, alors l'inversion de  $x$  est définie par :*

$$I : S \rightarrow S$$

$$x \mapsto (-x) \bmod [12]$$

**Remarque 2.2.2.** *Comme pour la transposition, certaines propriétés de l'inversion sont utiles.*

- C'est aussi une application bijective, chaque note  $x$  étant en bijection avec  $-x$ .
- Comme pour la transposition, pour inverser un ensemble de notes  $\mathcal{X}$ , nous noterons  $I(\mathcal{X})$  pour signifier que nous inversons chaque note de l'ensemble :

$$I(\mathcal{X}) = I(\{x_1, \dots, x_m\}) = \{I(x_1), \dots, I(x_m)\} = \{-x_1, \dots, -x_m\}$$

**Proposition 2.2.3.**  *$I$  est son propre inverse.*

*Démonstration.* Pour  $x$  une note (CH) donnée,  $(I \circ I)(x) = I(-x) = -(-x) = x$  □

De manière graphique, une inversion se traduit sur l'horloge par une symétrie par rapport à la droite passant par  $do$  et le centre de l'horloge. Regardons l'exemple suivant : l'inversion de  $mi$  par rapport à  $do$ , on obtient  $sol\#$ .

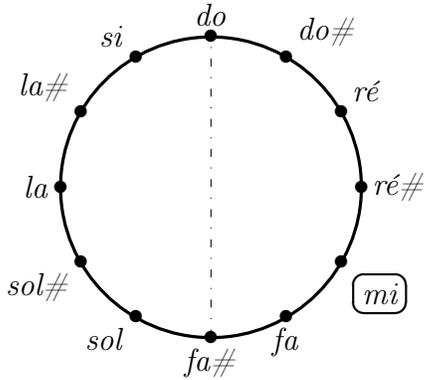


FIGURE 2.6 – *mi* initialement

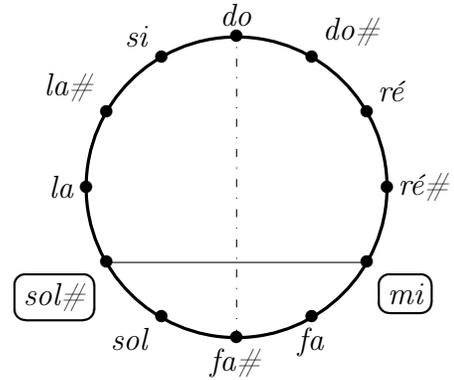


FIGURE 2.7 – *sol#* après inversion

**Proposition 2.2.4.** *Le contenu intervallique est invariant par inversion.*

*Démonstration.* La preuve de cette proposition est évidente grâce à la représentation sur l’horloge des classes de hauteur. L’hexagone obtenu par une inversion  $I$  par rapport à *do* est le même hexagone qu’initialement après une symétrie selon l’«axe» *do-fa#* : les hexagones sont les mêmes, donc les contenus intervalliques aussi. Prenons comme exemple l’hexacorde de la partie 1.  $\square$

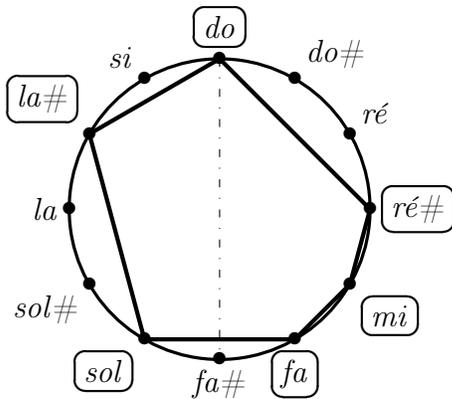


FIGURE 2.8 – Hexagone initial avec l’axe d’inversion

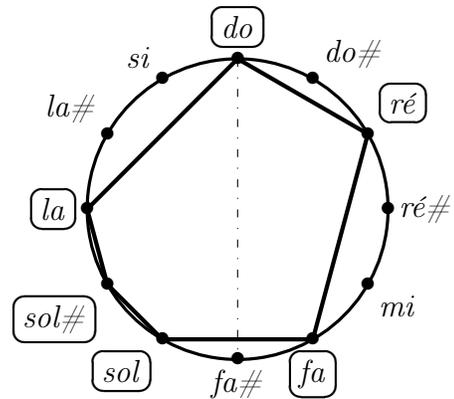


FIGURE 2.9 – Hexagone après inversion  $I$  par rapport à *do*

## 2.2.3 La composition des deux transformations

Les deux transformations, la transposition et l’inversion, peuvent être composées. Nous avons notamment :

**Proposition 2.2.5.** *Soit  $x$  une classe de hauteur donnée, alors :*  
 $(T_k \circ I)(x) = (I \circ T_{-k})(x)$

*Démonstration.* Soit  $x$  une classe de hauteur donnée,  
 $T_k(I(x)) = T_k(-x) = -x + k$ , et  
 $I(T_{-k}(x)) = I(x - k) = -(x - k) = -x + k$ , d'où le résultat.  $\square$

**Remarque 2.2.3.** Une inversion  $I$  par rapport à une note  $x$ , c'est à dire par rapport à un «axe» autre que celui arbitraire  $do$ , est la composition d'une transposition  $T_k$  et de l'inversion par rapport à  $do$ . En effet, la transposition permet de revenir au  $do$  (avec  $k$  égal au nombre de demi-tons entre le  $do$  et  $x$ ) puis  $I$  d'inverser. Nous notons  $T_k I$  ces transformations.

En fait, les 12 transpositions (correspondant à des rotations) et les 12 inversions (correspondant à des réflexions) d'ECH sont les éléments du **groupe diédral**  $D_{12}$  sur le dodécagone régulier (horloge des classes de hauteur). Nous retrouvons donc l'invariance des hexagones par transpositions et inversions énoncée dans les propositions 2.2.2 et 2.2.4. Néanmoins, comme le montre l'exemple de la partie 1, ces deux opérations ne sont pas les seules à laisser invariant le contenu intervallique : on parle alors de *Z-relation*<sup>8</sup>. Nous développerons cette notion dans la partie 4 en introduisant le concept d'homométrie.

## 2.3 Les relations ensemblistes entre ensembles de classes de hauteur

D'autres relations principalement tirées de la théorie des ensembles permettent de comparer deux ECH.

**Definition 2.3.1** (Inclusion). *On dit qu'un ECH  $\mathcal{X}$  est inclus dans un ECH  $\mathcal{Y}$  si tous les éléments de  $\mathcal{X}$  sont aussi des éléments de  $\mathcal{Y}$*

Par exemple, l'ECH  $\mathcal{X} = \{1, 5, 7\}$  est inclus dans l'ECH  $\mathcal{Y} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ .

**Definition 2.3.2** (Complémentaire). *On dit qu'un ECH  $\mathcal{Y}$  est le complémentaire d'un ECH  $\mathcal{X}$  par rapport à un ensemble  $S$  si  $S = \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$  et si  $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \emptyset$ . Nous notons  $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^c$ .*

Par exemple,  $\mathcal{X} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$  est le complémentaire de  $\mathcal{Y} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$  dans  $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} = \mathbb{Z}_{12}$ .

L'ensemble des ces notions sera utile pour démontrer le théorème de l'hexacorde, quelque soit l'approche utilisée.

---

8. Le Z vient du terme *zygote* qui signifie *joint* ou *attelé* en grec, il est introduit par Allen Forte. Voir <http://lulu.esm.rochester.edu/rdm/pdflib/ZC.relation.pdf> pour plus de développements.

## Partie 3

---

# Plusieurs démonstrations du théorème de l'hexacorde

---

Dans cette partie, nous allons démontrer de plusieurs manières le théorème de l'hexacorde énoncé dans la partie 1. Nous suivrons l'ordre chronologique selon lequel les démonstrations ont été publiées. Ainsi, nous verrons d'abord les approches purement algébriques : nous comparerons la preuve de Fox [6] de 1966 avec celle de Chemillier [5] de 1987, puis nous nous intéresserons à la démonstration due à Lewin [8] en 1987 avant de finir par celle de Blau [4] en 1999. Nous nous aiderons ensuite des travaux de Amiot [1] et [2] de 2006 pour une approche analytique grâce aux transformées de Fourier discrètes et, enfin, l'approche géométrique sera basée sur les deux articles récents [10] et [11] de McCartin publiés en 2016.

Rappelons le théorème de l'hexacorde que nous allons démontrer :

**Théorème de l'hexacorde :** *Soient  $\mathcal{H}$  un hexacorde et  $\mathcal{H}^c$  son complémentaire. Alors ils possèdent le même contenu intervallique :  $IC_{\mathcal{H}} = IC_{\mathcal{H}^c}$*

### 3.1 Approches algébriques

#### 3.1.1 Deux preuves en apparence similaires : Fox et Chemillier

La démonstration de Fox [6] est la première démonstration documentée du théorème de l'hexacorde, elle date de 1966. De ce fait, les notions de la *Set Theory* introduites dans la partie 2 ne sont pas particulièrement utilisées, le lien entre la musique et les mathématiques n'est même pas la première motivation de la preuve de Fox. Le théorème de l'hexacorde n'est

en fait qu'une des applications du résultat d'algèbre qu'il obtient. Écrite en 1987, la preuve de Chemillier [5] paraît de prime abord semblable à celle de Fox, mais plusieurs différences apparaissent au fur et à mesure entre chaque preuve. Ils utilisent néanmoins tous les deux les permutations et se basent chacun sur un résultat général dont l'énoncé est :

**Théorème 3.1.1.** *Soit  $S = \mathcal{X} \cup \mathcal{X}^c$  un groupe (noté additivement) quelconque, fini ou infini, et  $\sigma$  une permutation d'ordre fini (i.e. qu'il existe un entier  $n$  tel que  $\sigma^n = Id$ ). Alors pour toute partie  $\mathcal{X}$  de  $S$  et  $\mathcal{X}^c$  son complémentaire, Fox démontre que :*

$$\mathcal{X} + \sigma(\mathcal{X}^c) = \mathcal{X}^c + \sigma(\mathcal{X}) \quad (R1)$$

Chemillier démontre que :

$$\mathcal{X} \cap \sigma(\mathcal{X}^c) \text{ est en bijection avec } \mathcal{X}^c \cap \sigma(\mathcal{X}) \quad (R2)$$

**Notation :** L'ensemble  $\mathcal{X} + \sigma(\mathcal{X}^c)$  est l'ensemble des éléments  $\{x + y \mid x \in \mathcal{X}, y \in \sigma(\mathcal{X}^c)\}$ .

Dans notre cas,  $S$  représente la gamme chromatique (c'est donc un ensemble fini de classes de hauteur) et  $\mathcal{X}$  un sous-ensemble de notes (pas nécessairement un hexacorde). De plus, les transpositions  $T_k$  sont des cas particuliers des permutations  $\sigma$ . Après avoir donné une illustration de chaque résultat (R1) et (R2), nous les démontrerons.

### Exemple d'utilisation du théorème dans le cas de Fox

Fox utilise les matrices pour démontrer (R1). Il utilise en particulier la matrice d'addition d'un groupe dans laquelle les éléments ont été permutés de sorte que la matrice puisse être considérée comme une matrice par blocs où les quatre blocs sont respectivement composés des éléments de  $\mathcal{X} + \sigma(\mathcal{X})$ ,  $\mathcal{X} + \sigma(\mathcal{X}^c)$ ,  $\mathcal{X}^c + \sigma(\mathcal{X})$  et  $\mathcal{X}^c + \sigma(\mathcal{X}^c)$ . Nous détaillerons cette méthode dans la preuve, intéressons-nous plutôt à un exemple concret du résultat (R1).

Plaçons nous dans le groupe cyclique  $\mathbb{Z}_8$  (afin d'éviter une trop grande matrice) et considérons l'ECH  $\mathcal{X} = \{0, 1, 3, 4\}$  dont le contenu intervallique est  $IC_{\mathcal{X}} = [4, 2, 1, 2, 4]$ , nous avons évidemment  $\mathcal{X}^c = \{2, 5, 6, 7\}$  et  $IC_{\mathcal{X}^c} = [4, 2, 1, 2, 4]$ . Écrivons ci-après la matrice d'addition dans le cas où  $\sigma = T_1$  (tableau 3.1) et dans le cas où  $\sigma = Id$  (tableau 3.2).

Dans le tableau 3.2, le résultat (R1) est bien vérifié et, de plus, s'il on compte dans le bloc en haut à gauche le nombre d'apparitions des entiers 1,2,3 et 4, on trouve le contenu intervallique de  $\mathcal{X}$  (de même dans le bloc en bas à droite avec  $IC_{\mathcal{X}^c}$ ). En outre, dans les deux tableaux 3.1 et 3.2, on vérifie bien  $\mathcal{X} + \sigma(\mathcal{X}^c) = \mathcal{X}^c + \sigma(\mathcal{X})$  (R1). Le résultat de Fox est donc bien plus général que le théorème de l'hexacorde puisqu'il considère n'importe quelle permutation  $\sigma$ .

|   | 0 | 1 | 3 | 4 | 2 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 4 | 5 | 3 | 6 | 7 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 5 | 6 | 4 | 7 | 0 | 1 |
| 4 | 4 | 5 | 7 | 0 | 6 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 5 | 6 | 0 | 1 | 7 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 3 | 4 | 6 | 7 | 5 | 0 | 1 | 2 |
| 6 | 6 | 7 | 1 | 2 | 0 | 3 | 4 | 5 |
| 7 | 7 | 0 | 2 | 3 | 1 | 4 | 5 | 6 |
| 0 | 0 | 1 | 3 | 4 | 2 | 5 | 6 | 7 |

TABLE 3.1 – Somme dans  $\mathbb{Z}_8$  avec  $\sigma = T_1$

|   | 0 | 1 | 3 | 4 | 2 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 3 | 4 | 2 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 1 | 2 | 4 | 5 | 3 | 6 | 7 | 0 |
| 3 | 3 | 4 | 6 | 7 | 5 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 5 | 7 | 0 | 6 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 3 | 5 | 6 | 4 | 7 | 0 | 1 |
| 5 | 5 | 6 | 0 | 1 | 7 | 2 | 3 | 4 |
| 6 | 5 | 7 | 1 | 2 | 0 | 3 | 4 | 5 |
| 7 | 7 | 0 | 2 | 3 | 1 | 4 | 5 | 6 |

TABLE 3.2 – Somme dans  $\mathbb{Z}_8$  avec  $\sigma = Id$

### Preuve de Fox

Soit  $X = (x_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}$  une matrice de  $m$  lignes et  $n$  colonnes telle que la somme des lignes (respectivement des colonnes) soit égale à  $r$  (respectivement à  $q$ ). Écrivons  $X$  sous la forme d'une matrice par bloc où  $X_{ij}$  a  $m_i$  lignes et  $n_j$  colonnes (de sorte que  $m_1 + m_2 = m$  et  $n_1 + n_2 = n$ ), on obtient :

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$$

Soit  $y_{ij}$  la somme des éléments de  $X_{ij}$ , alors :

**Proposition 3.1.1.**  $y_{12} - y_{21} = m_1 r - n_1 q$  et  $y_{11} - y_{22} = m_1 r - n_2 q$

*Démonstration.* Par construction, on a  $y_{11} + y_{12} = m_1 r$  (1) et  $y_{11} + y_{21} = n_1 q$  (2). Par soustraction de (1) par (2), on obtient  $y_{12} - y_{21} = m_1 r - n_1 q$ . On raisonne de même pour la seconde égalité.  $\square$

Considérons maintenant le cas où  $m_1 = n_1$ ,  $m_2 = n_2$  et où  $X$  est la table d'addition de l'ensemble  $S$  avec les  $m_1$  premières lignes contenant les éléments de  $\mathcal{X}$  et les  $n_1$  premières colonnes les éléments de  $\sigma(\mathcal{X})$ . Chaque élément de  $S$  est alors présent une et une seule fois sur chaque ligne et chaque colonne, même après permutation. Remarquons que dans ce cas  $r = q$  et donc  $y_{12} = y_{21}$  (\*) d'après la proposition 3.1.1. Nous avons cette représentation :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X} + \sigma(\mathcal{X}) & \mathcal{X} + \sigma(\mathcal{X}^c) \\ \mathcal{X}^c + \sigma(\mathcal{X}) & \mathcal{X}^c + \sigma(\mathcal{X}^c) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_1, n_1} = \mathcal{M}_{n_1, n_1}$$

Le fait que  $X$  soit la table d'addition de  $S$  permet de montrer qu'un élément de  $S$  qui apparaît dans  $\mathcal{X} + \sigma(\mathcal{X}^c)$  apparaît aussi dans  $\mathcal{X}^c + \sigma(\mathcal{X})$ , avec le même nombre d'apparitions dans les deux cas, c'est bien (R1). En appliquant de plus l'égalité (\*), on obtient alors que  $\mathcal{X} + \sigma(\mathcal{X}) = \mathcal{X}^c + \sigma(\mathcal{X}^c)$ .

Prenons le cas particulier où  $\sigma = Id$  et où les éléments de la matrice sont les intervalles  $i(s, t)$ , pour  $s$  et  $t$  dans  $S$ , et  $\mathcal{X}$  un hexacorde.

Le résultat ci-dessus nous indique que  $\mathcal{X} + \mathcal{X}^c = \mathcal{X}^c + \mathcal{X}$ , ce qui est équivalent à  $\mathcal{X} - \mathcal{X} = \mathcal{X}^c - \mathcal{X}^c$ . Or l'ensemble  $\mathcal{X} - \mathcal{X} = \{x - y \mid x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{X}\}$  est exactement le contenu intervallique de  $\mathcal{X}$ . En raisonnant de même sur  $\mathcal{X}^c - \mathcal{X}^c$ , on obtient le théorème de l'hexacorde.

### Exemple d'utilisation du théorème dans le cas de Chemillier

Pour illustrer ce résultat, Chemillier utilise une remarque (de 1973 non démontrée) d'Allen Forte énonçant que pour deux ensembles complémentaires  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{X}^c$  avec leur contenu intervallique respectif  $IC_{\mathcal{X}}$  et  $IC_{\mathcal{X}^c}$ , il suffit d'ajouter  $|\mathcal{X}| - |\mathcal{X}^c|$  à chaque composante de  $IC_{\mathcal{X}}$  pour obtenir  $IC_{\mathcal{X}^c}$ . Ce constat sera l'idée principale de la méthode utilisée par McCartin, c'est même une première formulation du *théorème de l'hexacorde généralisé*. Dans le cas de deux hexacordes, la différence est nulle, les contenus intervalliques sont donc égaux. Chemillier explique ce résultat à l'aide d'une construction plutôt simple mais astucieuse qui permet de mieux comprendre l'intérêt de ce résultat pour notre étude mathématico-musicale.

Considérons les deux ECH  $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 4, 7, 8, 11\}$  et son complémentaire  $\mathcal{X}^c = \{3, 5, 6, 9, 10\}$  et représentons les ci-après dans la figure 3.1 sur l'horloge des classes de hauteur.

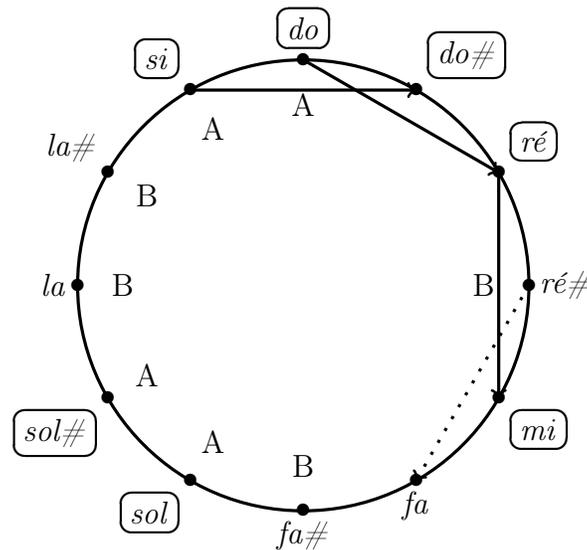


FIGURE 3.1 – Représentation de  $\mathcal{X}$  (notes encadrées) et de  $\mathcal{X}^c$

Prenons pour notre exemple un intervalle de  $k = 2$  demi-tons. Dans la figure 3.1, les flèches pleines représentent les occurrences de l'intervalle dans  $\mathcal{X}$  (de même pour les flèches pointillées pour  $\mathcal{X}^c$ ). On remarque qu'il y a trois occurrences dans  $\mathcal{X}$  et une seule dans  $\mathcal{X}^c$ . En notant  $A$  l'ensemble des notes de  $\mathcal{X}$  qui ne sont pas arrivées d'une flèche (de même pour  $B$  avec  $\mathcal{X}^c$ ), nous obtenons alors les relations suivantes :

$$|\mathcal{X}| - 3 = |A| = 4 \text{ et } |\mathcal{X}^c| - 1 = |B| = 4$$

Le résultat nous donne en fait :  $|A| = |B|$ . Nous pouvons vérifier qu'en prenant une par une les notes de  $B$  et en ajoutant  $k = 2$  demi-tons nous tombons (en itérant plusieurs fois si nécessaire) sur une note de  $A$ . Nous remarquons même que chaque note de  $A$  est ainsi reliée à une note de  $B$  différente. Dans notre exemple,  $ré\#$  est envoyée sur  $sol$  (deux itérations de  $k = 2$ ),  $fa\#$  est envoyée sur  $sol\#$ ,  $la$  est envoyée sur  $si$  et  $la\#$  est envoyée sur  $do$ .

Ce constat a été montré une première fois par Eric Regener en 1974 grâce à ce résultat :

$$|\mathcal{X}^c \cap \mathcal{Y}^c| = |S| - |\mathcal{X}| - |\mathcal{Y}| + |\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}|$$

Pour voir le lien avec la musique, il faut remarquer que le nombre d'occurrences de l'intervalle de  $k$  demi-tons dans  $\mathcal{X}$  est égal aux notes communes entre  $\mathcal{X}$  et  $T_k(\mathcal{X})$  :  $\Phi_{\mathcal{X}}(k) = |\mathcal{X} \cap T_k(\mathcal{X})|$ ; ce résultat sera la base de la théorie, des résultats et des preuves de Lewin et de McCartin. On conclut alors avec  $\mathcal{Y} = T_k(\mathcal{X})$ , cela implique évidemment que  $|\mathcal{X}| = |\mathcal{Y}|$ . Et on obtient bien le théorème de l'hexacorde dans le cas où  $|\mathcal{X}| = |\mathcal{Y}| = |T_k(\mathcal{X})| = 6$  :

$$\Phi_{\mathcal{X}^c}(k) = |\mathcal{X}^c \cap (T_k(\mathcal{X}))^c| = |S| - |\mathcal{X}| - |T_k(\mathcal{X})| + |\mathcal{X} \cap T_k(\mathcal{X})| = 12 - 2 \times 6 + |\mathcal{X} \cap T_k(\mathcal{X})| = \Phi_{\mathcal{X}}(k)$$

Le théorème 3.1.1 énonce en fait un résultat (R2) plus général que celui ci-dessus, où  $\mathcal{Y}$  peut être vu comme  $\sigma(\mathcal{X}^c)$  et où la bijection remplace l'égalité avec les cardinaux.

## Preuve de Chemillier

Pour montrer l'existence d'une bijection entre les deux ensembles, Chemillier utilise une méthode très classique d'analyse.

Soit  $P = \{\sigma^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  le sous-groupe de  $S$  engendré par les permutations  $\sigma$ . Posons  $A = \mathcal{X} \cap \sigma(\mathcal{X}^c)$  et  $B = \mathcal{X}^c \cap \sigma(\mathcal{X})$ . Soit  $a \in A$  et posons l'application  $\mu$  de  $A$  dans  $B$  défini par  $\mu(a) = \sigma^n(a)$  où  $n = \inf\{m \in \mathbb{N} \mid \sigma^m(a) \in B\}$ . Soit enfin  $\Omega(a) = \{\sigma^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$  l'orbite de  $a$ . Montrons le résultat en deux étapes.

1. Montrons que  $\mu$  est surjective.

Soit  $b \in B$ , alors  $\sigma^{-1}(b) \in \mathcal{X}$  et donc  $\sigma^{-1}(b) \notin B$ . Posons  $d = \sigma^{-1}(b)$ . Par symétrie dans les rôles de  $A$  et  $B$ , on a :  $\Omega(b) \cap A \neq \emptyset$ , donc  $\Omega(d) \cap A \neq \emptyset$ . Soit  $p$  le plus petit entier tel que  $\sigma^{-p}(d) \in A$ . Ainsi, pour  $a = \sigma^{-p}(d)$ , on a  $b = \mu(a)$  et donc  $\mu$  est surjective.

2. Montrons que  $\mu$  est injective.

Supposons  $\mu(a_1) = \mu(a_2)$ . Alors il existe  $p$  et  $q$  les plus petits entiers tels que  $\mu(a_1) = \sigma^p(a_1) = b \in B$  et  $\mu(a_2) = \sigma^q(a_2) = b \in B$ . Supposons  $p \geq q$ , alors  $\sigma^{p-q}(a_1) = a_2$ . Mais  $\sigma(a_1) \in \sigma(\mathcal{X})$ , donc  $\sigma(a_1) \notin A$  et  $\sigma^{p-q} \notin B$  (car  $p - q < p$ ), d'où  $\sigma^{p-q}(a_1) \in \sigma(\mathcal{X}) \cap \mathcal{X}$ . On obtient une contradiction avec  $\sigma^{p-q}(a_1) = a_2 \in A$ . Pour levée la contradiction, il faut que  $p = q$ , ce qui implique que  $a_1 = a_2$ .  $\mu$  est alors injective.

Donc  $\mu$  est une bijection entre  $A = \mathcal{X} \cap \sigma(\mathcal{X}^c)$  et  $B = \mathcal{X}^c \cap \sigma(\mathcal{X})$ , ce qui prouve l'existence de la bijection dans le résultat (R2) énoncé dans le théorème 3.1.1.

Une fois ce résultat établi, il faut poursuivre le raisonnement en reprenant le constat de Chemillier expliqué en exemple, ce qui conduit au théorème de l'hexacorde.

### 3.1.2 Démonstration «générale» de Lewin

La démonstration du théorème de l'hexacorde de Babbitt par Lewin se base essentiellement sur les concepts de *Set Theory* introduits dans la partie 2. Cependant, pour démontrer le théorème de Milton Babbitt, Lewin se place dans un cas plus général en introduisant le concept de GIS, pour *Generalized Interval System*, qu'il définit ainsi :

**Definition 3.1.1** (GIS). *Soient  $S$  un ensemble d'objet musicaux,  $IVLS$  un groupe d'intervalles généralisés et  $int$  une fonction «intervalles». Un GIS est alors un triplet  $(S, IVLS, int)$  de telle sorte que :*

1.  $\forall a, b, c \in S, int(a, b) + int(b, c) = int(a, c)$
2.  $\forall a \in S, \forall k \in IVLS, \exists ! b \in S, int(a, b) = k$

Pour un GIS  $(S, IVLS, int)$  donné, il définit de plus une fonction permettant de déterminer les intervalles entre les éléments de  $S$  et une *référence* :

**Definition 3.1.2** (Fonction LABEL). *Soit un triplet  $(S, IVLS, int)$  formant un GIS. Fixons  $ref$  un élément de référence de  $S$ . On définit alors pour  $s$  dans  $S$  la fonction LABEL ainsi :*

$$LABEL(s) = int(ref, s)$$

Cette définition plus large permet de définir toute une théorie analogue à la notre mais en pouvant choisir une autre gamme que la gamme chromatique comme ensemble de classes de hauteur (donc en ne calculant pas forcément dans  $\mathbb{Z}_{12}$ ), et d'utiliser une autre note que le *do* comme *référence*.

Dans notre cas,  $S = \mathbb{Z}_{12}$  la gamme chromatique (en tant qu'ensemble de classes de hauteur),  $IVLS = \mathbb{N}$  (c'est même  $\mathbb{Z}_{12}$  également une fois l'équivalence à l'octave appliquée) et la fonction  $int$  est la fonction  $i$  introduite précédemment.

Lewin se place de plus dans une situation avec deux sous-ensembles<sup>1</sup> finis  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$ , et leur complémentaire respectif  $\mathcal{X}^c$  et  $\mathcal{Y}^c$ . La démonstration du théorème de l'hexacorde sera en fait un cas particulier du résultat final obtenu dans un cas plus général grâce aux propriétés et théorèmes énoncés. Introduisons dès lors quelques notions supplémentaires.

---

1. De prime abord, ces ensembles ne sont pas forcément des hexacordes, c'est pourquoi ils sont représentés par  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$ , à défaut de  $\mathcal{H}$  et de  $\mathcal{K}$ . De même pour  $\mathcal{X}^c$  et  $\mathcal{Y}^c$ .

## Notions supplémentaires

Dans les énoncés suivants,  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  sont deux sous-ensembles finis d'un ensemble  $S$  avec  $\mathcal{X}^c$  et  $\mathcal{Y}^c$  leur complémentaire respectif et  $f$  une application bijective sur  $S$  (typiquement une transposition).

**Définition 3.1.3** (Fonction d'injection). *Le nombre d'injections<sup>2</sup> de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathcal{Y}$  par  $f$ , noté  $\Psi_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(f)$ , est le nombre d'éléments  $s$  de  $\mathcal{X}$  tel que  $f(s)$  est dans  $\mathcal{Y}$ .*

Prenons un exemple. Considérons  $S$  comme étant la gamme chromatique et  $f$  la transposition  $T_2$  de 2 demi-tons supérieurs. Fixons  $\mathcal{X} = \{do, do\#, ré, ré\#, mi\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  et  $\mathcal{Y} = \{mi, fa, fa\#, sol, sol\#\} = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ .

On a  $f(\mathcal{X}) = T_2(\mathcal{X}) = \{T_2(0), T_2(1), T_2(2), T_2(3), T_2(4)\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Donc  $\Psi_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(f) = 3$ .

**Proposition 3.1.2.** *Si  $f$  est une transformation de  $\mathcal{X}$  vers  $\mathcal{Y}$ , alors :*

$$\Psi_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(f) = |f(\mathcal{X}) \cap \mathcal{Y}|$$

*Démonstration.* On note  $M = \Psi_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(f)$  et  $N = |f(\mathcal{X}) \cap \mathcal{Y}|$ .

- Soient  $x_1, \dots, x_M$  des éléments distincts de  $\mathcal{X}$ . Alors  $f(x_1), \dots, f(x_M)$  sont des éléments distincts de  $f(\mathcal{X}) \cap \mathcal{Y}$ . D'où,  $f(\mathcal{X}) \cap \mathcal{Y}$  contient au moins  $M$  éléments distincts :  $N \geq M$ .
- Soient  $y_1, \dots, y_N$  des éléments distincts de  $f(\mathcal{X}) \cap \mathcal{Y}$ . Alors  $f^{-1}(y_1), \dots, f^{-1}(y_N)$  sont des éléments distincts de  $\mathcal{X}$ . D'où,  $\mathcal{X}$  contient au moins  $N$  éléments distincts :  $M \geq N$ .

Par double inégalité  $M = N$  et on obtient le résultat souhaité □

**Corollaire 3.1.1.** *Alors :*

$$\Psi_{\mathcal{Y},\mathcal{X}}(f) = \Psi_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(f^{-1})$$

*Démonstration.*

Un élément  $z$  est dans l'ensemble  $f^{-1}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{Y}$  ssi  $f(z) \in \mathcal{X}$  et  $z \in \mathcal{Y}$   
ssi  $f(z) \in \mathcal{X}$  et  $f(z) \in f(\mathcal{Y})$   
ssi  $f(z) \in \mathcal{X} \cap f(\mathcal{Y})$ .

Ainsi,  $f$  bijective envoie l'ensemble  $f^{-1}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{Y}$  sur l'ensemble  $f(\mathcal{Y}) \cap \mathcal{X}$ , ces deux ensembles ont donc le même cardinal :  $|f^{-1}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{Y}| = |f(\mathcal{Y}) \cap \mathcal{X}|$ . En appliquant la proposition 3.1.2, nous obtenons le résultat énoncé. □

---

2. Lewin utilise la notation  $INJ(X, Y)(f)$  dans ses livres, non utilisée ici.

Nous pouvons alors énoncé le théorème suivant :

**Théorème 3.1.2.** *Soit  $S$  un ensemble fini. Soient  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  deux sous-ensembles de  $S$  et soient  $\mathcal{X}^c$  et  $\mathcal{Y}^c$  leur complémentaire respectif. Soit  $f$  une transformation. Alors nous avons ces formules :*

- A)  $\Psi_{\mathcal{X},\mathcal{Y}^c}(f) = |\mathcal{X}| - \Psi_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(f)$
- B)  $\Psi_{\mathcal{X}^c,\mathcal{Y}}(f) = |\mathcal{Y}| - \Psi_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(f)$
- C)  $\Psi_{\mathcal{X}^c,\mathcal{Y}^c}(f) = |\mathcal{Y}^c| - |\mathcal{X}| + \Psi_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(f)$
- D) Si  $|\mathcal{X}| = |\mathcal{Y}^c|$ , alors  $\Psi_{\mathcal{X}^c,\mathcal{Y}^c}(f) = \Psi_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(f)$
- E) Si  $|\mathcal{X}| = \frac{1}{2}|S|$ , alors  $\Psi_{\mathcal{X}^c,\mathcal{Y}^c}(f) = \Psi_{\mathcal{X},\mathcal{X}}(f)$

*Démonstration.* Prouvons les résultats dans l'ordre utilisé dans le théorème, chaque résultat utilisant le précédent.

- A) Puisque  $f$  envoie un élément de  $\mathcal{X}$  soit vers  $\mathcal{Y}$  soit vers  $\mathcal{Y}^c$ , on a la formule suivante  $|\mathcal{X}| = \Psi_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(f) + \Psi_{\mathcal{X},\mathcal{Y}^c}(f)$  et le résultat suit.
- B)

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{X}^c,\mathcal{Y}}(f) &= \Psi_{\mathcal{Y},\mathcal{X}^c}(f^{-1}) && \text{d'après corollaire 3.1.1} \\ &= |\mathcal{Y}| - \Psi_{\mathcal{Y},\mathcal{X}}(f^{-1}) && \text{d'après A)} \\ &= |\mathcal{Y}| - \Psi_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(f) && \text{d'après corollaire 3.1.1 à nouveau} \end{aligned}$$

- C)  $\Psi_{\mathcal{X}^c,\mathcal{Y}^c}(f) \stackrel{B)}{=} |\mathcal{Y}^c| - \Psi_{\mathcal{X},\mathcal{Y}^c}(f) \stackrel{A)}{=} |\mathcal{Y}^c| - (|\mathcal{X}| - \Psi_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(f)) = |\mathcal{Y}^c| - |\mathcal{X}| + \Psi_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(f)$
- D) évident d'après C) où  $|\mathcal{Y}^c| - |\mathcal{X}| = 0$
- E) évident d'après D) en prenant  $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$

□

A l'aide des résultats ci-dessus, nous pouvons enfin démontrer le théorème de l'hexacorde.

### Démonstration du théorème

Soit  $\mathcal{X}$  un hexacorde et soit  $f$  une transposition  $T_k$ ,  $k$  quelconque. Remarquons en premier que  $|T_k(\mathcal{X}) \cap \mathcal{X}|$  représente le nombre de  $x$  dans  $\mathcal{X}$  qui restent dans  $\mathcal{X}$  après transformation par  $T_k$ , c'est donc  $\Phi_{\mathcal{X}}(k)$ . Ainsi, d'après la proposition 3.1.2,  $\Phi_{\mathcal{X}}(k) = |T_k(\mathcal{X}) \cap \mathcal{X}| = \Psi_{\mathcal{X},\mathcal{X}}(T_k)$ . De même,  $\Phi_{\mathcal{X}^c}(k) = |T_k(\mathcal{X}^c) \cap \mathcal{X}^c| = \Psi_{\mathcal{X}^c,\mathcal{X}^c}(T_k)$ . Utilisons alors le résultat E) du théorème 3.1.2, nous avons donc  $\Psi_{\mathcal{X}^c,\mathcal{X}^c}(T_k) = \Psi_{\mathcal{X},\mathcal{X}}(T_k)$ . Finalement,  $\Phi_{\mathcal{X}}(k) = \Phi_{\mathcal{X}^c}(k)$  pour tout  $k$ , ce qui implique l'égalité des deux contenus intervalliques :  $IC_{\mathcal{X}} = IC_{\mathcal{X}^c}$

Ce qui termine la preuve du théorème de l'hexacorde.

## Généralisation

En fait, Lewin utilise déjà une généralisation pour démontrer le théorème de l'hexacorde : le résultat E) du théorème 3.1.2 est appelé le *théorème généralisé de l'hexacorde*. Il généralise le théorème au cas où des notes de deux ensembles différents  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  sont comparées, grâce à la fonction d'injection.

Les résultats ci-dessus (notamment la généralisation E)) comprennent également le cas où le cardinal de l'ensemble  $S$  est fini, sans forcément être douze comme pour la gamme chromatique.

### 3.1.3 Démonstration de Blau

#### Illustration du procédé

Pour cette démonstration, reprenons la représentation d'un hexacorde en «horloge». Plutôt que la *Set Theory*, Blau utilise principalement les permutations et quelques calculs de combinatoire pour démontrer le théorème. Soit  $\mathcal{H}$  un hexacorde composé de 6  $H$  et soit  $\mathcal{K}$  son complémentaire. Nous choisissons alors la représentation ci-dessous :

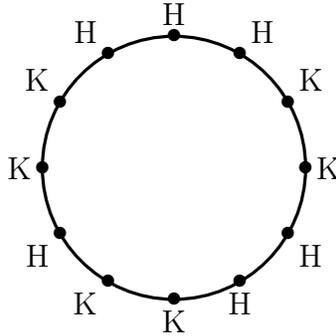


FIGURE 3.2 – Représentation sur l'horloge de 6  $H$  et de 6  $K$

Dans ce cas, on a  $\mathcal{H} = \{0, 1, 4, 5, 8, 11\}$  et donc  $\mathcal{K} = \{2, 3, 6, 7, 9, 10\}$ . Dans chaque sous ensemble,  $\binom{6}{2} = 15$  paires peuvent être formées. Le contenu intervallique de  $\mathcal{H}$  est

$$IC_{\mathcal{H}} = \{6, 3, 1, 3, 4, 3, 1\}$$

Nous pouvons également l'écrire sous la forme ci-dessous (que Blau appelle *interval multiset* où l'on écrit, par exemple,  $\{1, 1, 1\}$  lorsqu'il y a trois demi-tons dans l'hexacorde),

$$\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6\}$$

On obtient directement le contenu intervallique de  $\mathcal{K}$  sous les deux formes :

$$IC_{\mathcal{K}} = \{6, 3, 1, 3, 4, 3, 1\} \text{ et } \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6\}$$

Les deux contenus intervalliques (et par même force de preuve les deux *interval multiset*) sont les mêmes : c'est bien le théorème de l'hexacorde.

### Démonstration du théorème de l'hexacorde

Soient  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{K}$  deux hexacordes complémentaires représentés sur une horloge. En permutant un  $H$  et un  $K$  voisin nous pouvons générer une nouvelle paire d'hexacordes complémentaires.

En fait, en partant de l'hexacorde représenté par des  $H$  aux positions 1 à 6 et l'hexacorde complémentaire avec des  $K$  aux positions 7 à 0 (voir la figure ci-contre), n'importe quelle paire d'hexacordes complémentaires peut être générée par une suite de permutations entre  $H$  et  $K$  voisins.

Les deux hexacordes représentés ci-contre ont évidemment des contenus intervalliques identiques : ils satisfont le théorème de l'hexacorde.

Ainsi, si nous montrons que les permutations de  $H$  et de  $K$  ne modifient pas les contenus intervalliques de  $\mathcal{H}$  et de  $\mathcal{K}$ , ou les modifient de manière identique, nous aurons démontré le théorème de l'hexacorde. Dès lors, le lemme suivant permet de conclure la démonstration.

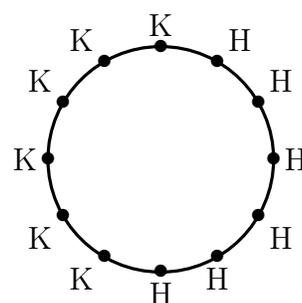


FIGURE 3.3 – Les 6 H de 1 à 6 et les 6 K de 7 à 0

**Lemme 3.1.1.** *Supposons que deux hexacordes complémentaires  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{K}$  aient le même contenu intervallique, alors les hexacordes obtenus en permutant des paires de  $H$  et de  $K$  ont également le même contenu intervallique*

*Démonstration.* La figure suivante représente, à gauche, l'horloge introduite au début et, à droite, l'horloge où les lettres soulignées ont été permuées.

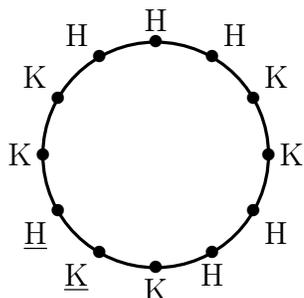


FIGURE 3.4 – Avant la permutation

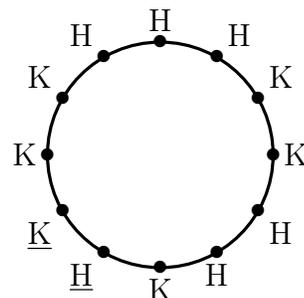


FIGURE 3.5 – Après la permutation

Nous avons choisi arbitrairement une paire (un  $\underline{H}$  et un  $\underline{K}$ ). Les 10 éléments restants forment donc 5 paires. Pour chaque entier  $k$  entre 1 et 5, nous considérons la paire formée par les deux lettres obtenues en partant de  $\underline{H}$  et de  $\underline{K}$  et en ajoutant  $k$  demi-tons de chaque côté. Comme le montre les figures suivantes, il y a quatre possibilités de nouvelle paire : nous pouvons obtenir deux  $H$ , deux  $K$ , un  $H$  et un  $K$ , ou un  $K$  et un  $H$ .

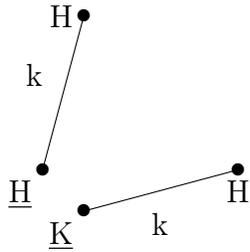


FIGURE 3.6 –  $k=3$

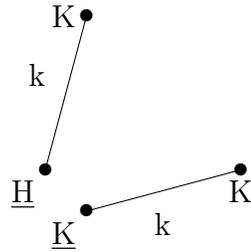


FIGURE 3.7 –  $k=1$

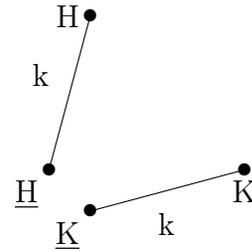


FIGURE 3.8 –  $k=4$

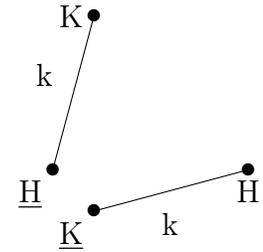


FIGURE 3.9 –  $k=2$

Le cas  $k = 5$  est, dans cet exemple, équivalent au cas  $k = 4$  (paire avec un  $H$  et un  $K$ ). Il faut remarquer qu'il y a plus de paires formées que de formes de nouvelles paires possibles. Considérons les quatre cas différents :

- Si la paire contient deux  $H$  (figure  $k = 3$ ), alors la permutation change deux intervalles dans le contenu intervallique de  $\mathcal{H}$  : les longueurs  $k$  et  $k + 1$  de deux intervalles deviennent respectivement  $k + 1$  et  $k$ , le nombre d'intervalles de longueur  $k$  et le nombre d'intervalles de longueur  $k + 1$  ne sont donc pas modifiés : le contenu intervallique de  $\mathcal{H}$  est inchangé. Puisqu'aucun  $K$  n'était concerné, le contenu intervallique de  $\mathcal{K}$  n'a pas été modifié.
- Par un argument identique, si la paire contient deux  $K$  (figure  $k = 1$ ), les deux contenus intervalliques ne sont pas modifiés.
- Si la lettre la plus proche du  $\underline{H}$  est aussi un  $H$  et l'autre lettre un  $K$  (figure  $k = 4$ ), alors les deux contenus intervalliques sont modifiés, mais de manière identique. En effet, dans chaque contenu, un intervalle de longueur  $k$  devient un intervalle de longueur  $k + 1$ .
- Le dernier cas (figure  $k = 2$ ) est l'inverse de celui ci-dessus.

Ainsi, pour tout entier  $k$  entre 1 et 5, les permutations ont les mêmes effets sur chaque contenu intervallique. La démonstration du lemme est alors complète : ce qui termine la démonstration du théorème de l'hexacorde.  $\square$

## Généralisation

A aucun moment dans la démonstration, le fait que le cardinal de la gamme chromatique soit  $n = 12$  n'est utilisé. Aussi, le cas de deux sous-ensembles complémentaires se généralise-t-il de la même manière. Énonçons ce résultat.

**Théorème 3.1.3** (Généralisation). *Soit  $S$  un ensemble à  $n$  éléments et soient  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  deux sous-ensembles disjoints de  $S$  de cardinal  $n_{\mathcal{X}}$  et  $n_{\mathcal{Y}} = n - n_{\mathcal{X}}$  respectivement. Rappelons que nous avons défini  $\Phi_{\mathcal{X}}(k)$  comme étant le nombre de fois où l'intervalle de  $k$  demi-tons apparaît dans  $\mathcal{X}$  (de même pour  $\Phi_{\mathcal{Y}}(k)$ ). En considérant la partition particulière de  $S$  où  $\mathcal{X}_0 = \{1, 2, 3, \dots, n_{\mathcal{X}}\}$  et  $\mathcal{Y}_0 = \{n_{\mathcal{X}} + 1, n_{\mathcal{X}} + 2, \dots, n\}$ , nous avons pour tout  $k$  :*

$$\Phi_{\mathcal{X}}(k) - \Phi_{\mathcal{Y}}(k) = \Phi_{\mathcal{X}_0}(k) - \Phi_{\mathcal{Y}_0}(k)$$

Cette partition est la généralisation du cas où nous avons placé les  $H$  des positions 1 à 6 et les  $K$  de 7 à 0. On retrouve bien le théorème de l'hexacorde pour  $n_{\mathcal{X}} = 6$  et  $n = 12$ , car alors  $\Phi_{\mathcal{X}_0}(k) = \Phi_{\mathcal{Y}_0}(k)$  et donc  $\Phi_{\mathcal{X}}(k) = \Phi_{\mathcal{Y}}(k)$ . Les contenus intervalliques sont donc égaux.

## 3.2 Approche analytique

Cette partie est une approche analytique du théorème de l'hexacorde et de sa démonstration. Pour cela, il convient dans un premier temps d'introduire la notion de transformées de Fourier discrètes et quelques propriétés avant de démontrer le théorème. Cette partie se base principalement sur les travaux [1] et [2] d'Emmanuel Amiot. Nous allons démontrer que le contenu intervallique est en fait un produit de convolution de transformées de Fourier discrètes, ce constat nous permettra de démontrer le théorème de l'hexacorde.

### 3.2.1 Transformées de Fourier discrètes

**Definition 3.2.1** (Transformée de Fourier Discrète). *La transformée de Fourier discrète (TFD) d'une fonction  $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}$  est la fonction  $\hat{f}$  définie par :*

$$\begin{aligned} \hat{f} : \mathbb{Z}_n &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{n-1} f(k) e^{-2ki\pi x/n} \end{aligned}$$

Nous introduisons alors immédiatement :

**Proposition 3.2.1** (Transformée inverse). *La transformée de Fourier inverse de  $\hat{f}$  est définie par la fonction :*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}_n &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) e^{2ki\pi x/n} \end{aligned}$$

*Démonstration.*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) e^{2ki\pi x/n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} f(l) e^{-2li\pi x/n} f(k) e^{2ki\pi x/n} = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} f(l) \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2ix(l-k)\pi/n}$$

$$\text{Or } \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2ix(l-k)\pi/n} = \begin{cases} \frac{1 - (e^{-2i(l-k)\pi/n})^n}{1 - e^{-2i(l-k)\pi/n}} = \frac{1 - e^{-2i(l-k)\pi}}{1 - e^{-2i(l-k)\pi/n}} = 0 \text{ si } l \neq k \\ \sum_{k=0}^{n-1} e^0 = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n \text{ si } l = k \end{cases}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) e^{2ki\pi x/n} = \frac{1}{n} f(k) \times n = f(k) \quad \square$$

Un outil utile à la démonstration est le produit de convolution, définissons-le.

**Definition 3.2.2** (Produit de convolution). *Pour  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{Z}_n$  dans  $\mathbb{C}$ , on définit le produit de convolution sur  $\mathbb{Z}_n$  comme étant :*

$$\forall x \in \mathbb{Z}_n, (f * g)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(x - k)$$

De manière analogue au cas continu des transformées de Fourier, nous avons :

**Proposition 3.2.2.** *La TFD d'un produit de convolution de deux fonctions est le produit (usuel) des deux transformées de Fourier discrètes. Pour toutes  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{Z}_n$  dans  $\mathbb{C}$  :*

$$\forall x \in \mathbb{Z}_n, (\widehat{f * g})(x) = \hat{f}(x) \times \hat{g}(x)$$

*Démonstration.* Soit  $x \in \mathbb{Z}_n$ ,

$$\begin{aligned} (\widehat{f * g})(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} (f * g)(k) e^{-2ki\pi x/n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{l=0}^{n-1} f(l)g(k - l) \right) e^{-2i\pi l x} e^{-2i\pi(k-l)x} \\ &= \left( \sum_{l=0}^{n-1} f(l) e^{-2i\pi l x} \right) \left( \sum_{k=0}^{n-1} g(k - l) e^{-2i\pi(k-l)x} \right) \end{aligned}$$

En effectuant un changement de variable  $k' = k - l$  (dans  $\mathbb{Z}_n$ ) dans la seconde somme, on obtient :

$$(\widehat{f * g})(x) = \hat{f}(x) \times \hat{g}(x) \quad \square$$

**Definition 3.2.3** (TFD d'un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}_n$ ). Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}_n$ , alors définissons sa TFD comme étant :

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{1}}_A : A &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \sum_{k \in A} e^{2ki\pi x/n}\end{aligned}$$

### 3.2.2 Lien entre la musique et les transformées de Fourier discrètes

Revenons maintenant à  $\mathbb{Z}_{12}$  pour nous rapprocher de la représentation mathématique de la gamme chromatique que nous utilisons depuis le début. Nous allons ainsi relier les transformées de Fourier discrètes aux notions musicales utiles pour la démonstration du théorème de l'hexacorde.

La TFD de  $f : \mathbb{Z}_{12} \mapsto \mathbb{C}$  est définie par :  $\hat{f}(x) = \sum_{k=0}^{11} f(k)e^{-2ki\pi x/12} = \sum_{k=0}^{11} f(k)e^{-ik\pi x/6}$

**Proposition 3.2.3.** Si  $\mathcal{H}$  est un hexacorde,  $IC_{\mathcal{H}}$  son contenu intervallique et  $\Phi_{\mathcal{H}}$  la fonction intervallique associée, alors :

$$\Phi_{\mathcal{H}}(k) = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}(k) * \mathbf{1}_{\mathcal{H}}(-k)$$

*Démonstration.*

$$\mathbf{1}_{\mathcal{H}}(k) * \mathbf{1}_{\mathcal{H}}(-k) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_{12}} \mathbf{1}_{\mathcal{H}}(i) \mathbf{1}_{\mathcal{H}}(i - k) = \sum_{i \in \mathcal{H}} \mathbf{1}_{\mathcal{H}}(i - k) = \sum_{i, j \in \mathcal{H} \text{ et } i - j = k} 1 = \Phi_{\mathcal{H}}(k)$$

□

**Proposition 3.2.4.** Si  $\mathcal{H}$  est un hexacorde,  $IC_{\mathcal{H}}$  son contenu intervallique et  $\Phi_{\mathcal{H}}$  la fonction intervallique associée, alors :

$$\widehat{\Phi}_{\mathcal{H}}(k) = |\widehat{\mathbf{1}}_{\mathcal{H}}(k)|^2$$

*Démonstration.*

$$\widehat{\Phi}_{\mathcal{H}}(k) = \widehat{\mathbf{1}_{\mathcal{H}}(k) * \mathbf{1}_{\mathcal{H}}(-k)} = \widehat{\mathbf{1}}_{\mathcal{H}}(k) \times \widehat{\mathbf{1}}_{\mathcal{H}}(-k) = \widehat{\mathbf{1}}_{\mathcal{H}}(k) \times \overline{\widehat{\mathbf{1}}_{\mathcal{H}}(k)} = |\widehat{\mathbf{1}}_{\mathcal{H}}(k)|^2$$

□

Nous avons maintenant assez d'éléments pour démontrer le théorème de l'hexacorde à l'aide des transformées de Fourier discrètes.

### 3.2.3 Démonstration du théorème de l'hexacorde

Soient  $\mathcal{H}$  un hexacorde et  $\mathcal{K}$  son complémentaire. Calculons  $\widehat{\mathbb{1}_{\mathcal{H}}}(k) + \widehat{\mathbb{1}_{\mathcal{K}}}(k)$ .  
Soit  $k \in \mathbb{Z}_{12}$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{1}_{\mathcal{H}}}(k) + \widehat{\mathbb{1}_{\mathcal{K}}}(k) &= \widehat{\mathbb{1}_{\mathcal{H} \cup \mathcal{K}}}(k) \\ &= \widehat{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_{12}}}(k) \\ &= \sum_{t \in \mathbb{Z}_{12}} e^{-ik\pi t/6} \\ &= \frac{1 - (e^{-ik\pi/6})^{12}}{1 - e^{-ik\pi/6}} \text{ si } k \neq 0 \\ &= \frac{1 - e^{-2ik\pi}}{1 - e^{-ik\pi/6}} \text{ si } k \neq 0 \\ &= 0 \text{ si } k \neq 0 \end{aligned}$$

Donc, pour  $k \neq 0$ ,

$$\widehat{\mathbb{1}_{\mathcal{H}}}(k) = -\widehat{\mathbb{1}_{\mathcal{K}}}(k)$$

D'où, pour  $k \neq 0$ ,

$$\widehat{\Phi}_{\mathcal{H}}(k) = |\widehat{\mathbb{1}_{\mathcal{H}}}(k)|^2 = |-\widehat{\mathbb{1}_{\mathcal{K}}}(k)|^2 = |\widehat{\mathbb{1}_{\mathcal{K}}}(k)|^2 = \widehat{\Phi}_{\mathcal{K}}(k)$$

Pour  $k = 0$ ,

$$\widehat{\Phi}_{\mathcal{H}}(0) = |\widehat{\mathbb{1}_{\mathcal{H}}}(0)|^2 = \left| \sum_{t \in \mathcal{H}} e^0 \right|^2 = |6|^2 = 36 = \widehat{\Phi}_{\mathcal{K}}(0) \text{ car } |\mathcal{H}| = |\mathcal{K}| = 6$$

Ainsi,

$$\forall k \in \llbracket 0, 11 \rrbracket, \quad \widehat{\Phi}_{\mathcal{H}}(k) = \widehat{\Phi}_{\mathcal{K}}(k)$$

et par transformée de Fourier inverse,

$$\forall k \in \llbracket 0, 11 \rrbracket, \quad \Phi_{\mathcal{H}}(k) = \Phi_{\mathcal{K}}(k)$$

Finalement,

$$IC_{\mathcal{H}} = IC_{\mathcal{K}}$$

Ce qui prouve le théorème de l'hexacorde.

### 3.2.4 Généralisation

Les transformées de Fourier discrètes étant définies sur  $\mathbb{Z}_n$ , le résultat peut être étendu de la même manière au cas  $n$  quelconque.

De plus, il peut même s'étendre au cas de deux sous-ensembles  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  de  $\mathbb{Z}_n$ .  
En notant

$$Mult(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, k) = Card\{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \mid i(x, y) = k\}$$

en remarquant que

$$Mult(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, k) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}(k) * \mathbb{1}_{\mathcal{Y}}(k)$$

et par des calculs similaires à ceux ci-dessus, nous obtenons alors :

$$Mult(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, k) = Mult(\mathcal{X}^c, \mathcal{Y}^c, k) - (n - |\mathcal{X}| - |\mathcal{Y}|)$$

### 3.3 Approche géométrique

L'approche purement géométrique de McCartin se base sensiblement sur la même idée que celle de Lewin. La démonstration du théorème de l'hexacorde s'appuie sur un résultat plus général basé sur le fait que chaque terme du contenu intervallique correspond aux nombres de notes communes entre  $\mathcal{H}$  et  $T_k(\mathcal{H})$ , autrement dit que :  $\Phi_{\mathcal{H}}(k) = |\mathcal{H} \cap T_k(\mathcal{H})|$ .

Ainsi, la démonstration du théorème de l'hexacorde proposée par McCartin dans [11] est un corollaire du *Théorème des notes communes* qu'il démontre géométriquement pour les transpositions et les inversions dans [10] ; nous allons donc suivre sa méthode. Cette approche nous donne en fait un résultat plus général : la transposition permet d'obtenir un énoncé sur les contenus intervalliques et l'inversion un énoncé sur les *index vector* (définis ci-après).

Tout au long de cette section, nous utiliserons le même exemple : la gamme diatonique  $\mathcal{D}$ , et son complémentaire la gamme pentatonique<sup>3</sup>  $\mathcal{P}$ . Introduisons dès maintenant leur représentation sur l'horloge avec l'«axe» de symétrie *ré-sol#*.

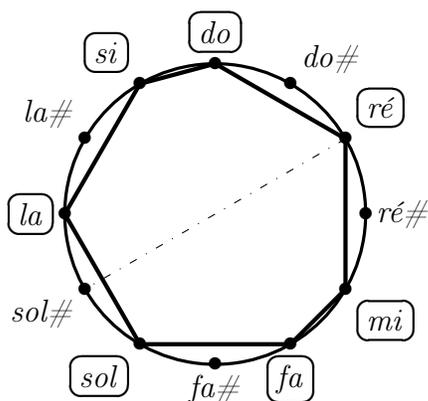


FIGURE 3.10 – Gamme diatonique

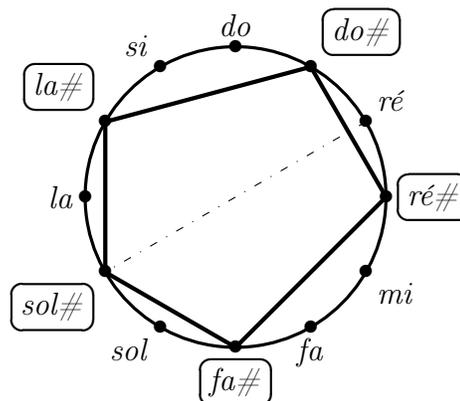


FIGURE 3.11 – Gamme pentatonique

3. voir Annexe 2 page 48 pour les définitions des gammes pentatonique et diatonique.

On a  $\mathcal{D} = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$  et  $\mathcal{P} = \{1, 3, 6, 8, 10\}$ . On obtient alors immédiatement que  $IC_{\mathcal{D}} = [7, 2, 5, 4, 3, 6, 1]$  et  $IC_{\mathcal{P}} = [5, 0, 3, 2, 1, 4, 0]$ . Nous aurons également besoin d'un nouveau vecteur : le *index vector*. Il est obtenu en sommant modulo 12, de toutes les manières possibles, toutes les classes de hauteur de l'ECH entre elles : nous obtenons la table d'addition de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbb{Z}_{12}$ . L'*index vector*  $IV$  est alors le vecteur de taille 12 où le premier terme correspond au nombre de 0 obtenus après sommation, le deuxième le nombre de 1, jusqu'au nombre de 11. Le tableau ci-dessous permet de vérifier que :  $IV_{\mathcal{D}} = \langle 3, 4, 5, 2, 7, 2, 5, 4, 3, 6, 2, 6 \rangle$

|    | 0  | 2  | 4  | 5  | 7  | 9  | 11 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0  | 0  | 2  | 4  | 5  | 7  | 9  | 11 |
| 2  | 2  | 4  | 6  | 7  | 9  | 11 | 1  |
| 4  | 4  | 6  | 8  | 9  | 11 | 1  | 3  |
| 5  | 5  | 7  | 9  | 10 | 0  | 2  | 4  |
| 7  | 7  | 9  | 11 | 0  | 2  | 4  | 6  |
| 9  | 9  | 11 | 1  | 2  | 4  | 6  | 8  |
| 11 | 11 | 1  | 3  | 4  | 6  | 8  | 10 |

TABLE 3.3 – Sommation dans  $\mathbb{Z}_{12}$

### 3.3.1 Théorème des notes communes

Le théorème est démontré de manière indépendante pour les transpositions et les inversions.

#### TNC pour la transposition

**Rappel :**  $T_{\pm k}(x)$  est la transposition de la note  $x$  de  $\pm k$  demi-tons, pour obtenir la note  $x \pm k$ . On écrit «+» lorsque l'on compte dans le sens des aiguilles d'une montre, on écrit «-» sinon.

La figure 3.12 montre l'effet d'une transposition  $T_{\pm k}$ , avec  $1 \leq k \leq 6$ , sur une paire de notes séparées par  $k$  demi-tons. Pour  $k < 6$ , la transposition envoie la paire sur une nouvelle paire (composée d'une note commune avec la paire initiale), donc avec au moins un arc de cercle commun avec la paire initiale. Pour  $k = 6$ , la paire initiale forme le diamètre du cercle, la transposition n'a donc aucun effet si ce n'est d'invertir les deux notes. Ainsi, pour toute transposition  $T_{\pm k}$  ( $k \neq 6$ ) d'une paire diamétralement opposée, la distance entre les deux notes finales sera différente. Le nombre de notes communes à  $\mathcal{P}$  et  $T_{\pm k}\mathcal{P}$  est donc le nombre de notes invariantes par  $T_{\pm k}$ . Cette remarque géométrique mène directement au théorème des notes communes (TNC) pour la transposition.

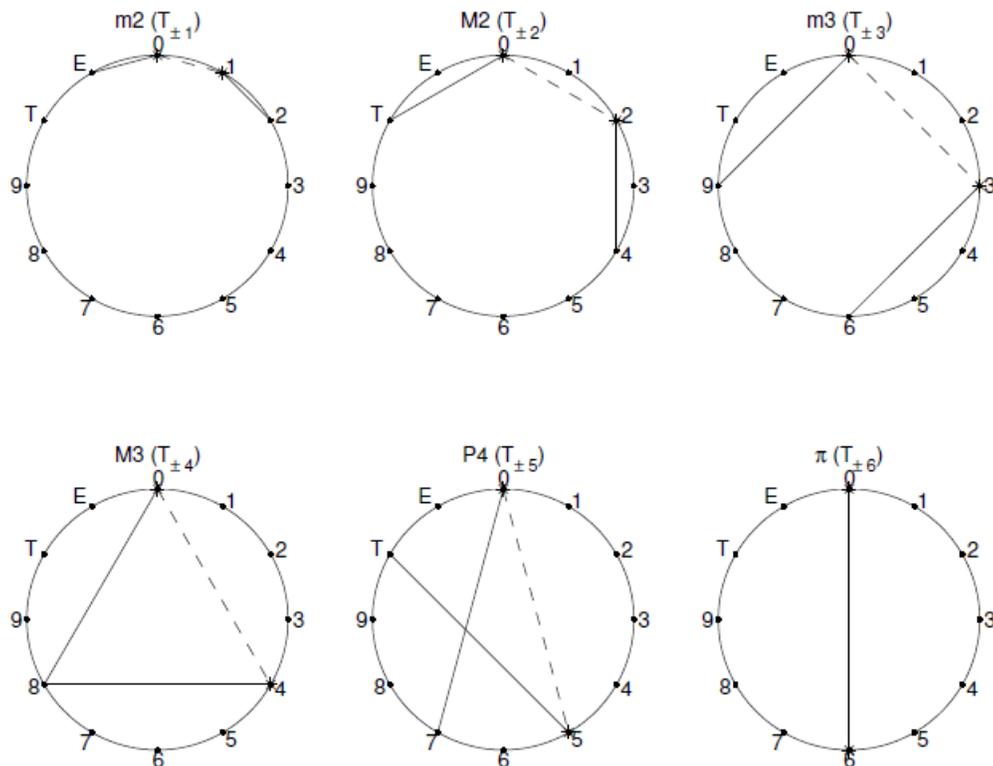


FIGURE 3.12 – Effet de la transposition sur les paires. Figure prise dans l'article de McCartin [10] avec un changement de notation : 10 écrit T et 11 écrit E

**Théorème 3.3.1** (Théorème des notes communes pour la transposition). *Si le contenu intervallique d'un ensemble  $\mathcal{X}$  est  $[n_0, n_1, n_2, \dots, n_6]$ , alors, pour  $k = 0, 1, 2, \dots, 5$ , le nombre de notes dans  $\mathcal{X}$  invariantes par  $T_{\pm k}$  est  $n_k$ . Pour  $k = 6$ , le nombre de notes invariantes par  $T_{\pm 6}$  est  $2n_6$ .*

*Démonstration.* Distinguons les deux cas :

- Pour  $k < 6$ , la rotation provoquée par  $T_{\pm k}$  laisse invariante une note pour chaque paire écartée de  $k$  demi-tons (figure 3.12) et les notes des autres paires (non écartées par  $k$  demi-tons) varient. Dès lors, puisque  $\mathcal{X}$  contient  $n_k$  paires de notes séparées par  $k$  demi-tons, le nombre de notes invariantes par  $T_{\pm k}$  est bien  $n_k$
- Pour  $k = 6$ , les seules notes invariantes par  $T_{\pm 6}$  sont les notes séparées par 6 demi-tons (c'est à dire celles diamétralement opposées) et il y en a bien  $2n_6$  (il faut deux notes pour un diamètre).

□

## TNC pour l'inversion

**Rappel :**  $T_k I(x)$  est l'inversion de la note  $x$  selon un axe autre que celui  $do-fa\#$ . Le  $k$  représente le nombre de demi-tons de la transposition entre  $do$  et la nouvelle note pivot pour l'inversion.

La figure 3.13 montre l'effet d'une inversion  $T_k I$  pour  $0 \leq k \leq 11$ . Il y a deux cas à distinguer :

- Si  $k$  est impair,  $T_k I$  préserve uniquement les paires dont la somme est  $k$  modulo 12.
- Si  $k$  est pair,  $T_k I$  préserve uniquement les paires dont la somme est  $k$  modulo 12 et celles situées aux extrémités de l'axe d'inversion.

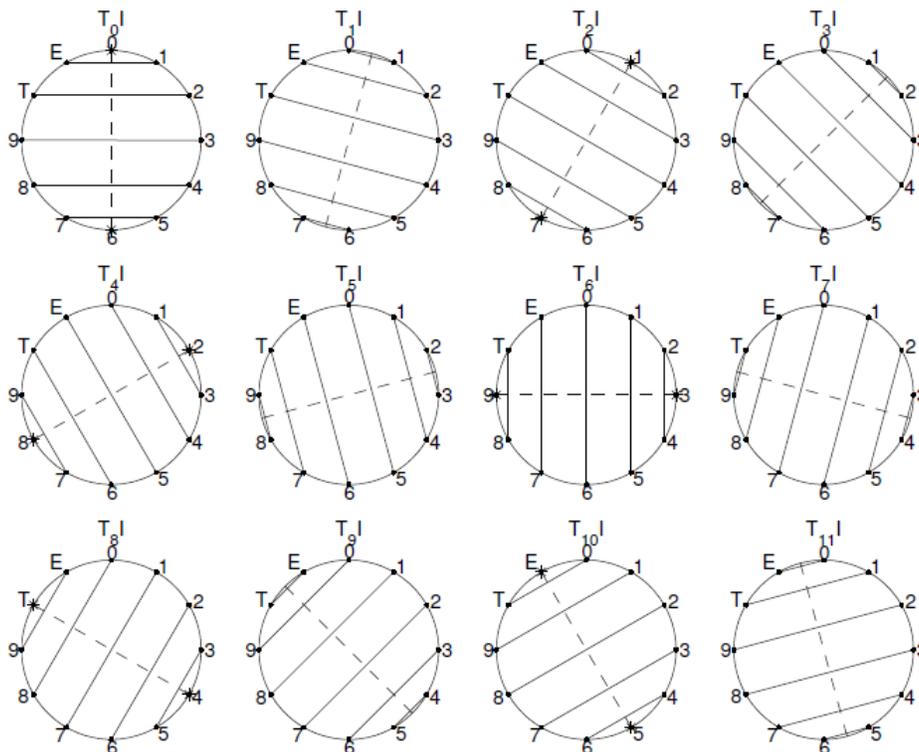


FIGURE 3.13 – Effet de l'inversion. Figure prise dans l'article de McCartin [10] avec 10 écrit T et 11 écrit E

Maintenant, si nous considérons l'*index vector*  $\langle n_0, n_1, \dots, n_{11} \rangle$ , alors chaque paire de notes distinctes dont la somme fait  $k \pmod{12}$  contribue 2 fois pour  $n_k$  tandis que chaque note qui sommée avec elle-même fait  $k$  contribue une fois à  $n_k$ . Ces remarques géométriques mènent directement au théorème des notes communes (TNC) pour l'inversion.

**Théorème 3.3.2** (Théorèmes des notes communes pour l'inversion). *Si l'index vector pour un ensemble  $\mathcal{X}$  est  $\langle n_0, n_1, \dots, n_{11} \rangle$  alors pour  $k = 0, 1, \dots, 11$ , le nombre de notes invariantes par  $T_k I$  (i.e. les notes communes à  $\mathcal{X}$  et  $T_k I(\mathcal{X})$ ) est  $n_k$ .*

*Démonstration.* Par construction,  $n_k$  coïncide avec le nombre de notes de  $\mathcal{X}$  qui, sommée avec elle-même ou avec une autre note, est égale à  $k$ . La figure 3.13 montre que ce nombre est exactement le nombre de notes communes entre  $\mathcal{X}$  et  $T_k I(\mathcal{X})$ .  $\square$

## Généralisation

La généralisation au cas  $n$  quelconque est immédiate (il suffit de remplacer 12 par  $n$  dans les énoncés et les démonstrations), c'est ce qu'on appelle *le théorème des notes communes généralisé*.

### 3.3.2 Théorème des accords complémentaires

Là encore, ce théorème est démontré géométriquement pour les transpositions puis pour les inversions. Il se base sur les résultats obtenus par le théorème des notes communes. Cependant, nous avons besoins de quelques résultats et d'observations supplémentaires avant de débiter les démonstrations.

## Préliminaires

**Lemme 3.3.1.** *Soient  $\mathcal{X}$  un sous-ensemble de notes et  $\mathcal{X}^c$  son complémentaire.*

1.  $(T_k \mathcal{X})^c = T_k(\mathcal{X}^c)$
2.  $(T_k I \mathcal{X})^c = T_k I(\mathcal{X}^c)$

*Démonstration.* Soit  $S = \mathcal{X} \cup \mathcal{X}^c$ .

1. Comme  $S = T_k \mathcal{X} \cup (T_k \mathcal{X})^c$ , alors  $T_k \mathcal{X} \cap (T_k \mathcal{X})^c = \emptyset$   
De même,  $S = T_k \mathcal{X} \cup T_k(\mathcal{X}^c)$  implique que  $T_k \mathcal{X} \cap T_k(\mathcal{X}^c) = \emptyset$   
D'où,  $(T_k \mathcal{X})^c = T_k(\mathcal{X}^c)$
2. Preuve identique à 1. en remplaçant  $T_k$  par  $T_k I$

$\square$

Reprenons maintenant l'exemple des gammes diatonique et pentatonique, représentées ci-après sur la même horloge.

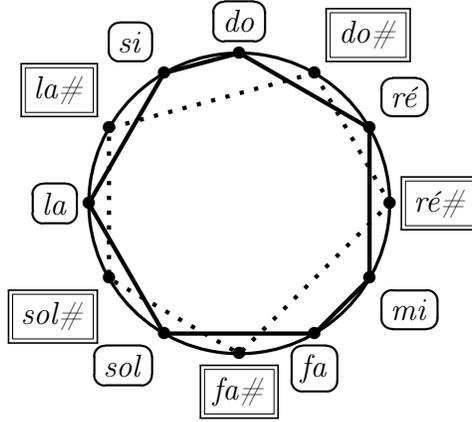


FIGURE 3.14 – Gammes diatonique et pentatonique : deux gammes complémentaires

Rappelons que  $IC_{\mathcal{D}} = [7, 2, 5, 4, 3, 6, 1]$  et  $IC_{\mathcal{P}} = [5, 0, 3, 2, 1, 4, 0]$ . En soustrayant le premier par le second, on obtient le vecteur  $V = [2, 2, 2, 2, 2, 2, 1]$ . Soit  $m = 7$  la cardinalité du premier vecteur (donc  $m^c = 12 - m = 12 - 7 = 5$  pour le complémentaire), alors on obtient leur différence  $d = m - m^c = 2$ . Observons alors que le vecteur  $V$  est donné par  $V = [d, d, d, d, d, d, d/2]$ . Ainsi,  $IC_{\mathcal{P}}$  peut être obtenu en soustrayant  $d$  des six premiers termes et  $d/2$  du dernier terme de  $IC_{\mathcal{D}}$ .

Ce résultat n'est pas une coïncidence des gammes diatonique et pentatonique mais bien un résultat général : le théorème des accords complémentaires (TAC) pour la transposition.

Intéressons-nous maintenant aux *index vector*. On a  $IV_{\mathcal{D}} = \langle 3, 4, 5, 2, 7, 2, 5, 4, 3, 6, 2, 6 \rangle$  et de même  $IV_{\mathcal{P}} = \langle 1, 2, 3, 0, 5, 0, 3, 2, 1, 4, 0, 4 \rangle$ . Avec les mêmes définitions de  $m$  et  $d$ , on remarque que la différence des deux vecteurs est  $\langle d, d \rangle$ . Ainsi,  $IV_{\mathcal{P}}$  peut être obtenu en soustrayant  $d$  de tous les termes de  $IV_{\mathcal{D}}$ .

Ce résultat n'est pas non plus une coïncidence des gammes diatonique et pentatonique mais bien un résultat général : le théorème des accords complémentaires (TAC) pour l'inversion.

### Théorème des accords complémentaires pour la transposition

**Théorème 3.3.3** (Théorème des accords complémentaires pour la transposition). *Soit  $\mathcal{X}$  un ensemble de classes de hauteur de cardinalité  $m$  avec son contenu intervallique  $IC_{\mathcal{X}} = [n_0, n_1, n_2, \dots, n_6]$ , alors  $\mathcal{X}^c$  a pour cardinalité  $12 - m$  et pour contenu intervallique  $IC_{\mathcal{X}^c} = [n_0 - d, n_1 - d, n_2 - d, \dots, n_6 - d/2]$ , où  $d = 2m - 12$  est la différence des deux cardinalités.*

*Démonstration.* Différencions les cas pour pouvoir utiliser le TNC

- Pour  $k < 6$ , le TNC pour la transposition implique que  $\mathcal{X}$  et  $T_{\pm k}\mathcal{X}$  partagent  $n_k$  notes. Puisque la cardinalité de  $\mathcal{X}$  est  $m$ , cela implique que  $\mathcal{X}$  et  $(T_{\pm k}\mathcal{X})^c$  (qui est

égal à  $T_{\pm k}(\mathcal{X}^c)$ , d'après le lemme 3.3.1) ont  $m - n_k$  notes en commun. De même, la cardinalité de  $\mathcal{X}^c$  étant  $12 - m$ , on a que  $\mathcal{X}^c$  et  $T_{\pm k}(\mathcal{X}^c)$  ont  $(12 - m) - (m - n_k) = n_k - d$  notes communes

- Pour  $k = 6$ ,  $\mathcal{X}$  et  $T_{\pm k}\mathcal{X}$  partagent  $2n_k$  notes, donc  $\mathcal{X}$  et  $(T_{\pm k}\mathcal{X})^c = T_{\pm k}(\mathcal{X}^c)$  partagent  $m - 2n_k$  notes, d'où  $\mathcal{X}^c$  et  $T_{\pm k}(\mathcal{X}^c)$  ont  $(12 - m) - (m - 2n_k) = 2(n_k - d/2)$  notes communes
- Le TNC pour la transposition implique que le contenu intervallique de  $\mathcal{X}^c$  est  $[n_0 - d, n_1 - d, n_2 - d, \dots, n_6 - d/2]$

□

### Théorème des accords complémentaires pour l'inversion

**Théorème 3.3.4** (Théorème des accords complémentaires pour l'inversion). *Soit  $\mathcal{X}$  un ensemble de classes de hauteur de cardinalité  $m$  avec son index vector  $IV_{\mathcal{X}} = \langle n_0, n_1, \dots, n_{11} \rangle$ , alors  $\mathcal{X}^c$  a pour cardinalité  $12 - m$  et pour index vector  $IV_{\mathcal{X}^c} = \langle n_0 - d, n_1 - d, \dots, n_{11} - d \rangle$ , où  $d = 2m - 12$  est la différence des deux cardinalités.*

*Démonstration.* Pour  $k = 0, 1, \dots, 11$ , le TNC pour l'inversion implique que  $\mathcal{X}$  et  $T_k I \mathcal{X}$  partagent  $n_k$  notes. Comme la cardinalité de  $\mathcal{X}$  est  $m$ ,  $\mathcal{X}$  et  $(T_k I \mathcal{X})^c = T_k I(\mathcal{X}^c)$  (lemme 3.3.1) ont  $m - n_k$  notes communes. De même la cardinalité de  $\mathcal{X}^c$  étant  $12 - m$ ,  $\mathcal{X}^c$  et  $T_k I(\mathcal{X}^c)$  ont  $(12 - m) - (m - n_k) = n_k - d$  notes en commun. Le TNC pour l'inversion donne immédiatement le fait que  $IV_{\mathcal{X}^c} = \langle n_0 - d, n_1 - d, \dots, n_{11} - d \rangle$ . □

### Généralisation

Comme précédemment, la généralisation au cas  $n$  quelconque est immédiate (il suffit de remplacer 12 par  $n$  dans les énoncés et les démonstrations), c'est ce qu'on appelle *le théorème des accords complémentaires généralisé*.

### 3.3.3 Démonstration du théorème de l'hexacorde

En prenant  $m = 6$  dans les théorèmes ci-dessus, on a  $m^c = 12 - 6 = 6 = m$  et donc  $d = m - m^c = m - m = 0$ , ce qui implique que les deux contenus intervalliques (transposition) et les deux *index vector* (inversion) sont les mêmes pour deux hexacordes complémentaires.

Bien évidemment, puisque les théorèmes nécessaires à cette démonstration (TNC et TAC) se généralisent au cas  $n$  quelconque, le théorème de l'hexacorde peut également se généraliser pour un  $n$  quelconque pour la transposition et l'inversion : *le théorème de l'hexacorde généralisé*.

## 3.4 Conclusion

Bien que chaque démonstration soit différente, quelques similitudes existent. Fox, Chemillier et Blau utilisent les permutations, alors que Lewin et McCartin basent leurs preuves sur les *notes communes* entre l'hexacorde  $\mathcal{H}$  et l'hexacorde  $T_k(\mathcal{H})$  obtenu après transposition de  $k$  demi-tons.

Deux types d'approches ressortent principalement. Nous avons celles où l'on démontre le théorème de l'hexacorde pour les hexacordes (ECH de cardinalité  $n/2 = 12/2 = 6$ ) et que l'on généralise ensuite au cas  $n$  quelconque ; c'est le cas pour Blau, Amiot et McCartin. A l'inverse, nous avons celles où la démonstration est très générale et abstraite, le théorème de l'hexacorde en est alors un cas particulier ; c'est le cas notamment de Fox, Chemillier et Lewin.

Remarquons aussi que la formulation *théorème de l'hexacorde généralisé* est très générale... Elle est en effet très souvent utilisée, peu importe la forme de la généralisation choisie : cas de deux ECH complémentaires de cardinalité quelconque (autre que des hexacordes), au cas  $n$  quelconque (différent de 12), cas de deux ECH avec leur ECH complémentaire respectif (notamment chez Lewin et Amiot),...

En outre, dans les différentes approches présentées dans ce document, c'est parfois les définitions des concepts et leurs propriétés qui sont longues à introduire (en excluant les notions de *Set Theory* utilisées et partagées par tous les mathématiciens), alors que parfois c'est la démonstration en elle-même. Par exemple, la démonstration de Lewin est longue et compliquée en utilisant un résultat plus général, tandis que la démonstration du théorème de l'hexacorde par Amiot est assez courte mais nécessite, en amont, l'introduction des définitions et des propriétés des transformées de Fourier discrètes, notamment dans le lien entre la musique et les mathématiques.

Le nombre de démonstrations du théorème de l'hexacorde est important, ce travail n'est pas exhaustif, mais il aura permis néanmoins de pouvoir appréhender la démonstration du théorème selon plusieurs approches mathématiques.

## Partie 4

---

### Développements

---

Cette partie est consacrée à deux développements du théorème de l'hexacorde. Dans un premier temps, nous nous intéresserons à l'homométrie et à certaines de ses propriétés utiles à notre approche. Nous verrons qu'en fait l'homométrie est une généralisation des notions nécessaires au théorème de l'hexacorde dans le cas continu. Le second développement est une ouverture qui porte sur les canons rythmiques.

#### 4.1 Homométrie et Z-relation

Avant de définir les notions d'homométrie et *Z-relation*, et afin de démontrer ensuite le théorème de l'hexacorde généralisé, commençons par introduire des concepts mathématiques plus généraux que ceux de la partie 2. Cette partie se base sur l'article [7] et utilise quelques définitions introduites dans la partie 3 (notamment *GIS*).

##### 4.1.1 Notions mathématiques essentielles

Définissons trois notions générales d'algèbre et de topologie nécessaires aux futurs résultats.

**Definition 4.1.1** (Groupe topologique). *Un groupe topologique  $(G, +)$  est un groupe muni d'une topologie pour laquelle les applications  $(x, y) \mapsto x + y$  (loi de composition interne) et  $x \mapsto -x$  (loi inverse) sont continues.*

**Definition 4.1.2** (Groupe localement compact). *Un groupe est localement compact si c'est un groupe topologique dont l'espace topologique sous-jacent est localement compact (c'est-à-dire qu'il admet des voisinages compacts en tous ces points).*

**Definition 4.1.3** (Mesure de Haar). Soit  $(G, +)$  un groupe localement compact. Soient  $B$  une partie borélienne de  $G$  et  $g$  un élément de  $G$ . La mesure de Haar  $\mu$  est alors définie par :

$$\mu(g + B) = \mu(B)$$

Autrement dit,  $\mu$  est invariante par translation par  $g \in G$ .

Dans la suite de cette partie,  $(G, +)$  désigne un groupe localement compact et  $\mu$  la mesure de Haar associée. Ce groupe est en fait le groupe d'intervalles qui compose un *GIS* défini par le triplet  $(S, G, int)$ . Les notions de topologie sur le *GIS* vont nous permettre de mesurer - même de manière continue - les éléments du *GIS* : il s'agit bien d'une généralisation.

## 4.1.2 Définitions et propriétés

Définissons maintenant des notions introduites par la *Set Theory* mais de manière plus générale, puisque nous élargissons les définitions et propriétés au cas continu.

**Definition 4.1.4** (Contenu intervallique). Soit  $A$  une partie de mesure finie de  $G$ . On définit alors le contenu intervallique  $IC$  de  $A$  par la fonction suivante :

$$IC_A : G \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ g \mapsto \mu(gA \cap A)$$

où  $gA \cap A = \{a \in A, \exists ! a' \in A, int(a, a') = g\}$

**Notation :** On note  $\Sigma_C(G, K)$  l'algèbre des fonctions de  $G$  dans  $K$  mesurables presque partout finies à support compact, munie du produit de convolution.  $K$  est un des corps  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Definition 4.1.5** (Fonction de Patterson). Soit  $E$  une fonction de  $\Sigma_C(G, K)$ , on définit la fonction de Patterson de  $E$  par :

$$d^2(E)(x) = (E * E^*)(x) = \int E(y) \overline{E(y-x)} d\mu(y)$$

où  $E^*(x) = \overline{E(-x)} = I(E)$ .

Nous pouvons alors définir plus précisément les notions d'homométrie et de *Z-relation*.

**Definition 4.1.6** (Z-relation et homométrie). Les deux notions sont semblables :

1. On dit que des parties de mesure finie de  $G$  sont en *Z-relation* lorsque qu'elles ont le même contenu intervallique.
2. On dit que des fonctions mesurables de  $G$  dans  $K$  sont homométriques lorsqu'elles ont la même fonction de Patterson.

**Remarque 4.1.1.** *Évidemment, des parties de mesure finie de  $G$  sont en  $Z$ -relation ssi leur fonction caractéristique sont homométriques.*

De manière analogue aux résultats de la partie 2, la fonction de Patterson est invariante par transposition et inversion.

**Théorème 4.1.1** (Invariance par transposition et inversion). *Soient  $E \in \Sigma_C(G, K)$  et  $g \in G$ .*

1.  $d^2(T_g(E)) = d^2(E)$
2.  $d^2(I(E)) = d^2(E)$

*Les ensembles  $E$  et  $T_g(E)$  (ou  $I(E)$ ) sont donc en  $Z$ -relation et les fonctions  $Id$  et  $T_g$  (ou  $I$ ) sont homométriques.*

*Démonstration.* Les preuves découlent de résultats précédents.

1. Soit  $x \in G$ ,

$$\begin{aligned} d^2(T_g(E))(x) &= \int E(y+g) \overline{E(y-x+g)} d\mu(y) \\ &= \int E(z) \overline{E(z-x)} d\mu(z-g) && \text{en posant } y=z-g \\ &= \int E(z) \overline{E(z-x)} d\mu(z) && \text{d'après l'invariance de } \mu \end{aligned}$$

2.  $d^2(I(E)) = I(E) * I(I(E)) = I(E) * E = E * I(E) = d^2(E)$

□

Comme le montre l'exemple de la partie 1, deux ensembles peuvent être en  $Z$ -relation alors que l'un n'est pas forcément l'image de l'autre par transposition ou inversion. On définit alors :

**Definition 4.1.7** (Non trivialement homométriques / en  $Z$ -relation). *On dit que deux fonctions  $E_1$  et  $E_2$  sont non trivialement homométriques lorsque qu'elles sont homométriques mais que l'une n'est l'image de l'autre ni par transposition, ni par inversion. On définit de manière analogue deux ensembles en  $Z$ -relation non triviale.*

Par exemple, dans  $\mathbb{Z}_8$ ,  $A_1 = \{1, 2, 3, 6\}$  et  $A_2 = \{0, 1, 3, 4\}$  sont non trivialement en  $Z$ -relation. C'est le plus simple exemple, il n'existe pas d'ensembles non trivialement en  $Z$ -relation dans  $\mathbb{Z}_n$  pour  $n \leq 7$ .

### 4.1.3 Généralisation du théorème de l'hexacorde

De manière analogue à la définition de  $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$ , on définit :

**Definition 4.1.8.** Soit  $E$  une fonction de  $\Sigma_C(G, G) := \Sigma_C(G)$ , alors :

$$\begin{aligned} E^c : \Sigma_C(G) &\rightarrow \Sigma_C(G) \\ E &\mapsto 1 - E \end{aligned}$$

**Lemme 4.1.1.** Pour tout  $E$  dans  $\Sigma_C(G)$ ,

$$d^2(E^c) = \mu(G) - 2 \operatorname{Re} \int E d\mu + d^2(E)$$

*Démonstration.* Soit  $E \in \Sigma_C(G)$ ,  $d^2(E^c) = (1 - E) * (I(1 - E)) = (1 - E) * (1 - I(E)) = 1 * 1 - 1 * I(E) - E * 1 - E * I(E) = 1 * 1 - 2 \operatorname{Re} \int E d\mu + E * I(E) = \mu(G) - 2 \operatorname{Re} \int E d\mu + d^2(E)$   $\square$

Nous pouvons alors énoncer :

**Théorème 4.1.2** (Théorème de l'hexacorde généralisé). Soit  $E$  une fonction dans  $\Sigma_C(G)$ . Alors  $E$  et  $E^c$  sont homométriques si et seulement si

$$\frac{\mu(G)}{2} = \operatorname{Re} \int E d\mu$$

*Démonstration.*  $E$  et  $E^c$  sont homométriques si et seulement si elles ont la même fonction de Paterson :  $d^2(E) = d^2(E^c)$ . Le lemme 4.1.1 nous donne alors immédiatement le résultat.  $\square$

## 4.2 Une ouverture : le canon rythmique

De prime abord, les notes n'ont pas forcément de lien avec les rythmes en musique : les premières permettent de donner le ton, de choisir la tessiture ou la hauteur ; alors que les seconds sont subordonnés au tempo et permettent de donner la cadence. Cependant, il nous paraît intéressant d'aborder cette notion en raison des similarités que l'on perçoit entre elle et la théorie étudiée dans ce document. Nous ne faisons cependant qu'introduire arbitrairement certaines analogies<sup>1</sup> entre les deux concepts.

Le *canon rythmique* est un concept formalisé à la fin du XXe siècle par Vuza et Vieru notamment, mais utilisé dès le début du siècle par Olivier Messian (1908-1992).

---

1. Merci à Paul LASCABETTES (stagiaire IRMA) de m'avoir prêté son mémoire *Canons rythmiques*, Université Paris Diderot, 2017

Un canon rythmique est la **répétition d'une même structure rythmique, ou de ses transformations, dans le temps.**

La première analogie avec les notes est la définition suivante qui introduit une notion d'équivalence :

**Definition 4.2.1** (Canon rythmique de période  $n$ ). Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A$  et  $B$  deux parties finies de  $\mathbb{N}$ .

On dit que  $(A, B)$  est un canon rythmique de période  $n$  si :

$$A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Dans ce cas, on dit  $A$  est le **motif du canon** (le nombre de voix différentes) et  $B$  la **séquence des entrées** (les temps où chaque voix commence à jouer). Ainsi, sur une mesure à  $n$  temps, la condition de somme directe implique que pour tout temps, il doit y avoir une seule et unique note. On pourra dire que  $A$  pave  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  avec  $B$ .

Une deuxième analogie porte sur la notion de translation/transposition.

**Definition 4.2.2** (Translation). On dit que le canon rythmique  $A$  est translaté de  $k$  temps lorsque  $A$  devient  $A + k$ .

Une troisième analogie est la représentation des canons rythmiques par les transformées de Fourier discrètes, et notamment l'utilisation du produit de convolution. Nous avons en particulier :

**Proposition 4.2.1.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et soient  $A$  et  $B$  deux parties finies de  $\mathbb{N}$ , alors :

$$(A, B) \text{ est un canon rythmique de période } n \text{ ssi } \mathbf{1}_A * \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$$

$$\text{ssi } \widehat{\mathbf{1}}_A \times \widehat{\mathbf{1}}_B = n \widehat{\mathbf{1}}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$$

Une quatrième et dernière analogie énoncée ici est une notion de congruence modulo  $p$  :

**Definition 4.2.3** (Canon rythmique modulo  $p$ ). Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p$  un nombre premier et  $A$  et  $B$  deux parties finies de  $\mathbb{N}$ .

On dit que  $(A, B)$  est un canon rythmique modulo  $p$  de période  $n$  si :

$$A \oplus B = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ mod } p$$

Par conséquent, sur une mesure à  $n$  temps, il doit y avoir une seule et unique note modulo  $p$  pour tout temps. On pourra dire que  $A$  pave  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  modulo  $p$  avec  $B$ .

Toutes ces analogies, et d'autres résultats non énoncés ici, permettent d'obtenir le théorème suivant qui lie l'homométrie et le pavage des canons rythmiques.

**Théorème 4.2.1** (Lien entre homométrie et canons rythmiques). *Soient  $A$ ,  $A'$  et  $B$  des parties finies de  $\mathbb{N}$ .*

$$\text{Si } \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = A \oplus B \\ A' \text{ est homométrique à } A \end{cases}, \text{ alors } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = A' \oplus B$$

En fait, les recherches ont montré que l'on pouvait faire une analogie entre la théorie modale (c'est-à-dire celle des classes de hauteur présentées dans ce document) et l'approche rythmique. D'après Vuza, le lien entre modèle mathématique du rythme et théorie modale « est fourni par l'existence des bijections canoniques entre certains sous-ensembles de rythmes (respectivement classes rythmiques) et l'ensemble des modes (respectivement classes modales) dans un système tempéré à  $n$  degrés ». Il utilise la notion *d'ensemble principal homogène* du groupe Bourbaki pour établir l'analogie (considérée comme un isomorphisme parfois). Par exemple, le modèle algébrique de Vuza et le Système d'Intervalles Généralisés (GIS) de David Lewin ont des similarités intéressantes.

Nous ne développerons pas plus la notion de canons rythmiques dans ce document. Néanmoins, le lecteur intéressé pourra commencer, par exemple, par cet article [9] afin d'obtenir plus de précisions et une bibliographie plus fournie sur ce sujet.

---

## *Annexes*

---

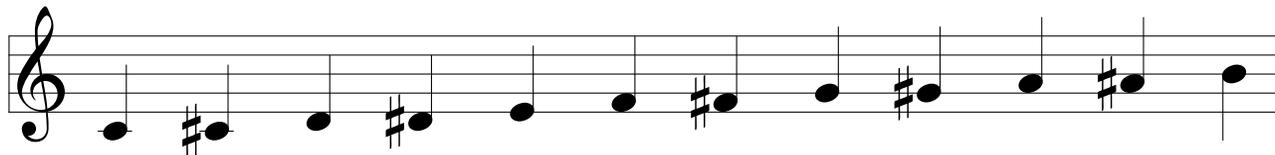
### Annexe 1 : Liste des intervalles en musique

| Composition de l'intervalle | Nom de l'intervalle | Représentation numérique   |
|-----------------------------|---------------------|----------------------------|
| 0 demi-ton                  | unisson             | 0                          |
| 1 demi-ton                  | seconde mineure     | 1                          |
| 2 demi-tons = 1 ton         | seconde majeure     | 2                          |
| 3 demi-tons                 | tierce mineure      | 3                          |
| 4 demi-tons = 2 tons        | tierce majeure      | 4                          |
| 5 demi-tons                 | quarte juste        | 5                          |
| 6 demi-tons = 3 tons        | quinte diminuée     | 6                          |
| 7 demi-tons                 | quinte juste        | 7                          |
| 8 demi-tons = 4 tons        | sixte mineure       | 8                          |
| 9 demi-tons                 | sixte majeure       | 9                          |
| 10 demi-tons = 5 tons       | septième mineure    | 10                         |
| 11 demi-tons                | septième majeure    | 11                         |
| 12 demi-tons = 6 tons       | octave              | 0 (car $\mathbb{Z}_{12}$ ) |

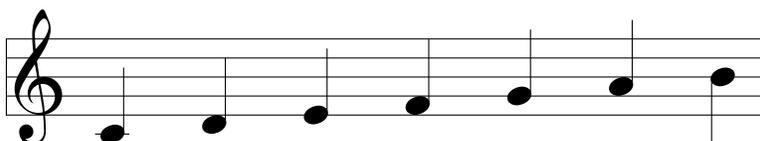
TABLE 4.1 – Listes des intervalles

## Annexe 2 : Les différentes gammes

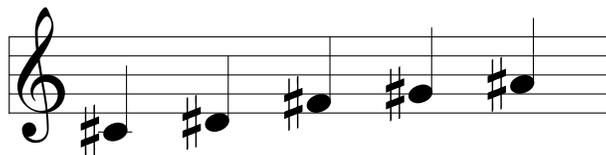
En musique, l'**échelle chromatique** est une échelle musicale composée de douze degrés séparés les uns des autres par un demi-ton, c'est à dire toutes les touches (blanches et noires) d'un piano : *do, do#, ré, ré#, mi, fa, fa#, sol, sol#, la, la#, si* représentées ci-dessous.



L'**échelle diatonique** est quant à elle une échelle musicale composée de sept degrés composés de cinq tons et deux demi-tons, c'est à dire les touches blanches d'un piano : *do, ré, mi, fa, sol, la, si* représentées ci-dessous.



Enfin, l'**échelle pentatonique** est une échelle musicale composée de cinq degrés composés d'aucun demi-ton, c'est à dire les touches noires d'un piano : *do#, ré#, fa#, sol#, la#* représentées ci-dessous.



---

## *Bibliographie*

---

- [1] E. AMIOT. *Une preuve élégante du théorème de Babbitt par transformée de Fourier discrète*. Quadrature, 2006.
- [2] E. AMIOT. *Music Through Fourier Space*. Springer, 2016. Chap. 1.
- [3] M. ANDREATTA. *Une introduction à la set-theory*. 2003.
- [4] S. BLAU. *The Hexachordal Theorem : A Mathematical Look at Interval Relations in Twelve-Tone Composition*. Mathematics Magazine (Vol. 72), 1999, p. 310–313.
- [5] M. CHEMILLIER. *Monoïde libre et musique, première partie : les musiciens ont-ils besoin des mathématiques ?* Informatique théorique et applications (Vol. 21), 1987, p. 343–347.
- [6] R. H. FOX. *Solution by R. H. Fox*. Canadian Mathematical Bulletin (Vol. 7), 1966, p. 622–624.
- [7] J. MANDEREAU, D. GHISI, E. AMIOT, M. ANDREATTA, C. AGON. *Z-relation and homometry in musical distributions*. Journal of Mathematics and Music (Vol. 5), 2011, p. 83–98.
- [8] D. LEWIN. *Generalized Musical Intervals and Transformations*. Oxford University Press, 1987. Chap. 2–3–5–6.
- [9] M. ANDREATTA, A. AGON, M. CHEMILLIER. *OpenMusic et le problème de la construction de canons musicaux rythmiques*. JIM, 1999, p. 179–186.
- [10] B. MCCARTIN. *Geometric proofs of the commons tones theorems*. International Mathematical Forum (Vol. 10), 2015, p. 289–299.
- [11] B. MCCARTIN. *Geometric proofs of the complementary chords theorems*. International Mathematical Forum (Vol. 11), 2016, p. 27–39.
- [12] J. RAHN. *Basic Atonal Theory*. Longman, 1980. Chap. 2–3.